Processus stochastiques et neutronique : TD n°1

21 janvier 2022

Equation Maîtresse
Processus de Poisson

1 Equation Maîtresse (examen 2015)

L'évolution du nombre de protéines dans une cellule est modélisée par l'équation maîtresse suivante :

$$\frac{\partial P(n,t)}{\partial t} = \mu P(n-1,t) + \nu(n+1)P(n+1,t) - (\mu + \nu n)P(n,t)$$

où $P(n,t)$ désigne la probabilité de trouver n protéines au temps (μ et ν sont des constantes strictement positives).

1. Établir l'équation différentielle satisfaite par $\langle n(t) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n,t)$.
2. Résoudre cette équation en prenant pour condition initiale $\langle n(t) \rangle = n_0$. Étudier son évolution suivant la valeur de n_0 et du rapport μ/ν, donner son comportement à grands temps.

2 Equation maîtresse pour le processus de Poisson

Un processus de Poisson est un processus croissant à valeur dans N dont la probabilité de transition (ici une incrémentation d'une unité) pendant dt est proportionnelle à λdt (cette probabilité de transition ne dépend donc pas de l'état du système). Ce processus modélise par exemple le nombre de communications reçu par un central téléphonique ou le nombre de personne arrivant dans une file d'attente (les arrivées sont indépendantes les unes des autres). On note $P(n,t)$ la probabilité que le système soit dans l'état n à l'instant t.

1. Ecrire l'équation maîtresse pour le processus de Poisson en distinguant les cas $n = 0$ et $n > 0$.
2. Pour résoudre ce système d'équations on introduit la fonction génératrice définie par :

$$G(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n,t). \tag{1}$$

Montrer que $G(z,t)$ satisfait à :

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial t} = \lambda(z-1)G(z,t) \tag{2}$$

Résoudre cette équation en prenant comme condition initiale $P(n,0) = \delta_{n,0}$ (le système démarre à l'instant $t=0$ avec 0 particule). En déduire que les probabilités $P(n,t)$ sont données par :

$$P(n,t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \tag{3}$$

3. En déduire la valeur moyenne $\langle n(t)\rangle$ et la variance $\langle n(t)^2\rangle - \langle n(t)\rangle^2$. Retrouvez ces résultats de deux manières différetes :
   (a) à partir de l'expression de $G(z,t)$,
   (b) directement à partir de l'équation maîtresse.

3 Equation Maîtresse (examen 2016) (Entraînement à faire chez soi)

Pour la croissance d'une population de n individus, la loi de Malthus suppose que les taux de naissance et de mort sont proportionnels au nombre d'individus et valent respectivement βn et αn (β et α sont deux constantes strictement positives). On désigne par $P(n,t)$ la probabilité d'avoir une population de n individus au temps t.

1. Donner l'équation maîtresse satisfaite par le système.
2. Pour résoudre ce système d'équations on introduit la fonction génératrice définie par :

$$G(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n,t). \tag{4}$$

Montrer que $G(z,t)$ satisfait à :

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial t} = (z-1)(\beta z - \alpha)\frac{\partial G(z,t)}{\partial z} \tag{5}$$

3. Donner les relations liant $G(z,t)$ et les moments $\langle n(t)\rangle$ et $\langle n(t)^2\rangle$.
4. Si on prend comme condition initiale $P(n,0) = \delta_{n,n_0}$, l'équation (5) a pour solution,

$$G(z,t) = \left[\frac{\alpha(z-1)e^{(\beta-\alpha)t} - \beta z + \alpha}{\beta(z-1)e^{(\beta-\alpha)t} - \beta z + \alpha}\right]^{n_0} \tag{6}$$

En déduire la valeur moyenne du nombre d'individus $\langle n(t)\rangle$. Que signifie les crochets $\langle\rangle$ dans cette expression ? Que se passe-t-il lorsque $\beta = \alpha$?

5. Enoncer (sans calcul) une autre méthode permettant d'obtenir $\langle n(t)\rangle$ et $\langle n(t)^2\rangle$.