

Examen de physique non-linéaire

Les notes de cours et de TD, ainsi que la calculatrice, ne sont pas autorisées.

1 Exercices de cours

Les exercices sont indépendants.

1.1 Bifurcation transcritique

La bifurcation transcritique apparaît dans une équation différentielle de la forme

$$\dot{x} = rx - x^2 \quad (1)$$

1. Quels sont les points fixes ?
2. Etudier leur stabilité.
3. Rappeler le principe d'un diagramme de bifurcation. Tracer le diagramme de bifurcation.
4. Justifier brièvement pourquoi on dit couramment que les points fixes "échangent leur stabilité" à la bifurcation dans le cas de la bifurcation transcritique.

1.2 Application discrète

On considère l'application discrète $x_{n+1} = x_n^2$.

1. Donner ses points fixes et déterminer leur stabilité.
2. Justifier la stabilité de chacun des points fixes par un diagramme de "toile d'araignée".

1.3 Oscillateur

On considère l'équation différentielle

$$\ddot{x} - \alpha(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \alpha > 0 \quad (2)$$

1. Comment s'appelle cet oscillateur ?
2. Donner une interprétation physique (brève) à chacun des termes.
3. Mettre cette équation différentielle sous forme normale.
4. Du chaos peut-il apparaître ?
5. Trouver un point fixe trivial et calculer sa stabilité.

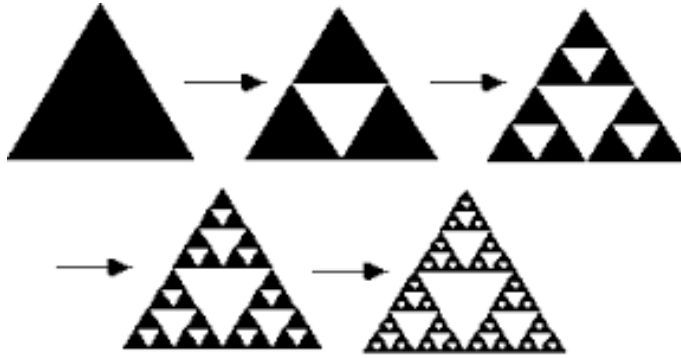


FIGURE 1 – Tapis de Sierpinski

1.4 Dimension fractale de l'ensemble de Sierpinski

L'ensemble de Sierpinski est défini comme l'ensemble limite issu de la procédure décrite à la figure 1. Que vaut la dimension fractale de l'ensemble de Sierpinski ? On utilisera la dimension de boîte définie par

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln[M(\epsilon)]}{\ln(1/\epsilon)} \quad (3)$$

où $M(\epsilon)$ est le nombre minimum d'éléments de taille ϵ nécessaire pour recouvrir l'ensemble.

2 Exercice : système gradient

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y \\ \dot{y} = x \cos y \end{cases} \quad (4)$$

1. Voyez-vous un point fixe trivial ? Etudier sa stabilité.
2. Un *système gradient* est un système qui peut s'écrire sous la forme $\vec{X} = -\vec{\nabla}V$, où V est une fonction scalaire qui dépend de \vec{X} . Montrer que le système (4) est un système gradient en trouvant la fonction potentielle V correspondante.

Nous allons montrer qu'il ne peut pas exister d'orbite périodique (autre qu'un point fixe) dans un système gradient. Pour ce faire, nous allons raisonner par l'absurde. Considérons une orbite périodique de période T et un point de cette orbite \vec{X}_0 , puis calculons δV qui représente le changement de V après une période le long de l'orbite. D'une part $\delta V = V(\vec{X}_0) - V(\vec{X}_0) = 0$. D'autre part, évaluons

$$\delta V = \int_0^T \frac{dV}{dt} dt \quad (5)$$

3. Expliquer pourquoi $dV = \vec{\nabla}V \cdot d\vec{X}$ et donc $\frac{dV}{dt} = \vec{\nabla}V \cdot \frac{d\vec{X}}{dt}$
4. Montrer alors que δV évalué par l'expression (5) est strictement négatif.
5. Conclure sur l'impossibilité d'une orbite périodique pour un système gradient.

6. Expliquer de manière qualitative (c'est-à-dire avec des mots et en utilisant éventuellement une analogie) pourquoi un système gradient ne peut pas avoir d'orbite périodique.
7. Est-ce que ce résultat appliqué au système (4) est en contradiction avec le théorème de Poincaré-Bendixson ?
8. Montrer qu'il ne peut pas exister d'orbite périodique pour un système dynamique en dimension 1.

3 Problème : L'instabilité de Turing appliquée au pelage des mammifères.

Les mammifères présentent une grande variabilité de pelages avec des taches de tailles et de formes différentes. Pour expliquer la diversité des motifs, James D. Murray a proposé un modèle¹ à la fin des années 1980 reposant sur l'instabilité de Turing.

La couleur des poils est déterminée par des cellules spécialisées appelées *mélanocytes*, qui se trouvent dans l'épiderme et produisent un pigment appelé *mélanine*. Ce pigment est ensuite transmis dans les poils. Par un mécanisme qui n'est pas bien connu, un mélanocyte produit soit de la mélanine noire-brune, appelée *eumélanine*, soit de la mélanine rouge-jaune, appelée *phéomélanine*. Murray propose que ce mécanisme prenne place durant une période précise du développement de l'embryon : deux composés *A* et *B* diffusent et se répartissent dans l'embryon. On s'intéresse à leurs répartitions stationnaires. Les mélanocytes en contact avec le composé *A* seront Activés et produiront la mélanine noire-brune ; les poils seront foncés. Les mélanocytes en contact avec le composé *B* seront inhiBés et produiront la mélanine rouge-jaune ; les poils seront clairs.

A priori, on s'attend à ce que la diffusion mélange les composés *A* et *B* et fasse tendre le système vers un état homogène. En ce sens, la diffusion est considérée comme un phénomène stabilisant. Dans un article fondateur², Alan Turing, le célèbre mathématicien, montre que la diffusion peut engendrer des motifs spatiaux et il suggère que cette instabilité soit à l'origine de motifs ("patterns") biologiques.

Dans un premier temps, on considère le système suivant où les concentrations des composés *A* et *B* - notées aussi *A* et *B* pour simplifier - ne dépendent que du temps :

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = f(A, B) \\ \frac{dB}{dt} = g(A, B) \end{cases} \quad (6)$$

où *f* et *g* sont des fonctions C^1 . On suppose qu'il existe un état stationnaire (A_e , B_e) et on s'intéresse à une perturbation de cet état stationnaire

$$\begin{cases} A = A_e + \delta A \\ B = B_e + \delta B \end{cases} \quad (7)$$

On aboutit alors au système

1. J. D. Murray, *How the leopard gets its spots*, Scientific American, mars 1988. J. D. Murray, *Mathematical biology*, Springer (1993).

2. A. M. Turing, *The chemical basis of morphogenesis*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol.237, p.37 (1952).

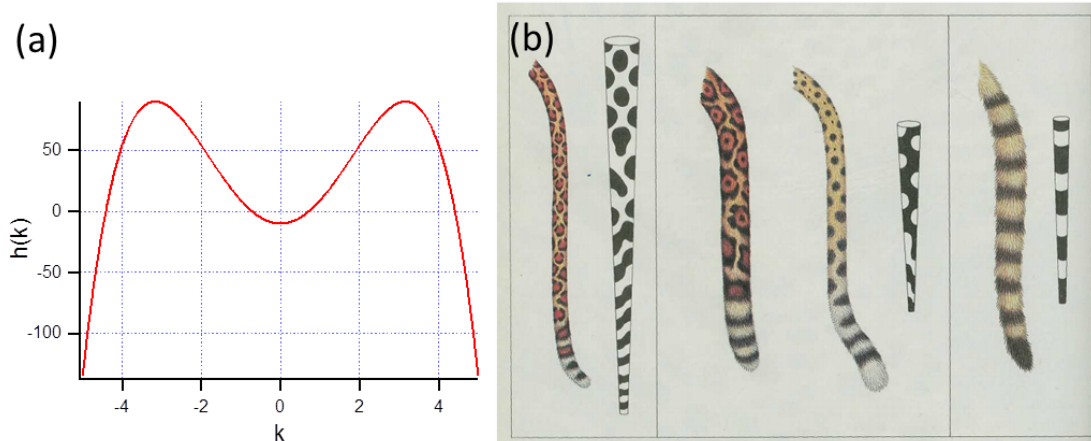


FIGURE 2 – (a) Fonction $h(k)$ avec des paramètres compatibles pour déclencher l'instabilité de Turing. (b) Image extraite de [1]. Dessins de queues d'animaux et résultats de simulation correspondants. Du plus grand au plus petite : à gauche, queue de léopard ; au milieu, queues de jaguar et de guépard ; à droite, queue de genette (petit carnivore qui ressemble à un chat).

$$\begin{cases} \frac{d\delta A}{dt} = a \delta A + b \delta B \\ \frac{d\delta B}{dt} = c \delta A + d \delta B \end{cases} \quad (8)$$

1. Expliquer comment passer du système (6) au système (8) et donner l'expression des coefficients a , b , c et d en fonction de f et g .
2. On suppose que le point fixe (A_e, B_e) est stable. Expliquer pourquoi on peut en conclure que les conditions suivantes doivent être remplies simultanément :

$$\begin{cases} ad - bc > 0 \\ a + d < 0 \end{cases} \quad (9)$$

On s'intéresse désormais à la répartition spatiale des composés A et B , tout en restant à une dimension pour simplifier. On suppose que l'état stationnaire (A_e, B_e) correspond à une répartition uniforme de A et de B et que les perturbations δA et δB peuvent diffuser avec des coefficients de diffusion D_A et D_B . Les équations d'évolution deviennent alors

$$\begin{cases} \frac{d\delta A}{dt} = a \delta A + b \delta B + D_A \frac{\partial^2 \delta A}{\partial x^2} \\ \frac{d\delta B}{dt} = c \delta A + d \delta B + D_B \frac{\partial^2 \delta B}{\partial x^2} \end{cases} \quad (10)$$

On cherche des solutions sous la forme

$$\begin{cases} \delta A = A_0 e^{\lambda t} e^{ikx} \\ \delta B = B_0 e^{\lambda t} e^{ikx} \end{cases} \quad (11)$$

où A_0 et B_0 sont des constantes, ce qui revient à étudier les modes de Fourier en x .

3. Injecter ces expressions de δA et δB dans le système (10) et montrer que λ est la valeur propre d'une matrice M que l'on donnera.

4. On considère tout d'abord le cas simplifié où les coefficients de diffusion des deux composés sont égaux : $D_A = D_B = D > 0$. En étudiant la trace et le déterminant de M , montrer que le système est stable. On en déduit qu'aucun motif n'apparaît.
5. On considère désormais que les coefficients de diffusion sont différents. Montrer que la trace de M est toujours négative.
6. On souhaite que le système soit instable. Expliquer pourquoi l'inégalité suivante doit être vérifiée
$$ad - bc < (aD_B + dD_A)k^2 - D_AD_Bk^4 \quad (12)$$
7. En utilisant les conditions (9) et (12), à quelles conditions sur a et d le système est-il instable ? Et sur b et c ?

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes à l'apparition de l'instabilité. Si elles sont vérifiées, les composés A et B diffusent de manière non homogène et créent des motifs, ce qui est appelé *instabilité de Turing*.

8. Murray propose, entre autres, les fonctions f et g suivantes (correspondant à certains paramètres physiques que nous ne discuterons pas) :

$$\begin{cases} f(A, B) = \alpha - A + A^2B \\ g(A, B) = \beta - A^2B \end{cases} \quad (13)$$

où α et β sont des constantes positives, avec $\beta > \alpha$ et $\beta > 1$. Quel est le point fixe (A_e, B_e) ?

9. Donner l'expression des coefficients a , b , c et d .
10. Montrer que les conditions de stabilité du point fixe (9) sont vérifiées, ainsi que les conditions pour l'instabilité de Turing.
11. On introduit la fonction $h(k)$ qui doit être positive pour que l'instabilité de Turing apparaisse :

$$h(k) = -D_AD_Bk^4 + (aD_B + dD_A)k^2 - ad + bc \quad (14)$$

A partir de la figure 2(a), indiquer le domaine de nombres d'onde k sur lequel l'instabilité peut apparaître.

12. Les queues des animaux sont modélisées comme des cylindres bisautés, cf. Figure 2(b). Expliquer pourquoi le motif est en forme de taches lorsque le cylindre est large et présente des franges quand le cylindre est plus étroit.