

# Chapitre 11

## Problems and exercises

Formulaire :

$$\frac{dZ}{dt} = \mathcal{F}(t) \leftrightarrow Z(t) = a_0 + \int_{t_0}^t \mathcal{F}(u) du$$

$$\frac{dZ}{dt} \pm i\omega Z(t) = \mathcal{F}(t) \leftrightarrow Z(t) = a_0 \exp(\mp i\omega t + i\varphi_0) + \exp(\mp i\omega t) \int_{t_0}^t \exp(\pm i\omega u) \mathcal{F}(u) du$$

$Z(t)$  et  $\mathcal{F}(t)$  sont des fonctions complexes de la variable réelle  $t$ ;  $a_0$  et  $\varphi_0$  sont des constantes réelles déterminées par les conditions initiales à l'instant  $t_0$ .

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}, \quad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\frac{\sin^2 \left[ \frac{\omega}{2} t \right]}{\omega^2 t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} \delta[\omega], \quad \frac{\nu}{\nu^2 + x^2} \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \pi \delta(x), \quad 2\pi \delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp jkx, \quad \delta(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}$$

où  $\delta$  et  $\theta$  sont respectivement les distributions de Dirac et Heaviside;

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-bx^2) \cos(kx) dx &= \sqrt{\frac{\pi}{b}} \exp\left(-\frac{k^2}{4b}\right) \\ \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\beta}{x} - \gamma x\right) dx &= 2 \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^{\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{\beta\gamma}\right) \\ \int_0^{+\infty} \exp(-\nu t) \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \nu dt &= \frac{1}{2} \frac{\frac{\omega^2}{\nu^2}}{1 + \frac{\omega^2}{\nu^2}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(V^2 t^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{2}{b^2 V} \\ \int_0^{+\infty} \cosh^{-2}(\nu t) \cos(\omega t) \nu dt &= \frac{\frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\nu}}{\sinh\left(\frac{\pi}{2} \frac{\omega}{\nu}\right)} \end{aligned}$$

où  $K_{\frac{1}{2}}$  est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce d'ordre un demi.



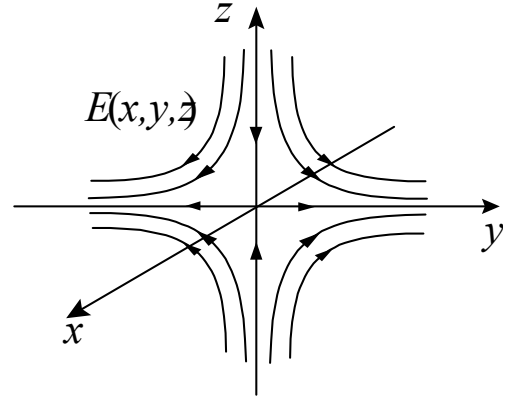
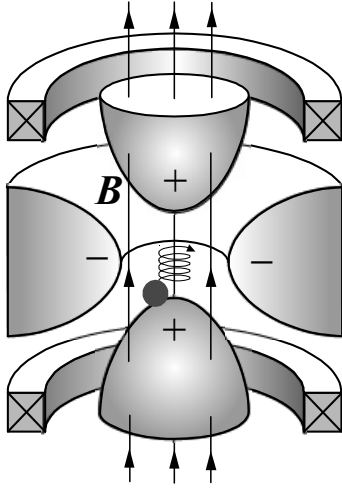
**A** Il est parfois nécessaire de piéger des particules, ion ou atome, grâce à une configuration appropriée de champs électromagnétiques.

Le piégeage et la manipulation d'un ion sont, entre autres, effectués dans des configurations appelées piège de Penning. Ce piège consiste en la superposition d'un champ magnétique uniforme:  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$  ( $B > 0$ ) et d'un champ électrostatique dérivant du potentiel  $\Phi(\mathbf{r})$  créé par un système d'électrodes ayant une forme d'hyperboloïde de révolution. Au voisinage du centre de ce système d'électrodes le potentiel est donné par :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{M\omega^2}{4q} [2z^2 - x^2 - y^2]$$

où  $\omega$  est une caractéristique du piège. La position d'un point est repérée par le vecteur  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ , ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ) est une base cartésienne orthonormée directe. On considère un ion de charge  $q$  et de masse  $M$  soumis à l'influence de cette configuration de champs électrique et magnétique.

1 Vérifier que  $\Phi$  obéit à l'équation de Laplace:  $\Delta\Phi = 0$ .



2 On introduit la quantité  $\Omega = \frac{qB}{M}$  et on repère la position de l'ion par ses trois coordonnées cartésiennes  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  où  $t$  est le temps. Établir les trois équations différentielles ordinaires vérifiées par  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ .

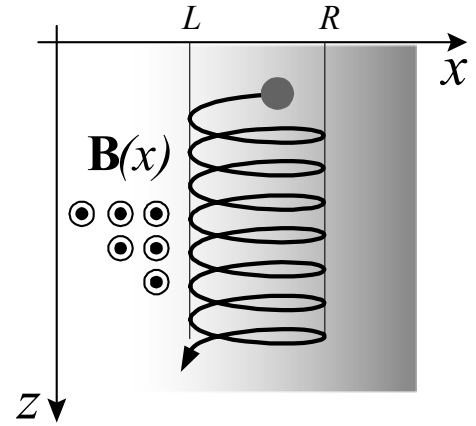
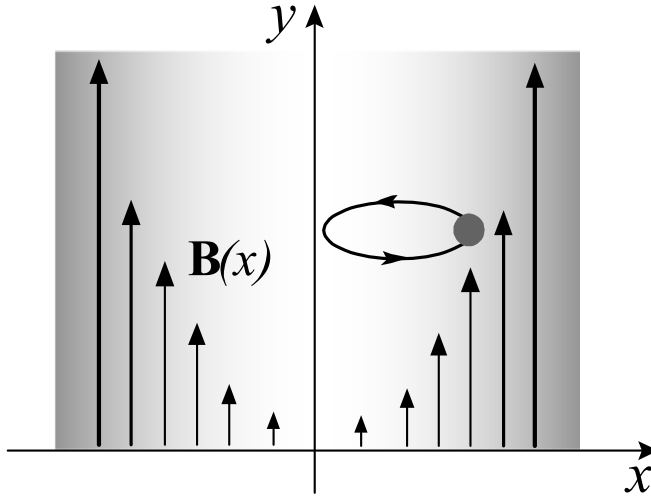
3 Quelle est la nature du mouvement suivant l'axe des  $z$ ?

4 On introduit la variable complexe:  $\zeta = x + jy$ , quelle équation différentielle vérifie  $\zeta(t)$ ?

5 On cherche une solution du type  $\zeta(t) = \zeta_0 \exp(j\omega_0 t)$ , quelle équation algébrique vérifie  $\omega_0$ ? Sous quelle condition le piège de Penning permet-il de confiner un ion?



**B** Le mouvement d'une particule chargée au sein d'un champ magnétique statique et homogène est la combinaison d'une rotation autour des lignes de champ et d'une translation le long des lignes de champ.



Mais les champs magnétiques physiquement réalisables ne peuvent être homogènes dans tous l'espace et présentent des zones de gradient et courbure.

Soit  $(x, y, z)$  un système de repérage cartésien sur une base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ , considérons, suivant le schéma ci-dessus, un champ du type  $B(x)\mathbf{e}_y$  présentant une zone de minimum au voisinage de  $x \sim 0$ ; les particules chargées doivent rester confinées au voisinage de ce minimum et nous allons établir cette propriété de confinement.

Le champ  $\mathbf{B}(x)$  considéré dans cet exercice est donné par :

$$\mathbf{B}(x) = B \frac{x^2}{\lambda^2} \mathbf{e}_y$$

où  $B$  [T] et  $\lambda$  [m] sont deux constantes données de base du modèle. Le mouvement le long des lignes de champ, suivant la direction  $y$ , est trivial et ne sera pas considéré dans cette étude.

Le mouvement dans le plan  $(x, z)$ , en fonction du temps  $t$ , pour une particule de charge  $q > 0$ , de masse  $m$ , de position  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z$  et de vitesse :

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_x + \frac{dz}{dt} \mathbf{e}_z = v_x \mathbf{e}_x + v_z \mathbf{e}_z$$



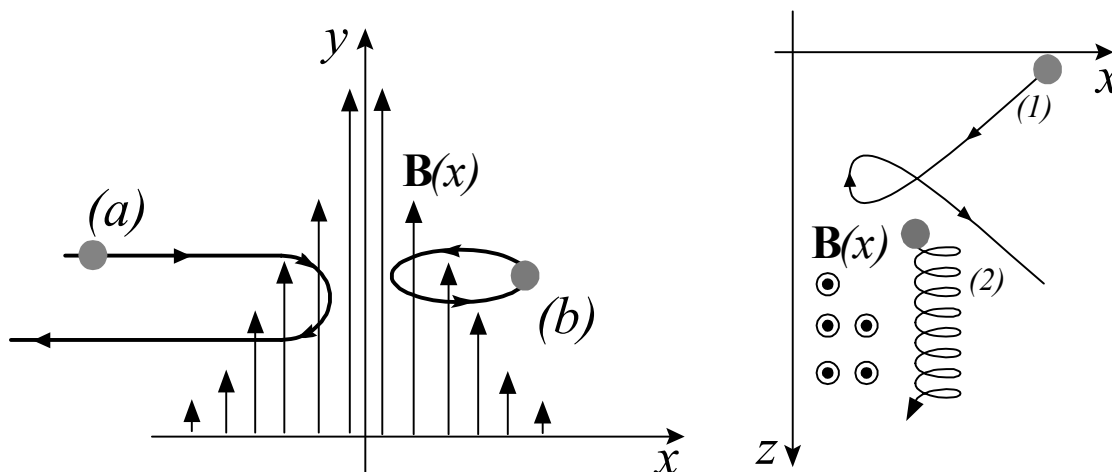
6 On considère un électron tel que  $z(t=0) = 0$  et  $\frac{dz}{dt}|_{t=0} = V_{\parallel}$ , sous quelle condition ce piège parabolique, appelé aussi miroir magnétique, confine-t-il cet électron?

**D** Le mouvement d'une particule chargée au sein d'un champ magnétique statique et homogène est la combinaison d'une rotation autour des lignes de champ et d'une translation le long des lignes de champ. Mais les champs magnétiques physiquement réalisables ne peuvent être homogènes dans tout l'espace et présentent des zones de gradient et courbure et doivent s'annuler à l'infini. Un champ physique est donc localisé dans l'espace et l'analyse des orbites des particules chargées interagissant avec les champs localisés permet de distinguer deux types d'orbites, les orbites externes ou libres (a) et les orbites internes ou liées (b).

Soit  $(x, y, z)$  un système de repérage cartésien sur une base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ , si nous considérons, suivant le schéma ci-dessous, un champ du type  $B(x)\mathbf{e}_y$  concentré au voisinage de  $x \sim 0$  ( $B(x = \pm\infty) = 0$ ), les orbites libres proviennent de  $x \sim \pm\infty$  puis sont réfléchies par le champ; les orbites liées sont périodiques et localisées au voisinage de  $x \sim 0$ .

Le champ  $\mathbf{B}(x)$  considéré dans cet exercice décrit la zone de gradient séparant un espace libre de champ ( $x \rightarrow +\infty$ ) et une zone magnétisée ( $0 < x \sim \lambda$ ) suivant la relation :  $\mathbf{B}(x) = B \exp(-x/\lambda) \mathbf{e}_y$  où  $B$  [T] et  $\lambda$  [m] sont deux constantes données de base du modèle. Ce type de décroissance exponentielle est particulièrement bien adaptée pour les descriptions de la zone de choc d'étrave de la magnétosphère et de la partie évanescence extérieure des champs de confinement magnétique entre deux bobines d'une configuration confinante périodique. La zone  $x \rightarrow -\infty$  de ce champ est non physique, mais les orbites considérées ici n'explorent pas cette zone.

Le mouvement le long des lignes de champ, suivant la direction  $y$ , est trivial et ne sera pas considéré dans cette étude. Le mouvement dans le plan  $(x, z)$  présente deux classes d'orbites : les orbites basse énergie (2) confinées dans la zone magnétisée, constituées par la superposition d'une rotation et d'un mouvement de translation ; et les orbites haute énergie (1) qui proviennent de la zone non magnétisée ( $x \gg \lambda$ ), sont réfléchies par la zone magnétisée de fort champ puis repartent vers la zone libre ( $x \gg \lambda$ ) de champ.



L'objectif de cet exercice est d'identifier ces deux classes d'orbites, libres (1) et piégées (2) et d'analyser le mouvement des orbites liées (piégées). A un instant quelconque  $t$  l'interaction entre une particule de charge  $q$ , de masse  $m$ , de position  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z$  et de vitesse  $\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z = v_x\mathbf{e}_x + v_z\mathbf{e}_z$ , est décrite par la force de Laplace  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

1 Etablir les équations du mouvement vérifiées par  $dv_x/dt$  et  $dv_z/dt$ .

2 On introduit les quantités:  $E = \frac{m}{2}v_x^2 + \frac{m}{2}v_z^2$  et  $p_z = m\left(v_z + \frac{\lambda qB}{m} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)\right)$ . Dédire du résultat précédent les relations:  $dE/dt = 0$  et  $dp_z/dt = 0$ . Dans la suite du problème  $p_z$  et  $E$  constituent donc des données de base de l'étude des orbites au même titre que  $B$  et  $\lambda$ .

3 Démontrer que l'étude des orbites dans le plan  $(x, z)$  se réduit à l'analyse de l'équation vérifiée par  $dv_x/dt$  qui est équivalente au problème du mouvement suivant  $x$  d'une particule de masse  $m$  interagissant avec un potentiel  $D \left[ 1 - \exp \left( -\frac{x-x_0}{\lambda} \right) \right]^2$ :

$$m \frac{dv_x}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x} D \left[ 1 - \exp \left( - \frac{x - x_0}{\lambda} \right) \right]^2$$

et exprimer  $D$  et  $x_0$  en fonction des données du problème.

Tracer la courbe de potentiel  $D[1 - \exp(-(x - x_0)/\lambda)]^2$  en fonction de  $x$  et expliquer sur la base de cette figure l'existence de deux classes d'orbites : les orbites liées dont l'extension en  $x$  reste bornée et les orbites libres dont l'extension suivant  $x$  n'est pas limitée suivant  $x > 0$ .

4 Dans la suite du problème on s'intéresse uniquement aux orbites liées. On introduit les variables  $u$ ,  $v$  et  $\tau$  suivant les relations :

$$u = 1 - \exp\left(-\frac{x - x_0}{\lambda}\right), \quad v = \frac{v_x}{\sqrt{2D/m}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{2D}{m}} \frac{t}{\lambda}$$

Ainsi,  $x = x_0 - \lambda \log(1 - u)$ ,  $v_x = \sqrt{2D/m} v$  et  $t = \lambda \tau \sqrt{\frac{m}{2D}}$ . Etablir les deux équations vérifiées par  $du/d\tau$  et  $dv/d\tau$  en fonction de  $u$  et  $v$ .

5 On définit l'énergie normalisée  $\varepsilon = u^2 + v^2$  et la pulsation  $\omega = \sqrt{1 - \varepsilon}$ . Démontrer l'invariance :  $d\varepsilon/d\tau = 0$ . Quelles sont les valeurs prises par  $\varepsilon$  pour la classe des orbites liées.

6 On considère la variable  $s(u, v) : s = (\omega v) / (\varepsilon - u)$ . Etablir l'équation vérifiée par  $ds/d\tau$  en fonction de  $u$ ,  $v$ ,  $\varepsilon$  et  $\omega$  et en déduire l'équation vérifiée par  $ds/d\tau$  en fonction de  $u$ ,  $\varepsilon$  et  $\omega$ . Exprimer  $1 + s^2$  en fonction de  $u$  et  $\varepsilon$ . Déduire des relations précédentes que la variable  $s$  vérifie l'équation différentielle :  $ds/d\tau = \omega(1 + s^2)$ , c'est-à-dire  $s = \tan(\omega\tau)$ . Les variables  $u$  et  $v$  vérifient donc les deux relations algébriques :  $u^2 + v^2 = \varepsilon$  et  $\omega v \cos(\omega\tau) = (\varepsilon - u) \sin(\omega\tau)$ . Déduire de ces relations que les variables  $u$  et  $v$  sont des fonctions périodiques du temps  $\tau$ .

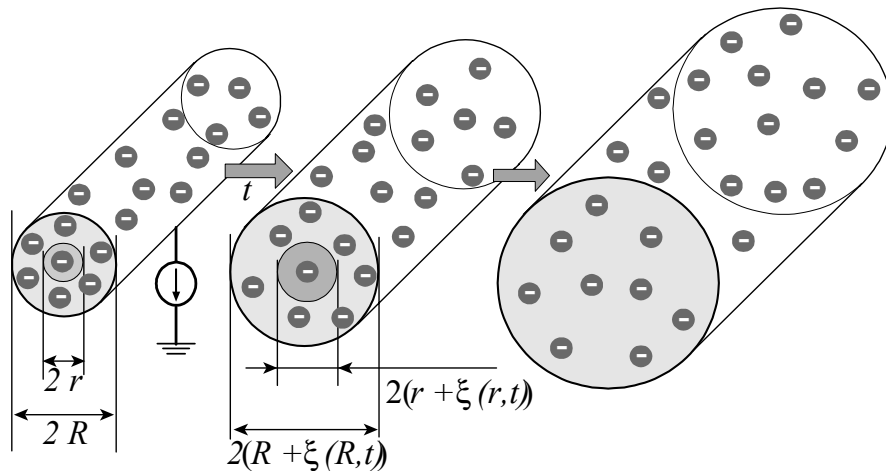


**E** On considère un faisceau électronique cylindrique de longueur infinie et de rayon  $R$ . On note  $N$  le nombre d'électrons, de charge  $q$  et de masse  $m$ , par unité de volume (la densité électronique) et  $\mathbf{V} = V\mathbf{u}_z$  la vitesse des électrons.  $N$  et  $\mathbf{V}$  sont uniformes à l'intérieur du faisceau et nulles à l'extérieur. On utilisera un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  suivant une base cylindrique  $[\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z]$ .

- 1 Exprimer la densité volumique de charge du faisceau  $\rho$ .
- 2 Exprimer le champ électrique à l'intérieur du faisceau en fonction de  $r$ .
- 3 Exprimer la densité volumique de courant du faisceau  $J\mathbf{u}_z$ .
- 4 Exprimer le champ magnétique à l'intérieur du faisceau en fonction de  $r$ .
- 5 Calculer la somme des forces s'exerçant sur un électron.
- 6 Pour quelle valeur de  $V$  y a-t-il compensation de ces forces? Commenter le résultat.



**F** On considère un plasma cylindrique constitué uniquement d'électrons, de charge  $-e$  et de masse  $m$ , initialement au repos. On utilise un système de coordonnées cylindriques de vecteur radial unitaire  $\mathbf{e}_r$ ; la position d'un point, dans un plan de section perpendiculaire à l'axe, est donc donnée par  $r\mathbf{e}_r$  où  $r$  est la coordonnée radiale du vecteur position. On note  $n(r, t)$  la densité d'électrons en un point de position  $r$  à un instant  $t$ ; la densité initiale à l'instant  $t = 0$  étant homogène et égale à  $N$  :  $n(r, t = 0) = N$  si  $0 < r < R$  et  $n(r, t = 0) = 0$  si  $r > R$ . Il n'y a pas de dynamique axiale. A l'instant initial,  $t = 0$ , ce cylindre d'électrons est donc de rayon  $R$ .



Sous l'effet des forces répulsives coulombiennes ce cylindre éclate suivant la direction radiale. On appelle  $\xi(r, t)$  le déplacement radial, à l'instant  $t$ , des électrons situés initialement en  $r$ , à l'instant  $t = 0$ ; au temps  $t > 0$ , la position d'un électron, initialement en  $r$ , est donc donnée par  $r + \xi(r, t)$ . A l'instant  $t = 0$ , le déplacement radial ainsi que la vitesse radiale sont nuls :  $\xi(r, t = 0) = 0$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0$ .

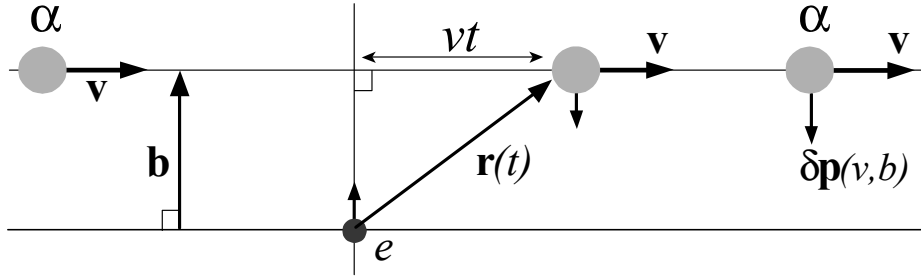
1 Calculer le champ électrique,  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_r$ , créé à l'intérieur du cylindre, en  $r + \xi(r, t)$ , à l'instant  $t$ , par ce plasma électronique en expansion.

2 En déduire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par  $\frac{\partial^2 \xi(r, t)}{\partial t^2}$ ; on introduira  $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}$ ; quel est le nom et quelle est la signification de cette quantité?



particule alpha et un électron; la particule alpha, de masse  $M$ , est supposée initialement ( $t = -\infty$ ) en translation uniforme à la vitesse  $\mathbf{v}$  et l'électron initialement ( $t = -\infty$ ) au repos. La force de Coulomb entre ces deux particules génère un transfert d'impulsion sur la durée de l'interaction de  $t = -\infty$  à  $t = +\infty$ :  $[\text{alpha } (M\mathbf{v}) + \text{électron } (\mathbf{0})]_{t=-\infty} \rightarrow [\text{alpha } (M\mathbf{v} - \delta\mathbf{p}) + \text{électron } (\delta\mathbf{p})]_{t=+\infty}$  où nous supposons  $|\delta\mathbf{p}| \ll M|\mathbf{v}|$ ; cette hypothèse réaliste permet de négliger, en première approximation, la variation de vitesse de la particule alpha et de considérer que l'électron reste au repos durant toute la durée de l'interaction.

Ainsi, sous ces approximations, la trajectoire  $\mathbf{r}(t)$  de la particule alpha, repérée à partir de l'électron au repos, est donnée par:  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{b}$  où  $t$  est le temps et  $\mathbf{b}$  est le *paramètre d'impact* perpendiculaire au vecteur  $\mathbf{v}$ :  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = 0$  et dont la norme  $b$  mesure la distance de la trajectoire à la parallèle à  $\mathbf{v}$  passant par l'électron au repos.



La figure ci-dessus illustre la collision ainsi modélisée. Après le passage de la particule alpha ( $t = +\infty$ ), l'électron initialement immobile a acquis une impulsion  $\delta\mathbf{p}$  somme des incréments infinitésimaux  $d\mathbf{p}$  entre  $t = -\infty$  et  $t = +\infty$ :

$$\delta\mathbf{p} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{p} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{r}(t)}{r^3(t)} dt \rightarrow |\delta\mathbf{p}| = \delta p$$

ou  $-e$  et  $2e$  sont les charges de l'électron et de la particule alpha.

1 Etablir, par projections suivant  $\mathbf{b}/b$  et suivant  $\mathbf{v}/v$ , l'expression de la norme  $\delta p(v, b)$  de ce transfert d'impulsion, entre  $t = -\infty$  et  $t = +\infty$ , de la particule alpha de trajectoire  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}t + \mathbf{b}$  vers l'électron au repos; en déduire l'expression du transfert d'énergie  $\delta\epsilon(v, b) = \delta p^2/2m$  de la particule alpha vers l'électron.

Nous supposons, dans la suite, que l'essentiel du transfert d'énergie  $\delta\epsilon(v, b)$  de la particule vers un électron immobile se déroule lorsque les deux particules sont proches, c'est-à-dire lorsque  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$ . Pour une population d'électrons au repos de densité  $n$ , nous supposons donc que la perte totale d'énergie  $\langle\delta E\rangle$  subie par une particule alpha de vitesse  $\mathbf{v}$  durant un temps  $\delta t$  est due aux électrons contenus dans un ensemble de couronnes cylindriques d'axes dirigés suivant  $\mathbf{v}$ , de hauteurs  $v\delta t$  et d'épaisseurs  $db$ ,  $b$  variant de  $\lambda_L$  à  $\lambda_D$ .

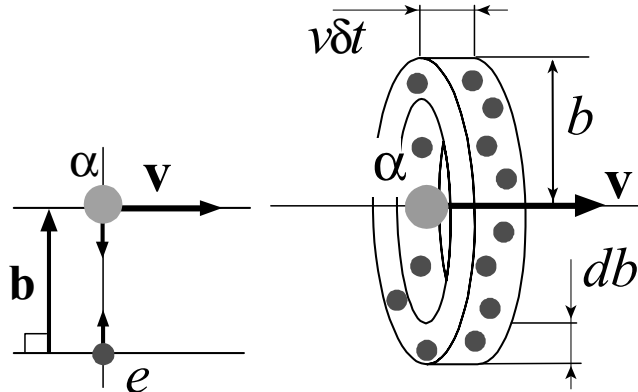
L'interaction coulombienne étant exponentiellement faible au-delà d'une distance  $\lambda_D$  et statistiquement insignifiante en deçà d'une distance  $\lambda_L$  (on introduira la constante  $\Lambda = \log(\lambda_D/\lambda_L)$ ).

2 Sous cet ensemble d'hypothèses, établir l'expression du coefficient de ralentissement  $\langle\delta E\rangle/\delta t$  d'une particule alpha en fonction des données du problème,  $\langle\rangle$  désignant la somme sur tous les électrons fixes participant au ralentissement durant le temps  $\delta t$ , chaque électrons recevant la quantité d'énergie  $\delta\epsilon(v, b)$ .

3 Considérant la relation  $\langle\delta E\rangle/\delta t = d(mv^2/2)/dt$ , déduire du résultat précédent l'expression de la fréquence de friction  $\nu(v, n)$  décrivant le ralentissement d'une particule alpha de vitesse  $v$  interagissant avec une population électronique de densité  $n$ :

$$\frac{dv}{dt} \equiv -\nu(v, n) v$$

4 Etablir la loi horaire de ralentissement  $v(t)$  pour une particule alpha thermonucléaire de vitesse initiale  $c/23$  ( $c$  est la vitesse de la lumière).









**K** Les conclusions de l'analyse précédente pourraient laisser croire qu'une fraction significative des électrons dans un tokamak peut atteindre de très hautes énergies sans qu'aucun processus ne vienne limiter la croissance de cette énergie au cours du temps. Cette conclusion est éronnée car nous avons négligé les processus de rayonnement ; en particulier, le rayonnement synchrotron résultant de la courbure de la trajectoire le long des lignes de champs, qui présente une dépendance en la puissance quatre de l'énergie, offre un mécanisme de freinage haute vitesse suffisamment efficace pour arrêter les runaway. Introduisons l'énergie relativiste d'un électron runaway  $mc^2\gamma$  et négligeons la friction collisionnelle, à haute énergie, l'évolution de l'énergie est alors contrainte par deux tendances antagonistes, l'accélération inductive et le ralentissement radiatif.

$$mc \frac{d\gamma}{dt} = eE - \frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 R_0^2} \gamma^4$$

1 Pour quelle valeur  $\gamma_0$  du facteur relativiste  $\gamma$  l'accélération équilibre-t-elle le ralentissement synchrotron, c'est à dire  $\frac{d\gamma}{dt} = 0$ ?

2 Ecrire l'équation dynamique décrivant l'évolution du facteur  $\gamma$  en introduisant le temps caractéristique

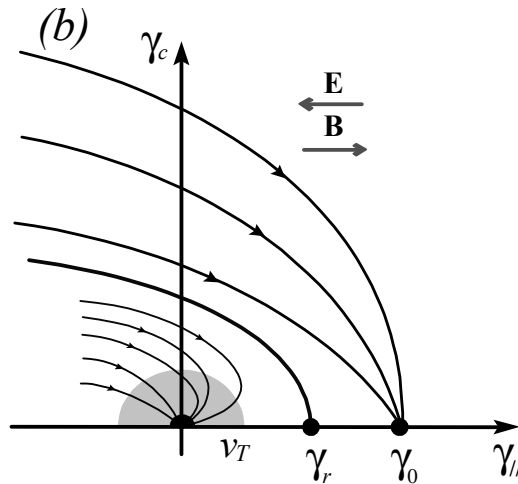
$$\tau_0 \equiv \frac{mc}{eE}$$

ainsi que la limite synchrotron  $\gamma_0$ .

3 Exprimer  $\frac{t}{\tau_0}$  en fonction de  $\gamma$  et  $\gamma_0$ ; on rappelle l'expression des deux primitives suivantes :

$$\int^x \frac{adu}{u^2 + a^2} = \arctan \frac{x}{a}, \quad \int^x \frac{2adu}{u^2 - a^2} = \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right|$$

4 Tracer l'allure de la fonction  $\gamma$  en fonction de  $t$  pour  $\tau_0$  et  $\gamma_0$  fixes.



5 On considère  $\Lambda = 15$  et on rappelle  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{F/m}$  et on prendra  $E = E_D$ . Pour des paramètres typiques de la machine ITER quel est l'ordre de grandeur de la limite synchrotron  $\gamma_0$ ?



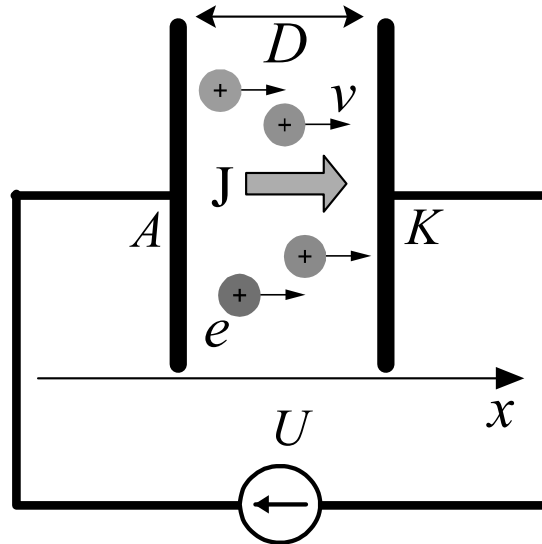
**L** Au sein des réacteurs utilisés dans les industries microélectroniques les électrodes sont polarisées de manière à extraire un flux d'ions du plasma. L'impact de ces ions énergétiques sur un substrat de silicium est mis à profit dans les différentes opérations de fabrication des composants. Ce flux ionique, extrait d'un plasma, est accéléré dans une zone appelée gaine. La physique de cette zone est extrêmement complexe ; nous allons modéliser cette partie du réacteur par un écoulement purement ionique (il n'y a pas d'électron dans ce modèle de gaine) entre une anode A plane infinie située en  $x = 0$ , considérée comme une référence de potentiel ( $\phi(x = 0) = 0$ ), et une cathode K plane infinie située en  $x = D$ . Cet écoulement ionique est unidimensionnel et stationnaire suivant l'axe des  $x$ . Les ions sont décrits par leur densité  $n(x)$  et leur vitesse  $v(x)\mathbf{e}_x$ . Le champ électrique créé par la densité volumique de charge  $en(x)$  dérive du potentiel électrostatique  $\phi(x) < 0$ . Les conditions aux limites de ce problème, stationnaire et unidimensionnel, sont :  $\phi(x = 0) = 0$ ,  $\phi(x = D) = -U < 0$ ,  $v(x = 0) = 0$ ,  $\frac{d\phi}{dx}\bigg|_{x=0} = 0$ . Le courant ionique dans ce modèle de gaine est décrit par la densité volumique de courant  $J = en(x)v(x)$ ,  $J$  est une constante considérée comme une donnée du problème.

1 Etablir l'expression de la conservation de l'énergie mécanique pour un ion de masse  $M$  et exprimer la vitesse  $v(x)$  d'un ion en fonction du potentiel électrostatique  $\phi(x)$ ; exprimer la densité ionique  $n(x)$  en fonction de la vitesse  $v(x)$  et de la densité de courant  $J$ .

2 Etablir l'équation différentielle ordinaire du deuxième ordre vérifiée par le potentiel électrostatique  $\phi(x)$ .

3 Intégrer cette équation et exprimer  $\phi(x)$  en fonction de  $x$ .

4 En déduire la relation courant-tension  $U(J, D)$  dans la gaine en exprimant la différence de potentiel  $U$  en fonction du courant ionique  $J$  et des paramètres du problème (relation de Child-Langmuir).



Le modèle précédent de gaine ionique est pertinent dans les réacteurs dits basse pression, mais, pour les procédés de dépôt, il est nécessaire de travailler à haute pression et les collisions deviennent dominantes. La relation entre la vitesse des ions et le potentiel électrostatique est alors donnée par une loi dite de mobilité linéaire :

$$v(x) = -\frac{e}{M\nu} \frac{d\phi}{dx}$$

où  $\nu$  est la fréquence de collisions des ions. Les ions sont décrits par leur densité  $n(x)$  et leur vitesse  $v(x)\mathbf{e}_x$ . Le champ électrique créé par la densité volumique de charge  $en(x)$  dérive du potentiel électrostatique  $\phi(x) < 0$ . Les conditions aux limites de ce problème, stationnaire et unidimensionnel, sont :  $\phi(x=0) = 0$ ,  $\phi(x=D) = -U < 0$ ,  $v(x=0) = 0$ ,  $\left.\frac{d\phi}{dx}\right|_{x=0} = 0$ . Le courant ionique dans ce modèle de gaine est décrit par la densité volumique de courant  $J = en(x)v(x)$ ,  $J$  est une constante considérée comme une donnée du problème.

5 Etablir l'équation vérifiée par le potentiel électrostatique  $\phi(x)$ .

6 Intégrer cette équation et exprimer  $\phi(x)$  en fonction de  $x$ .

7 En déduire la relation courant-tension  $U(J, D)$  dans la gaine en exprimant la différence de potentiel  $U$  en fonction du courant ionique  $J$  et des paramètres du problème (relation de Mott-Gurney).



**M** Le mouvement d'une particule chargée interagissant avec un champ magnétique, uniforme et statique, est la combinaison d'une translation uniforme le long des lignes de champ et d'une rotation uniforme autour des lignes de champ; la configuration magnétique constituée par un simple champ droit dirigé suivant l'axe des  $z$ , de grande longueur suivant cette axe, peut donc être envisagée pour confiner la matière et l'énergie d'un plasma thermonucléaire.

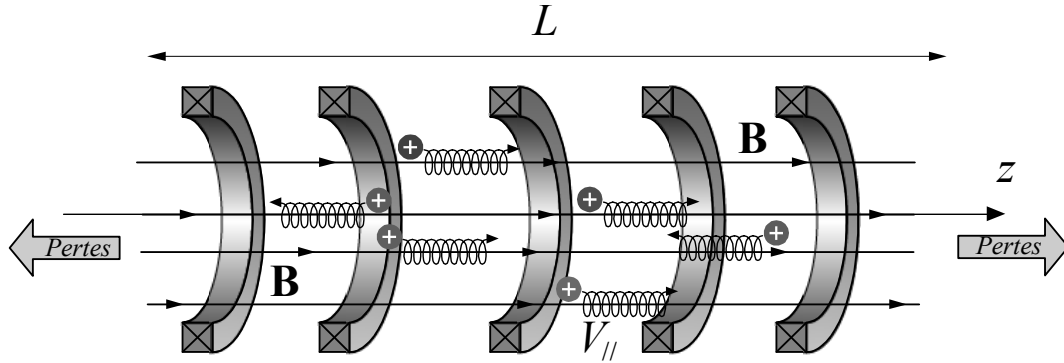
Considérons un champ statique et homogène :  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$  où  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$  est une base cartésienne orthonormée directe associée à un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ . Dans le plan  $[x, y]$  le confinement est assuré par la force de Laplace qui enroule les orbites suivant la rotation cyclotronique, et, si la longueur du piège suivant  $z$  est conséquente, les fuites suivant l'axe des  $z$ , en fin de piège, ramenées au volume du piège, peuvent être maintenues à un niveau compatible avec le critère de combustion.

1 Quels sont les ordres de grandeur des rayons de Larmor d'un ion Deutérium et d'un électron, d'énergies cyclotroniques 10 keV, confinés par un champ homogène et statique de 10 T ?

Les pertes principales pour une telle configuration magnétique ouverte sont de nature convective en sortie de piège : ions et électrons quittent le piège au bout d'un temps dont l'ordre de grandeur est égal au rapport  $L/V_{\parallel}$  où  $L$  est la longueur du piège et  $V_{\parallel}$  la vitesse moyenne le long des lignes de champ.

2 Sachant que les contraintes liées à l'équilibre et à la stabilité magnéto-hydrodynamique imposent une densité de particules de l'ordre de  $10^{14}\text{cm}^{-3}$ , le temps de confinement des ions permettant l'entretien de la combustion est donc de l'ordre de 1 s (critère de Lawson); quel doit être l'ordre de grandeur de la longueur

$L$  pour que le temps de confinement d'un ion deutérium, d'énergie cinétique le long des lignes de champ de 10 keV, soit de l'ordre de la seconde?

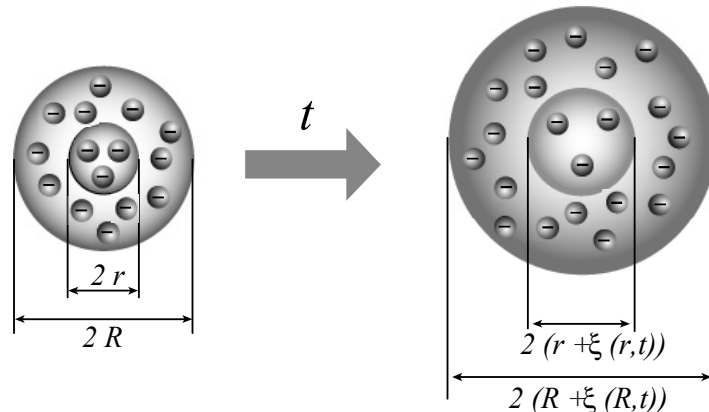


3 Un moyen d'inhiber les pertes en bout de piège consiste à appliquer un champ électrique confinant suivant l'axe des  $z$ , champ dérivant d'un potentiel parabolique :  $\Phi(x, y, z) = \Phi_0 z^2 / \lambda^2$ . Expliquer brièvement, en quelques phrases, pourquoi un tel procédé ne peut pas être mis en oeuvre pour le confinement des plasmas thermonucléaires.



N Dans le cadre de cette partie nous allons étudier les trois échelles de temps associées à la dynamique des sphères de plasmas neutre et non-neutre. De telles sphères de plasmas neutre ou non-neutre sont créées en laboratoire par irradiation laser de nanoparticules en phase diluée. Ainsi des nanoplasmas sphériques sont générés, puis se détendent, soit sous l'effet de la pression cinétique, soit par éclatement coulombien. Nous allons, dans une première partie, étudier l'éclatement coulombien d'une sphère d'électrons et calculer l'échelle de temps caractéristique de cette détente; dans une deuxième partie nous considérerons l'influence des collisions et calculerons le temps de migration des charges vers la surface d'une sphère chargée. Enfin, dans la troisième partie, nous établirons l'existence d'une oscillation électrique pour une sphère de plasma neutre puis la mise en perspective de cet ensemble de résultats sera proposée dans les trois dernières questions.

On considère un plasma sphérique constitué uniquement d'électrons, de charge  $-e$  et de masse  $m$ , initialement au repos. On utilise un système de coordonnées sphériques de vecteur radial unitaire  $\mathbf{e}_r$ ; la position d'un point est donc donnée par  $r\mathbf{e}_r$ , où  $r$  est la coordonnée radiale du vecteur position. On note  $n(r, t)$  la densité d'électrons en un point de position  $r$  à un instant  $t$ ; la densité initiale à l'instant  $t = 0$  étant homogène et égale à  $N$ :  $n(r, t = 0) = N$  si  $0 < r < R$  et  $n(r, t = 0) = 0$  si  $r > R$ . A l'instant initial,  $t = 0$ , cette sphère d'électrons présente donc un rayon  $R$ . Sous l'effet des forces répulsives coulombiennes cette sphère éclate suivant la direction radiale. On appelle  $\xi(r, t)$  le déplacement radial, à l'instant  $t > 0$ , des électrons situés initialement en  $r$  à l'instant  $t = 0$ ; la position d'un électron initialement en  $r$  est donc donnée par  $r + \xi(r, t)$ . A l'instant  $t = 0$ , le déplacement radial ainsi que la vitesse radiale sont nuls:  $\xi(r, t = 0) = 0$ ,  $\frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$ .



1 Calculer le champ électrique,  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_r$ , créé à l'intérieur de la sphère en  $r + \xi(r, t)$  à l'instant  $t$  par ce plasma électronique en expansion.

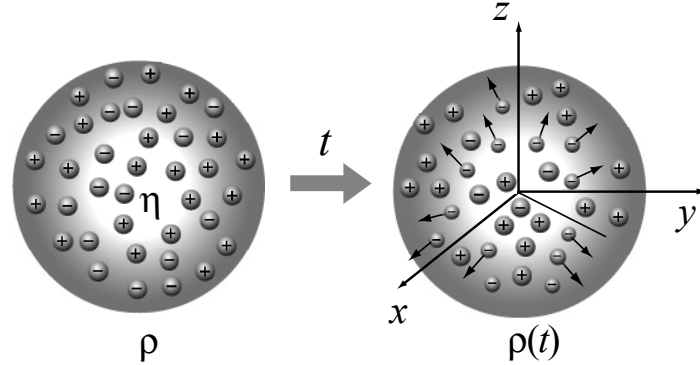
2 En déduire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par  $\frac{\partial^2 \xi(r, t)}{\partial t^2}$ ; on introduira  $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$ . Quel est le nom et quelle est la signification de cette quantité?

3 En déduire l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $\frac{\partial \xi(r, t)}{\partial t}$ .

4 Exprimer  $\omega_p t$  en fonction de  $\xi$  et  $r$  et commenter. En particulier, quel est le temps  $T$  de doublement du rayon ( $R \rightarrow 2R$ ) de la sphère? Le processus d'éclatement est-il exponentiel, pourquoi?

La pulsation  $\omega_p$  n'est pas la seule échelle caractéristique associée à la dynamique électrique d'une sphère non-neutre; il existe une deuxième échelle de temps, appelée temps de relaxation de Maxwell, décrivant le processus de disparition des charges libres en volume et de migration collisionnelle vers la surface sous l'effet de leur répulsion mutuelle.

Considérons un plasma sphérique constitué de protons, supposés infiniment lourds, donc au repos, et d'électrons mobiles en interaction collisionnelle avec les protons. Cette sphère de plasma est chargée négativement en raison d'un excès initial d'électrons par rapport aux protons. A un instant initial  $t = 0$  cette sphère est donc globalement chargée avec une densité volumique de charge uniforme  $\rho_0$ . Sous l'effet de la répulsion coulombienne et des collisions, cette densité volumique de charge évolue en fonction du temps, nous la noterons  $\rho$  à un instant  $t$ . Cette densité volumique de charge crée un champ électrique  $\mathbf{E}$  et ce champ électrique met en mouvement les électrons (les protons sont immobiles durant le processus) créant ainsi une densité volumique de courant  $\mathbf{J}$ . Compte tenu des collisions entre électrons et protons le courant électronique obéit à la loi d'Ohm:  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  où  $\sigma$  est la conductivité électrique, supposée homogène.



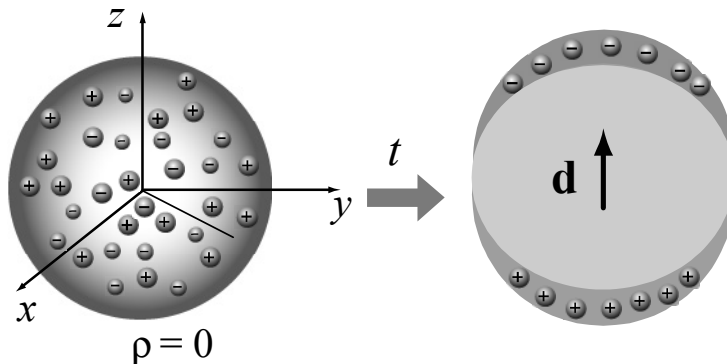
5 Quelle est l'unité de  $\sigma$ ? Quelle est l'unité de  $\varepsilon_0$ ?

6 A l'aide de l'équation de Maxwell-Gauss établir l'équation reliant  $\mathbf{E}$  et  $\rho$  à un instant  $t$ . A l'aide du principe de conservation de la charge établir l'équation reliant  $\mathbf{J}$  et  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  à un instant  $t$ .

7 En déduire l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$  et  $\rho$ . Exprimer  $\rho(t)$  en fonction des données du problème.

8 Quel est le temps caractéristique  $\tau_M$  (temps de Maxwell) de migration de l'excès de charge électronique vers la surface de la sphère ionique? On introduit la densité de protons  $N$ , la pulsation plasma  $\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}$  et l'expression de Lorentz de la conductivité  $\sigma = \frac{Ne^2}{m\nu}$  où  $m$  est la masse de l'électron,  $-e$  sa charge et  $\nu$  la fréquence de collision. Exprimer  $\tau_M$  en fonction de  $\nu$  et  $\omega_p$  et commenter.

Dans cette dernière partie nous considérons maintenant une sphère, de rayon  $R$ , constituée par un plasma neutre de densité ionique  $n_i$  homogène et de densité électronique  $n_e$  homogène:  $n = n_i = n_e$ , les ions sont des protons. Sous l'effet d'une perturbation initiale la composante électronique du plasma est déplacée; cette perturbation ne modifie pas la forme sphérique de la population électronique et déplace juste le centre de la sphère électronique. Ainsi obtient-on deux sphères homogènes, une sphère ionique, formée de protons, et une sphère électronique, dont les centres sont séparés par une distance  $d$  telle que  $d \ll R$ . On notera  $\mathbf{d}$  le vecteur décrivant ce déplacement entre les deux centres des sphères ionique et électronique; la masse de l'électron est notée  $m$  et sa charge  $-e$ .



9 A l'aide du théorème de Gauss, calculer le champ électrique  $\mathbf{E}$  dans le volume commun aux deux sphères.

10 A l'aide du principe fondamental de la dynamique, déduire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par  $\frac{d^2 \mathbf{d}}{dt^2}$ ; on introduira  $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}$ . Quelle est la pulsation caractéristique associée à ce type de perturbation? Commenter.

11 On considère à présent une sphère de protons libres et d'électrons libres froids, cette sphère est chargée négativement telle que de densité volumique de charge initiale ( $t = 0$ )  $\rho_0$  soit uniforme. Construire un modèle

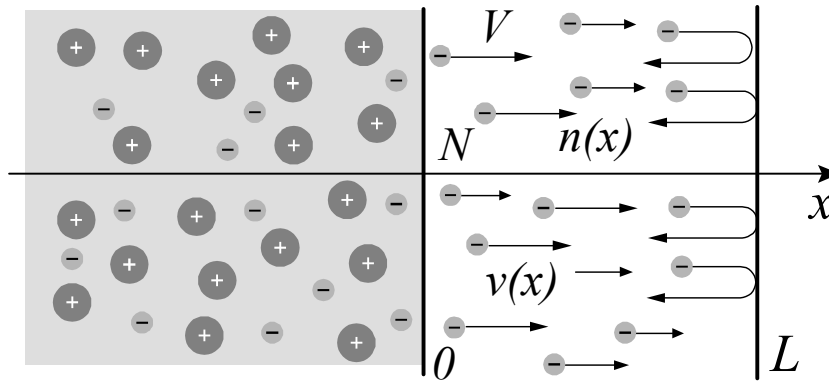
conjuguant l'éclatement coulombien identifié dans la première partie et la migration collisionnelle décrite dans la deuxième partie; proposer un critère permettant de discriminer: (i) un régime inertiel collectif où une sphère chargée négativement éclate sous l'effet de ses forces coulombiennes internes et (ii) un régime resistif de relaxation vers l'équilibre. Commenter et discuter le croisement de ces deux régimes ou l'absence de croisement.

12 Quelles seraient les modifications de l'ensemble des modèles proposés dans ce problème si nous considérons: (i) une population d'électrons chauds à une température  $T$ , (ii) une population d'électrons et d'ions chauds à une température commune  $T$ . Proposer une nouvelle échelle caractéristique d'évolution de telles sphères chaudes (temps, longueurs, vitesses...).

13 Quelles seraient les modifications de l'ensemble des modèles proposés dans ce problème si nous considérons une population d'électrons froids à température nulle mais présentant une densité telle que les effets de dégénérescence quantique doivent être pris en compte.



**O** On considère un plasma semi infini occupant la région  $x < 0$ . L'interface  $x = 0$  de ce plasma émet des électrons de vitesse  $V$  dans la direction  $x > 0$ . Sous l'effet des forces électrostatiques ces électrons rebroussement chemin au bout d'un parcours  $L$ . On appelle  $v(x)$  la vitesse de ces électrons à une distance  $x$  de l'interface, on a donc  $v(x=0) = V$  et  $v(x=L) = 0$ . On appelle  $n(x)$  la densité de ces électrons et on pose  $n(0) = N$ . On appelle  $U(x)$  le potentiel électrostatique créé par ces électrons.



1 En appliquant la conservation de l'énergie des électrons, exprimer  $v(x)$  en fonction de  $U(x)$ ,  $e$ ,  $m$  et  $V$ .

2 En appliquant la conservation de la charge, exprimer  $n(x)v(x)$  en fonction de  $N$  et  $V$ .

3 Exprimer  $n(x)$  en fonction de  $U(x)$  et des paramètres  $N$ ,  $V$ ,  $e$  et  $m$ .

4 En déduire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par  $U(x)$ . En déduire l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $U(x)$ .

5 En déduire  $U(x)$  et  $L$ , commenter.



**P** Lorsqu'un champ magnétique est appliqué à un plasma, une zone de mélange champ-plasma se crée. La taille de cette zone est fonction du régime d'interaction et du processus d'application. Dans ce problème nous allons étudier successivement les régimes inertiel et collisionnel d'interaction par contact avec une zone magnétisée.

Considérons un plasma homogène, occupant le demi-espace  $x > 0$ , formé d'électrons, de masse  $m$ , de charge  $-e$  et de densité  $n_e$ , et d'un fond neutralisant d'ions supposés infiniment lourds donc immobiles. Le demi-espace  $x < 0$  est vide et soumis à un champ magnétique homogène dépendant du temps dirigé suivant l'axe des  $z$ :  $\mathbf{B} = B_0(t)\mathbf{u}_z$ . Par continuité le demi-espace  $x > 0$  est soumis à un champ magnétique  $\mathbf{B} = B(x,t)\mathbf{u}_z$ ; les variations temporelles de ce champ induisent un champ électrique d'induction  $\mathbf{E}$  dirigé suivant l'axe des  $y$ :  $\mathbf{E} = E(x,t)\mathbf{u}_y$  et ce champ est la source d'un mouvement électronique de vitesse:  $\mathbf{V}_e = V(x,t)\mathbf{u}_y$ , donc d'un courant; ce courant crée un champ magnétique de direction opposée à celui appliqué et sa valeur détermine le processus de pénétration magnétique dans le plasma  $x > 0$ . On néglige les collisions et le courant de déplacement  $\partial\mathbf{E}/\partial t$ ;  $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$  est une base cartésienne orthonormée directe.

1 Enoncer la relation de Maxwell-Faraday et établir la relation entre  $E$  et  $B$ .

2 Enoncer la relation de Maxwell-Ampère et établir la relation entre  $B$  et  $V$ .

3 Enoncer la loi de Newton et établir la relation entre  $V$  et  $E$ .

4 En déduire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par  $E(x,t)$  et exprimer  $B(x,t)$ ; on introduira  $\lambda_p^2 = c^2 / \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m}$ , quel est le nom de cette longueur? Commenter.



**Q** Le modèle précédent considère un plasma sans collision. Il est donc relevant pour la phase dynamique sur une échelle de temps plus courte que l'inverse de la fréquence de collisions; pour les temps longs la loi de Newton doit être remplacée par la loi d'Ohm:  $\mathbf{J} = \eta \mathbf{E}$  où  $\mathbf{J}$  est la densité de courant électronique dans le plasma et  $\eta$  est la conductivité du plasma résultant des collisions électrons-ions. On néglige le courant de déplacement  $\partial \mathbf{E} / \partial t$ .

1 Etablir l'équation décrivant la dynamique du champ magnétique dans ce régime collisionnel, c'est-à-dire exprimer la relation entre les variations spatiales  $\frac{\partial^2 B}{\partial x^2}$  et les variations temporelles  $\frac{\partial B}{\partial t}$ . Comment appelle-t-on ce type d'équation?

2 Quelle est la dimension de la quantité  $\frac{1}{\mu_0 \eta}$ ? Justifier votre réponse. Dans le cadre d'un modèle dit de Lorentz la conductivité  $\eta$  est donnée en fonction de la fréquence de collisions  $\nu$  par  $\eta = \frac{n_e e^2}{m \nu}$ ; exprimer  $\frac{1}{\mu_0 \eta}$  en fonction de  $\lambda_p^2$  et  $\nu$ , commenter.



**R** On considère un plasma semi-infini de densité électronique homogène  $N$ , occupant la région  $x > 0$ . La région  $x < 0$  est vide et soumise à un champ magnétique homogène  $\mathbf{B}(x, t)|_{x < 0} = B_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_z$  dirigé suivant l'axe des  $z$ . La région  $x > 0$  est soumise à un champ magnétique inhomogène résultant de la pénétration du champ appliqué dans le vide:  $\mathbf{B}(x, t)|_{x > 0} = B(x) \cos[\omega t + \psi] \mathbf{e}_z$ . Ce champ magnétique variable crée un champ électrique d'induction  $\mathbf{E}(x, t) = E(x) \cos[\omega t + \varphi] \mathbf{e}_y$ , dirigé suivant l'axe des  $y$ , qui met en mouvement les électrons du plasma semi-infini. On supposera les ions immobiles et les électrons collisionnels tels que leur vitesse suivant  $y$ ,  $\mathbf{V}(x, t) = V(x) \cos[\omega t + \phi] \mathbf{e}_y$ , soit solution de l'équation:

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = q\mathbf{E} - m\nu\mathbf{V}$$

où  $m$  et  $q$  sont respectivement la masse et la charge de l'électron et  $\nu$  la fréquence de transfert d'impulsion (friction). On négligera le courant de déplacement et la force de Laplace, mais on ne négligera pas l'inertie électronique. On introduit les variables complexes  $\tilde{B}(x)$ ,  $\tilde{E}(x)$  et  $\tilde{V}(x)$  telle que  $B(x) \cos[\omega t + \psi] = \text{Re} [\tilde{B}(x) \exp(j\omega t)]$ ,  $E(x) \cos[\omega t + \varphi] = \text{Re} [\tilde{E}(x) \exp(j\omega t)]$ ,  $V(x) \cos[\omega t + \phi] = \text{Re} [\tilde{V}(x) \exp(j\omega t)]$ .

1 Exprimer  $\tilde{V}(x)$  en fonction de  $\tilde{E}(x)$ .

2 Enoncer la relation (équation) de Maxwell-Faraday et établir la relation entre  $\frac{d\tilde{E}(x)}{dx}$  et  $\tilde{B}(x)$ . Enoncer la relation (équation) de Maxwell-Ampère et établir la relation entre  $\frac{d\tilde{B}(x)}{dx}$  et  $\tilde{V}(x)$ .

3 En déduire l'équation différentielle du deuxième ordre vérifiée par  $\tilde{E}(x)$  et exprimer  $\tilde{E}(x)$ , on introduira  $\lambda_p^2 = c^2 / \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 M}$ .

4 Retrouver les deux cas limites de pénétration inertielle (London) et résistive (Kelvin) du champ magnétique.



**S** Considérons maintenant un troisième mécanisme d'interaction champ magnétique-plasma. Nous allons étudier le phénomène de pénétration d'un plasma dans un champ en présence d'un écoulement et calculer la longueur d'interaction. Soit, en régime stationnaire ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ), un écoulement  $\mathbf{V}$ , interagissant avec un champ magnétique  $\mathbf{B}$ :

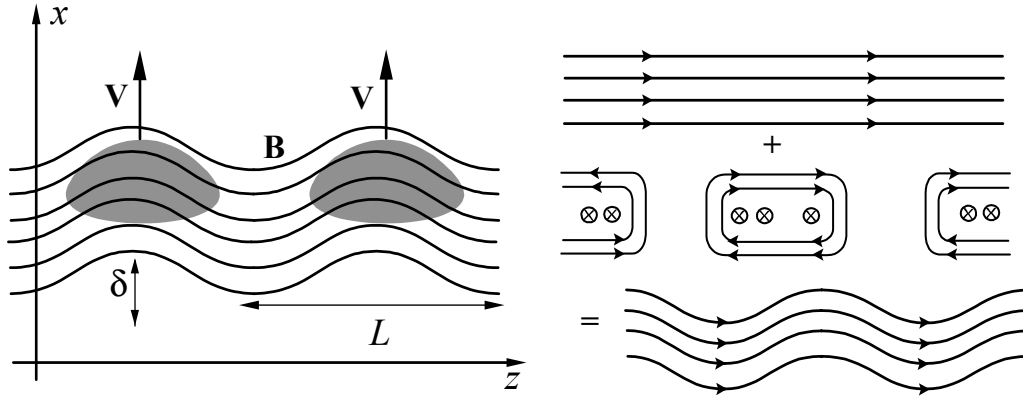
$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= V \cos \frac{z}{L} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{B} &= b(z) \mathbf{u}_x + B \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

$(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$  est une base cartésienne orthonormée directe;  $V$  et  $B$  sont deux constantes. L'écoulement de plasma est supposé collisionnel; la densité de courant  $\mathbf{J}$ , le champ électrique  $\mathbf{E}$  et la vitesse  $\mathbf{V}$  sont donc reliés par la loi d'Ohm  $\mathbf{J} = \eta (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$  où  $\eta$  est la conductivité du plasma résultant des collisions électrons-ions.

On néglige le courant de déplacement  $\partial \mathbf{E} / \partial t$ .

1 Etablir l'équation, reliant  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{B}$ , traduisant l'interaction champ-écoulement en régime stationnaire.

2 En déduire une relation entre  $\frac{d^2 b}{dz^2}$  et  $z$ . On introduira le nombre sans dimension  $\mathcal{R}_M = \mu_0 \eta V L$ .



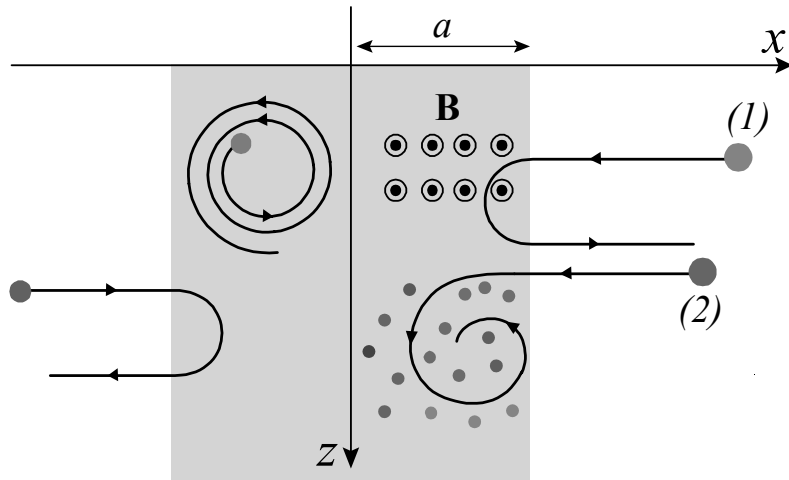
3 L'équation des lignes de champ est donnée par :  $\frac{dx}{dz} = \frac{b(z)}{B}$ . Intégrer l'équation précédente C8 et déduire la structure des lignes de champ magnétique; quelle est l'amplitude  $\delta$  de leur ondulation? Exprimer  $\delta$  en fonction de  $\mathcal{R}_M$  et  $L$ ; commenter.



T Soit  $(x, y, z)$  un système de repérage cartésien sur une base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ . Considérons le champ magnétique inhomogène localisée  $\mathbf{B}(x)$  décrivant un espace libre de champ ( $x \rightarrow +\infty$ ) et une zone magnétisée ( $x \sim 0$ ) suivant la relation :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x) &= B\mathbf{e}_y \text{ si } -a < x < a \\ \mathbf{B}(x) &= \mathbf{0} \text{ si } |x| \geq a \end{aligned}$$

ou  $B$  et  $a$  sont deux constantes données de base du modèle. La trajectoire d'un ion deutérium (1) sur la figure ci-dessous est dite libre car la particule ne reste pas localisée au voisinage de  $x \sim 0$ .



Si la zone magnétisée  $|x| < a$  est aussi rempli d'un plasma d'électron, les collisions assurent un transfert d'énergie de l'ion de vitesse  $\mathbf{V}$  vers les électrons, décrit par une force de friction  $-m\nu\mathbf{V}$ , permettant ainsi une transition vers une orbite liée (2). L'objectif de cet exercice est d'établir le critère de piégeage collisionnel. La dynamique d'un ion deutérium dans cette configuration de force de Laplace et de force de friction est donnée par :

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = e\mathbf{V} \times \mathbf{B}(x) - m\nu\mathbf{V} \text{ si } |x| < a \text{ et } \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{0} \text{ si } |x| \geq a$$

1 Définissons la variable complexe  $\mathcal{Z} = V_x + jV_z$  et notons  $\omega_c$  la pulsation cyclotron :  $\omega_c = eB/M$ , établir l'équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par  $\mathcal{Z}(t)$  et  $d\mathcal{Z}/dt$  si  $|x| < a$ .

2 Résoudre cette équation pour la condition initiale  $\mathbf{V}(t) = -V_0\mathbf{e}_x$  lorsque  $x(t) = +\infty$  si  $|x| < a$ .

3 Dédurre du résultat précédent la condition de piégeage collisionnel d'un ion deutérium en fonction des données du problème.



U L'objectif de ce problème est d'établir les conditions théoriques d'optimisation du fonctionnement de certains réacteurs tels que ceux utilisés pour le dépôt de couches ultra-minces dans les industries optiques. On considère un plasma faiblement ionisé, créé à partir d'un gaz neutre, et entretenu grâce au mécanisme d'*ionisation par impacts électroniques* : la population électronique est générée par un champ électrique statique  $\mathbf{E} \left[ \frac{\text{V}}{\text{m}} \right] = -E\mathbf{e}_x$ ; durant toute cette étude on notera  $E = \sqrt{\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}}$  la norme du champ électrique. La pression du gaz neutre non ionisé est notée  $P$  et la densité d'électrons  $n_e \left[ \text{m}^{-3} \right]$ .

Le phénomène d'amplification électronique le long de la direction  $x$  du champ électrique de l'ionisation est décrit par l'équation :  $\left. \frac{dn_e}{dx} \right|_{ampli} = \alpha(E, P) n_e(x)$

6 Pourquoi le coefficient  $\alpha(E, P)$  dépend-il de la pression de gaz neutre  $P$  et du champ électrique  $E$ ?

Une théorie simple, basée sur le concept de libre parcours moyen, permet d'établir une forme fonctionnelle du type:  $\alpha(E, P) = aP \exp(-bP/E)$ , conforme aux résultats expérimentaux. Néanmoins le désaccord entre l'expérience et la théorie est de l'ordre de 10%. Une théorie plus élaborée permet d'établir une forme fonctionnelle du type:  $\alpha(E, P) = CP \exp[-D\sqrt{P/E}]$ , le désaccord avec l'expérience étant alors ramené à quelques %. C'est cette deuxième forme que nous utiliserons dans cette étude. On considère que le potentiel électrostatique  $\phi(x)$  est une fonction monotone croissante de la position  $x$  ( $\mathbf{E} = -\frac{d\phi}{dx}\mathbf{e}_x$ ) de la cathode vers l'anode, il est donc possible d'utiliser ce potentiel  $\phi$  pour repérer la position  $x$  dans le plasma et d'effectuer le changement de variable  $x \rightarrow \phi$  dans l'équation décrivant l'amplification électronique:

$$\left. \frac{d \ln n_e}{d\phi} \right|_{\text{ampli}} = \frac{\alpha(E, P)}{E}$$

Le coefficient  $\alpha(E, P)/E = C(P/E) \exp \left[ -D\sqrt{P/E} \right]$  dépend alors uniquement du rapport  $\frac{E}{P}$ .

7 Etablir l'existence d'un maximum de ce coefficient  $\frac{\alpha}{E}$  considéré comme une fonction de  $\frac{E}{P}$ . On notera  $\frac{\alpha}{E}|_s$  la valeur de ce maximum et  $\frac{E}{P}|_s$  la valeur de  $\frac{E}{P}$  permettant d'atteindre ce maximum dit *maximum de Stoletow*. Exprimer  $\frac{E}{P}|_s$  et  $\frac{\alpha}{E}|_s$  en fonction de  $D$  et  $C$ .

V L'objectif de ce problème est d'identifier la nature des flux de particules collisionnels en régime classique. Les processus de transport étant lents au regard des autres échelles de temps d'un plasma thermonucléaire, ils peuvent être considérés comme une suite d'équilibre prenant en compte : (i) les forces de pression, (ii) la densité volumique de force de Coulomb et (iii) la densité volumique de force de Laplace, (iv) plus un terme de friction traduisant les transferts d'impulsions collisionnels entre électrons et ions; la dynamique du plasma se réduit donc au bilan de forces :

$$\underbrace{-\nabla P}_{\text{Pression}} + \underbrace{nq\mathbf{E}}_{\text{Coulomb}} + \underbrace{nq\mathbf{V} \times \mathbf{B}}_{\text{Laplace}} - \underbrace{nm\nu\mathbf{V}}_{\text{Friction}} = \mathbf{0}$$

Ce bilan des forces auquel est soumis un fluide électronique, ou ionique, permet d'étudier les phénomènes de mobilité et diffusion magnétisées et d'établir ainsi l'équation de transport de la matière en présence d'un champ magnétique statique  $\mathbf{B}$ .

- 1 Former le produit vectoriel de la vitesse  $\mathbf{V}$  avec l'expression précédente.
- 2 Former le produit scalaire de la vitesse  $\mathbf{V}$  avec l'expression précédente.
- 3 En déduire l'expression de la vitesse  $\mathbf{V}$  en fonction des champs  $\mathbf{E}$ ,  $\nabla P$  et  $\mathbf{B}$ .
- 4 On introduit  $\mathbf{E}_{\parallel} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{b} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{b})$ ,  $\nabla_{\parallel} = \mathbf{b} (\mathbf{b} \cdot \nabla)$  et  $\nabla_{\perp} = -\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \nabla)$  où  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$  et  $D_{\parallel} = \frac{k_B T}{m\nu}$ ,  $\mu_{\parallel} = \frac{q}{m\nu}$  et  $\omega_c = qB/m$  et la pression  $P$  est reliée à la température  $T$  suivant l'équation d'état classique  $P = nk_B T$ . Exprimer la vitesse  $\mathbf{V}$  sur la base  $\mathbf{E}_{\parallel}$ ,  $\mathbf{E}_{\perp}$ ,  $\nabla_{\parallel} n$ ,  $\nabla_{\perp} n$ .
- 5 Identifier les termes dits de Hall et commenter.

W L'existence des oscillations plasma peut être mise à profit pour transférer, de manière irréversible, de l'impulsion et de l'énergie d'un champ électrique vers la population électronique. Ce problème propose une étude de ce mécanisme de chauffage résonant. Soit un plasma homogène infini constitué d'électrons et de protons. Ces protons sont supposés infiniment lourds et donc restent au repos. A l'équilibre les électrons sont supposés au repos, la densité électronique,  $n_0$ , est homogène et égale à la densité protonique, et le champ électrique est identiquement nul en tout point de l'espace. On considère une perturbation (unidimensionnelle le long de l'axe des  $x$ ) de cet état d'équilibre, telle que tous les électrons appartenant à un plan  $x = x_0$  à l'instant initial  $t = 0$  sont déplacés dans le plan  $x = x_0 + \xi(x_0, t)$  à l'instant  $t$ , les protons restant au repos. La densité électronique devient donc inhomogène et la séparation de charges résultantes génère un champ électrique  $\mathbf{E}$ . La fonction  $\xi(x_0, t)$  est telle que tous les électrons situés initialement entre le plan  $x = x_0$  et le plan  $x = x_0 + \xi$  sont déplacés vers des coordonnées  $x > x_0 + \xi$  afin de préserver l'ordre initial entre les



différentes couches d'électrons. On observe donc à l'instant  $t$  un déficit de charges négatives à gauche du plan  $x = x_0 + \xi$ .

1 Calculer le champ électrique  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$  en un point  $x = x_0 + \xi$  à l'instant  $t$ ,  $\mathbf{e}_x$  est un vecteur unitaire le long de l'axe des  $x$ . On établira la valeur de  $E$  sous la forme  $E = \frac{m}{q}\omega_p^2\xi$  où l'on explicitera  $\omega_p$  en fonction des données du problème.

2 Etablir l'équation vérifiée par  $\xi$  et  $\partial^2 \xi / \partial t^2$ .

**3** On introduit la variable complexe  $\mathcal{Z}(t) = \omega_p \xi + i \frac{\partial \xi}{\partial t}$ ; établir l'équation différentielle vérifiée par  $\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial t}$  et  $\mathcal{Z}$ .

4 Exprimer l'énergie mécanique (cinétique plus potentielle)  $\varepsilon$  d'un électron en fonction de  $\mathcal{Z}$  et  $\mathcal{Z}^*$ .

On considère dans la suite du problème que la population électronique est soumise à un champ électrique harmonique d'origine extérieure au plasma :  $\mathcal{E}(t) = -\frac{m}{q}A \cos(\omega t)$ . Ce champ électrique interagit avec les électrons qui sont ainsi soumis à deux forces : la force étudiée dans les questions précédentes décrivant l'interaction avec le reste du plasma, et la force  $-q\mathcal{E}$ .

5 Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $\frac{\partial Z}{\partial t}$ ,  $Z(t)$  et  $A \cos(\omega t)$ .

6 Exprimer  $\mathcal{Z}(\tau)$  lorsque les conditions initiales sont données par  $\mathcal{Z}(0) = a_0 \exp(i\varphi_0)$ ;  $\omega$  étant de l'ordre de grandeur de  $\omega_p$  on ne conservera de cette expression de  $\mathcal{Z}(\tau)$  que la partie dite résonante présentant un dénominateur proportionnel à  $\omega_p - \omega$ .

<sup>7</sup> En déduire l'énergie absorbée par un électron :  $\delta\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau) - \varepsilon(0)$ ; on ne conservera de cette expression de  $\delta\varepsilon$  que la partie linéaire en  $A$  et on négligera la partie en  $A^2$ .

8 Faire la moyenne de ce transfert d'énergie sur la phase initiale de l'oscillation  $\varphi_0$  et exprimer  $\langle \delta \varepsilon \rangle_{\varphi_0}$ . Calculer  $\langle \delta(\sqrt{\varepsilon}) \delta(\sqrt{\varepsilon}) \rangle_{\varphi_0}$  moyennée sur la phase initiale de l'oscillation ( $\delta(\sqrt{\varepsilon}) = \frac{\delta \varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}}$ ).

9 Exprimer  $\frac{\langle \delta \sqrt{\varepsilon} \delta \sqrt{\varepsilon} \rangle_{\varphi_0}}{2\tau}$  lorsque  $\tau \rightarrow +\infty$ ; on exprimera ce coefficient explicitement en fonction des données du problème.

On considère une description cinétique de l'excitation des oscillations plasma et on introduit la fonction de distribution  $F(\sqrt{\varepsilon}, x_0, t)$  décrivant la densité de probabilité qu'une oscillation de la tranche centrée au repos sur  $x_0$  possède l'énergie  $\varepsilon$  à l'instant  $t$  ( $F$  est une densité de probabilité et la probabilité est donnée par  $F(\sqrt{\varepsilon}, x_0, t) d\sqrt{\varepsilon} dx_0$ ) ; cette densité de probabilité est factorisable et normalisée :  $F(\sqrt{\varepsilon}, x_0, t) = f(\sqrt{\varepsilon}, t) n_0 (1 + \frac{x_0}{\lambda})$  ,  $\int_0^{+\infty} f(\sqrt{\varepsilon}, t) d\sqrt{\varepsilon} = 1$  ,  $n_0$  et  $\lambda$  sont deux constantes modélisant un gradient de densité non perturbé. L'équation cinétique vérifiée par  $f$  est donnée par :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[ \frac{\partial}{\partial \sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon} \frac{\langle \delta \sqrt{\varepsilon} \delta \sqrt{\varepsilon} \rangle_{\varphi_0}}{2\tau} \frac{\partial}{\partial \sqrt{\varepsilon}} \right] f$$

10 Exprimer la puissance absorbée par le plasma:  $P = \frac{d}{dt} \left[ \int_0^{+\infty} d\sqrt{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \varepsilon F(\sqrt{\varepsilon}, x_0, t) \right]$  en fonction des données du problème.



**X1** Le confinement d'un plasma thermonucléaire par un champ magnétique repose, en première analyse, au niveau microscopique, sur le résultat suivant : *le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique homogène et statique est composé d'une translation uniforme le long des lignes de champ et d'une rotation uniforme autour des lignes de champ.* Pour établir ce résultat classique considérons un proton de vitesse  $\mathbf{v}$  plongé dans un champ magnétique *statique uniforme*  $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$ , où  $\mathbf{b}$  est un vecteur unitaire. Afin d'étudier l'orbite décrite par ce proton dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{b}$ , introduisons un système de coordonnées  $[X, Y, Z]$  associé à la base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y, \mathbf{b}]$ ;  $X$  et  $Y$  constituent un système de coordonnées cartésiennes dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{b}$  et  $v_X$  et  $v_Y$  sont les composantes cartésiennes de la vitesse  $\mathbf{v}$  dans ce plan; définissons la variable complexe  $\mathcal{Z} \equiv v_X + jv_Y$  et notons  $\omega_c$  la pulsation cyclotron :  $\omega_c \equiv eB/m$ .

1 L'écriture de l'équation du mouvement d'un proton se réduit à la prise en compte de la force de Laplace, établir l'équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiée par  $\mathcal{Z}(t)$  et  $d\mathcal{Z}/dt$ .

2 Résoudre cette équation et exprimer la solution  $\mathcal{Z}(t)$  décrivant le mouvement de rotation cyclotronique autour des lignes de champ pour la condition initiale  $\mathcal{Z}(t=0) = \mathcal{Z}_0$ .

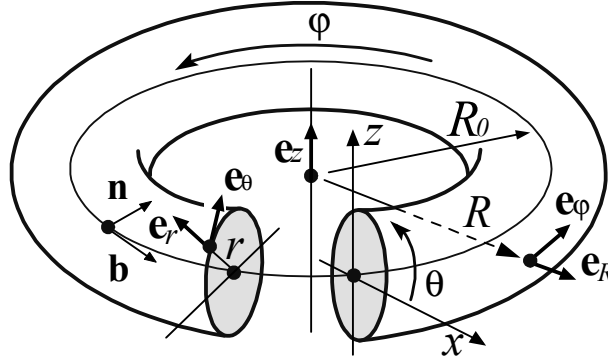
Considérons à présent un champ magnétique *inhomogène* confinant. Le vecteur position d'un proton peut être décomposé en la somme de la position du centre de la rotation cyclotronique locale, la position du *centre guide*, plus le rayon tournant de l'orbite cyclotronique, le *rayon de Larmor*  $\left(\int^t \mathcal{Z}(u) du\right)$ , nous ne nous intéresserons pas à ce mouvement cyclotronique rapide à petite échelle. Les centres guides des protons dans un champ magnétique *inhomogène* ne suivent pas exactement les lignes de champ et leurs mouvements sont la combinaison : (i) d'une translation le long des lignes de champ ( $v_{\parallel}$ ) et (ii) d'une lente *dérive* perpendiculairement aux lignes de champ ( $\mathbf{v}_D$ ) de vitesse :

$$\mathbf{v}_D \equiv \mathbf{v}_{DC} + \mathbf{v}_{DG} = v_{\parallel}^2 \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n}}{R\omega_c} + \frac{v_c^2}{2} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n}}{R\omega_c}$$

où  $R$  est le rayon de courbure des lignes de champ,  $\mathbf{b}$  le vecteur tangent aux lignes de champ et  $\mathbf{n}$  le vecteur normal aux lignes de champ;  $v_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}$  et  $v_c^2 = \mathbf{Z} \mathbf{Z}^*$  où  $\mathbf{Z}^*$  est le complexe conjugué de  $\mathbf{Z}$ .

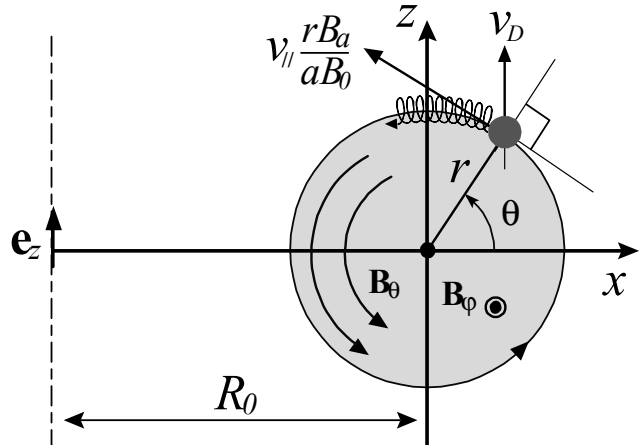
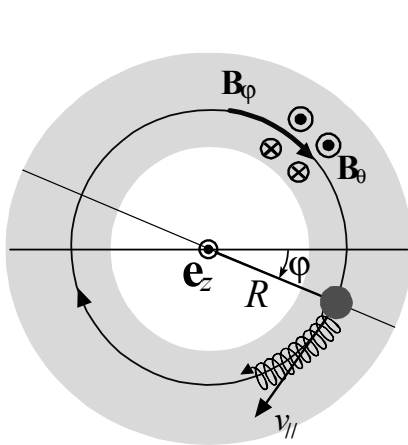
3 Expliquer, en quelques lignes, l'origine physique des deux composantes de la vitesse de dérive  $\mathbf{v}_D$ :  $\mathbf{v}_{DG}$  la vitesse de dérive de gradient et  $\mathbf{v}_{DC}$  la vitesse de dérive de courbure.

Pour une géométrie toroïdale, deux systèmes de repérage de la position du centre guide d'un proton peuvent être utilisés: (i) un repérage de type cylindrique  $[z, R, \varphi]$  sur la base orthonormée  $[\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\varphi]$  et (ii) un repérage de type toroïdal  $[r, \theta, \varphi]$  sur la base orthonormée  $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi]$ ; on considérera aussi les projections cartésiennes ( $x \equiv r \cos \theta = R - R_0$ ,  $z \equiv r \sin \theta$ ) sur la base orthonormée  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z]$  dans un plan  $\varphi$  constant. Considérons une configuration magnétique composée d'un champ magnétique toroïdal  $B_\varphi \mathbf{e}_\varphi = B_0 \frac{R_0}{R} \mathbf{e}_\varphi$  et d'un champ magnétique poloïdal  $B_\theta \mathbf{e}_\theta = B_a \frac{r}{a} \mathbf{e}_\theta$ . Le champ magnétique total est donc donné par l'expression:  $\mathbf{B} = B_\theta \mathbf{e}_\theta + B_\varphi \mathbf{e}_\varphi \equiv B_a \frac{r}{a} \mathbf{e}_\theta + B_0 \frac{R_0}{R} \mathbf{e}_\varphi$ ,  $R_0$  est le grand rayon du tokamak,  $B_0$  la valeur du champ toroïdal en  $R = R_0$ , c'est-à-dire en  $r = 0$ , et  $B_a$  la valeur du champ poloïdal en  $r = a$  où  $a$  est le petit rayon du tore.



Les lignes de champ sont alors des hélices s'enroulant sur des tores emboîtés. Au sein d'une telle configuration nous noterons  $v_{\parallel}$  la vitesse d'un proton le long des lignes de champ magnétique et  $\mathbf{v}_D = v_D \mathbf{e}_z = \left( v_{\parallel}^2 + v_c^2 / 2 \right) \mathbf{e}_z / R_0 \omega_{c0}$  la vitesse de dérive magnétique verticale, où  $\omega_{c0} \equiv e B_0 / m$  est la pulsation cyclotronique en  $R = R_0$  (c'est-à-dire  $r = 0$ ). Nous supposons les vitesses  $v_D$  et  $v_{\parallel}$  constantes, restreignant ainsi l'analyse aux *protons circulants*. Sous l'hypothèse  $B_a < B_0$ ,  $B_\varphi \approx B_0$ , la vitesse du centre guide d'un proton,  $v_D \mathbf{e}_z + v_{\parallel} \mathbf{B} / B$ , peut être écrite comme la combinaison de trois composantes:

$$v_{\parallel} \mathbf{e}_\varphi + v_{\parallel} \frac{r B_a}{a B_0} \mathbf{e}_\theta + v_D \mathbf{e}_z$$



4 Sur la base de cette expression, établir les deux équations différentielles du premier ordre vérifiées par  $dx/dt$  et  $dz/dt$  (les composantes de la vitesse du centre guide suivant  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z]$ ) en fonction de  $v_{\parallel}$ ,  $B_a/B_0$ ,  $v_D$ ,  $x/a$  et  $z/a$ .

5 On introduit la variable complexe  $\mathcal{C}(t) \equiv x(t) + \alpha + j z(t)$ , choisir une constante réelle  $\alpha$  telle que l'équation différentielle vérifiée par  $\mathcal{C}(t)$  soit simple, exprimer  $\alpha$  et établir cette équation différentielle sur  $\mathcal{C}(t)$ .

6 Exprimer la solution générale de cette équation différentielle et en déduire que l'orbite du centre guide dans le plan  $(x, z)$  est un cercle dont le centre a pour coordonnées  $(x = \delta_B, z = 0)$ ; établir l'expression du rapport  $|\delta_B/a|$  en fonction de  $v_D/v_{\parallel}$  et  $B_a/B_0$ .

7 Calculer le courant toroïdal total  $I$  [A] générant le champ poloïdal  $B_a r \mathbf{e}_\theta / a$ , courant circulant suivant  $\mathbf{e}_\varphi$  entre le centre  $r = 0$  et le bord  $r = a$ , on négligera la courbure  $R_0$  du tore ainsi assimilé à un cylindre. Sous

l'hypothèse  $v_{\parallel}^2 + \frac{v_z^2}{2} \approx 2k_B T/m$  et  $mv_{\parallel}^2 \approx k_B T$  où  $T$  est la température de la population de protons considérée, exprimer le rapport  $|\delta_B/a|$  en fonction de  $k_B T$ ,  $\mu_0 |I|$ ,  $a/R_0$  et des données du problème.

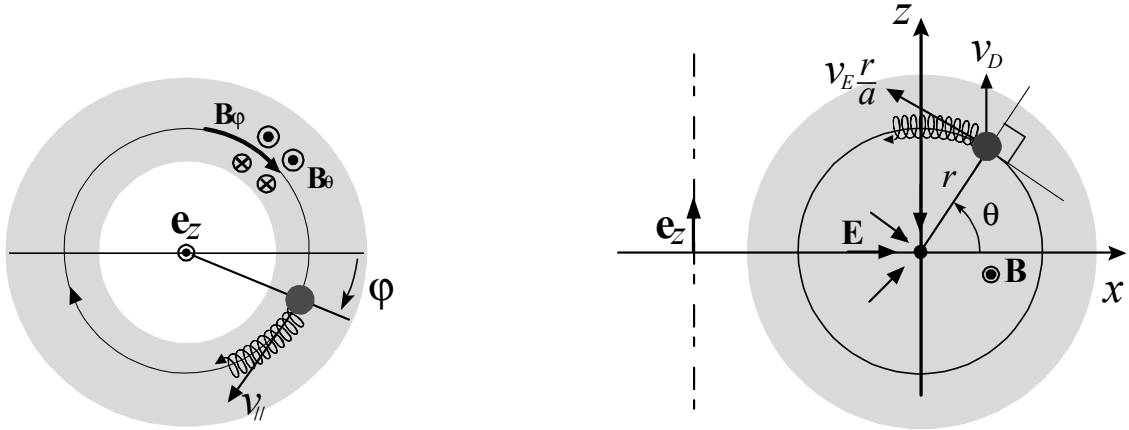
L'entretien d'un champ magnétique poloïdal  $B_a r \mathbf{e}_\theta/a$ , au sein du tore de plasma thermonucléaire nécessite un apport de puissance continu. Nous noterons  $\eta$  la conductivité du plasma dans la direction toroïdale  $\mathbf{e}_\varphi$ .

8 En négligeant la courbure  $R_0$  du tore, c'est-à-dire en assimilant le tore à un cylindre, exprimer la puissance  $W_B$  nécessaire à l'entretien d'un courant toroïdal total  $I$  réparti uniformément entre le centre  $r = 0$  et le bord  $r = a$ , on supposera  $\eta$  constant.

**X2** Deux systèmes de repérage de la position du centre guide d'un proton peuvent être utilisés en géométrie toroïdale: (i) un repérage de type cylindrique  $[z, R, \varphi]$  sur la base orthonormée  $[\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\varphi]$ ,  $\mathbf{e}_z$  étant dirigé verticalement, et (ii) un repérage de type cylindrique-toroïdal  $[r, \theta, \varphi]$  sur la base orthonormée  $[\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi]$ , on considérera aussi les projections cartésiennes ( $x \equiv r \cos \theta = R - R_0$ ,  $z \equiv r \sin \theta$ ) sur la base orthonormée  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z]$ . Considérons une configuration magnétique composée d'un champ magnétique uniquement toroïdal  $\mathbf{B} = B_\varphi \mathbf{e}_\varphi = B_0 R_0 \mathbf{e}_\varphi / R$  et d'un champ électrique radial  $\mathbf{E} = E_r \mathbf{e}_r = -E_0 r \mathbf{e}_r / a$  où  $R_0$  est le grand rayon du tore,  $B_0$  la valeur du champ magnétique en  $R = R_0$ , c'est-à-dire en  $r = 0$ , et  $-E_0$  est la valeur du champ en  $r = a$  où  $a$  est le petit rayon du tore. Les lignes de champ magnétique sont donc de simples cercles. Au sein d'une telle configuration nous noterons: (i)  $v_{\parallel}$  la vitesse d'un proton le long des lignes de champ magnétique, (ii)  $\mathbf{v}_D = v_D \mathbf{e}_z$  la vitesse de dérive magnétique verticale et (iii)  $\mathbf{v}_E$  la vitesse de dérive électrique suivant  $\mathbf{e}_\theta$ .

$$\mathbf{v}_D \equiv \frac{v_{\parallel}^2 + \frac{v_z^2}{2}}{R_0 \omega_{c0}} \mathbf{e}_z = v_D \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v}_E \equiv \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{E_0 r}{B_0 a} \mathbf{e}_\theta = v_E \frac{r}{a} \mathbf{e}_\theta$$

où l'on définit  $v_E \equiv E_0/B_0$  et  $\omega_{c0} \equiv eB_0/m$ , et où nous avons considéré  $B \approx B_0$ , nous supposons ainsi la vitesse de dérive  $v_D$  constante.



Au sein de cette configuration de champs, les équations du centre guide  $(x, z)$  d'un proton prennent la forme simple:  $\frac{dx}{dt} = -v_E \frac{z}{a}$ ,  $\frac{dz}{dt} = v_D + v_E \frac{x}{a}$ .

9 On introduit la variable complexe  $\mathcal{Z}(t) \equiv x(t) + \beta + jz(t)$ , choisir une constante  $\beta$  telle que l'équation différentielle vérifiée par  $\mathcal{Z}(t)$  soit simple, exprimer  $\beta$  et établir cette équation différentielle.

10 Exprimer la solution générale de cette équation différentielle, et en déduire que l'orbite du centre guide dans le plan  $(x, z)$  est un cercle dont les coordonnées du centre sont  $(x = \delta_E, z = 0)$ ; on exprimera le rapport  $|\delta_E/a|$  en fonction de  $v_D$  et  $v_E$ .

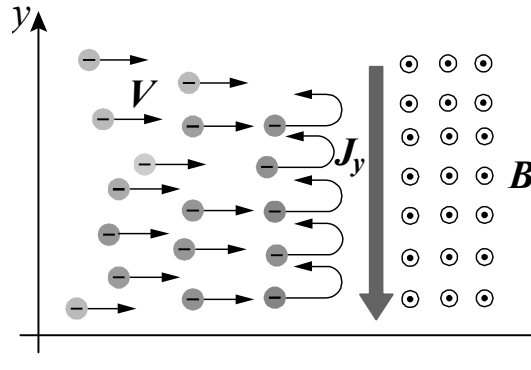
11 Calculer la différence de potentiel radiale,  $U[V] (= \int E_r dr)$ , associée au champ  $\mathbf{E}$ , entre le centre  $r = 0$  et le bord  $r = a$ ; on négligera la courbure  $R_0$  du tore ainsi assimilé à un cylindre. Sous l'hypothèse  $v_{\parallel}^2 + \frac{v_z^2}{2} \approx 2k_B T/m$ , où  $T$  est la température de la population de protons considérée, exprimer le rapport  $|\delta_E/a|$  en fonction de  $|k_B T/eU|$  et  $a/R_0$ .

L'entretien d'un champ électrique radial,  $-E_0 r \mathbf{e}_r/a$ , au sein du tore de plasma thermonucléaire nécessite un apport de puissance continu. La conductivité au sein d'un plasma thermonucléaire magnétisé n'est pas de nature scalaire mais tensorielle; ainsi, suivant la direction radiale  $\mathbf{e}_r$  le champ magnétique réduit cette conductivité à la valeur  $\eta \nu^2 / \omega_{ce0}^2$  où  $\nu$  est la fréquence de collisions supposée donnée et  $\omega_{ce0}$  la pulsation cyclotronique électronique ( $\eta$  et  $\eta \nu^2 / \omega_{ce0}^2$  sont respectivement appelées *conductivité de Spitzer* et *conductivité de Braginsky*).

12 En négligeant la courbure  $R_0$  du tore, c'est-à-dire en assimilant le tore à un cylindre, exprimer la puissance  $W_E$  nécessaire au maintien d'une tension (différence de potentiel) radiale  $U$ , entre le centre  $r = 0$  et le bord  $r = a$ , on supposera  $\eta \nu^2 / \omega_{ce0}^2$  constant.

On note  $\varepsilon_0$  la permittivité diélectrique du vide,  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide et  $c$  la vitesse de la lumière. On considère un écoulement ionique, unidimensionnel et stationnaire, suivant l'axe des  $x$ , entre le plan  $x = 0$  et le plan  $x = d$ .





Le champ magnétique  $b(x)$  dérive d'un potentiel vecteur  $a(x)$ :  $b(x) = \frac{da}{dx}$  tel que  $a(x = -\infty) = 0$ . Au voisinage de l'interface champ/particules la force de Laplace incurve les trajectoires des particules et génère une composante de vitesse suivant l'axe des  $y$ . Cette composante est à l'origine d'un courant et ce courant est la source d'un champ magnétique qui permet d'annuler le champ dans la zone occupée par le plasma. La force de Laplace induit un retour des particules et empêche le plasma de pénétrer dans la zone occupée par le champ; il s'établit ainsi un équilibre dynamique entre le champ et la matière de part et d'autre de l'interface. Nous allons calculer les caractéristiques de cette interface et la condition de l'équilibre champ-fluide. En régime stationnaire la dynamique des quatre inconnues décrivant le fluide et le champ,  $[n(x), v_x(x), v_y(x), b(x)]$ , est déterminée par les quatre équations:

$$\begin{aligned} mv_x(x) \frac{dv_x(x)}{dx} - qv_y(x)b(x) &= 0 \\ mv_x(x) \frac{dv_y(x)}{dx} + qv_x(x)b(x) &= 0 \\ \frac{d}{dx} [n(x) v_x(x)] &= 0 \\ \frac{db}{dx} + q\mu_0 n(x) v_y(x) &= 0 \end{aligned}$$

Afin de résoudre ce système de quatre équations à quatre inconnues on introduit un système de variables et d'inconnues normalisées:  $[n(x), v_x(x), v_y(x), b(x), a(x)] \rightarrow [N(X), V(X), W(X), B(X), A(X)]$  où la variable de position normalisée  $X$  et les densité, vitesse et champs normalisés sont définis par:  $X = \frac{qb_0}{mv_0}x$ ,  $N = \frac{n}{n_0}$ ,  $V = \frac{v_x}{v_0}$ ,  $W = \frac{v_y}{v_0}$ ,  $B = \frac{b}{b_0}$ ,  $A = \frac{qa}{mv_0}$ .

1 Etablir le système de cinq équations différentielles vérifié par  $N(X), V(X), W(X), B(X)$  et  $A(X)$ ; on introduira le paramètre  $\beta = \frac{\mu_0 n_0 m v_0^2}{b_0^2}$  dans l'écriture de ces équations. Quelle est la dimension de  $\beta$ ?

2 A partir de ce système d'équations, construire une combinaison,  $C[W(X), A(X)]$ , de  $W(X)$  et  $A(X)$ , indépendante de  $X$ ; c'est à dire un invariant  $C$  tel que  $\frac{dC}{dX} = 0$ . Compte tenu des conditions aux limites,  $[W(X = -\infty) = 0, A(x = -\infty) = 0]$ , quelle est la valeur de  $C$ ?

3 Construire une combinaison,  $K[V(X), A(X)]$ , de  $V(X)$  et  $A(X)$ , indépendante de  $X$ , c'est à dire un invariant  $K$  tel que  $\frac{dK}{dX} = 0$ . Compte tenu des conditions aux limites,  $[V(X = -\infty) = 1, A(x = -\infty) = 0]$ , quelle est la valeur de  $K$ ? Identifier une combinaison,  $G[N(X), V(X)]$ , de  $N(X)$  et  $V(X)$ , indépendante de  $X$ , c'est à dire un invariant  $G$  tel que  $\frac{dG}{dX} = 0$ . Quelle est la valeur de  $G$ ?

4 Dédire des résultats précédents la relation reliant  $\frac{d^2 A}{dX^2}$ ,  $A(X)$  et  $\beta$ . Etablir l'équation différentielle vérifiée par  $\frac{dA}{dX}$  et  $A(X)$ . Dans la zone d'écoulement on pose  $A(X) = \sin 2\phi$ ,  $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ ; établir l'équation différentielle vérifiée par  $\frac{d\phi}{dX}$  et  $\phi$ .

5 Exprimer  $B$  en fonction de  $\phi$ . Exprimer  $X$  en fonction de  $\phi$ . Quelle est la valeur de  $\beta$ ?



**A'** La description des décharges électriques dans les gaz ionisés s'articule autour de la séparation entre une zone dite de plasma quasi-neutre et une zone de gaine au voisinage des parois. Les gaines ont été traitées en travaux dirigés et ce problème propose une étude complémentaire de la zone de plasma quasi-neutre dans le cas inertiel. La description complète d'une décharge nécessite le raccord de la solution obtenue ici et des solutions étudiées en travaux dirigés. Le problème de ce raccord est complexe et donne lieu à l'énoncé du critère de Bohm, il n'est pas considéré ici.

On considère donc un fluide constitué d'électrons et de protons, les protons sont traités comme un fluide inertiel sans collisions et les électrons comme une population sans inertie. La dynamique de ce modèle est décrite par le système d'équations:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (n_i \mathbf{v}) &= \nu_i n_e \\ \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2 + e\phi &= 0 \\ n_e &= n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\end{aligned}$$

$n_e$  et  $n_i$  sont respectivement les densités d'électrons et de protons,  $\mathbf{v}$  est la vitesse des protons,  $n_0$  la densité électronique au centre de la décharge,  $\phi$  est le potentiel électrostatique,  $T_e$  la température électronique et  $\nu_i$  est la fréquence d'ionisation:  $\nu_i n_e$  est le nombre de protons créés par unité de volume et unité de temps. En général ce processus de génération est dû à l'impact électronique; afin de préserver la généralité des résultats nous ne précisons pas la nature du mécanisme d'ionisation et nous considérerons cette fréquence d'ionisation comme une constante, donnée de base du modèle.

1 Quels processus, phénomènes, lois de conservation, lois de comportement, équations d'état... décrivent ces trois équations? Commenter brièvement.

Nous disposons donc de trois équations qui ne permettent pas de déterminer les quatre inconnues,  $n_e$ ,  $n_i$ ,  $\mathbf{v}$  et  $\phi$ ; une hypothèse supplémentaire est nécessaire: la quasi-neutralité:  $n_e = n_i = n$ . Le modèle étant restreint à l'étude des écoulements unidimensionnels suivant l'axe des  $x$ , le système décrivant ce modèle quasi-neutre se réduit donc à:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(nv) &= \nu_i n \\ v^2 &= -\frac{2e\phi}{M} \\ n &= n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right)\end{aligned}$$

2 Justifier l'hypothèse de quasi-neutralité.

Afin de résoudre ce système de trois équations à trois inconnues on introduit un système de variables et d'inconnues normalisées:

$$[n(x), v(x), \phi(x)] \rightarrow [N(X), V(X), \Phi(X)]$$

où la variable normalisée de position est définie par  $X = \frac{\nu_i}{C_B} x$  et les densité, vitesse et potentiel par:  $\Phi = \frac{e\phi}{k_B T_e}$ ,  $V = \frac{v}{C_B}$ ,  $N = \frac{n}{n_0}$ . La vitesse  $C_B$  est définie par  $C_B = \sqrt{\frac{kT_e}{M}}$ . Les conditions aux limites sur la densité, la vitesse et le potentiel sont données par:  $N(X=0) = 1$ ,  $V(X=0) = 0$ ,  $\Phi(X=0) = 0$ .

3 Etablir le système de trois équations vérifié par  $N(X)$ ,  $\Phi(X)$  et  $V(X)$ .

4 En déduire l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par  $\frac{dN}{dX}$  et  $N$ .

5 Résoudre cette équation et exprimer  $X$  en fonction du profil de densité  $N$  (on cherchera une équation sur  $u = \sqrt{-2 \log N}$ ).

6 Exprimer  $X$  en fonction du profil de potentiel  $\Phi$ .

7 Exprimer  $X$  en fonction du profil de vitesse  $V$ .

8 Pour quelle valeur  $X^*$  la vitesse devient elle supersonique:  $V(X^*) = 1$ ?

9 Ce point  $X^*$  marque le seuil d'entrée de la zone de raccordement entre le plasma quasi-neutre et la gaine. Exprimer  $N(X^*)$ .

10 Exprimer  $\Phi(X^*)$  et commenter les résultats ainsi obtenus.



**B'** On considère l'interaction entre un proton et un champ magnétique stationnaire inhomogène  $\mathbf{B}$ . Les lignes de champs de cette configuration magnétique sont des droites parallèles mais l'amplitude du champ varie de manière linéaire d'une ligne à l'autre dans la direction des  $x$ .

$$\mathbf{B} = B \left(1 + \frac{x}{L}\right) \mathbf{e}_z$$

$(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  est une base cartésienne orthonormée directe,  $B$  est la valeur du champ à l'origine et  $L$  une longueur donnée. La position et la vitesse de ce proton sont repérées par les vecteurs  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}$ .

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z$$

1 Etablir les équations du mouvement; on introduira  $\omega_c = \frac{eB}{M}$  pour exprimer ce système d'équations.

2 Comment appelle-t-on la quantité  $\omega_c$ , quelle est sa signification physique et sa valeur pour un champ de un tesla?

Dans la suite de ce problème on considère  $z = \frac{dz}{dt} = 0$  et on introduit la variable complexe:

$$\mathcal{Z} = \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt}$$

3 Etablir l'équation différentielle ordinaire du premier ordre vérifiée par  $\frac{d\mathcal{Z}}{dt}$ ,  $\mathcal{Z}(t)$  et  $x(t)$ .

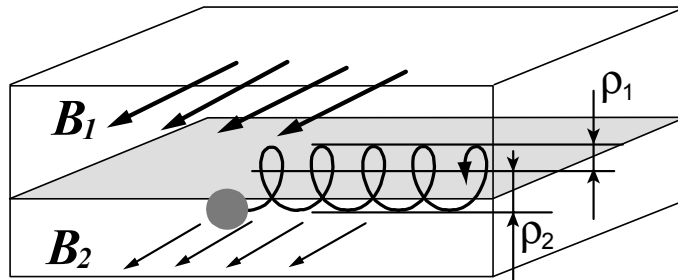
4 Résoudre cette équation dans le cas homogène:  $L = +\infty$  et en déduire les expressions de  $\mathcal{Z}(t)$  et  $x(t)$ , les conditions initiales du problème étant  $\mathcal{Z}(t=0) = V_c \exp(i\varphi_0)$  où  $V_c$  et  $\varphi_0$  désignent une amplitude et une phase réelles.

On considère maintenant le cas général du champs linéaire ( $L \neq +\infty$ ) et, sous une hypothèse d'adiabaticité, on substitue  $\mathcal{Z}(t)$  et  $x(t)$ , obtenue dans la question 4, dans le terme décrivant l'inhomogénéité du champ de l'équation générale obtenue question 3.

5 Justifier cette approximation par un "ordering" entre longueurs.

6 Résoudre l'équation différentielle ordinaire du premier ordre avec second membre ainsi obtenue et exprimer  $\mathcal{Z}(t)$ , les conditions initiales du problème étant  $\mathcal{Z}(t=0) = V_c \exp(i\varphi_0)$  où  $V_c$  et  $\varphi_0$  désignent une amplitude et une phase réelles.

7 En déduire l'existence d'une dérive perpendiculaire aux lignes de champ  $V_D \mathbf{e}_y$  se superposant aux mouvements de rotation autour des lignes de champ, exprimer  $V_D$  en fonction de  $V_c$ ,  $\omega_c$  et  $L$ .



8 Expliquer l'origine physique de cette vitesse de dérive  $V_D \mathbf{e}_y$ .



**C'** On considère l'écoulement d'un fluide constitué de protons, écoulement unidimensionnel et stationnaire, suivant l'axe des  $x$ , entre le plan  $x = 0$  et le plan  $x = d$ . Les protons sont décrits par  $n(x)$  la densité (de protons par unité de volume) et  $v(x)$  leur vitesse. Le champ électrique créé par la charge d'espace  $en(x)$  dérive du potentiel électrostatique  $\phi(x)$ . Les conditions aux limites de ce problème stationnaire unidimensionnel sont:

$$\phi(x=0) = 0, v(x=0) = 0, \phi(x=d) = U, \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=0} = f$$

En régime stationnaire la vitesse  $v(x)$  et la densité  $n(x)$  obéissent à l'équation de conservation du nombre de protons et à l'équation du mouvement:

$$\begin{aligned} nv &= \frac{J}{e} \\ Mv \frac{dv}{dx} + e \frac{d\phi}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

$J$  est une densité de courant donnée,  $f$  un champ électrique donné et  $U$  un potentiel donné, ce sont les données de base du modèle.

1 Quelle équation supplémentaire permet d'établir un système de trois équations à trois inconnues? Etablir ce système complet.

2 Etablir l'équation différentielle ordinaire du deuxième ordre vérifiée par  $\phi(x)$  et  $\frac{d^2\phi}{dx^2}$ .

Afin de résoudre cette équation on introduit un système de variables et d'inconnues normalisées:  $[\phi(x)] \rightarrow [\Phi(X)]$  où la variable de position normalisée est définie par  $X = \frac{x}{d}$  et le potentiel normalisé par:  $\Phi = -\frac{\phi}{U}$ .

On introduit le paramètre de contrôle  $R = \frac{J}{J_c}$  ou  $J_c = \frac{4\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{M}} \frac{U^{\frac{3}{2}}}{d^2}$ .

3 Etablir l'équation vérifiée par  $\frac{d^2\Phi}{dX^2}$ ,  $R$  et  $\Phi$ .

4 On introduit le paramètre de contrôle  $F = \frac{fd}{U}$ , établir l'équation vérifiée par  $\frac{d\Phi}{dX}$ ,  $R$ ,  $F$  et  $\Phi$ .

5 En déduire qu'il existe une relation entre les paramètres  $F$  et  $R$ , exprimer cette relation en gardant les intégrales qui apparaissent sous forme intégrale.

6 Exprimer cette relation entre les paramètres  $F$  et  $R$  sous forme algébrique.

7 En déduire la valeur de  $F$  permettant d'obtenir un optimum de courant  $J$ ; commenter.



**D'** On considère un plasma complètement ionisé plongé dans un champ magnétique homogène statique  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$  dirigé suivant l'axe des  $z$ . Les ions sont supposés immobiles et les électrons possèdent une distribution anisotrope de vitesses  $f(v_x, v_y, v_z)$  telle que l'énergie perpendiculaire moyenne  $E_\perp = \frac{m}{2} \langle v_x^2 \rangle + \frac{m}{2} \langle v_y^2 \rangle$  soit différente de l'énergie parallèle moyenne  $E_\parallel = \frac{m}{2} \langle v_z^2 \rangle$ .

1 Quelle équation cinétique doit-on utiliser pour étudier la relaxation de cette anisotropie et sur quelle base de polynômes orthogonaux peut-on développer  $f(v_x, v_y, v_z)$  pour décrire la relaxation de cette anisotropie? Lorsqu'un tel calcul de théorie cinétique est effectué il est possible d'identifier une fréquence de relaxation de l'anisotropie  $\nu$  telle que :

$$\frac{d(E_\perp - 2E_\parallel)}{dt} = -\nu(E_\perp - 2E_\parallel)$$

2 Sur la base de cette équation et de la conservation de l'énergie,  $E_\perp + E_\parallel$ , établir les deux équations décrivant respectivement l'évolution de  $\frac{dE_\perp}{dt}$  et de  $\frac{dE_\parallel}{dt}$  en fonction de  $E_\perp$  et  $E_\parallel$ .

3 Le champ magnétique est maintenant lentement variable en fonction du temps,  $B(t)$ , sous quelle condition le moment magnétique des électrons est-il un invariant adiabatique. Lorsque cette condition est vérifiée exprimer le terme de chauffage (de refroidissement) magnétique  $\frac{dE_\perp}{dt}$  en fonction de  $E_\perp$ ,  $B$  et  $\frac{dB}{dt}$ .

4 Compléter l'équation obtenue dans la question C-2 par ce terme de chauffage adiabatique et établir que la quantité  $\frac{E_\perp^2 E_\parallel}{B^2}$  ne peut que croître au cours du temps, commenter sur la possibilité d'un chauffage inductif dans un plasma collisionnel.



**E'** L'objectif de ce problème est d'étudier la condition d'équilibre d'une colonne cylindrique de plasma parcouru par un courant  $I$ .

On considère un cylindre circulaire de plasma de rayon  $R$ . Les ions sont supposés infiniment lourds et les électrons de masse  $m$  et de charge  $q$  sont décrits par la fonction de distribution des vitesses et des positions  $F(x, y, z, v_x, v_y, v_z)$ . On utilisera une base cartésienne  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  pour repérer les vitesses:  $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z$  et une base cylindrique  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$  pour repérer les positions  $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$ . L'axe des  $z$  constitue l'axe du cylindre. La densité d'électrons  $n(r)$  est supposée inhomogène et ne dépend que de  $r$ , la fonction de distribution des vitesses  $f(v_x, v_y, v_z)$  est supposée indépendante de la position.

$$dN = F(x, y, z, v_x, v_y, v_z) dx dy dz dv_x dv_y dv_z = f(v_x, v_y, v_z) n(r) 2\pi r dr dz dv_x dv_y dv_z$$

La fonction de distribution des vitesses est donc normalisée à l'unité:

$$\int f(v_x, v_y, v_z) \underbrace{dv_x dv_y dv_z}_{d\mathbf{v}} = 1$$

Les électrons transportant un courant total  $I$ , la distribution de vitesse est anisotrope; afin de quantifier cette anisotropie on introduit les deux moments:

$$\begin{aligned} \langle v_x^2 + v_y^2 \rangle &= \int (v_x^2 + v_y^2) f(v_x, v_y, v_z) d\mathbf{v} \\ \langle v_z \rangle &= \int v_z f(v_x, v_y, v_z) d\mathbf{v} \end{aligned}$$

associés à la pression transverse et à la densité de courant:

$$P(r) = mn(r) \frac{\langle v_x^2 + v_y^2 \rangle}{2}, \quad J(r) = qn(r) \langle v_z \rangle$$

La densité de courant axiale  $J$  suivant l'axe des  $z$  est la source d'un champ magnétique orthoradial  $B$  qui génère une force de Laplace radiale:

$$\mathbf{J} = J(r) \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{B} = B(r) \mathbf{e}_\theta$$

L'équilibre entre cette force de Laplace et la force de pression est décrit par :

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = \nabla P \quad \& \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \rightarrow \frac{dP}{dr} = -\frac{B}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rB)$$

- 1 Exprimer  $I$  en fonction de  $n(r)$  et  $\langle v_z \rangle$ .
- 2 Exprimer  $I$  en fonction de  $B(R)$  et  $R$ .



3 En intégrant  $r^2 \frac{dP}{dr}$  de 0 à  $R$  obtenir une relation entre le courant totale  $I$  et  $\int_0^R r P dr$  (on utilisera le fait que la pression s'annule à l'extérieur du plasma :  $P(R) = 0$ ).

4 En déduire la condition d'équilibre du cylindre de plasma en fonction des moments:

$$\frac{\langle v_x^2 + v_y^2 \rangle}{\langle v_z^2 \rangle} = c \left( \frac{I}{I_A} \right)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière, exprimer  $I_A$  le courant d'Alfvén. Calculer numériquement  $I_A$ .



F' Considérons le processus d'absorption cyclotronique. Soit une population, électronique ou ionique, décrite par sa fonction de distribution du module de la vitesse cyclotronique  $f(v_c, t)$ , cette distribution étant normalisée à l'unité :  $\int f(v_c, t) 2\pi v_c dv_c = 1$ . Cette population interagit avec un champ électrique de fréquence de l'ordre de grandeur de la fréquence cyclotronique :  $E \cos(\omega t) \mathbf{e}_x - E \sin(\omega t) \mathbf{e}_y$ ; l'interaction onde-particules peut être vue comme une suite : émission / absorption / émission / émission / absorption / émission / ... Cette série de processus peut être considérée comme une marche aléatoire dans l'espace des vitesses cyclotroniques et nous modéliserons donc l'évolution de la distribution par une équation de Fokker-Planck.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{v_c} \frac{\partial}{\partial v_c} v_c \frac{\langle \delta v_c \delta v_c \rangle}{2\delta t} \frac{\partial}{\partial v_c} f$$

Introduisons  $n$  la densité de particules ; la densité de puissance déposée est donnée par :

$$w_c = n \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{+\infty} 2\pi v_c \frac{mv_c^2}{2} f dv_c$$

1 Démontrer que l'évaluation de  $w_c$  se ramène au calcul du coefficient de diffusion  $\langle \delta v_c \delta v_c \rangle / 2\delta t$ .

Soit une particule, de masse  $m$  et de charge  $e$ , plongée dans un champ magnétique statique uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{b}$ , où  $\mathbf{b}$  est un vecteur unitaire, et interagissant avec le champ électrique  $E \cos(\omega t) \mathbf{e}_x - E \sin(\omega t) \mathbf{e}_y$  où  $x$  et  $y$  constituent un système de coordonnées cartésiennes dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{b}$ , système de coordonnées associé à la base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{b}]$ . L'écriture de l'équation du mouvement de la particule se réduit à la prise en compte des forces électrique et magnétique. Introduisons la variable complexe  $\mathcal{Z}$  :  $\mathbf{v}_c = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y \rightarrow \mathcal{Z} = v_x + jv_y$  ; la variable  $\mathcal{Z}$  vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$\frac{d\mathcal{Z}}{dt} + j\omega_c \mathcal{Z} = \frac{eE}{m} \exp -j\omega t$$

2 Résoudre cette équation, on prendra comme condition initiale  $\mathcal{Z}(t=0) = v_c$ .

3 L'incrément de vitesse cyclotronique  $\delta v_c(\delta t)$ , durant un temps  $\delta t$ , peut être calculé comme la variation du carré du module de la variable  $\mathcal{Z}$  :  $\delta v_c^2(v_c, \delta t) = \text{Re} [\mathcal{Z}(\delta t) \mathcal{Z}^*(0) - \mathcal{Z}(0) \mathcal{Z}^*(0)] / 2$ , en déduire l'expression de la quantité  $\delta v_c(\delta t)$  au premier ordre en  $E$  en négligeant les termes quadratique en  $E^2$ .

4 Exprimer le coefficient de diffusion quasilinear  $\frac{\langle \delta v_c \delta v_c \rangle}{2\delta t}$  en fonction des données du problème.



G' En présence d'un champ électrique des électrons d'un plasma peuvent être suffisamment accélérés pour produire des ionisations lors de leurs collisions avec des atomes du milieu. Ce phénomène d'intensification de l'ionisation est caractérisé par un coefficient appelé le premier coefficient de Townsend et noté  $\alpha$  : il représente le nombre d'électrons produits par unité de longueur par électron incident. En plus de ce phénomène d'amplification, un phénomène de régénération est nécessaire à l'entretien d'un plasma dans un volume fini car les charges sont finalement collectées aux électrodes. Ce phénomène de régénération existe et est décrit par le deuxième coefficient de Townsend noté  $\gamma$ .

Lorsqu'un ion arrive sur la cathode, il peut expulser des électrons secondaires par conversion de ses énergies cinétique et potentielle. Le nombre d'électrons secondaires produits par un ion incident définit le coefficient  $\gamma$ .

Ces deux coefficients de Townsend  $\alpha$  et  $\gamma$  permettent d'établir la condition d'entretien d'un plasma appelée critère de Townsend.

1 Considérons un électron quittant la cathode et terminant son transit sur l'anode. La distance anode-cathode est  $d$ . Combien génère-t-il de nouveaux électrons secondaires par le processus  $\alpha$ ? On notera ce nombre  $g_1$ .

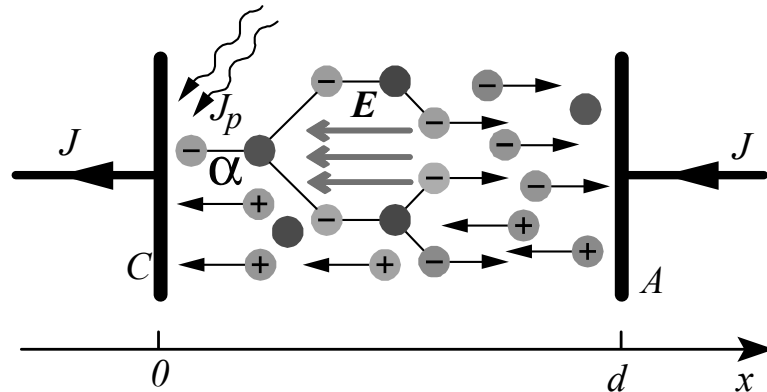
2 Considérons ce même électron quittant la cathode et terminant son transit sur l'anode. Combien génère-t-il d'ions à travers le processus  $\alpha$ ? les ions ainsi générés arrivent sur la cathode et extraient de nouveaux électrons. Ces électrons effectuent un transit de la cathode vers l'anode et donc se multiplient. Combien d'électrons arrivent ainsi à l'anode? On notera ce nombre  $g_2$ .

3 L'électron unique, initialement parti de la cathode est donc source d'une multitude de générations: 1 donne  $g_1$  qui donne  $g_2$  jusque  $g_n$  qui constitue la  $n^{ième}$  génération. Quelle est la valeur  $N$  du nombre total d'électrons générés à travers les processus  $\alpha$  et  $\gamma$ .  $N = 1 + g_1 + g_2 + \dots$

Sous quelle condition ce nombre devient infini? Commenter.



H' On considère le même problème que précédemment avec les mêmes notations: on étudie le processus d'ionisation et de conduction dans une colonne de gaz unidimensionnelle et stationnaire située entre une cathode en  $x = 0$  et une anode en  $x = d$ .



Les densités de courant ionique et électronique sont respectivement  $J_+(x)$  et  $J_-(x)$  et obéissent au système d'équations décrivant la multiplication par avalanche électronique:

$$\begin{aligned}\frac{dJ_-(x)}{dx} &= \alpha J_-(x) \\ \frac{dJ_+(x)}{dx} &= -\alpha J_-(x)\end{aligned}$$

Au niveau de la cathode un processus d'émission photoélectrique induit par irradiation ultraviolette un faible courant électronique  $J_p$ .

- 1 Ecrire les conditions aux limites sur  $J_-$  en 0 et sur  $J_+$  en  $d$ .
- 2 Exprimer  $J_-$  en fonction de  $x$ .
- 3 De même pour  $J_+$ .
- 4 En déduire le rapport d'amplification  $\frac{J_-(x)+J_+(x)}{J_p}$  en fonction de  $\alpha$  et  $d$ .



I' On considère le même problème que précédemment avec les mêmes notations mais on rajoute le processus d'émission  $\gamma$ .  $J_+(x)$  et  $J_-(x)$  obéissent au même système d'équations mais au niveau de la cathode l'impact des ions génère un courant supplémentaire tel que

$$J_-(0) = J_p + \gamma J_+(0)$$

et  $J_+(d) = 0$ .

- 1 Exprimer  $\frac{J_-(x)}{J_p + \gamma J_+(0)}$  en fonction de  $x$ .
- 2 Exprimer  $\frac{J_+(x)}{J_p + \gamma J_+(0)}$  en fonction de  $x$ .
- 3 En déduire  $\frac{J_+(x)+J_-(x)}{J_p}$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $d$ .
- 4 Donner la condition pour que  $J_+(x) + J_-(x)$  soit non nul même quand  $J_p = 0$ .

Le premier coefficient de Townsend dans l'air est donné par  $\alpha = APe^{-\frac{BP}{E}}$  où  $P$  est la pression et  $E$  le champ électrique entre les électrodes. Montrer que la tension de claquage  $V$ , le potentiel disruptif, obtenue lorsque le critère de Townsend est vérifié peut s'écrire sous la forme:  $V = B \frac{Pd}{C + \ln Pd}$  où  $C$  est une constante que l'on déterminera en fonction de  $A$  et  $\gamma$ .

5 Montrer que la fonction  $V$  admet un minimum pour une valeur  $Pd^*$  que l'on donnera. En déduire l'expression de  $V^*$ . Discuter l'existence d'un minimum pour  $V$ .

- 6 Montrer que  $V$  se met sous la forme universelle

$$\frac{V}{V^*} = \frac{Pd/Pd^*}{1 + \ln(Pd/Pd^*)}$$

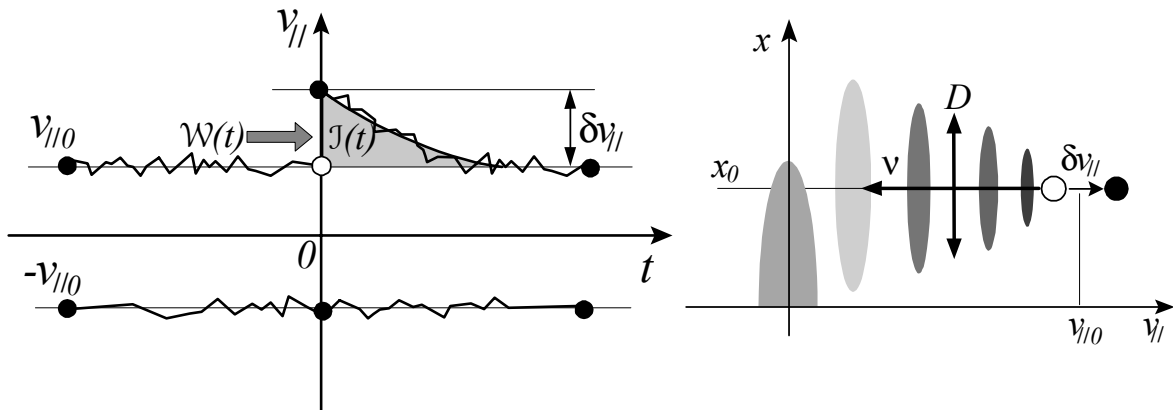
On a  $\gamma = 0.3$ ,  $A = 15(\text{torr.cm})^{-1}$ ,  $B = 365\text{V/torr.cm}$ . Sachant que la pression atmosphérique est de 760 torr, quelle est la tension de claquage  $V$  lorsque l'espace inter-électrode vaut 10 cm.



**J'** L'objectif de cet exercice est d'évaluer l'effet de la diffusion spatiale des électrons sur le processus de génération de courant par absorption Landau. On considère un modèle simple d'excitation/relaxation d'électrons résonnants de vitesse initiale  $v_{||0}$  et de position radiale initiale  $x = 0$ . A l'instant  $t = 0$ , au point  $x = 0$ ,  $N_0$  électrons de charge  $e$  et de masse  $m$ , absorbent une puissance  $\mathcal{W}(t)$  [W] =  $N_0 m v_{||0} \delta v_{||} \delta(t)$ , donc une impulsion  $m \delta v_{||}$  par électron, puis relaxent suivant une loi :

$$\frac{dv_{||}}{dt} + \nu (v_{||} - v_{||0}) = \delta v_{||} \delta(t)$$

- 1 Etablir l'expression de la vitesse ( $v_{||} - v_{||0}$ ) en fonction du temps  $t$ .



La densité d'électrons résonnant  $n$  suit une loi de diffusion de coefficient de diffusion  $D$  :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = N_0 \delta(x) \delta(t)$$

- 2 Résoudre cette équation en introduisant  $n(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x, t) \exp(jkx) dx / 2\pi$  la transformée de Fourier de  $n(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(k, t) \exp(-jkx) dk$ .

- 3 En déduire l'expression de la densité volumique de courant au point  $x$  à l'instant  $t$  :  $J(x, t) \equiv en(x, t)(v_{||} - v_{||0})$ .

- 4 Exprimer le rapport de la densité volumique de courant sur la puissance en régime stationnaire :  $\int J(x, t) dt / \int \mathcal{W}(t) dt$  puis commenter.



## Physique des Plasmas - 2016/2017

Cette épreuve, d'une durée de trois heures, est constituée de 5 questions de cours, 2 exercices et 2 problèmes illustrant les principes, méthodes et applications de la physique des plasmas. Le barème approximatif est de l'ordre de un point par question, le tout ramené sur vingt. Les questions 14 et 15 sont facultatives et seront notées hors barème.

**1 Moment magnétique :** Rappeler l'expression du moment magnétique d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique et expliquer sa signification physique. Que signifie l'invariance adiabatique de ce moment magnétique? (10 lignes maximum)

**2 Longueur de London :** Qu'est-ce que la longueur de London? Expliquer qualitativement sa signification physique. (8 lignes maximum)

**3 Diffusion magnétique :** Quelle est l'expression du coefficient de diffusion magnétique  $D_M$  dans un plasma de résistivité  $\eta$ ? Décrire brièvement le phénomène de diffusion magnétique. (8 lignes maximum)

**4 Dérive de champs croisés :** Rappeler et commenter l'expression de la vitesse de dérive électrique pour une particule chargée soumise aux champs électrique et magnétique statiques  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  tels que  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ .

**5 Fréquence Plasma :** Qu'est-ce que le phénomène d'écrantage électrique dans les plasmas? Expliquer qualitativement l'origine et la signification physique de la fréquence plasma (Langmuir); rappeler son expression en précisant les grandeurs introduites. (10 lignes maximum)

### Problème 1: Filtre plasma isotopique

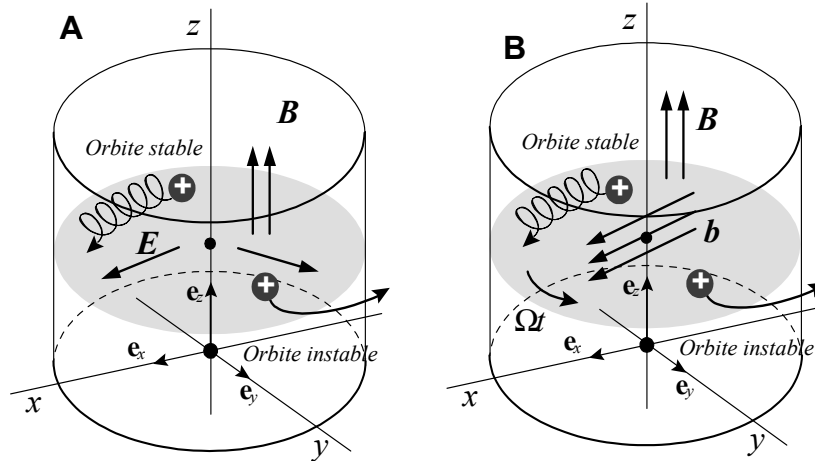
Le retraitement des déchets nucléaires en aval du cycle de combustible, ainsi que l'enrichissement en amont, peuvent être effectués dans des centrifugeuses à plasma. Plusieurs configurations de champs permettant de séparer les déchets de haute activité et longue durée de vie sont possibles.

**A** - Nous étudierons d'abord une configuration statique. Soit  $(x, y, z)$  un système de repérage cartésien de l'espace sur une base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ .

On considère la superposition d'un champ magnétique axial uniforme  $\mathbf{B}$  et d'un champ électrique radial linéaire  $\mathbf{E}$  ( $\lambda$  est une longueur donnée):

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= B\mathbf{e}_z \\ \mathbf{E} &= E\left(\frac{x}{\lambda}\mathbf{e}_x + \frac{y}{\lambda}\mathbf{e}_y\right)\end{aligned}$$

6 Ecrire les équations du mouvement vérifiées par les coordonnées cartésiennes,  $x(t)$  et  $y(t)$ , d'un ion de masse  $m$  et de charge  $q$  soumis à l'influence des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  (on introduira les quantités  $\omega_E \equiv \sqrt{qE/m\lambda}$  et  $\Omega_c \equiv qB/m$ ).



7 On considère la variable complexe  $Z(t) = x(t) + jy(t)$ , établir l'équation différentielle vérifiée par  $d^2Z/dt^2$ .

8 On cherche une solution de la forme  $Z(t) = Z_0 \exp(j\omega t)$ , établir l'équation algébrique vérifiée par  $\omega$  et en déduire la condition vérifiée par la masse  $m$  pour que le mouvement soit borné et que l'orbite de l'ion reste confiné autour de l'axe  $z = 0$ . Commenter l'usage possible des orbites stables et instables ainsi identifiées pour la séparation isotopique.

Si ce type de filtre opère à haute densité, les collisions perturbent les orbites et une force supplémentaire de friction entre espèces  $\mathbf{F}$  doit être prise en compte:

$$\mathbf{F} = -m\nu \left( \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_x + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_y \right)$$

où  $\nu$  est la fréquence de collision supposée indépendante de la vitesse et de la position.

9 Ecrire les équations du mouvement vérifiées par les coordonnées cartésiennes,  $x(t)$  et  $y(t)$ , d'un ion de masse  $m$  et de charge  $q$  soumis à l'influence des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  et de la force de friction  $\mathbf{F}$ .

10 On considère la variable complexe  $Z(t) = x(t) + jy(t)$ , établir l'équation différentielle vérifiée par  $d^2Z/dt^2$ . On cherche une solution de la forme  $Z(t) = Z_0 \exp(j\omega t)$ , établir l'équation algébrique vérifiée par  $\omega$  et discuter brièvement l'impact des collisions sur le procédé de séparation isotopique identifié précédemment.

**B** - Nous étudions ensuite une configuration dynamique sans champ électrostatique radial  $\mathbf{E}$ , mais avec un champ magnétique tournant  $\mathbf{b}(t)$ . Soit  $(x, y, z)$  un système de repérage cartésien de l'espace sur une base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ . On considère la superposition d'un champ magnétique axial uniforme  $\mathbf{B}$  et d'un champ magnétique horizontal tournant  $\mathbf{b}$ :

$$\frac{q}{m}\mathbf{B} = \Omega_c\mathbf{e}_z, \quad \frac{q}{m}\mathbf{b}(t) = \omega_c \cos(\Omega t)\mathbf{e}_x + \omega_c \sin(\Omega t)\mathbf{e}_y$$

Le phénomène d'induction magnétique ne peut être négligé et un champ électrique d'induction  $\mathbf{E}_i$  est associé au champ  $\mathbf{b}$  suivant les relations:

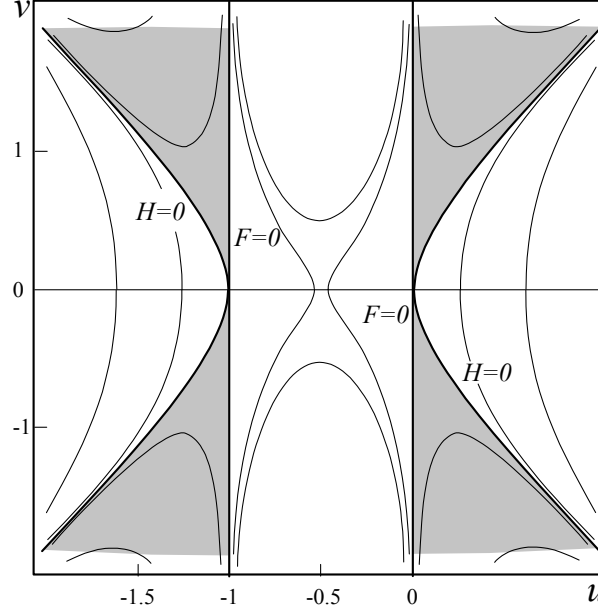
$$\mathbf{E}_i = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \leftarrow \frac{q}{m}\mathbf{A} = \omega_c (y \cos \Omega t - x \sin \Omega t)\mathbf{e}_z \leftarrow \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{A}$$

11 Ecrire les équations du mouvement vérifiées par les coordonnées cartésiennes,  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ , d'un ion de masse  $m$  et de charge  $q$  soumis à l'influence des champs  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{E}_i$ .

12 Afin de résoudre ce système d'équations on effectue un changement de repère et on considère les variables  $(X, Y)$  définies par:  $x + jy = (X + jY) \exp j\Omega t$ . Ecrire les équations du mouvement vérifiées par les coordonnées,  $X(t)$ ,  $Y(t)$  et  $z(t)$ .

13 Exprimer  $dz/dt$ , on supposera qu'à l'instant  $t = 0$ :  $dz/dt = 0$  et  $Y = Y_g$

14 On cherche une solution de la forme:  $[X(t), Y(t) - Y_g, z(t)] = (X_0, Y_0, z_0) \exp j\omega t$  où  $(X_0, Y_0, z_0)$  sont des constantes. On définit les paramètres normalisés:  $u = \Omega/\Omega_c$ ,  $v = \omega_c/\Omega_c$ ,  $w = \omega/\Omega_c$ , établir le système de trois équations algébriques vérifié par  $w$  en fonction de  $u$  et  $v$ .



15 Le déterminant caractéristique de ce système est donné par:  $w^4 - [(1+u)^2 + u^2 + v^2]w^2 + u(1+u)(u + u^2 - v^2) = 0$ . Deux nombres sont strictement positifs si et seulement si leur somme et leur produit sont strictement positifs, aussi les racines de cette équation sont positives si  $HF > 0$ , où  $H(u, v) = (u + \frac{1}{2})^2 - v^2 - \frac{1}{4} = 0$  est une hyperbole, et  $F(u) = u(1+u) = 0$  sont deux droites dans le plan  $(u, v)$ . Sur le diagramme ci-dessus les zones stables sont en gris clair. Discuter, sur la base de ce diagramme, un procédé de séparation isotopique basé sur un champ magnétique tournant.

### Exercice 1: Puits magnétiques d'Alfvén

Soit  $(x, y, z)$  un système de repérage cartésien de l'espace sur une base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z]$ , considérons un champ magnétique:

$$\mathbf{B} = B \cosh\left(\frac{x}{\lambda}\right) \mathbf{e}_y$$

où  $B$  [T] et  $\lambda$  [m] sont deux constantes données de base du modèle. Le mouvement le long des lignes de champ, suivant la direction  $y$ , est une translation uniforme et ne sera pas considéré dans cette étude. Le mouvement dans le plan  $(x, z)$ , en fonction du temps  $t$ , pour une particule de charge  $q > 0$ , de masse  $m$ , de position  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z$  et de vitesse  $\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_z\mathbf{e}_z$ , résulte de la force de Laplace  $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ .

16 Etablir l'équation du mouvement vérifiée par  $dv_x/dt$ . Etablir l'équation du mouvement vérifiée par  $dv_z/dt$ .

17 On introduit la quantité  $H > 0$  telle que:  $H = v_x^2 + v_z^2$ , établir la relation  $dH/dt = 0$  et expliquer sa signification physique.

18 On introduit la quantité  $P$  telle que:  $P = v_z - \frac{qB\lambda}{m} \sinh\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ , établir la relation  $dP/dt = 0$  et expliquer sa signification physique.

Dans la suite de l'exercice  $H$  et  $P$  constituent donc des données de base de l'étude des orbites au même titre que  $B$  et  $\lambda$ .

19 Etablir l'expression de  $v_x^2$  en fonction de  $x$  et des données du problème.

20 En déduire que le mouvement suivant  $x$  est borné, c'est-à-dire qu'il existe deux bornes fixes,  $X_L$  et  $X_R$ , telles que  $X_L \leq x(t) \leq X_R$ ,  $\forall t$ .

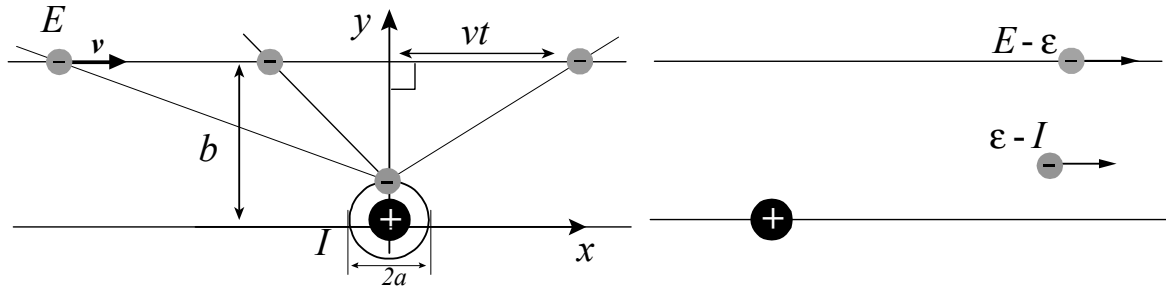
21 Etablir l'expression de la vitesse de dérive  $\langle v_z \rangle$  suivant  $z$ :  $\langle v_z \rangle = \int_0^T v_z(t) dt/T$ , où  $T$  est la période du cycle ( $X_L \rightarrow X_R \rightarrow X_L$ ); on ne cherchera pas à réduire les quadratures (à calculer les intégrales définies) apparaissant dans cette expression. Est-ce une vitesse de dérive de gradient ou de courbure?

## Exercice 2: Formule de Thomson

Pour étudier le problème de la section efficace d'ionisation collisionnelle de l'atome d'hydrogène il est instructif de reprendre le modèle classique proposé par Thomson.

Soit  $(x, y)$  un système de repérage cartésien du plan de la collision sur une base orthonormée directe  $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y]$ . Un électron libre, de masse  $m$  de charge  $-e$ , en translation uniforme à la vitesse  $v\mathbf{e}_x$ , présente une énergie cinétique  $E = mv^2/2$ , cet électron libre interagit avec un électron lié orbitant autour d'un proton sur la première orbite de Bohr de rayon  $a$ , l'énergie de liaison sur cette orbite est  $I$ . Nous supposons que la vitesse de l'électron n'est que peu perturbée par l'interaction avec l'atome, ainsi, sa trajectoire demeure rectiligne et son mouvement uniforme dans la direction initiale. La distance minimum entre l'électron libre et le noyau de l'atome d'hydrogène est  $b \gg a$ . Le noyau de l'atome d'hydrogène est situé en  $(x = 0, y = 0)$  et la trajectoire de l'électron libre est donnée par:  $x(t) = vt$ ,  $y(t) = b$ . Cet électron libre, d'énergie cinétique  $E$ , exerce une force coulombienne répulsive sur l'électron lié situé à une distance  $\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$  de sa position à l'instant  $t$ . Cette force transfère de l'impulsion de l'électron libre vers l'électron lié, elle transfère aussi de l'énergie. Après  $(t = +\infty)$  le passage de l'électron libre, l'électron initialement lié a acquis une énergie  $\varepsilon(E, b)$ . Une partie  $I$  est mise à profit pour libérer cet électron lié du potentiel coulombien et le reste  $\varepsilon - I$  constitue l'énergie cinétique de l'électron ainsi libéré. Ainsi, suivant Thomson, nous analysons, dans un cadre dynamique classique, la collision coulombienne ionisante:

$$\text{électron libre } (E) + \text{électron lié } (-I) \rightarrow \text{électron libre } (E - \varepsilon) + \text{électron libre } (\varepsilon - I)$$



La figure ci-dessus illustre la collision ainsi modélisée. Le passage de l'électron libre  $(t = -\infty \rightarrow t = +\infty)$  donne lieu à un transfert d'impulsion  $\delta\mathbf{p}$  somme des incréments infinitésimaux  $d\mathbf{p}$  entre  $t = -\infty$  et  $t = +\infty$ :

$$\delta\mathbf{p} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{p} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt \rightarrow \delta p = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y}{[x(t)^2 + y(t)^2]^{\frac{3}{2}}} dt \right|$$

22 Evaluer l'expression  $\delta p$  de ce transfert d'impulsion, entre  $t = -\infty$  et  $t = +\infty$ , et en déduire l'expression du transfert d'énergie  $\varepsilon = \delta p^2/2m$  (on rappelle l'expression de l'intégrale définie:  $ab^2 \int_0^{+\infty} (a^2t^2 + b^2)^{-\frac{3}{2}} dt = 1$ ).

La section efficace différentielle de transfert d'énergie  $d\sigma/d\varepsilon$  est définie suivant la relation:

$$\frac{\text{Nombre d'électrons libres d'énergie } E}{\text{Par unité de surface } dS \text{ et de temps } dt} d\sigma \equiv \frac{\text{Nombre d'électrons d'énergie } E \text{ transférant } \varepsilon}{\text{Par unité d'énergie } d\varepsilon \text{ et de temps } dt} d\varepsilon$$

Ainsi, pour le processus: 1 électron libre  $(E, b) \rightarrow$  1 électron libéré  $\varepsilon(E, b) - I$  + 1 électron libre  $(E - \varepsilon, b)$ , cette définition se décline suivant la relation:

$$\text{Nombre d'électrons libres } E = 1 \rightarrow \frac{1}{2\pi b(\varepsilon) db} d\sigma(E, \varepsilon) \equiv \frac{1}{d\varepsilon} d\varepsilon$$

qui peut alors être évaluée en éliminant le paramètre d'impact  $b$  dans la dérivée  $d\varepsilon/db$ .

23 Exprimer  $d\sigma(E, \varepsilon)/d\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon$  et des données du problème.

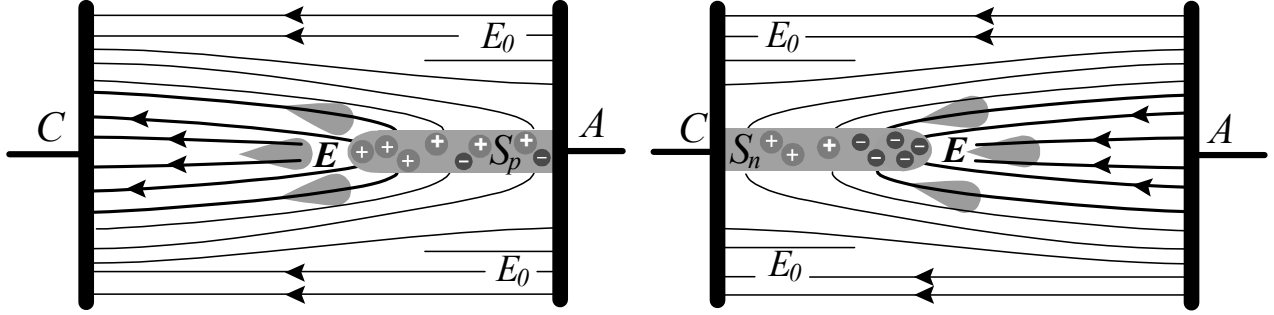
L'énergie transférée  $\varepsilon$  doit: • au minimum, être égale à l'énergie de seuil, c'est-à-dire au potentiel d'ionisation  $I$ , et peut: • au maximum, être égale à l'énergie de l'électron incident  $E$ . Il nous faut donc intégrer cette section efficace différentielle de transfert d'énergie,  $d\sigma/d\varepsilon$ , entre ces deux bornes  $I$  et  $E$ , pour obtenir la section efficace totale d'ionisation  $\sigma(E)$  par impact électronique.

24 Etablir l'expression de  $\sigma(E)$  la section efficace totale d'ionisation par impact électronique, ce résultat constitue la formule de Thomson.

## Problème 2: Le critère de Meek-Raether

Considérons une décharge électrique dans un gaz sous pression  $P$  entre une cathode plane  $C$  parallèle à une anode plane  $A$ . La distance  $|AC| = d$  et le champ électrique au sein du gap  $[AC]$ , avant la transition gaz/plasma, présente une valeur uniforme  $E_0$  associée à la chute de potentiel  $V = E_0 d$ .

Pour cette configuration classique, la théorie de la transition gaz/plasma, développée par Townsend et Paschen, est restreinte aux faibles valeurs du produit  $Pd < 200$  [Torr.cm], correspondant à quelques centaines de millions d'électrons par avalanche pour les conditions usuelles des décharges dans l'air; au-delà de ces valeurs, la charge d'espace associée à une avalanche modifie significativement le champ appliqué  $E_0$ .



La théorie de Townsend-Paschen n'est alors plus opérationnelle et la prise en compte de la charge d'espace associée à une avalanche électronique conduit à considérer la création d'une structure filamentaire constituée par un fin canal de plasma issu de plusieurs avalanches. Ce canal de plasma est appelé streamer et sa conductivité modifie la structure du champ appliqué, en particulier au niveau de sa tête présentant un faible rayon de courbure le champ  $E$  est plus intense que  $E_0 < E$ . Deux types de streamers ( $S_p$  et  $S_n$ ) sont observés, (i) si les effets de charge d'espace se manifestent à la fin ( $A$ ) des avalanches, ou (ii) si ils se manifestent dès le début ( $C$ ). Ces deux types de streamers se propagent de  $A$  vers  $C$  ou de  $C$  vers  $A$ , à travers la création d'avalanches secondaires associées à  $E$  et à la photoionisation. Dans ce problème, nous n'étudierons pas la structure et la dynamique d'un streamer  $S_p$  ou  $S_n$ , mais nous établirons le critère de transition entre une simple avalanche électronique, initiée par un électron, et un streamer: le critère de Meek-Raether qui évalue la transition avalanche/streamer. Lorsque ce critère est satisfait, la théorie de la décharge de Townsend n'est plus applicable et la théorie des streamers doit être considérée. Le critère de Meek-Raether est simplement un calcul, sous différentes hypothèses, du champ électrique associé à la structure spatio-temporelle d'une avalanche issue d'un électron primaire. Le champ propre  $E_a$  d'une avalanche ainsi calculé est ensuite pris égal au champ appliqué  $E_0$  pour énoncer un critère de transition avalanche/streamer et exprimer la longueur critique  $x_c$  d'une avalanche telle que  $E_a \sim E_0$ . L'ordre de grandeur de la taille  $x_c$  ainsi évaluée est conforme à l'expérience, confirmant les hypothèses de Meek-Raether sur la transition avalanche/streamer.

Nous allons d'abord étudier le modèle classique de la décharge de Townsend sous l'hypothèse  $E_a \approx 0$ , puis établir différentes formes du critère de Meek-Raether pour  $E_a \neq 0$ .

25 Rappeler les définitions du premier et du deuxième coefficient de Townsend,  $\alpha$  et  $\gamma$ , décrivant respectivement: l'ionisation par impact électronique en volume sous l'influence d'un champ électrique et l'émission par impact ionique en surface.

26 On dirige l'axe des  $x$  d'un repérage cartésien de  $C$  vers  $A$ . La cathode est située en  $x = 0$  et l'anode en  $x = d$ . On considère un modèle stationnaire classique de multiplication électronique entre la cathode  $C$  et l'anode  $A$  polarisant sous un champ  $E_0$  un gaz basse pression,  $N_e(x)$  désigne le nombre total d'électrons contenus dans une avalanche d'extension  $x$  suivant la direction  $C \rightarrow A$ ,  $N_i(x)$  désigne le nombre d'ions résultant de cette avalanche d'extension  $x$ . Pour un germe électronique unique en  $C$ , ces deux fonctions vérifient les conditions aux limites  $N_e(x=0) = 1$ ,  $N_i(x=0) = 0$  et les équations:

$$\frac{dN_e}{dx} = \alpha(E_0) N_e, \quad \frac{dN_i}{dx} = \alpha(E_0) N_e$$

En déduire les expressions de  $N_e(x=d)$  et  $N_i(x=d)$ .

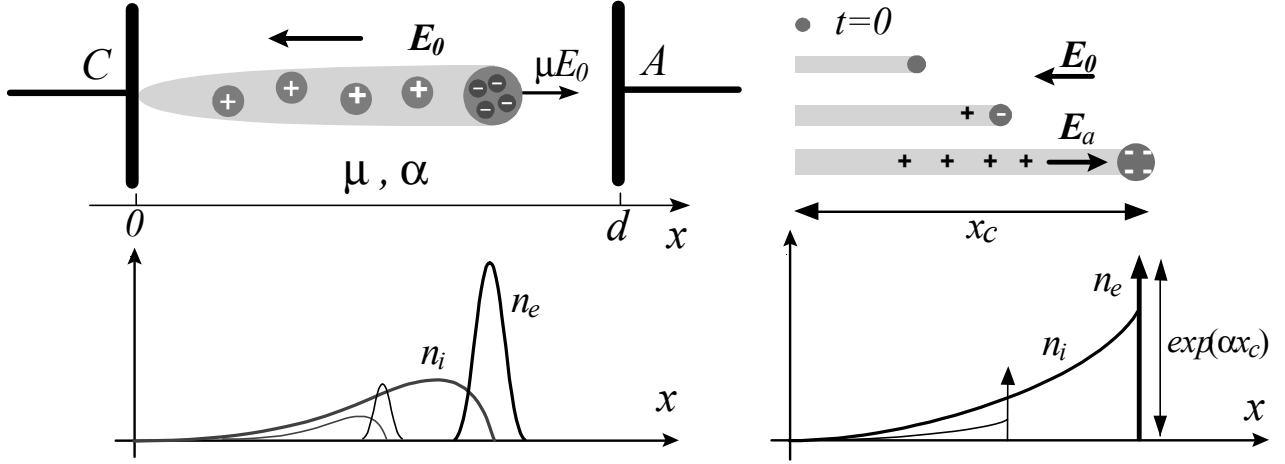
27 Entraînés par le champ électrique appliqué  $E_0$ , les  $N_e(x=d)$  électrons disparaissent à l'anode  $A$  et les  $N_i(x=d)$  ions remontent vers la cathode  $C$  où ils génèrent  $\gamma N_i$  électrons. La décharge sera auto-entretenu si ces  $\gamma N_i$  électrons secondaires remplacent l'électron germe. Exprimer cette condition,  $\gamma N_i = 1$ , dite de Townsend.

28 On considère la forme fonctionnelle suivante du coefficient  $\alpha$ :  $\alpha(E_0) = aP \exp(-bP/|E_0|)$  où  $E_0$  désigne le champ électrique appliqué, supposé uniforme et donné, et  $a$  et  $b$  deux constantes dépendant de la nature du gaz et de la cathode  $C$ . Etablir la loi de Paschen exprimant la condition de Townsend en fonction de  $V = E_0 d$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\gamma$  et  $Pd$ . En déduire deux paramètres  $V^*$  et  $(Pd)^*$  tels que  $V/V^*$  soit une fonction simple de  $Pd/(Pd)^*$ .

Les résultats classiques qui viennent d'être établis sont construits sous les hypothèses de stationnarité de l'avalanche et de faible distorsion du champ appliqué  $E_0$  par les charges créées. Pour étudier le champ généré

par l'avalanche, il est nécessaire de prendre en compte la structure spatio-temporelle de l'avalanche et le fait que les électrons sont beaucoup plus mobiles que les ions.

Trois modèles peuvent être construits pour évaluer la taille critique  $x_c$  d'une avalanche au seuil de la transition vers un streamer, nous allons considérer et étudier successivement ces trois modèles, malgré des formes fonctionnelles différentes les trois critères ainsi identifiés conduisent au mêmes ordres de grandeurs pour  $x_c$ .



L'avalanche développée peut être étudiée suivant les 3 modèles suivants: • (i) une charge électronique quasi ponctuelle suivie par une traînée ionique, le champ  $E_a$  est alors évalué suivant un modèle dipolaire entre le sillage ionique et la tête électronique; • (ii) une charge électronique sphérique suivie par un sillage ionique, le rayon de cette sphère croissant sous les effets combinés de la multiplication électronique et de la diffusion, le champ  $E_a$  est alors évalué à la surface de cette sphère électronique; (iii) une charge électronique sphérique en expansion sous l'effet de la répulsion électrostatique et de la multiplication électronique, suivie par un sillage ionique, le champ  $E_a$  est aussi évalué à la surface de cette sphère électronique.

29 Dans la suite on notera  $\mu E_0$  ( $\mu E_0 > 0$ ) la vitesse des électrons suivant la direction  $x$  et on introduit donc la *mobilité électronique*. Etablir l'expression la mobilité pour une particule de charge  $e$ , de masse  $m$  et de fréquence de collisions  $\nu$ .

30 La dynamique des charges dans le cadre du modèle (i) est maintenant décrite par les densités d'électrons et d'ions en fonction du temps  $t$  et des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ :  $n_e(x, y, z, t)$  et  $n_i(x, y, z, t)$  s'exprimant en  $[m^{-3}]$ . La dynamique transverse suivant  $y$  et  $z$  est ignorée en première approximation et sera prise en compte ultérieurement pour les modèles (ii) et (iii). L'évolution, pour  $x \geq 0$  et  $t \geq 0$ , d'une avalanche engendrée par  $E_0$  est modélisée par le système:

$$\text{Modèle (i): } \frac{\partial n_e}{\partial t} + \mu E_0 \frac{\partial n_e}{\partial x} = \mu E_0 \alpha n_e, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} = \mu E_0 \alpha n_e$$

où le mouvement ionique lent est négligé devant le mouvement électronique. Les conditions initiales et aux limites de ce modèle unidimensionnel sont:  $n_e(x, y, z, t=0) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$  et  $n_i(x, y, z, t=0) = 0$  où  $\delta$  est la *distribution de Dirac*. Résoudre ce système d'équations et exprimer  $n_e(x, y, z, t)$  et  $n_i(x, y, z, t)$ ; on recherchera une solution de la forme  $n_e = \delta(x - \mu E_0 t) \delta(y) \delta(z) f(x)$  où  $f(x)$  est inconnue et on notera que  $\theta(\mu E_0 t - x)$  la *fonction de Heaviside* ( $\theta(u > 0) = 1$ ,  $\theta(u \leq 0) = 0$ ) est telle que  $\partial \theta(\mu E_0 t - x) / \partial t = \mu E_0 \delta(x - \mu E_0 t)$ .

31 Calculer la charge ionique totale de l'avalanche,  $eN_i(t)$ , ainsi que le barycentre des charges positives  $X_i(t)$ :

$$N_i = \int \int dy dz \int_0^d n_i(x, y, z, t) dx, \quad X_i = \frac{\int \int dy dz \int_0^d x n_i(x, y, z, t) dx}{\int \int dy dz \int_0^d n_i(x, y, z, t) dx}$$

on supposera l'avalanche développée, c'est-à-dire  $\exp \alpha \mu E_0 t \gg 1$ . Calculer la charge électronique totale  $-eN_e(t)$  ainsi que le barycentre des charges négatives  $X_e(t)$ .

32 Un premier critère de transition *avalanche/streamer* peut être établi en supposant que le l'ordre de grandeur du champ  $E_a$  au sein et au voisinage de l'avalanche est donné par le champ à mi-chemin entre deux charges ponctuelles  $eN_i(t)$  et  $-eN_e(t)$  séparées de  $|X_e(t) - X_i(t)|$ , exprimer  $|E_a(t)|$ .

33 En déduire le premier critère de *Meek-Raether* suivant la relation  $|E_a(t)| = |E_0|$ . Formuler ce critère  $|E_a| = |E_0|$  en terme de taille critique de l'avalanche  $x_c$ , en éliminant le temps ( $x = \mu E_0 t$ ).

La suite du problème est consacrée aux modèles (ii) et (iii) où la charge ionique diluée sur le sillage n'est plus considérée et l'analyse est restreinte à la tête électronique de l'avalanche. Pour étudier le modèle (ii), on considère que les électrons sont distribués en tête de l'avalanche dans une sphère dont la population augmente suivant la multiplication électronique  $\alpha$  et le rayon augmente suivant la diffusion  $D$ .



34 On introduit donc le coefficient de diffusion noté  $D$ , exprimer  $D$  en fonction de la température électronique  $T$ , de la masse  $m$  et de la fréquence de collision  $\nu$  des électrons.

Les conditions initiales et aux limites de ce modèle (ii) sont:  $n_e(x, y, z, t = 0) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$  où  $\delta$  est la *distribution de Dirac* et la dynamique électronique d'une avalanche engendrée par  $E_0$  est décrite par:

$$\text{Modèle (ii): } \frac{\partial n_e}{\partial t} + \underbrace{\mu E_0 \frac{\partial n_e}{\partial x}}_1 - \underbrace{D \left( \frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n_e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 n_e}{\partial z^2} \right)}_2 = \underbrace{\mu E_0 \alpha n_e}_3$$

35 Quels sont les processus physiques décrit par les termes 1, 2 et 3?

36 On cherche une solution de la forme:  $n_e(x, y, z, t) = g(x - \mu E_0 t, y, z, t) \exp(\alpha \mu E_0 t)$ . Etablir l'équation vérifiée par la fonction inconnue:  $g$ .

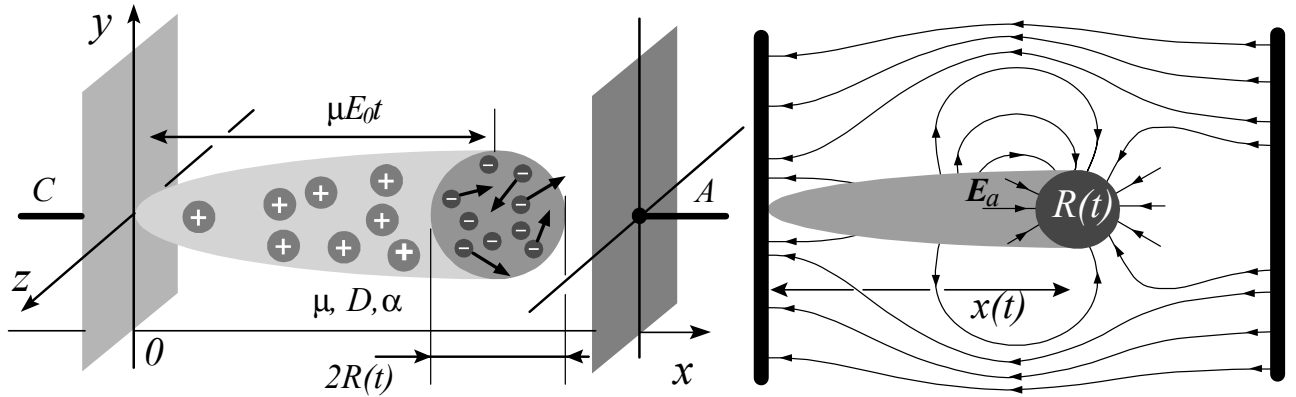
37 L'équation de Fick isotrope en dimension trois:  $\partial h / \partial t - D \partial^2 h / \partial x^2 + D \partial^2 h / \partial y^2 + D \partial^2 h / \partial z^2 = 0$ , pour une fonction  $h(x, y, z, t)$  présentant la condition initiale  $h(x, y, z, t = 0) = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$ , admet comme solution:  $h(x, y, z, t) = (4\pi Dt)^{-3/2} \exp[-(x^2 + y^2 + z^2) / 4Dt]$ . Dédurre de ce résultat la distribution  $n_e(x, y, z, t)$  résultant des processus 1, 2 et 3. La relation  $n_e(x - \mu E_0 t = R/\sqrt{3}, y = R/\sqrt{3}, z = R/\sqrt{3}, t) = n_e(x - \mu E_0 t = 0, y = 0, z = 0, t) / \exp(1)$  définit le rayon moyen  $R(t)$  de cette sphère électronique à l'instant  $t$ .

38 Exprimer  $R(t)$  en fonction des données du problème et calculer le nombre total d'électrons dans la sphère de rayon  $R(t)$  en supposant que la densité est uniforme et égale à  $n_e(x = \mu E_0 t, y = 0, z = 0, t)$ .

39 En déduire la valeur du champ électrique  $|E_a|$  sur la surface de cette sphère de rayon  $R(t)$ .

40 Exprimer la longueur critique  $x_c$  d'une avalanche telle  $|E_a| = |E_0|$ , ce résultat constitue le deuxième critère de *Meek-Raether* pour  $x_c$ .

Pour étudier le modèle (iii) on suppose que les électrons sont distribués en tête de l'avalanche dans une sphère dont la population augmente suivant la multiplication électronique  $\alpha$  et le rayon augmente suivant la répulsion électrostatique entre électrons. On considère donc une sphère électronique présentant une densité de charge radialement ( $r$ ) uniforme et un rayon  $R(t)$  à l'instant  $t$ .



Les coordonnées du centre de cette sphère, contenant  $N(t)$  électrons, sont  $[x(t), y = 0, z = 0]$  à l'instant  $t$ . La densité de charge électronique  $-3eN(t) / 4\pi R(t)^3$  reste uniforme radialement ( $r$ ) mais varie en fonction du temps, les quatre équations associées à la dynamique électronique de ce modèle (iii) sont:

$$\begin{aligned} \text{Modèle (iii)} \quad : \quad & 1: \frac{dN}{dt} = \alpha(E_0) N, \quad 2: \frac{\partial [r^2 E_a(r \leq R, t)]}{r^2 \partial r} = -\frac{3eN(t)}{4\pi\epsilon_0 R(t)^3}, \\ & 3: \frac{dR}{dt} = |\mu E_a(r = R(t), t)|, \quad 4: \frac{dx}{dt} = \mu E_0 \end{aligned}$$

Les conditions initiales sont  $N(t = 0) = 1$  et  $x(t = 0) = 0$ .

41 Quels sont les processus physiques associés aux relations 1, 2, 3 et 4?

42 Le critère de transition *avalanche/streamer* est donné par la relation  $|E_a(r = R(t), t)| = |E_0|$ , établir ce troisième critère de *Meek-Raether* et exprimer le en fonction de la taille critique  $x_c$  de l'avalanche lorsque il est satisfait.

Les trois critères ainsi établis, bien que présentant des formes fonctionnelles différentes, prédisent des valeurs similaires pour la longueur critique  $x_c$ , par exemple pour l'air à pression atmosphérique, sous un champ de l'ordre de 30 kV/cm, la taille critique d'une avalanche est de l'ordre de 5 à 6 cm suivant ces trois critères.