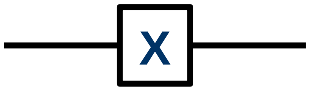
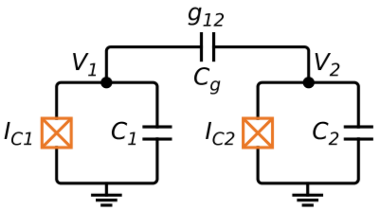
QH5 - Qubits supraconducteurs II

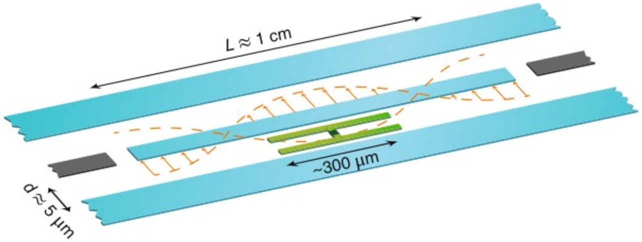
1. Manipuler un qubit : les portes X, Y et Z



2. Couplage de 2 qubits



3. Lecture d’un Qubit avec une ca

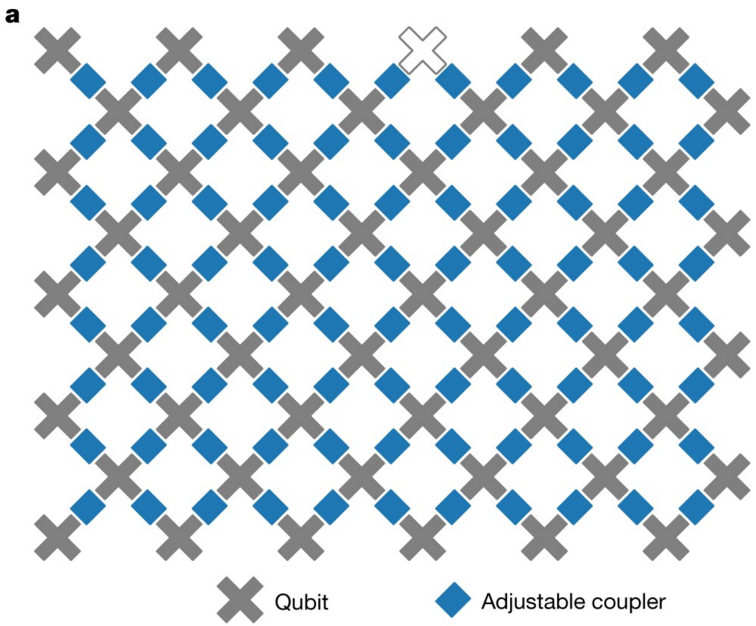


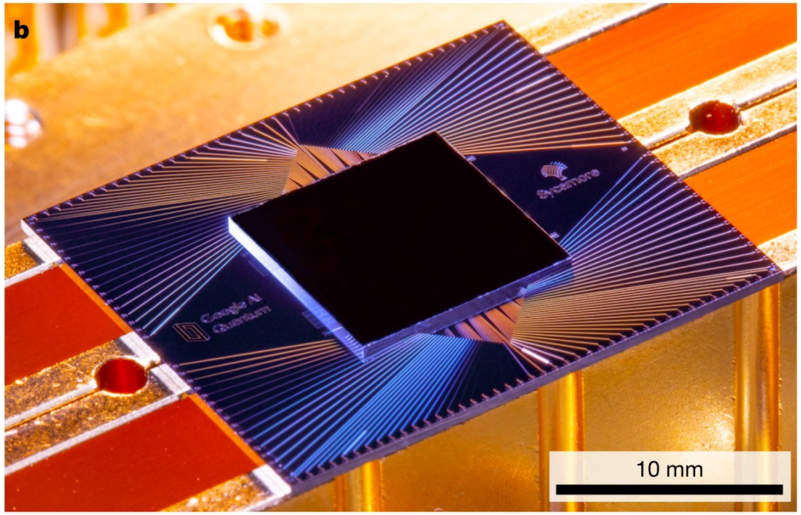
jean-damien.pillet@polytechnique.edu

Architecture d’un processeur quantique

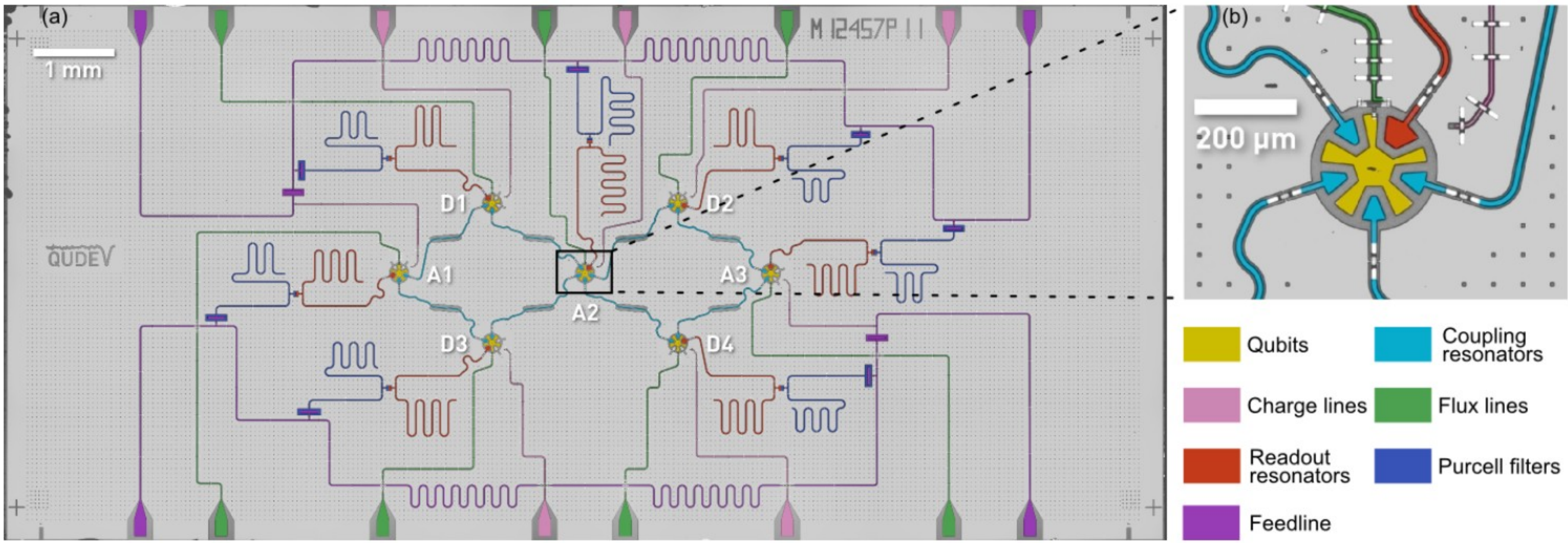
Sycamore : Processeur de Google

54 qubits (1 non-fonctionnel)
Fréquences ajustables
86 couplages ajustables (proches voisins)
Portes à 1 qubit
Portes à 2 qubits
Portes simultanées sur tout le réseau





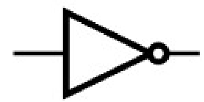
Architecture d’un processeur quantique



Andersen, C.K., Remm, A., Lazar, S. *et al.* Repeated quantum error detection in a surface code. *Nat. Phys.* **16,** 875–880 (2020)

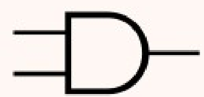
Portes classiques (1 et 2 bits)

NOT The output is 1 when the input is 0 and 0 when the input is 1.



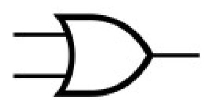
Input	Output
0	1
1	0

AND The output is 1 only when both inputs are 1, otherwise the output is 0.



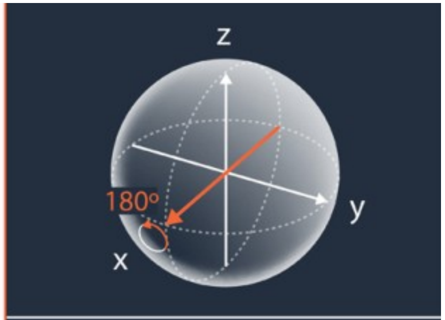
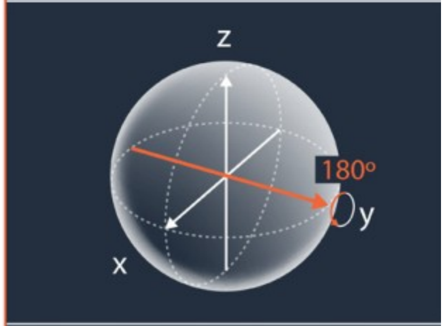
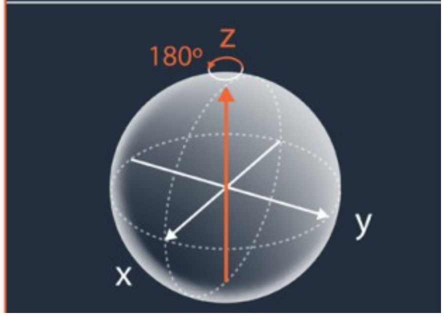
Input		Output
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR The output is 0 only when both inputs are 0, otherwise the output is 1.



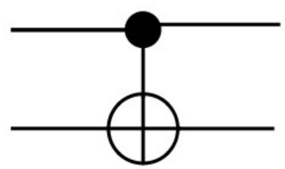
Input		Output
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Portes à 1 qubit

X gate: rotates the qubit state by π radians (180°) about the x-axis.	─[X]─	$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	Input / Output $\lvert 0\rangle$ → $\lvert 1\rangle$ $\lvert 1\rangle$ → $\lvert 0\rangle$	
Y gate: rotates the qubit state by π radians (180°) about the y-axis.	─[Y]─	$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$	Input / Output $\lvert 0\rangle$ → $i\lvert 1\rangle$ $\lvert 1\rangle$ → $-i\lvert 0\rangle$	
Z gate: rotates the qubit state by π radians (180°) about the z-axis.	─[Z]─	$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	Input / Output $\lvert 0\rangle$ → $\lvert 0\rangle$ $\lvert 1\rangle$ → $-\lvert 1\rangle$	

Portes à 2 qubits

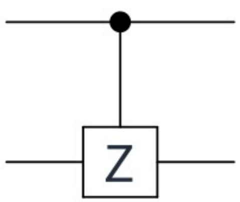
Controlled-NOT gate: apply an X-gate to the target qubit if the control qubit is in state $|1\rangle$



$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Input	Output
$\|00\rangle$	$\|00\rangle$
$\|01\rangle$	$\|01\rangle$
$\|10\rangle$	$\|11\rangle$
$\|11\rangle$	$\|10\rangle$

Controlled-phase gate: apply a Z-gate to the target qubit if the control qubit is in state $|1\rangle$



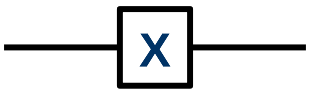
$$\text{CPHASE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Input	Output
$\|00\rangle$	$\|00\rangle$
$\|01\rangle$	$\|01\rangle$
$\|10\rangle$	$\|10\rangle$
$\|11\rangle$	$-\|11\rangle$

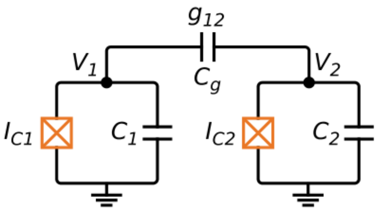
An example of universal quantum gate set :

QH3 - Qubits supraconducteurs II

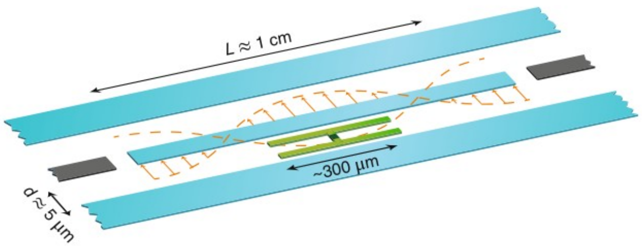
1. Manipuler un qubit : les portes X, Y et Z



2. Couplage de 2 qubits



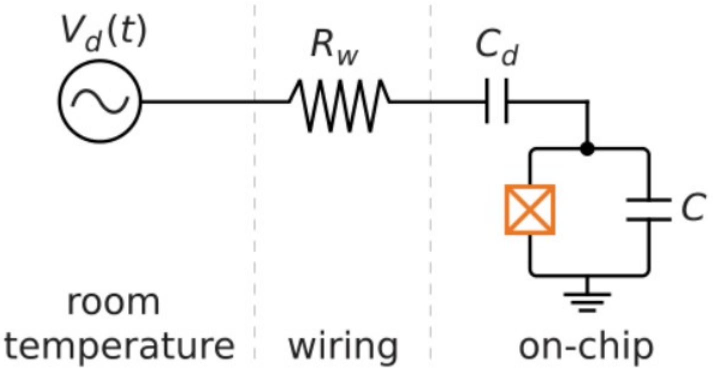
3. Lecture d’un Qubit avec une ca



jean-damien.pillet@polytechnique.edu

Manipulation d'un qubit supraconducteur

Contrôler l'état d'un qubit, c'est-à-dire de transformer son état arbitrairement entre deux points de la sphère de Bloch, est essentielle à la mise en œuvre d'un ordinateur quantique. Cela s'effectue par le biais de transformations unitaires (portes), qui correspondent à des rotations autour des trois axes dans la représentation de la sphère de Bloch, réalisées en pratique avec des impulsions micro-onde.

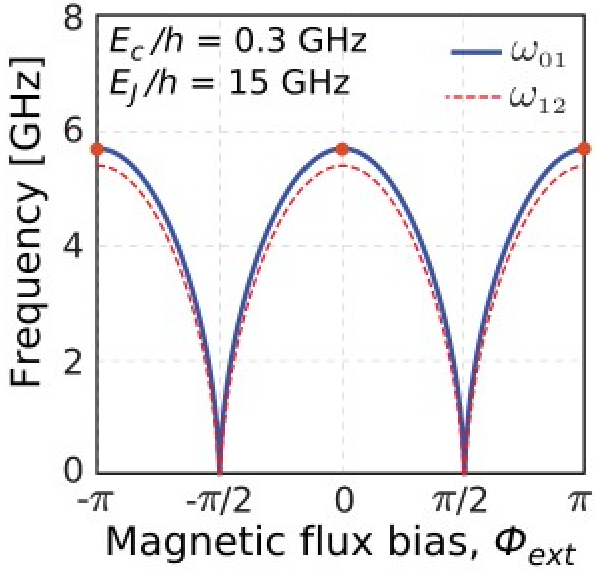


1.1. Considérons un transmon composé d'un SQUID plutôt qu'une jonction Josephson unique et dont la fréquence est alors ajustable. Proposez un protocole pour effectuer une porte Z_π.

Rappel : Qubit ajustable avec un SQUID

SQUID : Superconducting QUantum Interference Device

Energie Josephson ajustable
=> Fréquence du qubit ajustabl



Manipulation d'un qubit supraconducteur

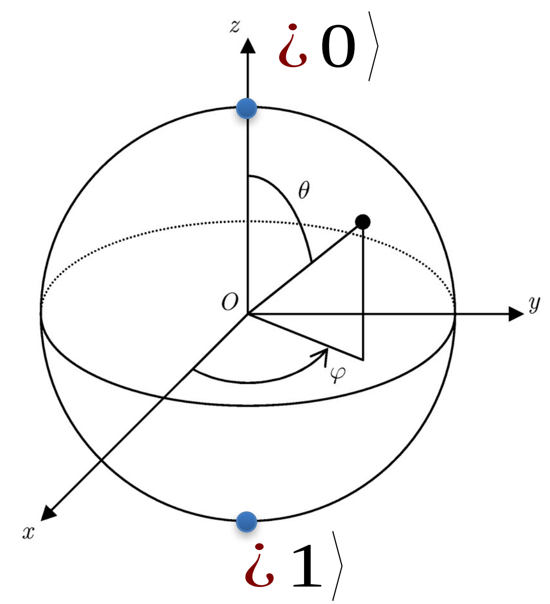
1.1. Considérons un transmon composé d'un SQUID plutôt qu'une jonction Josephson unique et dont la fréquence est alors ajustable. Proposez un protocole pour effectuer une porte Z_π.

Un qubit dans un état arbitraire est décrit par le ket

$$\text{¿}\,\psi\rangle = e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2}\,\text{¿}\,0\rangle + e^{i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2}\,\text{¿}\,1\rangle$$

avec et les angles définissant l'état du qubit dans la sphère de Bloch.

L'Hamitonien étant , ces angles sont fixes dans le référentiel tournant à la fréquence .



Manipulation d'un qubit supraconducteur

quantum | université PARIS-SACLAY

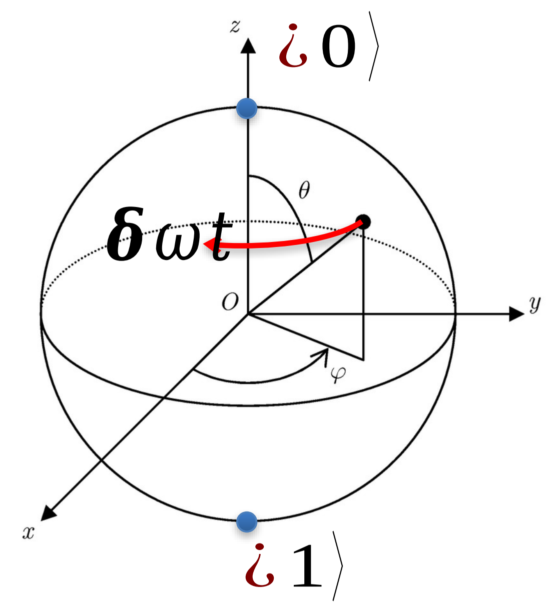
1.1. Considérons un transmon composé d'un SQUID plutôt qu'une jonction Josephson unique et dont la fréquence est alors ajustable. Proposez un protocole pour effectuer une porte Z_π.

Un qubit dans un état arbitraire est décrit par le ket

$$|\psi\rangle = e^{-i\varphi/2}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi/2}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

avec et les angles définissant l'état du qubit dans la sphère de Bloch.

L'Hamitonien étant , ces angles sont fixes dans le référentiel tournant à la fréquence .

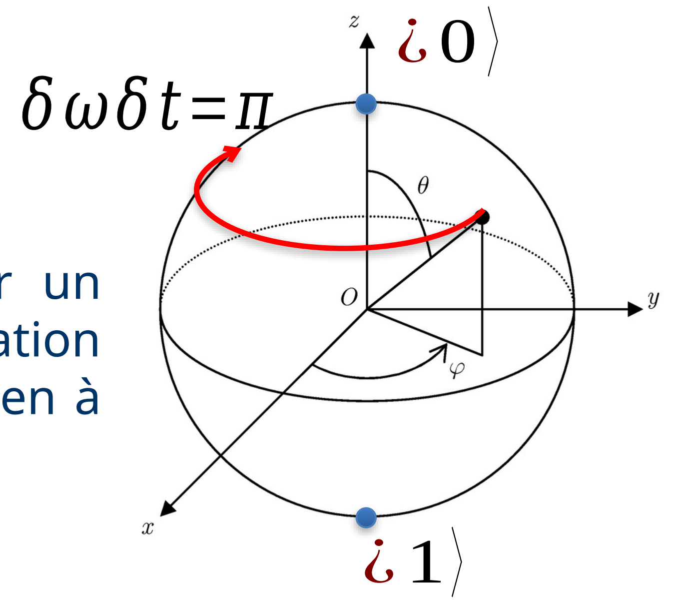


En revanche, si on ajuste la fréquence du qubit à la fréquence en utilisant un champ magnétique pour modifier le flux dans la boucle du SQUID, l'évolution devient

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\delta\omega t\right)}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$

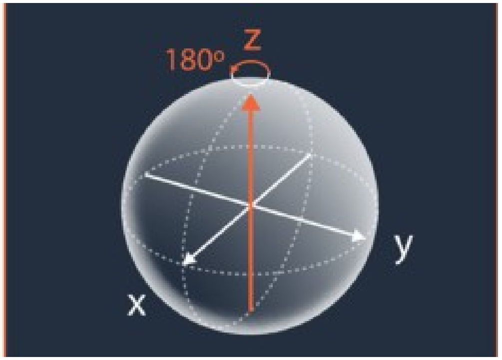
Manipulation d'un qubit supraconducteur

$$\text{¿}\,\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\varphi}{2}} \cos\frac{\theta}{2}\,\text{¿}\,0\rangle + e^{i\left(\frac{\varphi}{2}-\delta\omega t\right)} \sin\frac{\theta}{2}\,\text{¿}\,1\rangle$$

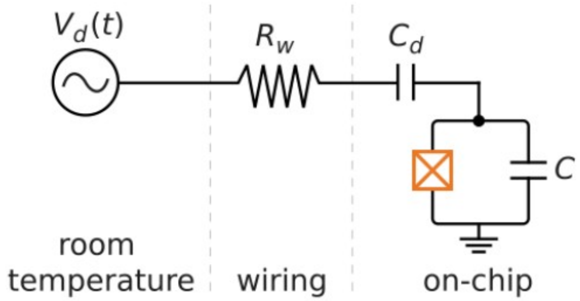


Le flux dans la boucle peut-être ajusté pour un temps de sorte que . On effectue ainsi une rotation d'angle autour de l'axe z, ce qui correspond bien à une porte .

$$\text{¿}\,\psi\left(\delta t = \frac{\pi}{\delta\omega}\right)\rangle = e^{-i\frac{\varphi}{2}} \cos\frac{\theta}{2}\,\text{¿}\,0\rangle - e^{i\frac{\varphi}{2}} \sin\frac{\theta}{2}\,\text{¿}\,1\rangle$$

Z gate: rotates the qubit state by π radians (180°) about the z-axis.	—[Z]—	$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	Input: $\|0\rangle$, $\|1\rangle$ — Output: $\|0\rangle$, $-\|1\rangle$	

1.2. Pour effectuer des portes X_θ ou Y_θ, on utilise une source de tension micro-onde, comme sur le schéma. Expliquer pourquoi on branche cette source à travers une capacité de couplage C_d plutôt que directement sur le transmon. Remarque: Ici, "d" fait référence à "drive".



Manipulation d'un qubit supraconducteur

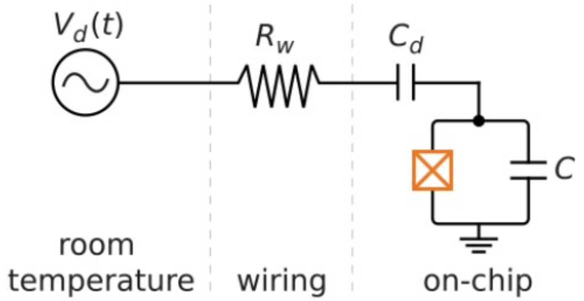
quantum | université PARIS-SACLAY

1.2. Pour effectuer des portes X_θ ou Y_θ, on utilise une source de tension micro-onde, comme sur le schéma. Expliquer pourquoi on branche cette source à travers une capacité de couplage C_d plutôt que directement sur le transmon. Remarque: Ici, "d" fait référence à "drive".

Le condensateur est nécessaire pour éviter que le circuit de drive ne ruine complètement la cohérence du circuit principal. Sans le condensateur, le facteur de qualité du circuit serait

$$Q = \frac{R_w}{Z}$$

où est l'impedance caractéristique du qubit.



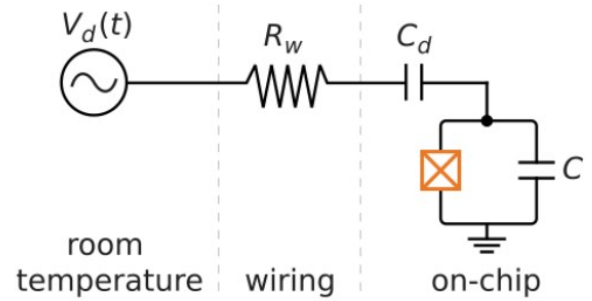
En pratique vaut environ 10 Ohm et vaut 50 Ohm (impedance caractéristique des cables coaxiaux). Ce qui fait des facteurs de qualité très bas et donc de faible coherence (quelques oscillations avant amortissement).

https://fr.wikibooks.org/wiki/%C3%89lectricit%C3%A9/Les_circuits_RL,_RC,_LC_et_RLC

Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.2. Pour effectuer des portes X_θ ou Y_θ, on utilise une source de tension micro-onde, comme sur le schéma. Expliquer pourquoi on branche cette source à travers une capacité de couplage C_d plutôt que directement sur le transmon. Remarque: Ici, "d" fait référence à "drive".

Le condensateur de couplage permet de préserver la cohérence du circuit. Si est suffisamment petit, son impédance est grande et donc le courant traversant est réduit. **Par conséquent, empêche le processus par lequel l'énergie de l'oscillateur entre dans et est perdue**. Cependant, le découplage de la ligne de drive limite également **la vitesse avec laquelle nous pouvons contrôler le qubit**, il faut donc trouver un équilibre.



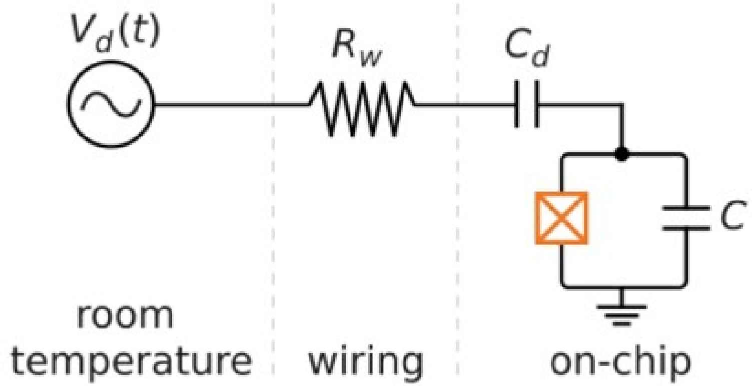
Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.3. Pour ce circuit, on peut écrire l'Hamitonien du système total

$$\hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C_\Sigma} - E_J \cos\frac{\hat{\Phi}}{\Phi_0} + \frac{C_d}{C_\Sigma} V_d(t)\hat{Q}$$

où $C_\Sigma = C + C_d$ et $\hat{Q}$ est la charge totale aux bornes des condensateurs (*i.e.* $Q_C - Q_d$). Montrer que l'on retrouve bien des lois classiques correctes à partir de $\hat{H}$.

Ehrenfest généralisé : $\dfrac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \left\langle \dfrac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle + \dfrac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A},\hat{H}]\rangle$



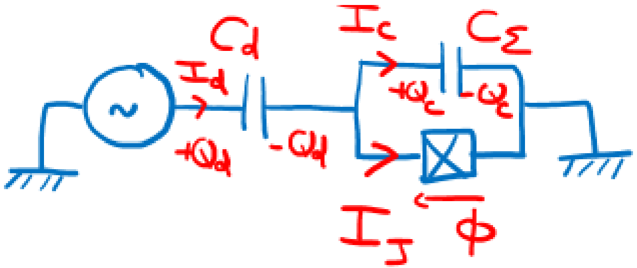
Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.3. Pour ce circuit, on peut écrire l'Hamitonien du système total

$$\hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C_\Sigma} - E_J \cos\frac{\hat{\Phi}}{\Phi_0} + \frac{C_d}{C_\Sigma} V_d(t)\hat{Q}$$

où $C_\Sigma = C + C_d$ et $\hat{Q}$ est la charge totale aux bornes des condensateurs ($i.e.$ $Q_C - Q_d$). Montrer que l'on retrouve bien des lois classiques correctes à partir de $\hat{H}$.

Ehrenfest généralisé : $\dfrac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} = \left\langle \dfrac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right\rangle + \dfrac{1}{i\hbar}\left\langle\left[\hat{A}, \hat{H}\right]\right\rangle$



$I_J = \langle\hat{\Phi}\rangle / L_J$?

1.3. Pour ce circuit, on peut écrire l'Hamitonien du système total

$$\hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C_\Sigma} - E_J \cos\frac{\hat{\Phi}}{\Phi_0} + \frac{C_d}{C_\Sigma} V_d(t)\hat{Q}$$

où $C_\Sigma = C + C_d$ et $\hat{Q}$ est la charge totale aux bornes des condensateurs (*i.e.* $Q_C - Q_d$). Montrer que l'on retrouve bien des lois classiques correctes à partir de $\hat{H}$.

Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.3. Pour ce circuit, on peut écrire l'Hamitonien du système total

$$\hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C_\Sigma} - E_J \cos\frac{\hat{\Phi}}{\Phi_0} + \frac{C_d}{C_\Sigma} V_d(t)\hat{Q}$$

où $C_\Sigma = C + C_d$ et $\hat{Q}$ est la charge totale aux bornes des condensateurs (*i.e.* $Q_C - Q_d$). Montrer que l'on retrouve bien des lois classiques correctes à partir de $\hat{H}$.

Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.3. Pour ce circuit, on peut écrire l'Hamitonien du système total

$$\hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C_\Sigma} - E_J \cos\frac{\hat{\Phi}}{\Phi_0} + \frac{C_d}{C_\Sigma} V_d(t)\hat{Q}$$

où $C_\Sigma = C + C_d$ et $\hat{Q}$ est la charge totale aux bornes des condensateurs (*i.e.* $Q_C - Q_d$). Montrer que l'on retrouve bien des lois classiques correctes à partir de $\hat{H}$.

Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.4. Ecrire le terme de couplage avec la source en fonction des opérateurs d'échelle $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$

$$\hat{a} = \frac{\hat{\Phi}}{\sqrt{2\hbar\omega_0 L_J}} + i\frac{\hat{Q}}{\sqrt{2\hbar\omega_0 C_\Sigma}} \qquad \text{et} \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{\Phi}}{\sqrt{2\hbar\omega_0 L_J}} - i\frac{\hat{Q}}{\sqrt{2\hbar\omega_0 C_\Sigma}}$$

où $\omega_0 = 1/\sqrt{L_J C_\Sigma}$. On pourra introduire la notation $Q_{zpf} = \sqrt{\hbar/2Z_{LC}}$ où $Z_{LC} = \sqrt{L_J/C}$ que l'on commentera.

$$\frac{C_d}{C_\Sigma} V_d(t)\,\widehat{Q} = ?$$

Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.4. Ecrire le terme de couplage avec la source en fonction des opérateurs d'échelle $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$

$$\hat{a} = \frac{\hat{\Phi}}{\sqrt{2\hbar\omega_0 L_J}} + i\frac{\hat{Q}}{\sqrt{2\hbar\omega_0 C_\Sigma}} \qquad \text{et} \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{\Phi}}{\sqrt{2\hbar\omega_0 L_J}} - i\frac{\hat{Q}}{\sqrt{2\hbar\omega_0 C_\Sigma}}$$

où $\omega_0 = 1/\sqrt{L_J C_\Sigma}$. On pourra introduire la notation $Q_{zpf} = \sqrt{\hbar/2Z_{LC}}$ où $Z_{LC} = \sqrt{L_J/C}$ que l'on commentera.

Le terme de couplage s'écrit , il prend donc la forme

$$\frac{C_d}{C_\Sigma} V_d(t)\hat{Q} = \frac{C_d}{C_\Sigma} V_d(t) Q_{zpf} \frac{\left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right)}{i}$$

avec

est l'impédance caractéristique du qubit et sont les fluctuations de point zéro de charge. Cela signifie que même dans le fondamental, il existe des fluctuations de charge quantiques dans le circuit

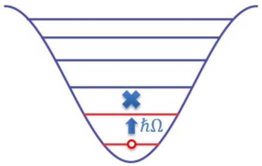
$$\Delta Q = \sqrt{\langle 0|\hat{Q}^2|0\rangle - \langle 0|\hat{Q}|0\rangle^2} = Q_{zpf} \approx 10\,\acute{e}lectrons\,!$$

Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.5. En se restreignant au sous-espace $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ du qubit de fréquence ω_q, écrire $\hat{H}$ avec les matrices de Pauli

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quel autre système physique obéit à un tel Hamiltonien ?



$$\hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C_\Sigma} - E_J \cos\frac{\hat{\Phi}}{\Phi_0} + \frac{C_d}{C_\Sigma} V_d(t)\hat{Q}$$

$$\frac{C_d}{C_\Sigma} V_d(t)\hat{Q} = \frac{C_d}{C_\Sigma} V_d(t) Q_{zpf} \frac{(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)}{i}$$

$$\frac{(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)}{i} |0\rangle = i \vee 1\rangle$$

$$\frac{(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)}{i} |1\rangle = -i \vee 0\rangle$$

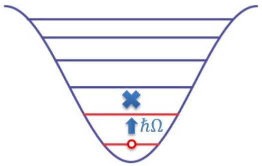
Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.5. En se restreignant au sous-espace $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ du qubit de fréquence ω_q, écrire $\hat{H}$ avec les matrices de Pauli

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quel autre système physique obéit à un tel Hamiltonien ?

On a vu au cours précédent que l'anharmonicité du circuit nous permettait de nous restreindre aux états et . L'Hamiltonien sans couplage peut ainsi s'écrire



$$\widehat{H}_0 = -\frac{\hbar\omega_q}{2}\widehat{\sigma}_z$$

Quant au couplage on peut l'écrire

avec

car $\frac{(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)}{i}|0\rangle = i \vee 1\rangle$

$\frac{(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)}{i}|1\rangle = -i \vee 0\rangle$

on peut donc effectuer le remplacement $\frac{(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)}{i} \rightarrow \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.5. En se restreignant au sous-espace $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ du qubit de fréquence ω_q, écrire $\hat{H}$ avec les matrices de Pauli

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quel autre système physique obéit à un tel Hamiltonien ?

In fine, l'Hamiltonien total s'écrit

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_d = -\frac{\hbar \omega_q}{2} \widehat{\sigma}_z + \Omega V_d(t) \widehat{\sigma}_y$$

avec

On peut remarquer qu'il s'agit de l'Hamiltonien d'un spin ½ dans un champ magnétique variable temporellement orienté le long de l'axe y. Cela rappelle la RMN.

Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.6. On veut élucider l'effet d'une tension oscillante $V_d(t) = V_0 \sin(\omega_d t + \phi)$. On se place pour cela dans le référentiel tournant à la fréquence ω_q. Un état arbitraire $|\psi\rangle$ devient alors $e^{-i\frac{\omega_q}{2}\sigma_z t}|\psi\rangle$. A quel Hamiltonien effectif obéit ce nouvel état ? On pourra faire le calcul pour $\phi = 0$ et $\pi/2$.

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_d = -\frac{\hbar\omega_q}{2}\widehat{\sigma}_z + \Omega V_d(t)\widehat{\sigma}_y$$

Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.6. On veut élucider l'effet d'une tension oscillante $V_d(t) = V_0 \sin(\omega_d t + \phi)$. On se place pour cela dans le référentiel tournant à la fréquence ω_q. Un état arbitraire $|\psi\rangle$ devient alors $e^{-i\frac{\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}|\psi\rangle$. A quel Hamiltonien effectif obéit ce nouvel état ? On pourra faire le calcul pour $\phi = 0$ et $\pi/2$.

Le ket vérifie l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \widehat{H}|\psi\rangle$$

Le même état dans le référentiel tournant vérifie

$$\frac{d|\psi_{rf}\rangle}{dt} = \frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z e^{\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}|\psi\rangle + e^{\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}\frac{d \vee \psi\rangle}{dt}$$

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_d = -\frac{\hbar\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z + \Omega V_d(t)\hat{\sigma}_y$$

Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.6. On veut élucider l'effet d'une tension oscillante $V_d(t) = V_0 \sin(\omega_d t + \phi)$. On se place pour cela dans le référentiel tournant à la fréquence ω_q. Un état arbitraire $|\psi\rangle$ devient alors $e^{-i\frac{\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}|\psi\rangle$. A quel Hamiltonien effectif obéit ce nouvel état ? On pourra faire le calcul pour $\phi = 0$ et $\pi/2$.

Le ket vérifie l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle$$

Le même état dans le référentiel tournant vérifie

$$\frac{d|\psi_{rf}\rangle}{dt} = \frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z e^{\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}|\psi\rangle + e^{\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}\frac{d\vee\psi\rangle}{dt}$$

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_d = -\frac{\hbar\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z + \Omega V_d(t)\hat{\sigma}_y$$

Manipulation d'un qubit supraconducteur

quantum | université PARIS-SACLAY

1.6. On veut élucider l'effet d'une tension oscillante $V_d(t) = V_0 \sin(\omega_d t + \phi)$. On se place pour cela dans le référentiel tournant à la fréquence ω_q. Un état arbitraire $|\psi\rangle$ devient alors $e^{-i\frac{\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}|\psi\rangle$. A quel Hamiltonien effectif obéit ce nouvel état ? On pourra faire le calcul pour $\phi = 0$ et $\pi/2$.

Le ket vérifie l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \widehat{H}|\psi\rangle$$

Le même état dans le référentiel tournant vérifie

$$\frac{d|\psi_{rf}\rangle}{dt} = \frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z e^{\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}|\psi\rangle + e^{\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}\frac{d \vee \psi\rangle}{dt}$$

$$¿\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z|\psi_{rf}\rangle + e^{\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}\frac{\widehat{H}}{i\hbar}e^{-\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}|\psi_{rf}\rangle$$

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{H}_d = -\frac{\hbar\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z + \Omega V_d(t)\hat{\sigma}_y$$

Manipulation d'un qubit supraconducteur

quantum | université PARIS-SACLAY

1.6. On veut élucider l'effet d'une tension oscillante $V_d(t) = V_0 \sin(\omega_d t + \phi)$. On se place pour cela dans le référentiel tournant à la fréquence ω_q. Un état arbitraire $|\psi\rangle$ devient alors $e^{-i\frac{\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}|\psi\rangle$. A quel Hamiltonien effectif obéit ce nouvel état ? On pourra faire le calcul pour $\phi = 0$ et $\pi/2$.

Le ket vérifie l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle$$

Le même état dans le référentiel tournant vérifie

$$\frac{d|\psi_{rf}\rangle}{dt} = \frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z e^{\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}|\psi\rangle + e^{\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}\frac{d \vee \psi\rangle}{dt}$$

$$¿\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z|\psi_{rf}\rangle + e^{\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}\frac{\hat{H}}{i\hbar}e^{-\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}|\psi_{rf}\rangle$$

$$¿e^{\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}\frac{\hat{H}_d}{i\hbar}e^{-\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}|\psi_{rf}\rangle$$ avec

car commute avec .

Manipulation d'un qubit supraconducteur

$$e^{\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}\hat{\sigma}_y e^{-\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t} = ¿$$

D'où

$$i\hbar\frac{d|\psi_{rf}\rangle}{dt} = e^{\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}\Omega V_d(t)\hat{\sigma}_y e^{-\frac{i\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}|\psi_{rf}\rangle = \Omega V_d(t)\left(\cos(\omega_q t)\hat{\sigma}_y - \sin(\omega_q t)\hat{\sigma}_x\right)|\psi_{rf}\rangle$$

Manipulation d'un qubit supraconducteur

L'état obéit donc bien à un Hamiltonien effectif

$$\widehat{H}_{eff}=\Omega V_d(t)\left(\cos(\omega_q t)\widehat{\sigma}_y-\sin(\omega_q t)\widehat{\sigma}_x\right)$$

avec

Si on choisit   et cela donne

$$\widehat{H}_{eff}=\Omega V_0 \sin(\omega_q t)\left(\cos(\omega_q t)\widehat{\sigma}_y-\sin(\omega_q t)\widehat{\sigma}_x\right)$$

$$¿\frac{\Omega V_0}{2}\left(\sin(2\omega_q t)\widehat{\sigma}_y-\left(1-\cos^2(\omega_q t)\right)\widehat{\sigma}_x\right)$$

Manipulation d'un qubit supraconducteur

L'état obéit donc bien à un Hamiltonien effectif

$$\hat{H}_{eff} = \Omega V_d(t)\left(\cos(\omega_q t)\hat{\sigma}_y - \sin(\omega_q t)\hat{\sigma}_x\right)$$

avec

Si on choisit   et cela donne

$$\hat{H}_{eff} = \Omega V_0 \sin(\omega_q t)\left(\cos(\omega_q t)\hat{\sigma}_y - \sin(\omega_q t)\hat{\sigma}_x\right)$$

$$¿\frac{\Omega V_0}{2}\left(\sin(2\omega_q t)\hat{\sigma}_y - \left(1-\cos^2(\omega_q t)\right)\hat{\sigma}_x\right)$$

En première approximation, les termes oscillant rapidement à la fréquence peuvent être ignorés car ils se moyennent à 0 sur les échelles de temps qui nous intéressent (il s'agit de l'approximation de l'onde tournante ou RWA).

soit $$\hat{H}_{eff} \approx -\frac{\Omega V_0}{2}\hat{\sigma}_x$$

Pour cela donne $$\hat{H}_{eff} \approx -\frac{\Omega V_0}{2}\hat{\sigma}_y$$

Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.7. Le qubit est dans l'état $|0\rangle$ à l'instant t. Donner son évolution dans la base tournante pour $\phi = 0$.

$$\widehat{H}_{eff} \approx -\frac{\Omega V_0}{2}\widehat{\sigma}_x$$

Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.7. Le qubit est dans l'état $|0\rangle$ à l'instant t. Donner son évolution dans la base tournante pour $\phi = 0$.

Si le qubit est dans l'état dans le référentiel du labo à l'instant , alors il est aussi dans l'état dans le référentiel tournant (car).

Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.7. Le qubit est dans l'état $|0\rangle$ à l'instant t. Donner son évolution dans la base tournante pour $\phi = 0$.

Si le qubit est dans l'état dans le référentiel du labo à l'instant , alors il est aussi dans l'état dans le référentiel tournant (car).

Pour , on a qui a pour état propre et énergie propre

Manipulation d'un qubit supraconducteur

quantum | université PARIS-SACLAY

1.7. Le qubit est dans l'état $|0\rangle$ à l'instant t. Donner son évolution dans la base tournante pour $\phi = 0$.

Si le qubit est dans l'état dans le référentiel du labo à l'instant , alors il est aussi dans l'état dans le référentiel tournant (car).

Pour , on a qui a pour état propre et énergie propre

¿

$$E_{+¿=-\frac{\Omega V_0}{2}¿}$$

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$E_{-} = \frac{+\Omega V_0}{2}$$

Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.7. Le qubit est dans l'état $|0\rangle$ à l'instant t. Donner son évolution dans la base tournante pour $\phi = 0$.

Si le qubit est dans l'état dans le référentiel du labo à l'instant , alors il est aussi dans l'état dans le référentiel tournant (car).

Pour , on a qui a pour état propre et énergie propre

$$¿$$

$$E_{+¿=-\frac{\Omega V_0}{2}¿}$$

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$E_- = \frac{+\Omega V_0}{2}$$

On a donc $|0\rangle = ¿¿$ ce qui donne l'évolution dans la base tournante

$$|\psi_{rf}(t)\rangle = e^{i\frac{\Omega V_0}{2}t} ¿¿$$

1.8. Calculer alors la probabilité de le mesurer dans l'état $|1\rangle$ en fonction du temps dans le référentiel du laboratoire. Proposer un protocole pour faire un “bit-flip”.

Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.8. Calculer alors la probabilité de le mesurer dans l'état $|1\rangle$ en fonction du temps dans le référentiel du laboratoire. Proposer un protocole pour faire un "bit-flip".

La probabilité de mesurer le qubit dans l'état est alors donné par

$$\mathcal{P}_{|1\rangle} = \left\| \Pi_{|1\rangle} |\psi(t)\rangle \right\|^2 = \left| \langle 1 | \psi(t) \rangle \right|^2$$

où est l'état du qubit dans le référentiel du laboratoire.

Manipulation d'un qubit supraconducteur

1.8. Calculer alors la probabilité de le mesurer dans l'état $|1\rangle$ en fonction du temps dans le référentiel du laboratoire. Proposer un protocole pour faire un "bit-flip".

La probabilité de mesurer le qubit dans l'état est alors donné par

$$\mathcal{P}_{|1\rangle} = \left\| \Pi_{|1\rangle} |\psi(t)\rangle \right\|^2 = \left| \langle 1 | \psi(t) \rangle \right|^2$$

où est l'état du qubit dans le référentiel du laboratoire.
Or . On a donc (en appliquant l'opérateur unitaire sur)

$$\mathcal{P}_{|1\rangle} = \left| \langle 1 | \psi_{rf}(t) \rangle \right|^2$$

avec

$$|\psi_{rf}(t)\rangle = e^{i\frac{\Omega V_0}{2}t} ¿¿$$

¿

$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\mathcal{P}_{|1\rangle} = ?$$

Manipulation d'un qubit supraconducteur

quantum | université PARIS-SACLAY

1.8. Calculer alors la probabilité de le mesurer dans l'état $|1\rangle$ en fonction du temps dans le référentiel du laboratoire. Proposer un protocole pour faire un "bit-flip".

La probabilité de mesurer le qubit dans l'état est alors donné par

$$\mathcal{P}_{|1\rangle} = \left\| \Pi_{|1\rangle} |\psi(t)\rangle \right\|^2 = \left| \langle 1 | \psi(t) \rangle \right|^2$$

où est l'état du qubit dans le référentiel du laboratoire.
Or . On a donc (en appliquant l'opérateur unitaire sur)

$$\mathcal{P}_{|1\rangle} = \left| \langle 1 | \psi_{rf}(t) \rangle \right|^2$$

avec

$$|\psi_{rf}(t)\rangle = e^{i\frac{\Omega V_0}{2}t} ¿¿$$

¿

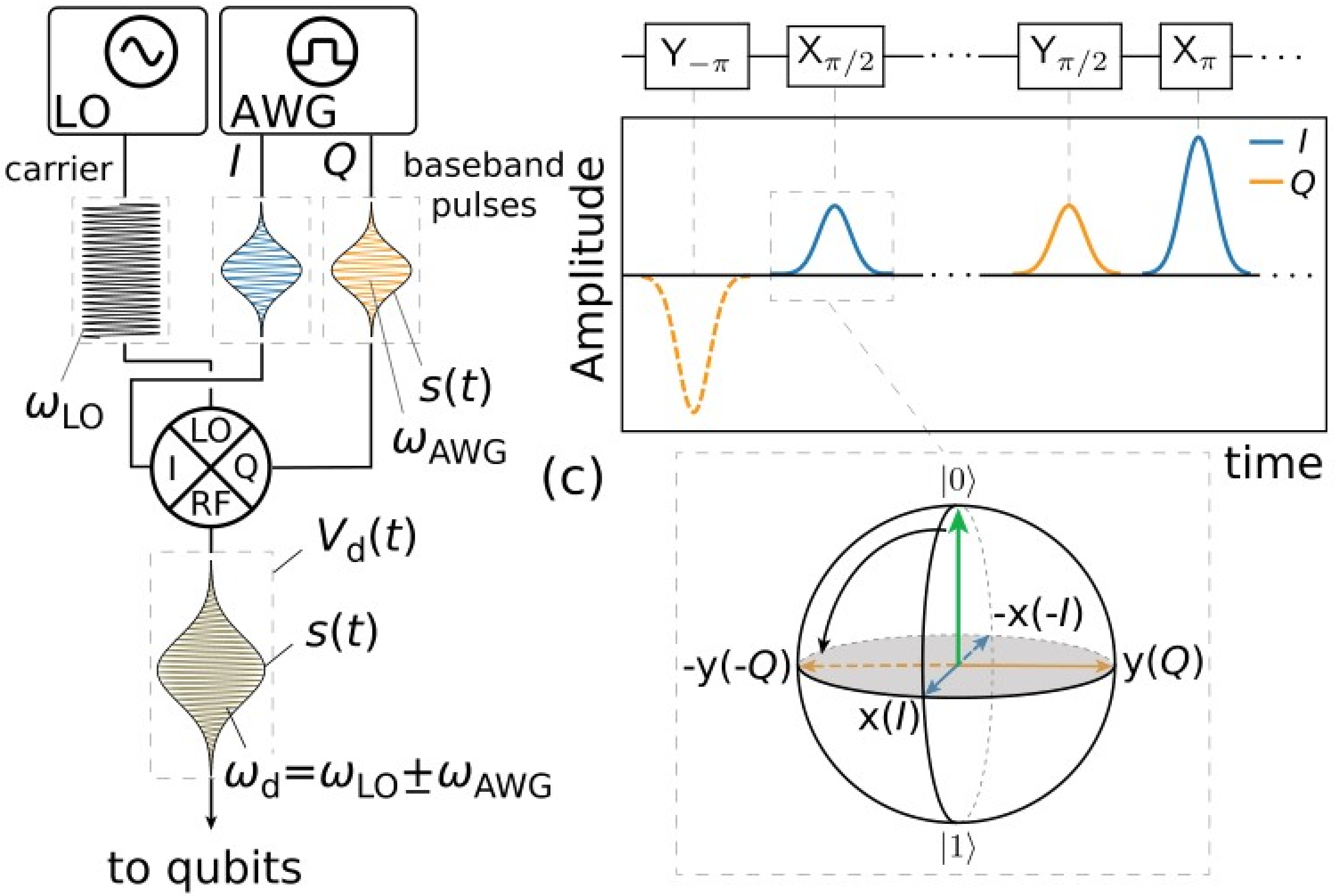
$$|-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\mathcal{P}_{|1\rangle} = sin^2 \frac{\Omega V_0}{2} t$$

On peut donc effectuer un bit flip grâce à une impulsion de durée

avec

En pratique



On mélange un signal haute fréquence à à une enveloppe .

Instrumentation commerciale microonde

quantum | université PARIS-SACLAY

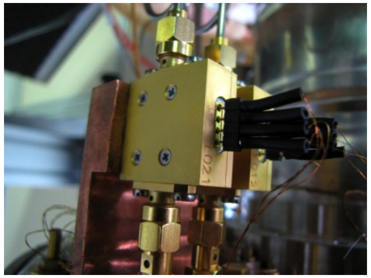
Des décennies de développement pour les télécommunications

Vector Network Analyzer

Cable

Directional coupler

Amplifier

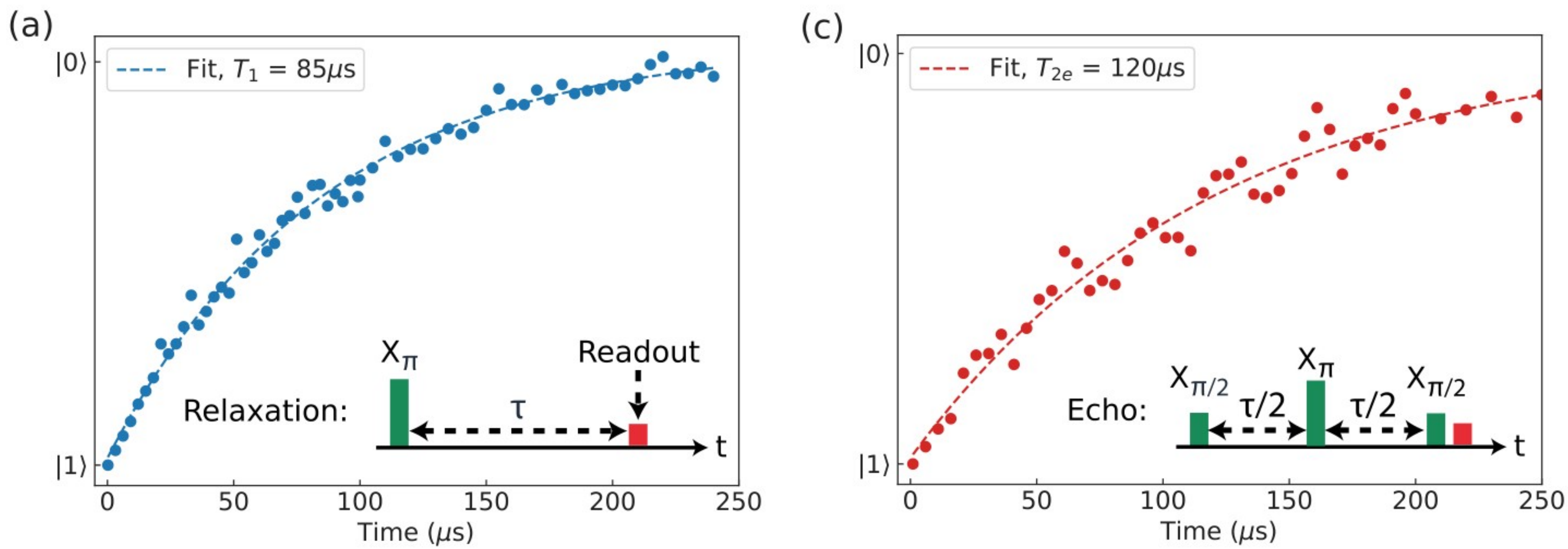


Microwave generator

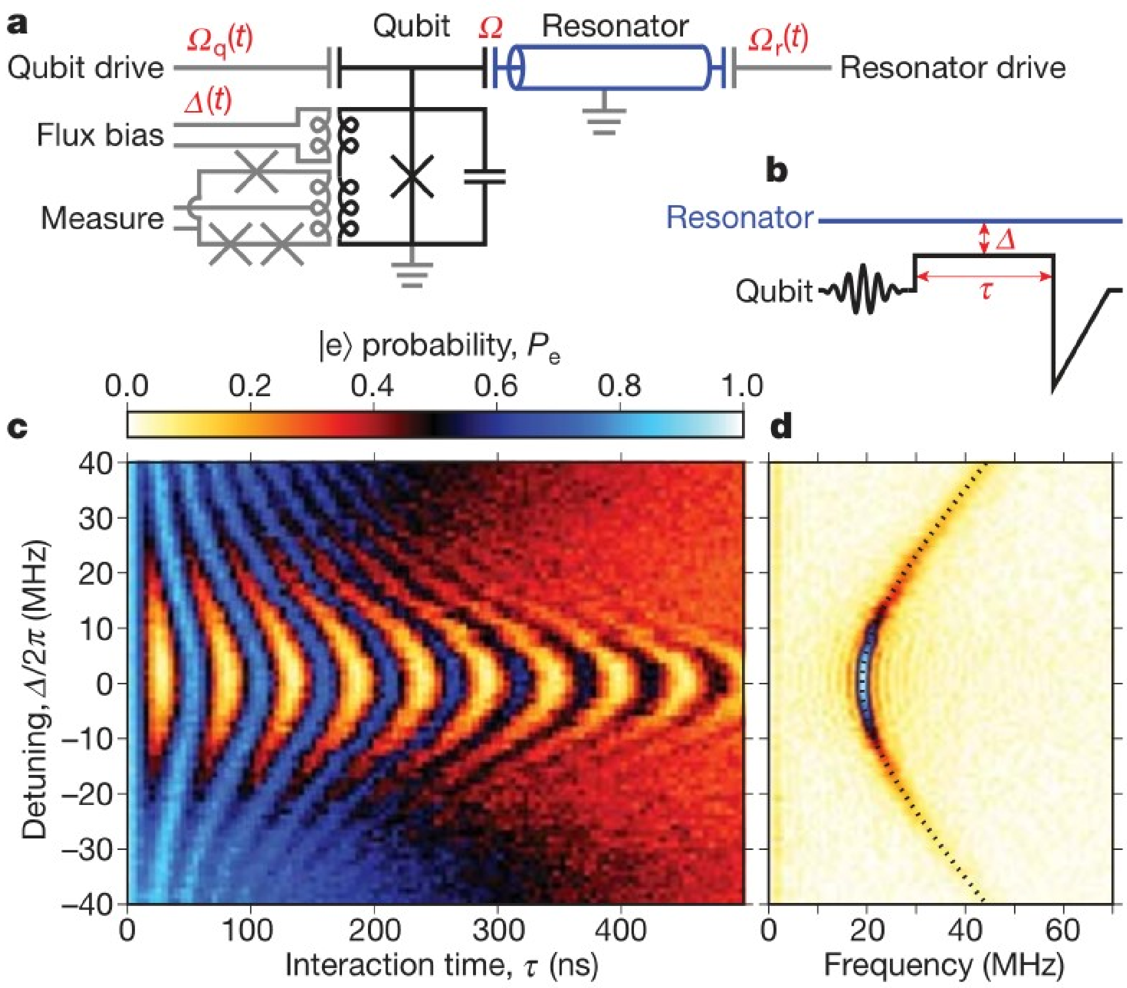
Circulator

Phase shifter

Portes à 1 qubit pour mesure du temps de cohérence

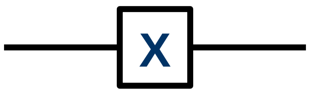


Exemple d'oscillations de Rabi

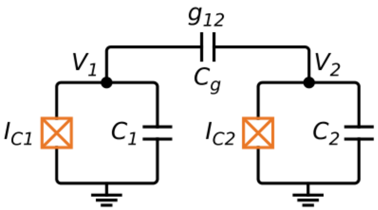


QH3 - Qubits supraconducteurs II

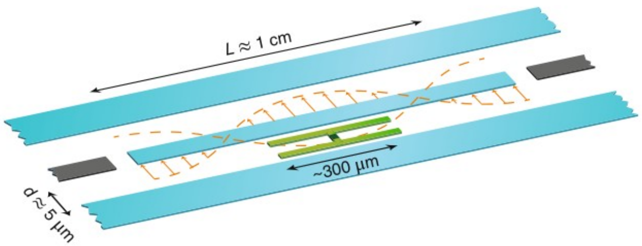
1. Manipuler un qubit : les portes X, Y et Z



2. Couplage de 2 qubits



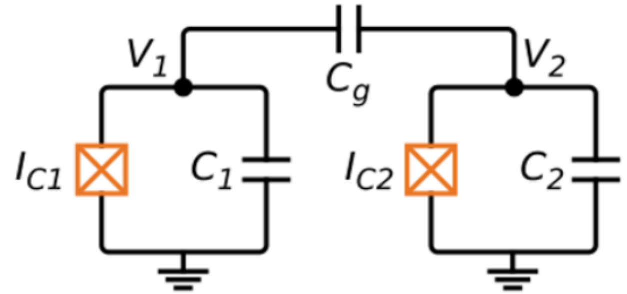
3. Lecture d'un Qubit avec une ca



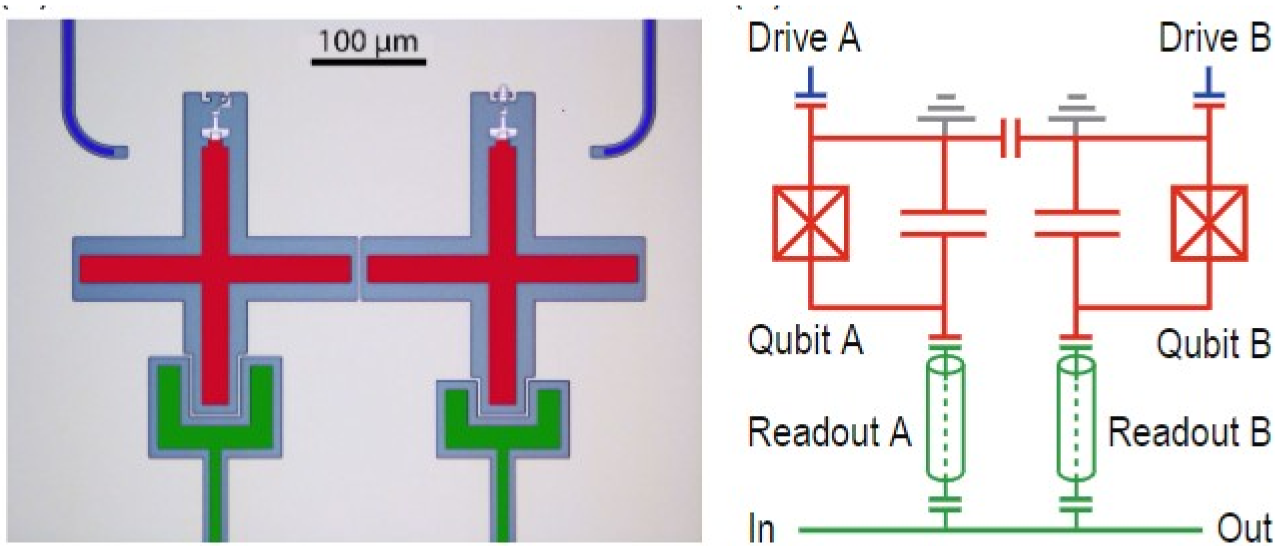
jean-damien.pillet@polytechnique.edu

Portes à 2 qubits

Pour générer de l'intrication entre deux qubits supraconducteurs, il est nécessaire de mettre au point une interaction hamiltonienne qui relie les degrés de liberté de ces systèmes individuels. Pour 2 qubits faiblement couplés, on écrira l'Hamiltonien sous la forme $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{int}$, où $\hat{H}_1$ et H_2 sont les Hamitoniens de 2 transmons et H_{int} leur Hamiltonien d'interaction.



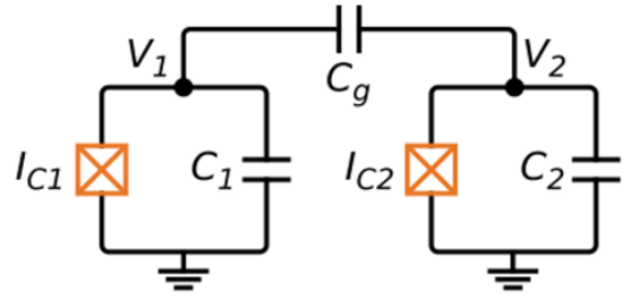
2.1. Ecrire l'énergie totale du circuit en fonction de $V_{i=1,2}$ et $\Phi_{i=1,2}$.



Krinner et al., Phys. Rev. Applied **14**, 044039 – Published 21 October 2020

Portes à 2 qubits

Pour générer de l'intrication entre deux qubits supraconducteurs, il est nécessaire de mettre au point une interaction hamiltonienne qui relie les degrés de liberté de ces systèmes individuels. Pour 2 qubits faiblement couplés, on écrira l'Hamiltonien sous la forme $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{int}$, où $\hat{H}_1$ et H_2 sont les Hamitoniens de 2 transmons et H_{int} leur Hamiltonien d'interaction.



2.1. Ecrire l'énergie totale du circuit en fonction de $Q_{i=1,2}$ et $\Phi_{i=1,2}$

$$E_{totale} = \frac{Q_1^2}{2C_1} - E_{J1}\cos\frac{\Phi_1}{\Phi_0} + \frac{Q_2^2}{2C_2} - E_{J2}\cos\frac{\Phi_2}{\Phi_0} + \frac{C_g}{2}\left(V_1 - V_2\right)^2$$

Portes à 2 qubits

2.2. Proposer un Hamiltonien décrivant le circuit. En déduire $\hat{H}_{int}$ en fonction de la capacité de couplage C_g et les opérateurs charge $\hat{Q}_1$ et $\hat{Q}_2$. Quel est le terme pertinent dans ce couplage ?

$$E_{totale} = \frac{Q_1^2}{2C_1} - E_{J1}\cos\frac{\Phi_1}{\Phi_0} + \frac{Q_2^2}{2C_2} - E_{J2}\cos\frac{\Phi_2}{\Phi_0} + \frac{C_g}{2}\left(V_1 - V_2\right)^2$$

Portes à 2 qubits

quantum | université PARIS-SACLAY

2.2. Proposer un Hamiltonien décrivant le circuit. En déduire $\hat{H}_{int}$ en fonction de la capacité de couplage C_g et les opérateurs charge $\hat{Q}_1$ et $\hat{Q}_2$. Quel est le terme pertinent dans ce couplage ?

On a les relations suivantes entre tensions et charges

$$Q_1 = C_1 V_1 \qquad Q_2 = C_2 V_2$$

On peut donc écrire l'Hamiltonien

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{Q}_1^2}{2C_1} - E_{J1}\cos\frac{\widehat{\Phi}_1}{\Phi_0} + \frac{\widehat{Q}_2^2}{2C_2} - E_{J2}\cos\frac{\widehat{\Phi}_2}{\Phi_0} + \widehat{H}_{int}$$

avec

En développant, on voit que l'on a

$$\widehat{H}_{int} = \frac{C_g}{2C_1^2}\widehat{Q}_1^2 + \frac{C_g}{2C_2^2}\widehat{Q}_2^2 - \frac{C_g}{C_1 C_2}\widehat{Q}_1\widehat{Q}_2$$

Le terme pertinent est bien entendu le troisième. Les deux autres peuvent être ignorés d'autant plus que pour être faiblement couplés, on a .

Portes à 2 qubits

2.3. Dans la limite $C_g \ll C_1, C_2$, on pourra supposer que l'on préserve les relations de commutations de deux transmons indépendants $[\hat{\Phi}_1, \hat{Q}_1] = [\hat{\Phi}_2, \hat{Q}_2] = i\hbar$. Réécrire $\hat{H}_{int}$ avec les opérateurs d'échelle

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{\Phi}_1}{\sqrt{2\hbar\omega_1 L_1}} + i\frac{\hat{Q}_1}{\sqrt{2\hbar\omega_1 C_1}} \qquad \text{et} \qquad \hat{a}_2 = \frac{\hat{\Phi}_2}{\sqrt{2\hbar\omega_2 L_2}} + i\frac{\hat{Q}_2}{\sqrt{2\hbar\omega_2 C_2}}.$$

agissant sur les espaces de Hilbert respectifs des 2 transmons $\{|n\rangle_{i=1,2}\}$ où n est entier. On introduit ici ω_1 et ω_2 les fréquences des 2 qubits.

On ne garde que le dernier terme

$$\widehat{H}_{int} = -\frac{C_g}{C_1 C_2}\widehat{Q}_1\widehat{Q}_2$$

Portes à 2 qubits

2.3. Dans la limite $C_g \ll C_1, C_2$, on pourra supposer que l'on préserve les relations de commutations de deux transmons indépendants $[\hat{\Phi}_1, \hat{Q}_1] = [\hat{\Phi}_2, \hat{Q}_2] = i\hbar$. Réécrire $\hat{H}_{int}$ avec les opérateurs d'échelle

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{\Phi}_1}{\sqrt{2\hbar\omega_1 L_1}} + i\frac{\hat{Q}_1}{\sqrt{2\hbar\omega_1 C_1}} \qquad \text{et} \qquad \hat{a}_2 = \frac{\hat{\Phi}_2}{\sqrt{2\hbar\omega_2 L_2}} + i\frac{\hat{Q}_2}{\sqrt{2\hbar\omega_2 C_2}}.$$

agissant sur les espaces de Hilbert respectifs des 2 transmons $\{|n\rangle_{i=1,2}\}$ où n est entier. On introduit ici ω_1 et ω_2 les fréquences des 2 qubits.

On ne garde que le dernier terme

$$\widehat{H}_{int} = -\frac{C_g}{C_1 C_2}\widehat{Q}_1 \widehat{Q}_2$$

Dans ce cas

$$\widehat{H}_{int} = -\hbar g \left(\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger\right)\left(\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger\right)$$

avec

Rem: En passant par la mécanique Lagrangienne, nous verrions que nous faisons en fait une faute de signe (sans incidence) dans notre approche.

Portes à 2 qubits

2.4. On suppose que la non-linéarité des transmons permet d'ignorer les états $|n \geq 2\rangle_{i=1,2}$. Exprimer alors $\hat{H}_{int}$ puis $\hat{H}$ dans la base $\{|0\rangle_1, |1\rangle_1\} \otimes \{|0\rangle_2, |1\rangle_2\}$ avec les matrices de Pauli

$$\hat{\sigma}_{x,i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_{y,i} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_{z,i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

où $i = 1, 2$. Pourquoi parle-t-on de couplage transverse dans ce cas ?

$$\widehat{H}_{int} = -\hbar g \left(\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger\right)\left(\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger\right)$$

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{Q}_1^2}{2C_1} - E_{J1} \cos\frac{\widehat{\Phi}_1}{\Phi_0} + \frac{\widehat{Q}_2^2}{2C_2} - E_{J2} \cos\frac{\widehat{\Phi}_2}{\Phi_0} + \widehat{H}_{int}$$

Portes à 2 qubits

2.4. On suppose que la non-linéarité des transmons permet d'ignorer les états $|n \geq 2\rangle_{i=1,2}$. Exprimer alors $\hat{H}_{int}$ puis $\hat{H}$ dans la base $\{|0\rangle_1, |1\rangle_1\} \otimes \{|0\rangle_2, |1\rangle_2\}$ avec les matrices de Pauli

$$\hat{\sigma}_{x,i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_{y,i} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_{z,i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

où $i = 1, 2$. Pourquoi parle-t-on de couplage transverse dans ce cas ?

Comme dans l'exercice précédent, lorsqu'on réduit l'espace de Hilbert à 2 états, on peut faire la transformation

$$\frac{\left(\hat{a}_i - \hat{a}_i^\dagger\right)}{i} \rightarrow \hat{\sigma}_{y,i} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\hat{H}_{int} = \hbar g \hat{\sigma}_{y,1} \hat{\sigma}_{y,2}$$

En se restreignant à , on a donc

$$\hat{H} = \hbar \left(-\frac{\omega_1}{2} \hat{\sigma}_{z,1} - \frac{\omega_2}{2} \hat{\sigma}_{z,2} + g \hat{\sigma}_{y,1} \hat{\sigma}_{y,2} \right)$$

Un tel couplage est dit "transverse", car l'hamiltonien de couplage ne possède des éléments de matrice non nuls qu'à des positions hors diagonale.

Portes à 2 qubits

2.5. Diagonaliser $\hat{H}$. On pourra remarquera que les sous-espace $\{|00\rangle\,|11\rangle\}$ et $\{|01\rangle\,|10\rangle\}$ sont stables par $\hat{H}$. On introduira ω_1 et ω_2 les fréquences des 2 qubits.

$$\widehat{H} = \hbar\left(-\frac{\omega_1}{2}\widehat{\sigma}_{z,1} - \frac{\omega_2}{2}\widehat{\sigma}_{z,2} + g\,\widehat{\sigma}_{y,1}\widehat{\sigma}_{y,2}\right)$$

Portes à 2 qubits

2.5. Diagonaliser $\hat{H}$. On pourra remarquera que les sous-espace $\{|00\rangle\,|11\rangle\}$ et $\{|01\rangle\,|10\rangle\}$ sont stables par $\hat{H}$. On introduira ω_1 et ω_2 les fréquences des 2 qubits.

Dans la base , l'Hamiltonien s'écrit

$$\widehat{H}=\hbar\left(-\frac{\omega_1}{2}\widehat{\sigma}_{z,1}-\frac{\omega_2}{2}\widehat{\sigma}_{z,2}+g\,\widehat{\sigma}_{y,1}\widehat{\sigma}_{y,2}\right)$$

$$¿-\hbar\frac{\omega_1+\omega_2}{2}+\hbar\begin{pmatrix} 0 & -g & 0 & 0 \\ -g & (\omega_1+\omega_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_1 & g \\ 0 & 0 & g & \omega_2 \end{pmatrix}$$

L'Hamiltonien est diagonal par bloc, on peut donc le diagonaliser indépendamment sur puis .

Portes à 2 qubits

2.5. Diagonaliser $\hat{H}$. On pourra remarquera que les sous-espace $\{|00\rangle\, |11\rangle\}$ et $\{|01\rangle\, |10\rangle\}$ sont stables par $\hat{H}$. On introduira ω_1 et ω_2 les fréquences des 2 qubits.

Sur , on a $$\widehat{H} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -(\omega_1+\omega_2) & -2g \\ -2g & \omega_1+\omega_2 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\Omega_e \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

avec $$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\omega_1+\omega_2}{\Omega_e} \\ \sin\alpha = \dfrac{2g}{\Omega_e} \end{cases}$$ et $$\Omega_e = \sqrt{(\omega_1+\omega_2)^2 + 4g^2}$$

Les énergies propres sont donc $\omega_{-e} = -\frac{\hbar}{2}\Omega_e$ et $\omega_{+e} = \frac{\hbar}{2}\Omega_e$

associés aux états propres $$¿ -\rangle_e = \begin{pmatrix} c\,os\,\dfrac{\alpha}{2} \\ \sin\dfrac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$$ ¿ ¿

Rem : « e » ici signifie « even », c'est-à-dire pair car il y a 2 excitations ou 0.

Portes à 2 qubits

quantum | université PARIS-SACLAY

2.5. Diagonaliser $\hat{H}$. On pourra remarquera que les sous-espace $\{|00\rangle\,|11\rangle\}$ et $\{|01\rangle\,|10\rangle\}$ sont stables par $\hat{H}$. On introduira ω_1 et ω_2 les fréquences des 2 qubits.

Sur , on a $$\widehat{H}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} -(\omega_1-\omega_2) & 2g \\ 2g & (\omega_1-\omega_2) \end{pmatrix}=-\frac{\hbar}{2}\Omega_o\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ -\sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$$

avec $$\begin{cases} \cos\beta=\dfrac{\omega_1-\omega_2}{\Omega_o} \\ \sin\beta=\dfrac{2g}{\Omega_o} \end{cases}$$ et $$\Omega_o=\sqrt{(\omega_1-\omega_2)^2+4g^2}$$

Les énergies propres sont donc $\omega_{-o}=-\frac{\hbar}{2}\Omega_o$ et $\omega_{+o}=\frac{\hbar}{2}\Omega_o$

associés aux états propres $$¿-\rangle_o=\begin{pmatrix} c\,os\,\dfrac{\beta}{2} \\ -\sin\dfrac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$ ¿ ¿

Rem : « o » ici signifie « odd », c'est-à-dire impair car il y a 1 excitation.

Portes à 2 qubits

2.6. Montrer que l'on peut alors écrire un Hamiltonien d'interaction sous la forme

$$\widehat{H}_{int} = \hbar g \text{ ¿}$$

dans le cas de deux qubits identiques et d'un couplage faible c'est à dire quand $g \ll \omega_{1,2}$.

On vient d'identifier les pulsations propres et états propres suivants

« even »

$$\omega_{-e} = -\frac{\hbar}{2}\Omega_e \qquad \omega_{+e} = \frac{\hbar}{2}\Omega_e$$

$$\text{¿} - \rangle_e = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \text{¿ ¿}$$

« odd »

$$\omega_{-o} = -\frac{\hbar}{2}\Omega_o \qquad \omega_{+o} = \frac{\hbar}{2}\Omega_o$$

$$\text{¿} - \rangle_o = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} \\ -\sin\frac{\beta}{2} \end{pmatrix} \text{¿ ¿}$$

avec
$$\begin{cases} \cos(\alpha \, ou \, \beta) = \dfrac{\omega_1 \pm \omega_2}{\Omega_{e,o}} \\ \sin(\alpha \, ou \, \beta) = \dfrac{2g}{\Omega_{e,o}} \end{cases} \qquad \Omega_{e,o} = \sqrt{(\omega_1 \pm \omega_2)^2 + 4g^2}$$

Portes à 2 qubits

2.6. Montrer que l'on peut alors écrire un Hamiltonien d'interaction sous la forme

$$\widehat{H}_{int} = \hbar g \text{ ¿}$$

dans le cas de deux qubits identiques et d'un couplage faible c'est à dire quand $g \ll \omega_{1,2}$.

pour et , ils deviennent

« even »

$$\omega_{\pm e} \approx \pm \frac{\hbar}{2}\left(\omega_1 + \omega_2\right)$$

$$\text{¿} - \rangle_e \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ¿ ¿}$$

car

« odd »

$$\omega_{-o} = -\hbar g \qquad \omega_{+o} = \hbar g$$

$$\text{¿} - \rangle_o = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ ¿ ¿}$$

car

Dans cette limite, l'Hamiltonien d'interaction ne couple donc que les états du sous-espace . On remarque par ailleurs que les vecteurs propres résultants de ce couplage sont ceux de l'opérateur . On peut donc bien écrire comme indiqué dans l'énoncé.

Portes à 2 qubits

$$\hat{H}_{int} = g(|01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|)$$

2.7. Ecrire l'opérateur d'évolution associé, puis proposer un protocole pour réaliser les portes $iSWAP$ et $\sqrt{iSWAP}$.

Un porte correspond à l'inversion de l'état de 2 qubits accompagnée d'une multiplication de la fonction d'onde par un facteur .

Dans la base , cela correspond à

$$iSWAP \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

Un porte sert à générer une superposition d'état de type Bell, par exemple .

$$\sqrt{iSWAP} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

On parle de la racine carré de car deux portes consécutives donne .

Portes à 2 qubits

quantum | université PARIS-SACLAY

2.7. Ecrire l'opérateur d'évolution associé, puis proposer un protocole pour réaliser les portes $iSWAP$ et $\sqrt{iSWAP}$.

Un état évolue selon

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) \vee \psi\rangle$$

où est l'opérateur d'évolution pour un temps .

Dans les conditions définies dans la question 2.6, et dans la base , il s'écrit

$$\hat{U}(t) = e^{-igt(|01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|)}$$

Portes à 2 qubits

2.7. Ecrire l'opérateur d'évolution associé, puis proposer un protocole pour réaliser les portes $iSWAP$ et $\sqrt{iSWAP}$.

Un état évolue selon

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{U}(t) \vee \psi \rangle$$

où est l'opérateur d'évolution pour un temps .

Dans les conditions définies dans la question 2.6, et dans la base , il s'écrit

$$\hat{U}(t) = e^{-igt\left(|01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|\right)} = e^{-igt\,\hat{\sigma}_x} = \cos(gt\,\hat{\sigma}_x) - i\sin(gt\,\hat{\sigma}_x)$$

En développant le cosinus et le sinus en série de Taylor, on montre aisément

$$\hat{U}(t) = \cos(gt) - i\sin(gt)\,\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} \cos(gt) & -i\sin(gt) \\ -i\sin(gt) & \cos(gt) \end{bmatrix}$$

car

Portes à 2 qubits

2.7. Ecrire l'opérateur d'évolution associé, puis proposer un protocole pour réaliser les portes $iSWAP$ et $\sqrt{iSWAP}$.

Un état évolue selon

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \hat{U}(t) \vee \psi \rangle$$

où est l'opérateur d'évolution pour un temps .

Dans les conditions définies dans la question 2.6, et dans la base , il s'écrit

$$\hat{U}(t) = e^{-igt(|01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|)} = e^{-igt\,\hat{\sigma}_x} = \cos(gt\,\hat{\sigma}_x) - i\sin(gt\,\hat{\sigma}_x)$$

En développant le cosinus et le sinus en série de Taylor, on montre aisément

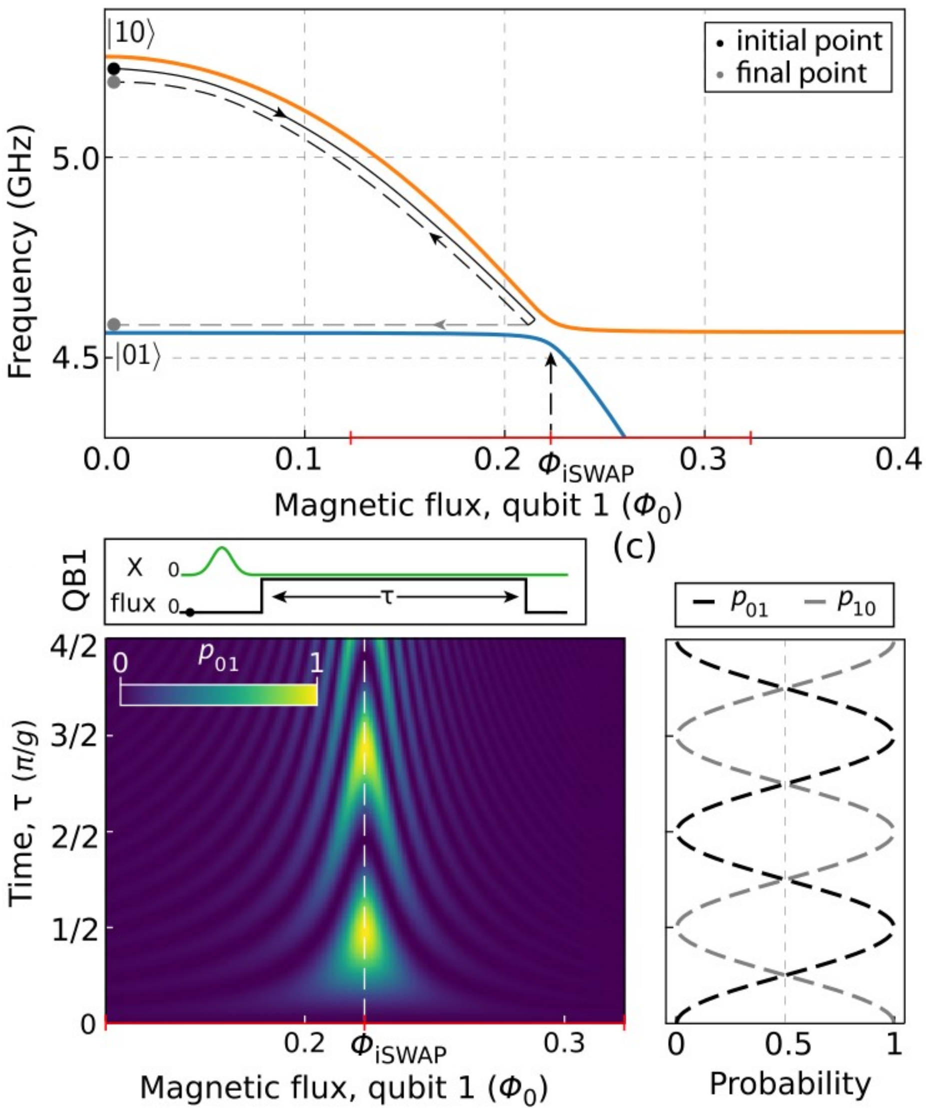
$$\hat{U}(t) = \cos(gt) - i\sin(gt)\,\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} \cos(gt) & -i\sin(gt) \\ -i\sin(gt) & \cos(gt) \end{bmatrix}$$

car

On voit que cette matrice devient pour et pour .

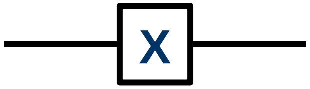
Portes à 2 qubits

Pour effectuer ces portes, il suffit que l'un des qubits soit ajustable en fréquence (en utilisant un SQUID). Ainsi, quand les qubits ne peuvent pas échanger d'énergie. Il est donc possible de contrôler le temps d'interaction entre les 2 qubits en les mettant à la même fréquence le temps désiré. Par exemple , pour un .

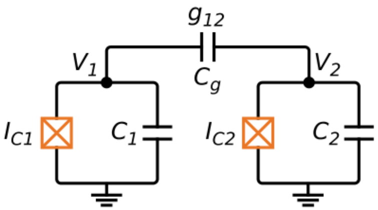


QH3 - Qubits supraconducteurs II

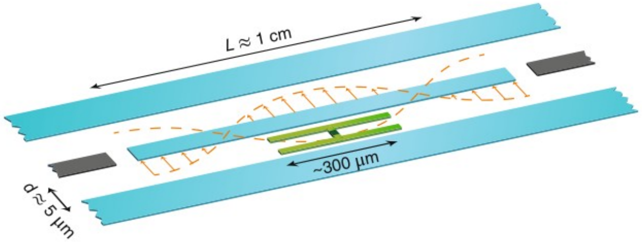
1. Manipuler un qubit : les portes X, Y et Z



2. Couplage de 2 qubits



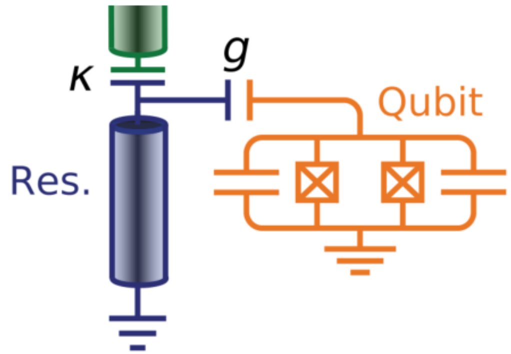
3. Lecture d’un Qubit avec une ca



jean-damien.pillet@polytechnique.edu

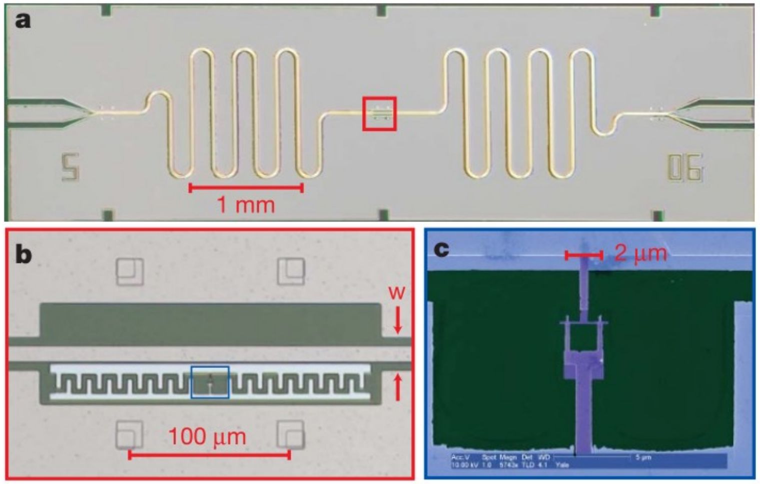
Lecture QND d'un qubit en cavité

La lecture rapide et fiable des qubits est une pierre angulaire importante de tout processeur quantique. La technique de lecture la plus couramment utilisée repose sur une architecture cQED dans laquelle chaque qubit est couplé à un résonateur de lecture. Dans le régime dispersif, c'est-à-dire lorsque le qubit est désaccordé par rapport à la fréquence du résonateur, le qubit induit un décalage de fréquence du résonateur en fonction son état qui peut donc être déduit en interrogeant le résonateur.

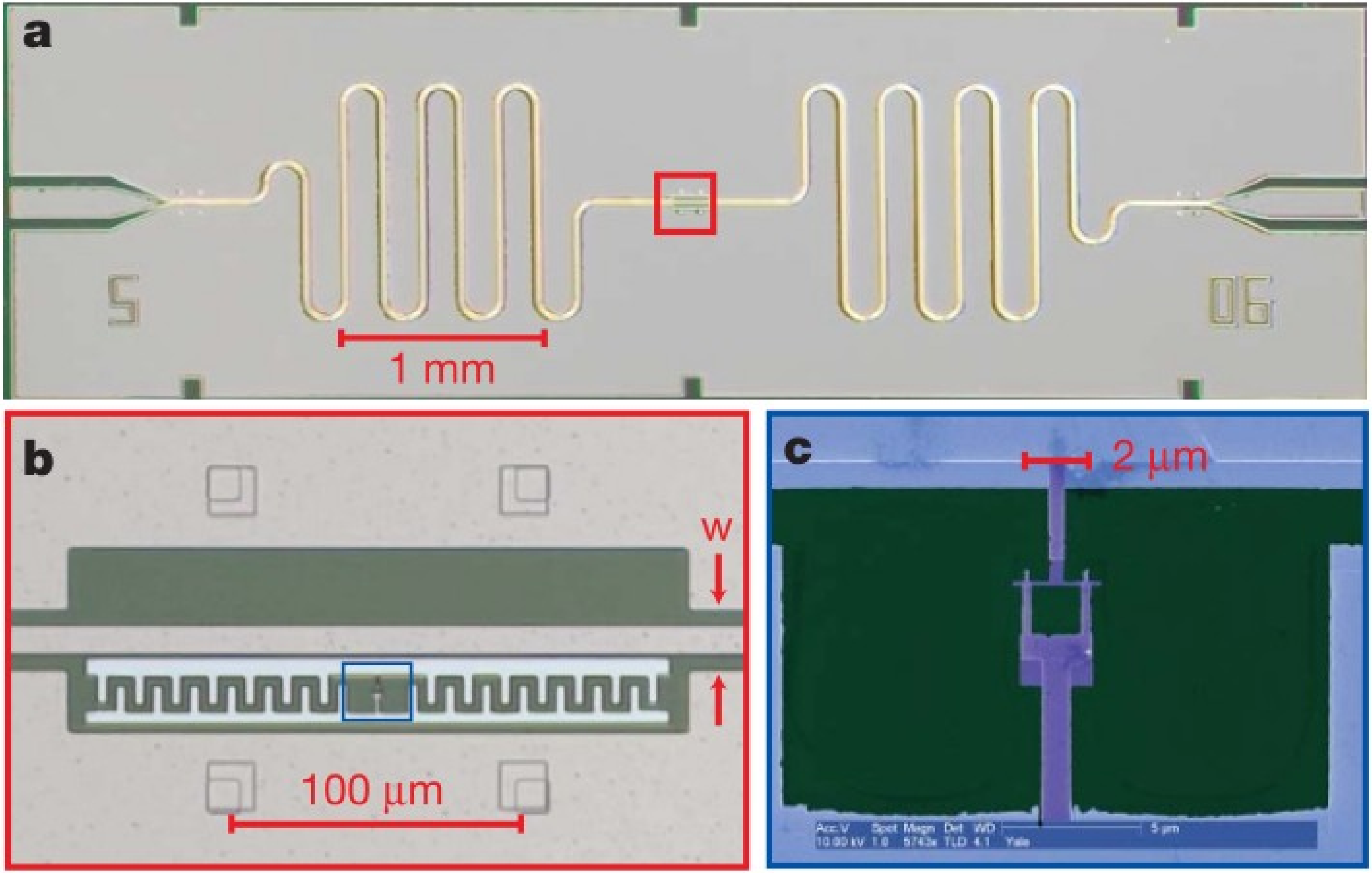


3.1. En s'inspirant de l'exercice précédent, justifier la forme de l'Hamiltonien suivant

$$\hat{H} = \hbar\omega_r(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) - \frac{\hbar\omega_q}{2}\sigma_z + \hbar g(\hat{a}^\dagger|0\rangle\langle 1| + \hat{a}|1\rangle\langle 0|)$$

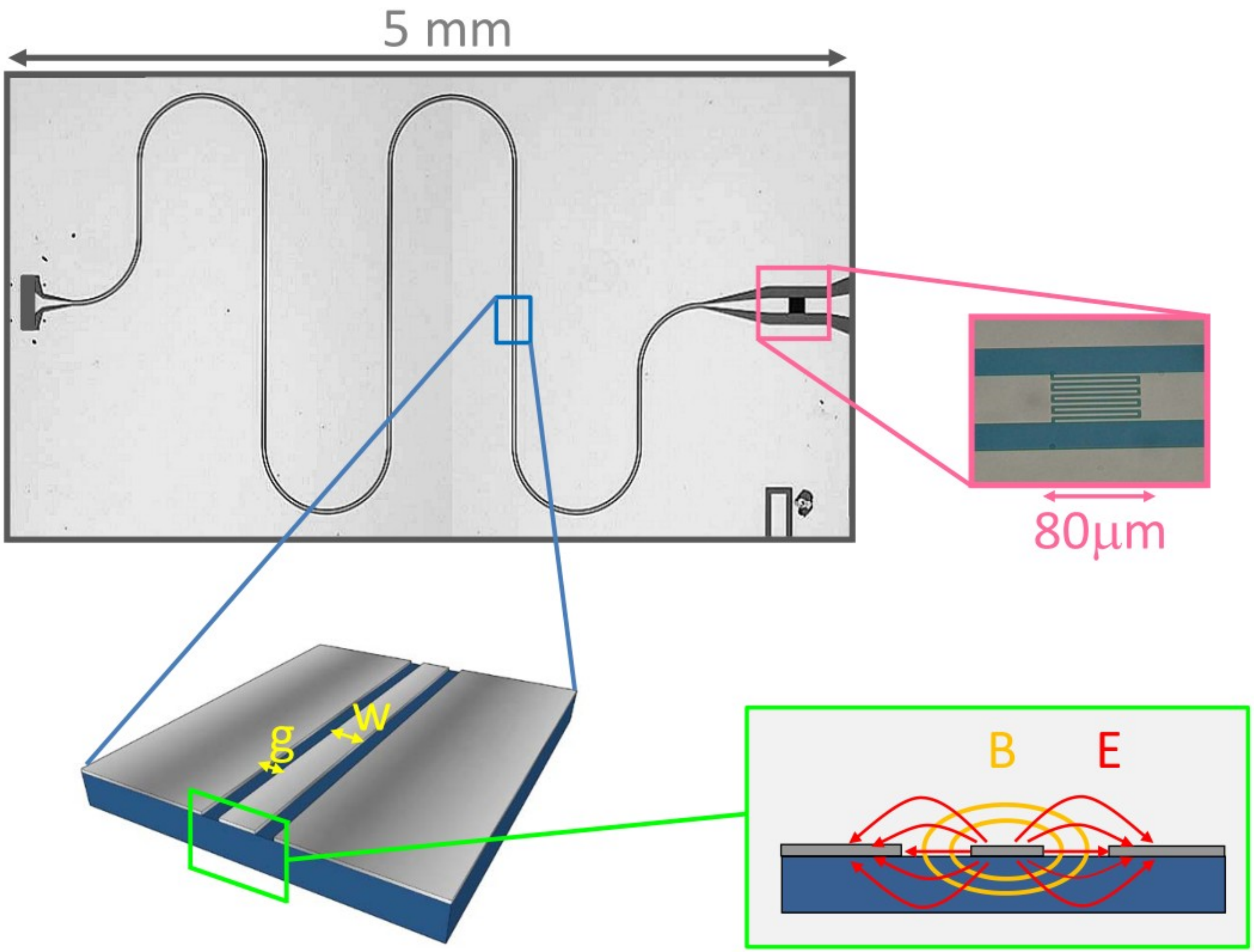


Lecture QND d’un qubit en cavité



La cavité (ou résonateur)

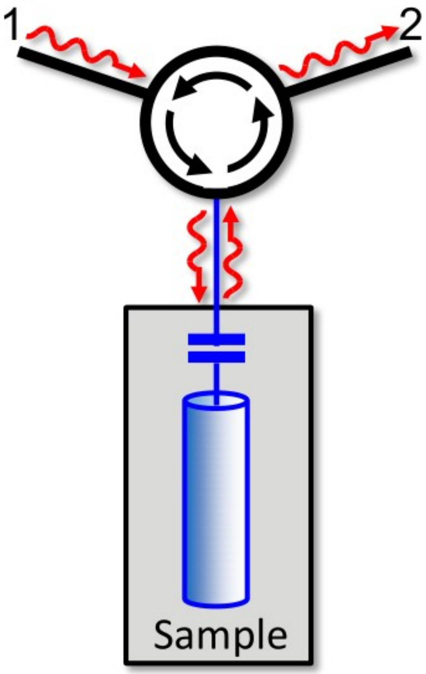
Implémentation

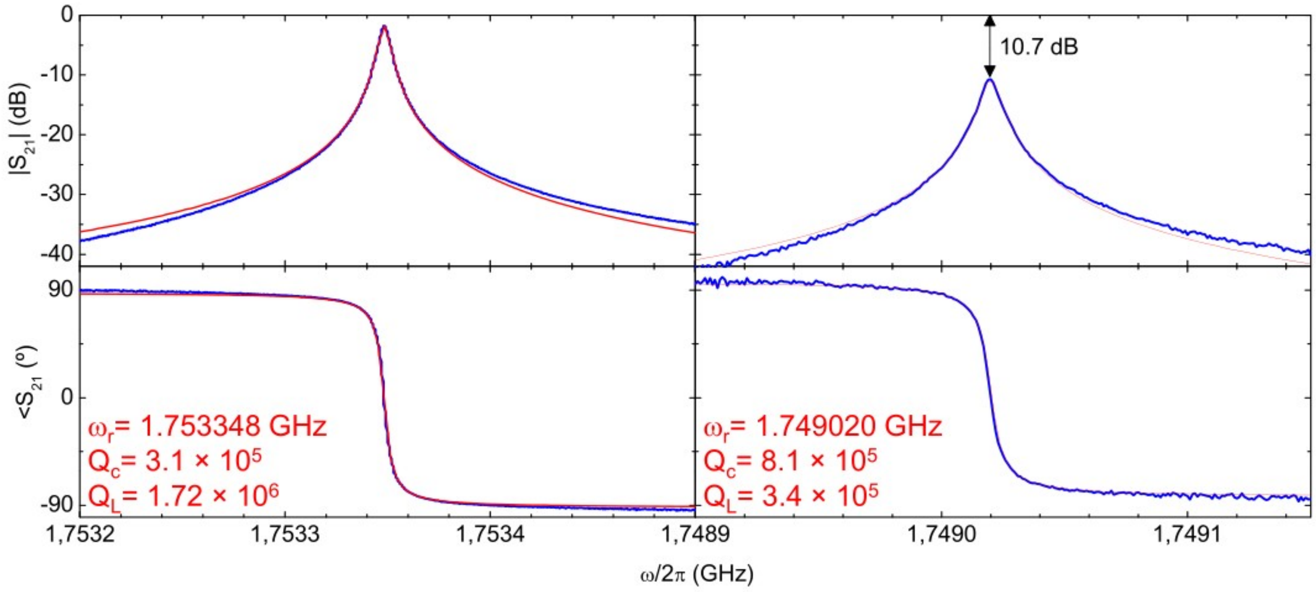


Thèse d'Augustin Palacios-Laloy – groupe Quantronics

La cavité (ou résonateur)

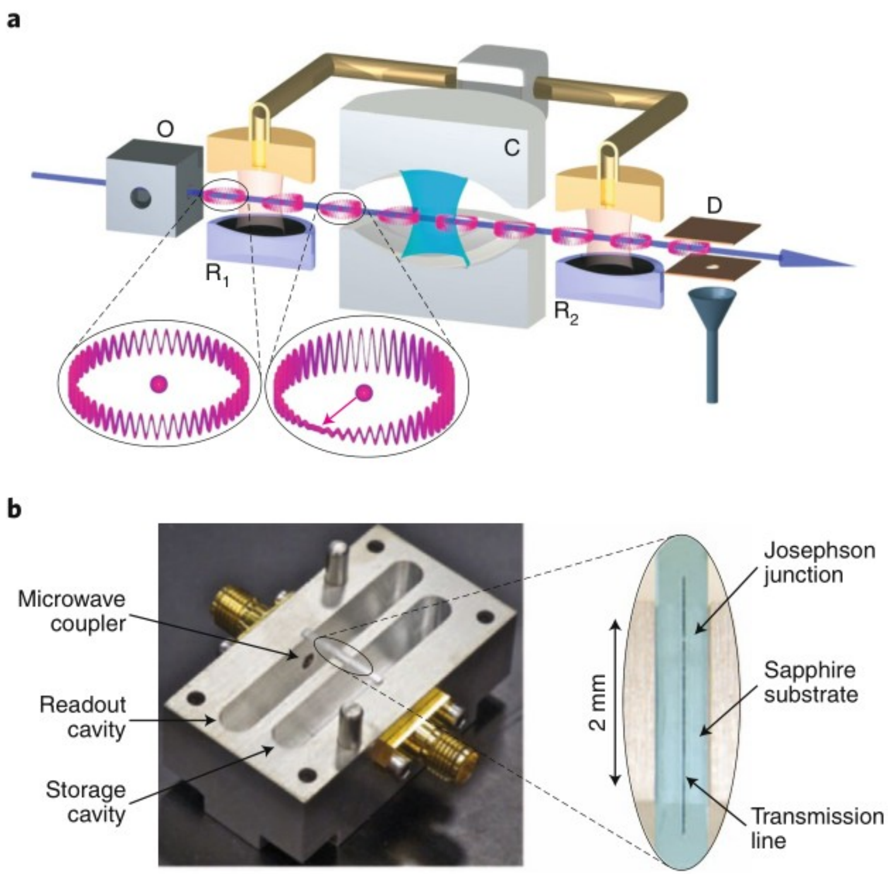
Mesure de la cavité en réflexion





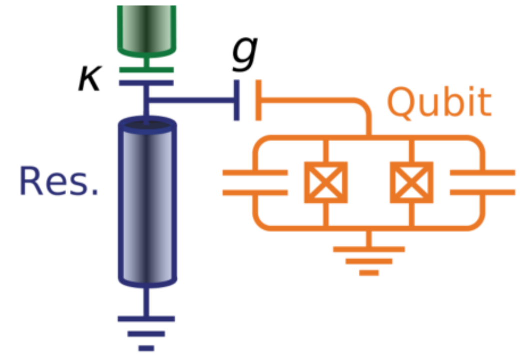
La cavité (ou résonateur)

Cavité 3D inspirée de la physique atomique



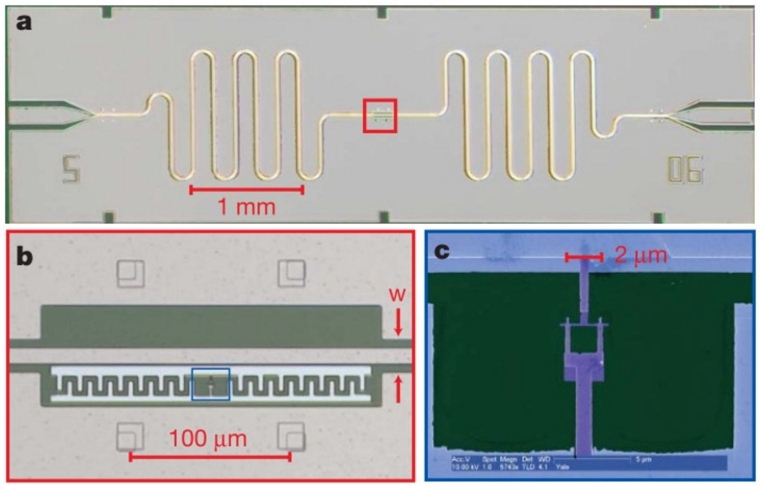
Lecture QND d'un qubit en cavité

La lecture rapide et fiable des qubits est une pierre angulaire importante de tout processeur quantique. La technique de lecture la plus couramment utilisée repose sur une architecture cQED dans laquelle chaque qubit est couplé à un résonateur de lecture. Dans le régime dispersif, c'est-à-dire lorsque le qubit est désaccordé par rapport à la fréquence du résonateur, le qubit induit un décalage de fréquence du résonateur en fonction son état qui peut donc être déduit en interrogeant le résonateur.



3.1. En s'inspirant de l'exercice précédent, justifier la forme de l'Hamiltonien suivant

$$\hat{H} = \hbar\omega_r(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) - \frac{\hbar\omega_q}{2}\sigma_z + \hbar g(\hat{a}^\dagger|0\rangle\langle 1| + \hat{a}|1\rangle\langle 0|)$$



Lecture QND d'un qubit en cavité

3.1. En s'inspirant de l'exercice précédent, justifier la forme de l'Hamiltonien suivant

$$\hat{H} = \hbar\omega_r(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) - \frac{\hbar\omega_q}{2}\sigma_z + \hbar g(\hat{a}^\dagger|0\rangle\langle 1| + \hat{a}|1\rangle\langle 0|)$$

Dans l'exercice précédent, on a vu que l'Hamiltonien de 2 transmons couplés capacitivement était donné par

$$\widehat{H} = \hbar\left(-\frac{\omega_1}{2}\widehat{\sigma}_{z,1} - \frac{\omega_2}{2}\widehat{\sigma}_{z,2} + g\left(|01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|\right)\right)$$

ce qui provenait de la restriction au sous-espace .

Lecture QND d'un qubit en cavité

3.1. En s'inspirant de l'exercice précédent, justifier la forme de l'Hamiltonien suivant

$$\hat{H} = \hbar\omega_r(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) - \frac{\hbar\omega_q}{2}\sigma_z + \hbar g(\hat{a}^\dagger|0\rangle\langle 1| + \hat{a}|1\rangle\langle 0|)$$

Dans l'exercice précédent, on a vu que l'Hamiltonien de 2 transmons couplés capacitivement était donné par

$$\widehat{H} = \hbar\left(-\frac{\omega_1}{2}\widehat{\sigma}_{z,1} - \frac{\omega_2}{2}\widehat{\sigma}_{z,2} + g\left(|01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|\right)\right)$$

ce qui provenait de la restriction au sous-espace .

Si l'on remplace un des transmons par un résonateur se comportant comme un oscillateur harmonique alors il n'est pas pertinent d'effectuer cette restriction, ce qui donne

$$\widehat{H} = \hbar\omega_r\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar\omega_q}{2}\widehat{\sigma}_z + \hbar g\left(\hat{a}|1\rangle\langle 0| + \hat{a}^\dagger|0\rangle\langle 1|\right)$$

où le dernier terme correspond à un échange de photon entre le résonateur et le qubit plutôt qu'entre 2 qubits.

Lecture QND d'un qubit en cavité

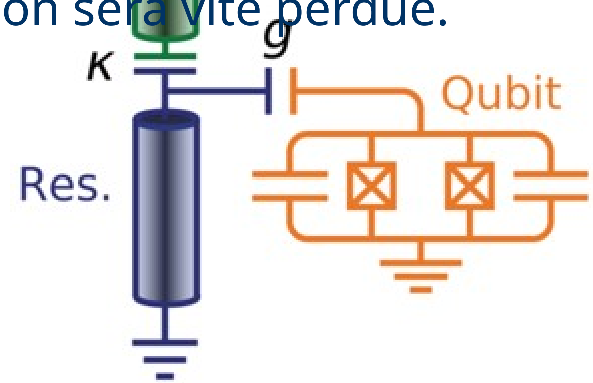
3.2. Sans calcul, justifier pourquoi le résonateur ne permettrait pas d'effectuer de lecture QND si on avait $\omega_r \approx \omega_q$.

Lecture QND d’un qubit en cavité

3.2. Sans calcul, justifier pourquoi le résonateur ne permettrait pas d’effectuer de lecture QND si on avait $\omega_r \approx \omega_q$.

Une mesure QND signifie que l’on **préserve l’état du qubit une fois qu’il est mesuré**. Ainsi, s’il a été mesuré dans l’état ou , le qubit doit ensuite rester dans cette état. Cela est utile pour effectuer des opérations de projections du qubit.

Si on utilise le résonateur pour effectuer cette mesure, il est donc très important que la fréquence du résonateur soit très différente de celle du qubit. En effet, dans le cas **le qubit peut relaxer de l’état vers l’état** en transférant son excitation dans le résonateur. Comme ce dernier est connecté vers le monde exterieur, cette excitation sera vite perdue.



La mesure ne sera alors pas QND.

Lecture QND d'un qubit en cavité

3.3. En remarquant que le sous-espace $\{|0, n+1\rangle, |1, n\rangle\}$ est stable par $\hat{H}$, montrer que diagonaliser l'Hamiltonien revient à diagonaliser une matrice 2×2. Donner ses valeurs propres.

$$\widehat{H} = \hbar\omega_r\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar g\left(\hat{a}|1\rangle\langle 0| + \hat{a}^\dagger|0\rangle\langle 1|\right)$$

Lecture QND d'un qubit en cavité

3.3. En remarquant que le sous-espace $\{|0, n+1\rangle, |1, n\rangle\}$ est stable par $\hat{H}$, montrer que diagonaliser l'Hamiltonien revient à diagonaliser une matrice 2×2. Donner ses valeurs propres.

Il est clair que l'Hamiltonien

$$\widehat{H} = \hbar \omega_r \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) - \frac{\hbar \omega_q}{2} \widehat{\sigma}_z + \hbar g \left(\hat{a} |1\rangle\langle 0| + \hat{a}^\dagger |0\rangle\langle 1| \right)$$

conserve le nombre d'excitation totale. On a ainsi

$$\widehat{H} |0, n+1\rangle = \left[\hbar \omega_r \left(n + \frac{3}{2} \right) - \frac{\hbar \omega_q}{2} \right] |0, n+1\rangle + \hbar g \sqrt{n+1} |1, n\rangle$$

$$\widehat{H} |1, n\rangle = \left[\hbar \omega_r \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar \omega_q}{2} \right] |1, n\rangle + \hbar g \sqrt{n+1} |0, n+1\rangle$$

On peut donc diagonaliser séparemment sur les sous-espace

Lecture QND d'un qubit en cavité

3.3. En remarquant que le sous-espace $\{|0, n+1\rangle, |1, n\rangle\}$ est stable par $\hat{H}$, montrer que diagonaliser l'Hamiltonien revient à diagonaliser une matrice 2×2. Donner ses valeurs propres.

Cela revient à diagonaliser la matrice (on a ôté la constante)

$$\mathscr{H}_{n+1} = \hbar \begin{pmatrix} (n+1)\,\omega_r - \dfrac{\omega_q}{2} & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & n\,\omega_r + \dfrac{\omega_q}{2} \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont

$$E_{\pm}^{(n)} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\,\omega_r \pm \frac{\hbar}{2}\sqrt{\left(\omega_r - \omega_q\right)^2 + 4\,g^2\,(n+1)}$$

Lecture QND d'un qubit en cavité

3.4. On se place dans la limite dispersive, c'est à dire que l'on a $\Delta = |\omega_q - \omega_r| \gg g$. Montrer que la fréquence de la cavité est donnée par $\omega_r \pm \chi$ selon que le qubit est dans $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Que vaut χ ? Construire un Hamiltonien effectif ayant les bonnes valeurs propres.

Les énergies propres de dans le sous-espace sont

$$E_{\pm}^{(n+1)} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_r \pm \frac{\hbar}{2}\sqrt{\Delta^2+4g^2(n+1)}$$

Lecture QND d’un qubit en cavité

3.4. On se place dans la limite dispersive, c’est à dire que l’on a $\Delta = |\omega_q - \omega_r| \gg g$. Montrer que la fréquence de la cavité est donnée par $\omega_r \pm \chi$ selon que le qubit est dans $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Que vaut χ ? Construire un Hamiltonien effectif ayant les bonnes valeurs propres.

Les énergies propres de dans le sous-espace sont

$$E_{\pm}^{(n+1)} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_r \pm \frac{\hbar}{2}\sqrt{\Delta^2+4g^2(n+1)}$$

Dans la limite dispersive , cela devient (prenons)

$$E_{\pm}^{(n+1)} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_r \pm \frac{\hbar}{2}\Delta\left(1+\frac{2g^2}{\Delta^2}(n+1)\right)$$

On remarquera que le couplage entre le qubit et le résonateur induit une petite correction d’énergie. Cependant, on peut vérifier (à la maison) que les états propres associés sont quasiment inchangés

¿ ¿ $|-\rangle_{n+1} \approx |0, n+1\rangle$

Lecture QND d'un qubit en cavité

quantum | université PARIS-SACLAY

3.4. On se place dans la limite dispersive, c'est à dire que l'on a $\Delta = |\omega_q - \omega_r| \ll g$. Montrer que la fréquence de la cavité est donnée par $\omega_r \pm \chi$ selon que le qubit est dans $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Que vaut χ ? Construire un Hamiltonien effectif ayant les bonnes valeurs propres.

On peut réécrire ces énergies sous la forme

$$|-\rangle_n \approx |0, n\rangle \qquad E_-^{(n)} = n\hbar\left(\omega_r - \frac{g^2}{\Delta}\right) - \frac{\hbar}{2}\omega_q$$

¿ ¿ $E_{+¿}^{(n+1)} = n\hbar\left(\omega_r + \frac{g^2}{\Delta}\right) + \frac{\hbar}{2}\omega_q + \hbar\frac{g^2}{\Delta}$ ¿

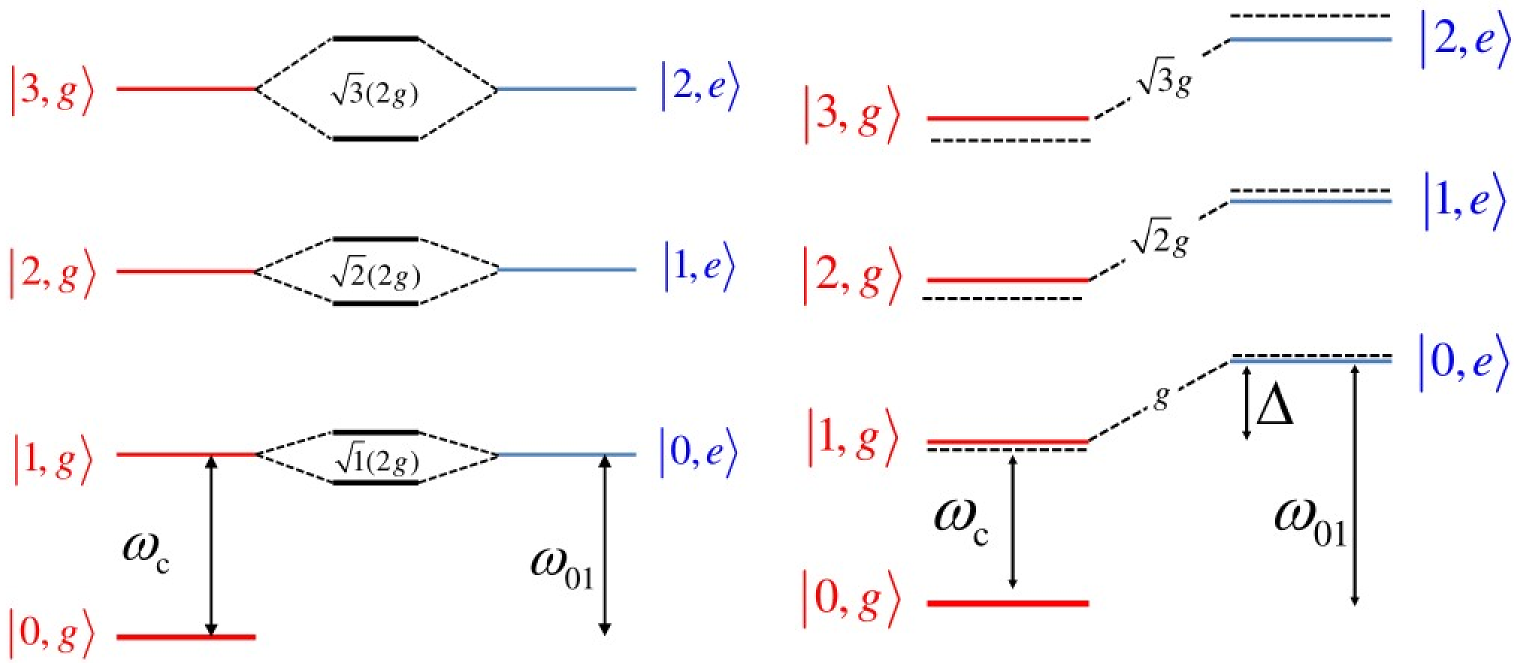
On constate que si le qubit est dans l'état , alors photons contenus dans le résonateur ajoute une énergie par photon, alors que si le qubit est dans l'état alors cette énergie vaut . **La fréquence du résonateur dépend donc bien de l'état du qubit avec un « cavity pull » .**

Par ailleurs, on constate que l'état 1 du qubit a légèrement augmenté de . C'est ce qu'on appelle le « Lamb shift ». Il est dû aux fluctuations du vide dans le résonateur.

Lecture QND d'un qubit en cavité

quantum | université PARIS-SACLAY

3.4. On se place dans la limite dispersive, c'est à dire que l'on a $\Delta = |\omega_q - \omega_r| \ll g$. Montrer que la fréquence de la cavité est donnée par $\omega_r \pm \chi$ selon que le qubit est dans $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Que vaut χ ? Construire un Hamiltonien effectif ayant les bonnes valeurs propres.



Lecture QND d'un qubit en cavité

3.4. On se place dans la limite dispersive, c'est à dire que l'on a $\Delta = |\omega_q - \omega_r| \ll g$. Montrer que la fréquence de la cavité est donnée par $\omega_r \pm \chi$ selon que le qubit est dans $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Que vaut χ ? Construire un Hamiltonien effectif ayant les bonnes valeurs propres.

A partir de ces considérations, on peut construire un Hamiltonien effectif

$$\widetilde{H} = \hbar\left(\omega_r + \chi\,\hat{\sigma}_z\right)\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{\hbar\,\widetilde{\omega}_q}{2}\hat{\sigma}_z \quad \text{avec} \quad \widetilde{\omega}_q = \omega_q + \frac{g^2}{\Delta}$$

3.5. Pourquoi dit-on que cette mesure est QND ?

Lecture QND d'un qubit en cavité

quantum | université PARIS-SACLAY

3.4. On se place dans la limite dispersive, c'est à dire que l'on a $\Delta = |\omega_q - \omega_r| \ll g$. Montrer que la fréquence de la cavité est donnée par $\omega_r \pm \chi$ selon que le qubit est dans $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Que vaut χ ? Construire un Hamiltonien effectif ayant les bonnes valeurs propres.

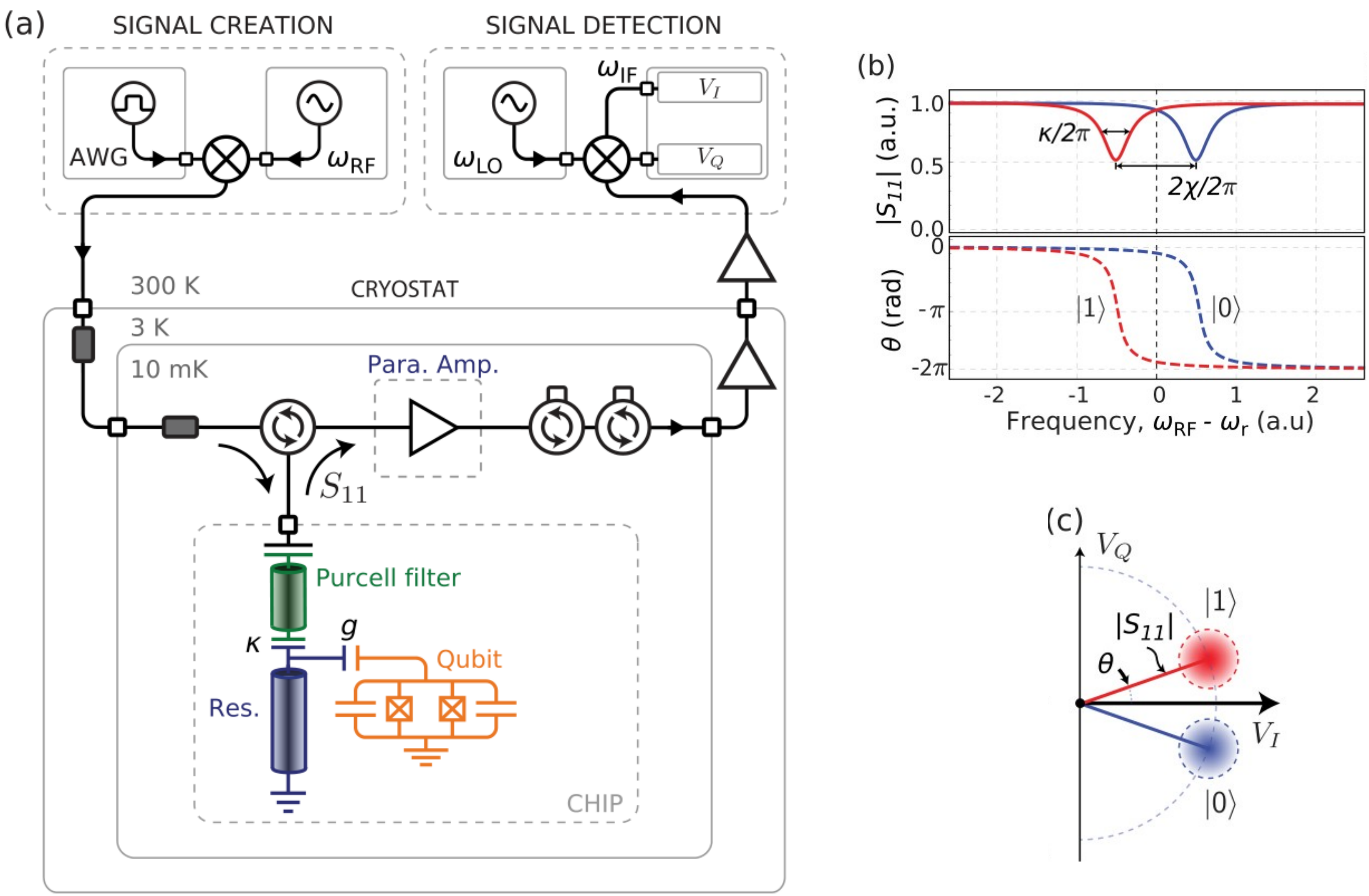
A partir de ces considérations, on peut construire un Hamiltonien effectif

$$\widetilde{H} = \hbar\left(\omega_r + \chi\,\hat{\sigma}_z\right)\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{\hbar\widetilde{\omega}_q}{2}\hat{\sigma}_z \quad \text{avec} \quad \widetilde{\omega}_q = \omega_q + \frac{g^2}{\Delta}$$

3.5. Pourquoi dit-on que cette mesure est QND ?

Comme (le detuning) est grand le qubit ne peut pas laisser son énergie échapper dans la cavité, il reste donc dans l'état si la mesure l'y a projeté. De même s'il est projeté dans l'état , il y reste car les photons du résonateur ne peuvent pas venir le peupler.

Commen fait-on en pratique ?



Lecture QND d'un qubit en cavité

quantum | université PARIS-SACLAY

3.6. Montrer que l'on peut également utiliser le qubit pour mesurer le nombre de photons dans la cavité. Quel critère est selon vous nécessaire pour que cela soit possible ?

On a

$$\widetilde{H} = \hbar\left(\omega_r + \chi\,\hat{\sigma}_z\right)\hat{a}^\dagger\,\hat{a} - \frac{\hbar\,\widetilde{\omega}_q}{2}\hat{\sigma}_z \qquad \text{avec} \qquad \widetilde{\omega}_q = \omega_q + \frac{g^2}{\Delta}$$

Lecture QND d'un qubit en cavité

3.6. Montrer que l'on peut également utiliser le qubit pour mesurer le nombre de photons dans la cavité. Quel critère est selon vous nécessaire pour que cela soit possible ?

On a

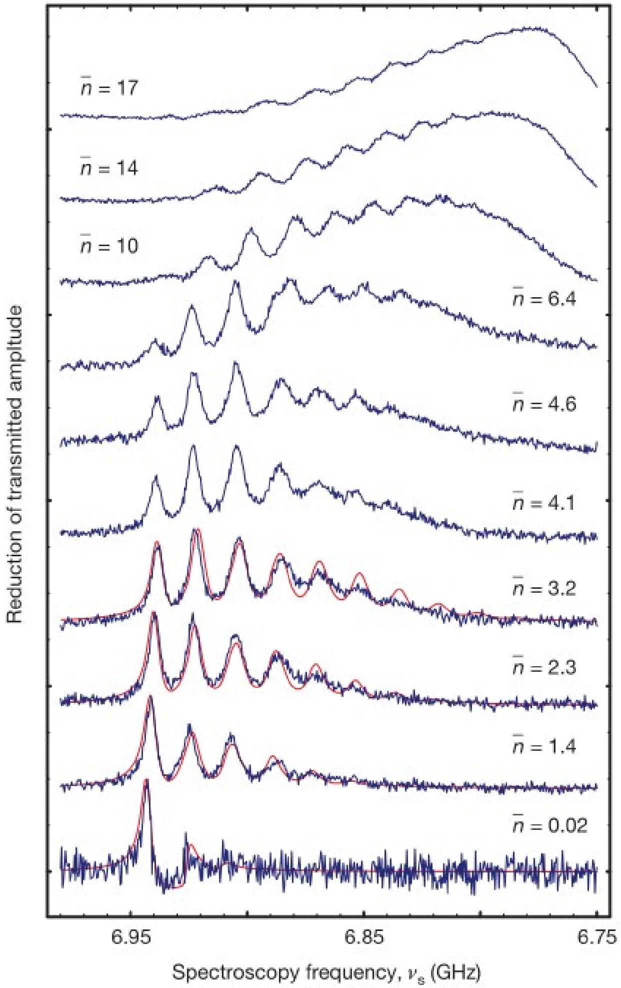
$$\widetilde{H} = \hbar\left(\omega_r + \chi\,\hat{\sigma}_z\right)\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{\hbar\widetilde{\omega}_q}{2}\hat{\sigma}_z \quad \text{avec} \quad \widetilde{\omega}_q = \omega_q + \frac{g^2}{\Delta}$$

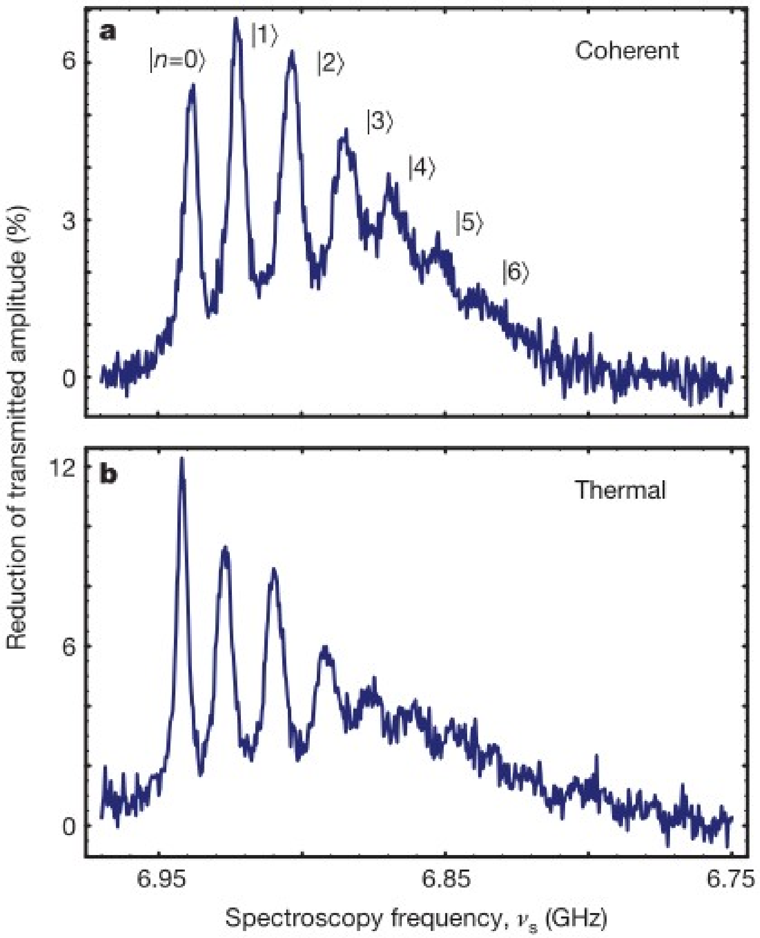
que l'on peut réécrire

$$\widetilde{H} = \hbar\,\omega_r\hat{a}^\dagger\hat{a} - \frac{\hbar\left(\widetilde{\omega}_q + 2\chi\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)}{2}\hat{\sigma}_z \quad \text{avec} \quad \widetilde{\omega}_q = \omega_q + \frac{g^2}{\Delta}$$

Dans cette écriture, on voit que l'énergie correspondant à la transition en 0 et 1 dépend du nombre de photons dans le résonateur.

Compter les photons



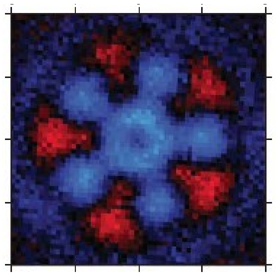


chuster D., *et al.* **Resolving photon number states in a superconducting circuit.** ***Nature*** **445, 515–518 (200**

State preparation in microwave quantum optics

quantum | université PARIS-SACLAY

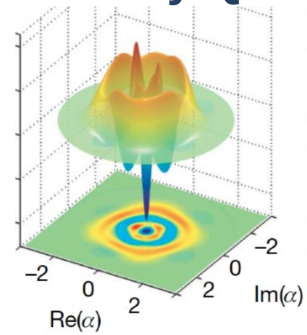
Fock states and superpositions

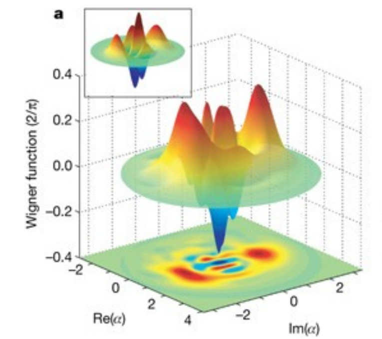


$$|0\rangle + |5\rangle$$

M. Hofheinz *et al.*, *Nature* 2010

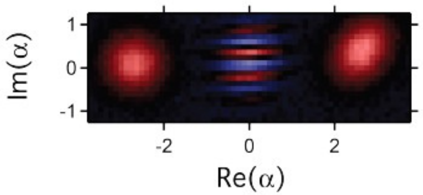
Cavity QED (Haroche, Paris)

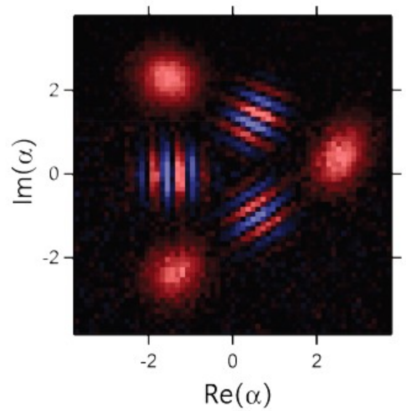




Schrödinger cats

$$|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle \qquad |\alpha\rangle + |e^{i\frac{2\pi}{3}}\alpha\rangle + |e^{i\frac{4\pi}{3}}\alpha\rangle$$



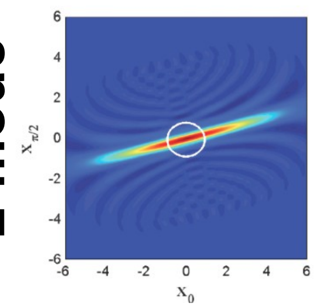


G. Kirchmair *et al.*, *Nature* 2013

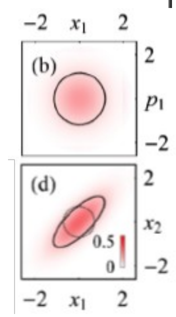
Squeezed vacuum state

$$e^{ra^{\dagger 2} - r^* a^2}|0\rangle \qquad e^{ra^\dagger b^\dagger - r^* ab}|0,0\rangle$$

1-mode



2-mode



F. Mallet *et al.*, *PRL* 2011

C. Eichler *et al.*, *PRL* 2011