Collège Sciences et Technologie

UF Mathématiques et Intéractions

Master 1 MAS - ROAD /OPTIM

Travail d'étude et de recherche

Séparation de contraintes de cycles pour le problème du sous-graphe triangulé maximum

MOULAIHCENE Walid
ATTY El Mehdi

Tuteur : Mr. PESNEAU Pierre

2022-2023

Table des matières

1 Introduction

Les problèmes d'optimisation combinatoire liés aux graphes sont souvent complexes et difficiles à résoudre. Cependant, dans certains cas, la complexité peut être réduite en travaillant avec des graphes particuliers, tels que les graphes triangulés. Les graphes triangulés sont des graphes qui ne contiennent pas de cycle de taille $k \geqslant 4$ sans corde, c'est-à-dire une arête reliant deux sommets non-consécutifs du cycle. Cette caractérisation des graphes triangulés est bien connue et peut être renforcée en affirmant que tout cycle de taille $k \geqslant 4$ dans un graphe triangulé doit contenir au moins $k - 3$ cordes. La recherche d'un sous-graphe triangulé maximum en nombre d'arêtes peut être utile pour obtenir de bonnes relaxations pour les problèmes d'optimisation combinatoire basés sur les graphes, tels que le problème de stable maximum, de clique maximum ou du sac-à-dos avec conflit.

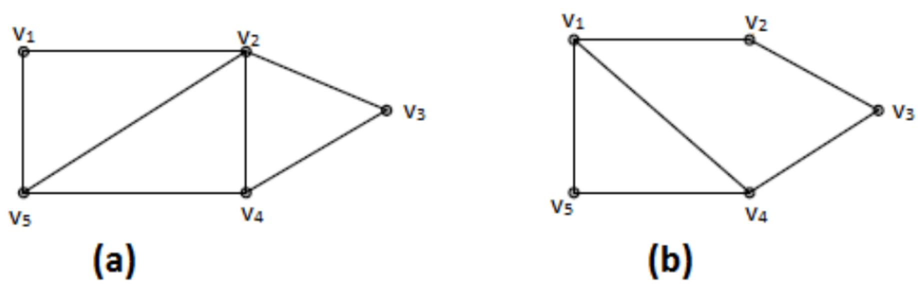

FIGURE 1 – -a- Le graphe triangulé -b- Le graphe n'est pas triangulé car il contient un cycle de longueur 4.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Associons à chaque arête $(i, j) \in E$ une variable binaire x_{ij} prenant la valeur 1 si l'arête appartient au sous-graphe triangulé, et la valeur 0 sinon. On note par C_4 l'ensemble des cycles $C \subseteq E$ de G de taille $\geqslant 4$. Soit C est un cycle de C_4. On note par $\theta(C)$ l'ensemble des arêtes de E formant une corde du cycle C.Soit F est un sous-ensemble d'arêtes. On pose $x(F) = \sum_{\{i,j\} \in F} x_{ij}$.
Le problème du sous-graphe triangulé maximum peut être formulé de la manière suivante :

$$\text{maximiser} \quad \sum_{\{i,j\} \in F} x_{ij} \tag{1}$$

$$\text{s.c.} \quad x(\theta(C)) \geqslant |C| - 3 - (|C| - 3)(|C| - x(C)) \qquad \forall C \in V \tag{2}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall \{i, j\} \in F \tag{3}$$

Les contraintes de cycle (2) imposent que pour tout cycle $C \in C_4$ dans le graphe qui ne possède pas au moins $|C| - 3$ de cordes, la solution optimale ne peut pas inclure ce cycle. Le nombre de ces contraintes peut croître exponentiellement avec le nombre de sommets du graphe, ce qui rend impossible la résolution directe de la formulation en incluant toutes ces contraintes. Pour résoudre le problème malgré tout, il est nécessaire de générer dynamiquement les contraintes de cycle au fur et à mesure de la résolution en utilisant un problème de séparation.

1.1 Décisions et objectif

L'objectif est de trouver un cycle C^* qui minimise $\bar{x}(\theta(C)) + (|C| - 3)(|C| - \bar{x}(C)) - |C|$ Si la valeur pour un cycle C^* est $\geqslant 3$ alors toutes les containtes sont satisfaites sinon C^* est un cycle pour lequel la containte est violée. Pour ce faire, on commence par résoudre un problème de circuit supérieur 4 sommets et de coût minimum. Avec comme données t_{ij} est le coût d'arc (i, j) $\forall \{i, j\} \in F$.

2 Modelisation

2.1 Modèle de problème de circuit supérieur 4 sommets et de coût minimum

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si l'arc } (i,j) \in C_4 \ \forall \{i,j\} \in F \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{Si le sommet } i \in C_4 \ \forall i \in V \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$v_i = \begin{cases} 1 & \text{Si le sommet } i \text{ est le point de départ de } C_4 \forall i \in C_4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

u_i est la position de sommet $i \in C_4$

$$\text{minimiser} \sum_{i \in V} \sum_{j \in V, j \neq i} t_{ij} x_{ij} \tag{4}$$

$$\text{s.c.} \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} \geqslant 4 \tag{5}$$

$$\sum_{i \in V} v_i = 1 \tag{6}$$

$$\sum_{j:(i,j) \in E} x_{ij} = y_i \qquad \forall i \in V \tag{7}$$

$$\sum_{j:(i,j) \in E} x_{ji} = y_i \qquad \forall i \in V \tag{8}$$

$$u_i + v_i = 1 \qquad \forall i \in V \tag{9}$$

$$u_j \geqslant 1 \qquad \forall j \in V, j \neq i \tag{10}$$

$$u_j \leqslant (|V| - 1) \qquad \forall j \in V, j \neq i \tag{11}$$

$$u_j \geqslant u_i + 1 - (|V| - 1)(1 - x_{ij}) + |V| v_i \qquad \forall i, j \in V, (i,j) \in E \tag{12}$$

La fonction objectif (4) :minimiser le coût total du circuit,les contraintes (5) garantissent que le circuit doit être égal ou supérieur à 4 sommets, les contraintes (6) assurent que le circuit a un seul point de départ, les contraintes (7) et (8) assurent qu'il y a un seul arc sortant et entrant de chaque sommet de circuit, Les contraintes (9) garantissent que si le sommet i est le point de départ du circuit alors ce dernier est à la position 0, Les contraintes (10) et (11) garantissent que la position du sommet j qui n'est pas le point du ciruit est entre 1 et $|V| - 1$ où $|V|$ est le nombre de sommet du ciruit, enfin les contraintes (12) assurent que la position de sommet j du circuit et supérieur a la position du sommet i du circuit pour chaque arc (i, j) du ciruit .

3 Le travail restant à faire

Implémentation du model sur Python , Heuristique et analyse des resultats.