Université & ENS de Paris-Saclay

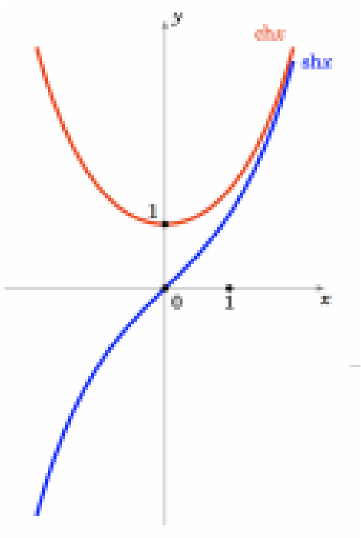
Processus stochastiques et neutronique
Examen du 26 mars 2021.
Document autorisé : une page manuscrite
Durée : 3h00
le barème est approximatif

1 Méthode de Monte-Carlo (3 points)

L'anisotropie d'une diffusion inélastique est donnée par la densité de probabilité (suivant $\mu = \cos(\theta) \in [-1; 1]$) :

$$f(\mu) = \frac{a}{2\,\mathrm{sh(a)}}\left[\mathrm{ch(a}\mu) + r\,\mathrm{sh(a}\mu)\right]$$

où $a \in R^+$ et r un est nombre compris entre 0 et 1.
Proposez un algorithme simple (autre que l'algorithme de rejet) pour le tirage de μ.
Pour rappel :



2 Méthode de Monte-Carlo (1.5 points)

Soit ξ un nombre aléatoire tiré uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$. A quelle densité de probabilité correspond la variable aléatoire X tirée suivant $X = \log\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)$? précisez son domaine de définition.

3 Processus de croissance et de mort (5.5 points)

On considère que les "particules" d'un système peuvent être dans deux états X et Y. Par exemple et pour coller à l'actualité, on peut penser à une personne qui est soit saine soit malade. Le taux de transition pour aller de X à Y est ω_1 tandis que le taux de Y à X est ω_2. Ces deux taux sont indépendants l'un de l'autre. Le processus est indiqué schématiquement sur la figure suivante :

$$X \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\rightleftarrows}} Y$$

Soit n_1 le nombre de particules dans l'état X et n_2 celui dans l'état Y. Le nombre total de particule $N = n_1 + n_2$ est constant. Le but est de déterminer la probabilité $P(n,t)$ d'avoir n particules dans l'état X à l'instant t (et par conséquent d'en avoir $N - n$ dans l'état Y).

1. Écrire l'équation maîtresse vérifiée par $P(n,t)$.
2. On introduit la fonction génératrice définie par $G(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(n,t)$. Montrer que $G(s,t)$ satisfait à :

$$\frac{\partial G(s,t)}{\partial t} = (1-s)\left[(\omega_1 + \omega_2 s)\frac{\partial G(s,t)}{\partial s} - \omega_2 N G(s,t)\right] \tag{1}$$

3. Lorsqu'il n'y a pas de particule initialement, on admettra que la solution de l'équation précédente est donnée par :

$$G(s,t) = \left[\frac{\omega_1 + \omega_2 s + \omega_2(1-s)e^{-(\omega_1+\omega_2)t}}{\omega_1 + \omega_2}\right]^N \tag{2}$$

   En déduire l'expression de $P(n,t)$ en fonction de $n, t, N, \omega_1, \omega_2$.
   On rappelle la formule du binôme :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{3}$$

4 Intégrale du mouvement brownien (3 points)

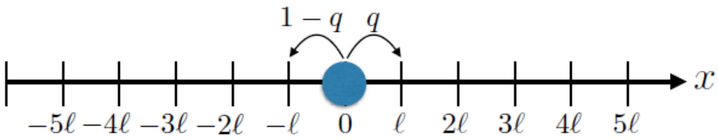
Dans cet exercice on considère un bruit blanc gaussien $\nu(t)$ vérifiant

$$\langle \nu(t) \rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle \nu(t)\nu(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t-t')$$

1. On définit $B(t) = \displaystyle\int_0^t \nu(u)\,du$. Montrer que $\langle B(t)B(s) \rangle = \sigma^2 \min(t,s)$.
2. A partir du processus $B(t)$ on définit un nouveau processus stochastique $X(t)$ (intégrale du mouvement brownien) par $X(t) = \displaystyle\int_0^t B(u)\,du$. Calculer la valeur moyenne et la variance du processus $X(t)$. Le processus est-il gaussien ?

5 Marches aléatoires en 1 dimension (4 points)

On étudie un modèle de marche aléatoire sur un réseau en 1 dimension. Plus précisément, on étudie le mouvement d'une particule se déplaçant par sauts le long de l'axe Ox sur un réseau de maille l. La particule se déplace à droite avec la probabilité q et à gauche avec la probabilité $1-q$. La durée de chaque saut est égale à Δt.

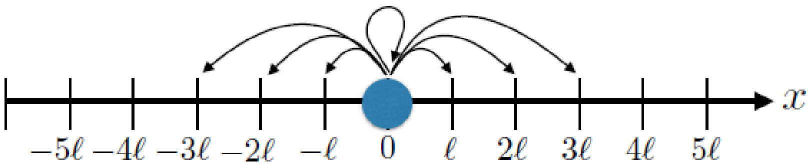


1. Ecrire l'équation maîtresse pour $P(x, t + \Delta t)$.
2. Dans la limite des petits sauts et petits temps de saut, montrer que $P(x, t)$ satisfait une équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -v\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + D\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} .$$

   Donnez les expressions du terme de dérive v et de diffusion D en fonction de q, l et Δt.

On généralise la marche aléatoire précédente en considérant que la probabilité de sauts $\Pi(s|x)$ de longueur s (arbitraire) dépend de la position x de la particule.



3. Ecrire l'équation maîtresse généralisée pour $P(x, t + \Delta t)$.
4. Dans la limite des petits sauts et petits temps de saut, montrer que $P(x, t)$ satisfait une équation de Fokker-Planck

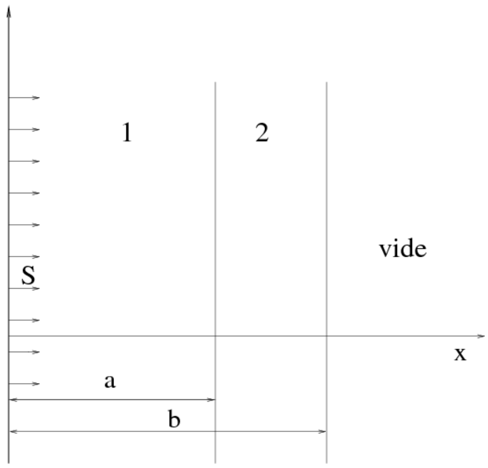
$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[v(x)P(x,t)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D(x)P(x,t)\right] .$$

   Donnez les expressions du terme de dérive $v(x)$ et de diffusion $D(x)$ en fonction de $\Pi(s|x), s$ et Δt.

6 Source plane avec 2 plaques d'épaisseur finie (3 points)

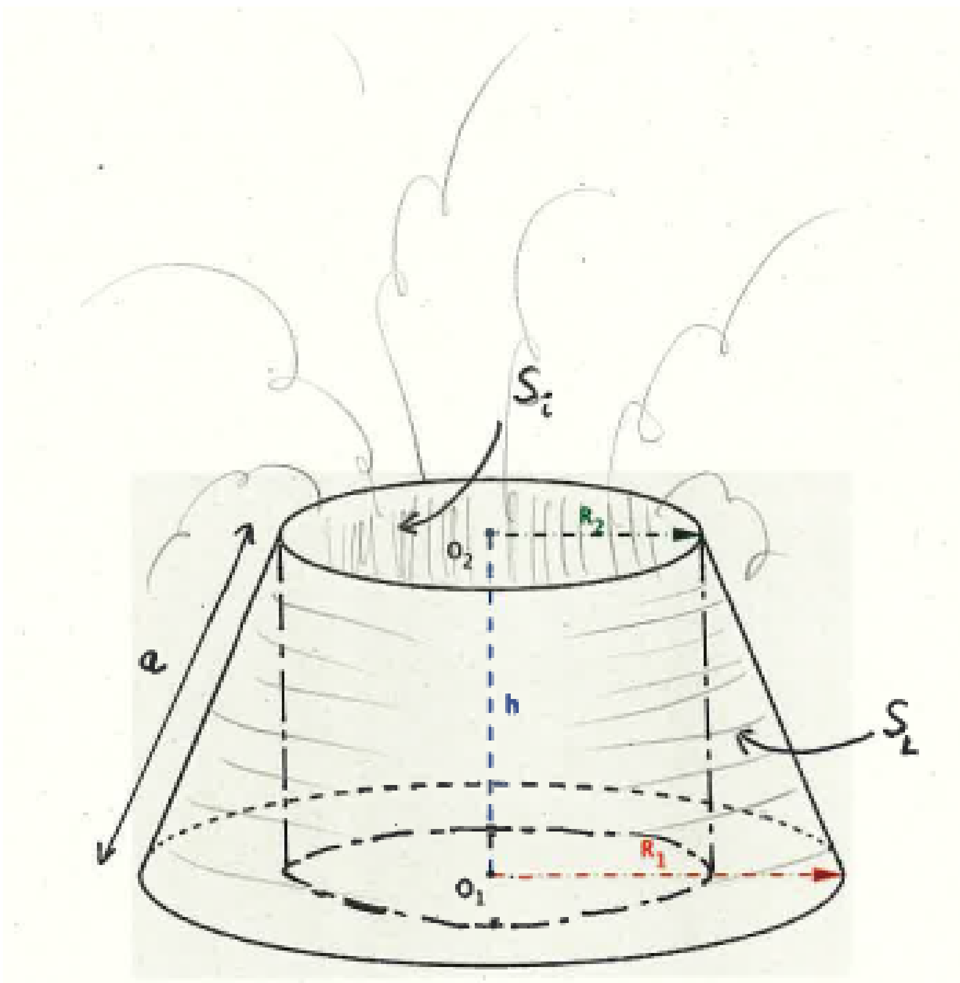
On considère une source plane émettant S neutrons par unité de surface et dirigée vers la droite $(x > 0)$ diffusant à travers deux plaques infinies dans le plan (y, z) de matériaux différents. Les deux plaques adjacentes homogènes d'épaisseur a et b-a (voir figure) sont caractérisées par leur coefficient $k_1^2 = \frac{\Sigma_{a1}}{D_1}$ et $k_2^2 = \frac{\Sigma_{a2}}{D_2}$.

1. Ecrire les équations satisfaites par les flux Φ_1 et Φ_2 dans la zone 1 et la zone 2 ainsi que leur solution en fonction des constantes d'intégration.
2. Donner toutes les conditions aux limites permettant de déterminer ces constantes d'intégration (on ne demande pas le calcul explicite des constantes d'intégration !)



7 Question supplémentaire liée à l'actualité (+2 points)

Après son compère Eyjafjallajökull et un sommeil de 800 ans, le volcan islandais Fagradalsfjall vient récemment de se réveiller. On le modélise par un cône évidé et on considère sa surface. Celle-ci est la somme de sa surface intérieure S_i (cylindre de rayon R_2 et de hauteur h) et de la surface latérale S_L d'un tronc de cône (voir la figure, $S = S_i + S_L$). On rappelle que la surface latérale du tronc de cône est donnée par $S_L = \pi(R_1 + R_2)a$. Donnez un algorithme générant uniformément des points sur la surface S du volcan.



Remarque : 1/2 point de bonus pour une prononciation correcte des volcans islandais et le nom exact de la longueur a !