Corrigé Examen de Mécanique des fluides M1 FONDA 2018-2019

I. Ecoulement autour d'un cylindre en mouvement

1. L'écoulement est potentiel : $\vec{u} = \nabla \phi$
et incompressible : $\nabla \cdot \vec{u} = 0$

$$\downarrow$$

$$\nabla^2 \phi = 0$$

2. Sur la surface du cylindre $r = R$, on impose une condition d'imperméabilité

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_r \Big|_{r=R} = 0 \iff \frac{\partial \phi}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0$$

A l'infini l'écoulement tend vers un écoulement uniforme

$$\vec{u} \xrightarrow{r \to +\infty} -U(t)\,\vec{e}_x = -\nabla(U(t)x)$$
$$= -\nabla(U(t)\, r\cos\theta)$$

Le potentiel à l'infini sera de la forme

$$\phi \xrightarrow{r\to+\infty} \Phi = -U(t)\, r\cos\theta$$

3. La forme du potentiel à l'∞ suggère que
$\phi \sim \cos\theta$

On aura donc $m = 1$ ici. Le potentiel sera

$$\phi = A(t)\, r\cos\theta + B(t)\, r^{-1}\cos\theta$$

On applique les 2 CL

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0 \Rightarrow \left(A(t) - \dfrac{B(t)}{R^2}\right)\cos\theta = 0 \Rightarrow B(t) = A(t)R^2 \\[2ex] \phi \xrightarrow{r\to+\infty} -U(t) \cos\theta \Rightarrow A(t) = -U(t) \end{cases}$$

Solution : $\phi = -U(t)\left[r + \dfrac{R^2}{r}\right]\cos\theta$

4. Les composantes de la vitesse

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -U(t)\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos\theta$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = U(t)\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin\theta$$

5. En cours, nous avons vu que l'operateur $(\vec{u}.\nabla)\vec{u}$ s'écrit comme

$$(\vec{u}.\nabla)\vec{u} = (\nabla\wedge\vec{u})\wedge\vec{u} + \nabla\frac{\|\vec{u}\|^2}{2}$$ [Démo si vous voulez]

Ici $\nabla\wedge\vec{u} = \nabla\wedge\nabla\phi = \vec{0}$ donc

$$(\vec{u}.\nabla)\vec{u} = \nabla\frac{\|\nabla\phi\|^2}{2}$$

Dans l'eq. d'Euler avec $\vec{u} = \nabla\phi$ partout et $-U(t)\,\vec{e}_x = \nabla\Phi$ on trouve

$$\rho\,\partial_t\nabla\phi + \rho\nabla\left(\frac{\|\nabla\phi\|^2}{2}\right) - \rho\,\partial_t\nabla\Phi = -\nabla p$$

Reorganiser sous la forme de

$$\nabla\left(\rho\,\partial_t\phi + \rho\frac{\|\nabla\phi\|^2}{2} - \rho\,\partial_t\Phi + p\right) = 0$$

puis intégrer en espace.

$$\rho\,\partial_t\phi + \rho\frac{\|\nabla\phi\|^2}{2} - \rho\,\partial_t\Phi + p = C(t)$$

6. $C(t)$ est une fonction arbitraire du temps.
Cette loi permet de relier les grandeurs en tout point du fluide. A l'infini

$$\phi \xrightarrow[r\to+\infty]{} \Phi$$

$$p \longrightarrow P$$

ceci donne

$$C(t) = P + \rho\frac{\overbrace{\|\nabla\Phi\|}^{U^2}}{2}$$

la pression partout dans le fluide sera

$$p = \mathcal{P} + \rho \partial_t (\Phi - \phi) + \frac{\rho}{2}\left[U^2(t) - \|\nabla\phi\|^2\right]$$

$$= \mathcal{P} + \rho\partial_t\left(-U(t) r\cos\theta + U(t)\left(r + \frac{R^2}{r}\right)\cos\theta\right)$$
$$+ \frac{\rho}{2}\left[U^2(t) - u_r^2 - u_\theta^2\right]$$

A la surface $r = R$

$$p|_{r=R} = \mathcal{P} + \rho(\partial_t U) R\cos\theta$$
$$+ \frac{\rho}{2}\left[U^2(t) - 4U^2(t)\sin^2\theta\right]$$

7. La force que le fluide exerce sur le cylindre est

$$\vec{F}_{flu \to cyl} = \iint_{cylindre} p|_{r=R}\, \vec{dS}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^H \left(\mathcal{P} + \rho(\partial_t U)R\cos\theta + \rho\frac{U^2(t)}{2}\left(1 - 4\sin^2\theta\right)\right)\left(-\vec{e}_r\, R\, d\theta\, dz\right)$$

Le vecteur $\vec{e}_r = \vec{e}_x\cos\theta + \vec{e}_y\sin\theta$ varie selon θ.
Donc

$$\vec{F}_{flu \to cyl} = -\int_0^{2\pi}\int_0^H \mathcal{P} R\left(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y\right) d\theta\, dz$$
$$-\int_0^{2\pi}\int_0^H \rho(\partial_t U) R^2\cos\theta\left(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y\right) d\theta\, dz$$
$$-\int_0^{2\pi}\int_0^H \rho\frac{U^2(t)}{2} R\left(1 - 4\sin^2\theta\right)\left(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y\right) d\theta\, dz$$

Suite à la periodicité

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \, d\theta = [\sin\theta]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta = [-\cos\theta]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\theta \underbrace{\cos\theta \, d\theta}_{d(\sin\theta)} = \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \underbrace{\cos\theta \, d\theta}_{d(\sin\theta)} = \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2\theta}_{(1-\cos^2\theta)} \underbrace{\sin\theta \, d\theta}_{d(-\cos\theta)} = \left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta\right]_0^{2\pi} = 0$$

Seul

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{\cos^2\theta}_{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} \, d\theta = \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

est non-nul. La force sur le cylindre est donc

$$\vec{F}_{flu \to cyl} = -\underbrace{\rho \pi R^2 H}_{m_a \text{ la masse ajoutée}} (\partial_t u) \, \vec{e}_x$$

On remarque que m_a = la masse du cylindre rempli avec le fluide.

Rq: on parle de masse ajoutée car si on écrit l'éq de mouvement pour le cylindre on aurait

$$m_{cyl} \frac{du}{dt} \vec{e}_x = \vec{F}_{flu \to cyl} + \vec{F}_{autre}$$

$$\Leftrightarrow (m_{cyl} + m_a) \frac{du}{dt} \vec{e}_x = \vec{F}_{autre}$$

Dans un fluide parfait il faut lutter contre une inertie apparente $m_{cyl} + m_a$ pour mettre en mouvement un obstacle. L'écoulement provoque une inertie supplémentaire.

8. Le paradoxe de d'Alembert = tout objet placé dans un écoulement stationnaire potentiel ne subira aucune force de la part de l'écoulement

→ TD4

Il n'y a pas de contradiction car la force trouvée ici s'annule pour $U(t) = cst$.

9. A.N.

$$|\vec{F}_{cyl \to flu}| = \rho \pi R^2 H \frac{dU}{dt}$$

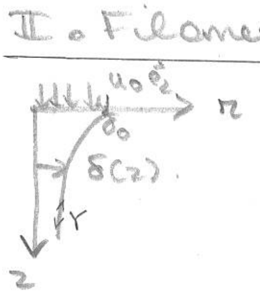
$$= 1000 \times 3{,}14 \times 49\ 10^{-4} \times 1 \times 1 \ N$$

$$= 3{,}14 \times 4{,}9 \ N$$

$$= 15{,}4 \ N$$

$$\begin{array}{r} 3{,}14 \\ 4{,}9 \\ \hline 2826 \\ 1256 \\ \hline 15{,}386 \end{array}$$

II. Filaments visqueux



$\downarrow g$

1. Le filament doit être fin comparé à sa longueur. Ceci s'exprime à l'aide de δ'

$$|\delta'| = \left|\frac{d\delta}{dz}\right| << 1 \qquad \underline{Hypo\ 1}$$

Ensuite il faut que le nombre de Reynolds soit inférieur à l'inverse de ce rapport d'aspect.

$$\left|\frac{\rho u_z \delta}{\eta}\right| << \frac{1}{\delta}, \qquad \text{Hypo 2}$$

Ici on fait l'hypothèse que l'écoulement est stationnaire donc pas besoin d'une troisième condition sur le temps d'évolution T typique de l'écoulement.

2. La condition dynamique exprime un équilibre de forces à la surface libre. Ici on a 3 forces.

1 → forces de pression

2 → forces visqueuses

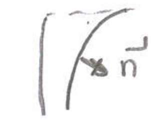
3 → force due à la tension de surface

De manière formelle on a

$$\Big(\underbrace{P|_{r=\delta} - P_{atm}}_{1} - \underbrace{\gamma K}_{3}\Big)\cdot\vec{n}$$

$$- \underbrace{\eta\left(\vec{\vec{\nabla}} u + \vec{\vec{\nabla}} u^T\right)\cdot\vec{n}}_{2}\Big|_{r=\delta} = 0.$$

avec $\vec{n}$ la normale extérieure au filament.



La variable $k = \nabla\cdot\vec{n}$ est la courbure locale.

Bonus

En vue de ce qui est donné dans l'énoncé on a approché

$$K \simeq \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\text{rayon de courbure petite du filament.}}$$

ce qui ignore la courbure du filament dans le sens vertical. De manière exacte

$$K = \nabla\cdot\vec{n} = \nabla\cdot\left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right)\Big|_{r=\delta} \quad \text{avec } f = r - \delta(z)$$

ça donne

$$k = \nabla \cdot \left(\frac{\vec{e}_r - \delta'(z)\,\vec{e}_z}{\sqrt{1+\delta'^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{r}\partial_r \left(\frac{r}{\sqrt{1+\delta'^2}} \right)\Bigg|_{r=\delta} + \partial_z \left(\frac{-\delta'(z)}{\sqrt{1+\delta'^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{\delta}\frac{1}{\sqrt{1+\delta'^2}} - \frac{\delta''}{\sqrt{1+\delta'^2}} + \frac{1}{2}\frac{\delta'}{(1+\delta'^2)^{3/2}} \cdot (2\delta'\delta'')$$

Dans la limite $\delta' \ll 1$

$$k \simeq \frac{1}{\delta} - \cancel{\delta''} \underset{\text{ignoré}}{\simeq} \frac{1}{\delta}$$

Ici $\delta'' \ll \frac{1}{\delta}$ toujours pour un filament fin.

En prenant 3 projections (normale, tangentielle 1 & 2) on obtient

(1) $\quad p|_{r=\delta} - p_{atm} - \gamma \left(\frac{1}{\delta} - \underset{\text{ignoré}}{\cancel{\delta''}} \right) - \cancel{\vec{n} \cdot (\bar{\bar{\nabla}} \vec{u} + \bar{\bar{\nabla}} \vec{u}^T) \cdot \vec{n}} = 0.$ ignoré

($\vec{t}_1$) $\quad - \vec{t}_1 \cdot (\bar{\bar{\nabla}} \vec{u} + \bar{\bar{\nabla}} \vec{u}^T) \cdot \vec{n} = 0$

(t_2) $\quad - \vec{t}_2 \cdot (\bar{\bar{\nabla}} \vec{u} . \bar{\bar{\nabla}} \vec{u}^T) \cdot \vec{n} = 0.$

avec $\vec{t}_1 \simeq \vec{e}_\theta$, $\vec{t}_2 \simeq \delta' \vec{e}_r - \vec{e}_z$. A l'ordre dominant on approche $\vec{n} \simeq \vec{e}_r$ et $t_2 = -\vec{e}_z \Rightarrow \ldots$

$$\begin{cases} p|_{r=\delta} = p_{atm} + \frac{\gamma}{\delta} \\ 0 = 0 \\ \vec{e}_z \cdot (\bar{\bar{\nabla}} \vec{u} + \bar{\bar{\nabla}} \vec{u}^T) \cdot \vec{e}_r \Big|_{r=\delta} \simeq \underset{\text{ignoré}}{\cancel{\frac{\partial u_r}{\partial z}}} + \frac{\partial u_z}{\partial r}\Big|_{r=\delta} \simeq 0 \end{cases}$$

3. (a) On intègre

$$\frac{\partial p}{\partial r} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad p = p(z) \quad \text{une } f \text{ de } z \text{ seulement.}$$

Utilisant la CL sur la pression.

$$p(z)\Big|_{r=\delta(z)} = p_{atm} + \frac{\gamma}{\delta(z)}$$

On a donc la pression partout

$$p(z) = p_{atm} + \frac{\gamma}{\delta(z)}$$

(b) dans éq (2b).

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\gamma}{\delta(z)}\right) = \frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \rho g.$$

$$\Leftrightarrow \quad -\left(\frac{\gamma}{\delta^2}\delta' + \rho g\right)\frac{r}{\eta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\left(\frac{\gamma}{\delta}\delta' + \rho g\right)\frac{r^2}{2\eta} = r\frac{\partial u_z}{\partial r} + A(z)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\left(\gamma\frac{\delta'}{\delta} + \rho g\right)\frac{r}{2\eta} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{A(z)}{r}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\left(\gamma\frac{\delta'}{\delta} + \rho g\right)\frac{r^2}{4\eta} = u_z + \cancel{A(z)\ln r} + B(z)$$

Suite à la régularité à l'axe $A(z) = 0$. En imposant la CL dynamique

$$\frac{\partial u_z}{\partial r}\Big|_{r=\delta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(-\left(\gamma\frac{\delta'}{\delta^2} + \rho g\right)\frac{r^2}{4\eta} - B(z)\right)\Big|_{r=\delta}$$

$$= -\left(\gamma\frac{\delta'}{\delta^2} + \rho g\right)\frac{\delta}{2\eta} = 0$$

Il faut que

$$\left(\gamma \frac{\delta'}{\delta^2} + \rho g\right) = 0$$

Soit avec $\lambda_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ on trouve

$$\frac{\delta'}{\delta^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} = 0$$

Dans ce cas il reste aussi que.

$$u_z = B(z)$$

dans l'expression pour la vitesse verticale

$$u_z = u_z(z)$$

un profil bouchon.

(c) On trouve la forme du filament en intégrant

$$\frac{\delta'}{\delta^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{d\delta}{\delta^2} = +\frac{dz}{\lambda_c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\delta} = \frac{z}{\lambda_c^2} + C$$

Avec la condition initiale.

$$\delta(0) = \delta_0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\delta_0}$$

<u>Resultat :</u>

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\delta_0} + \frac{z}{\lambda_c^2}. \quad \Leftrightarrow \quad \delta = \frac{\delta_0}{\left(1 + \frac{z\delta_0}{\lambda_c^2}\right)}$$

(d) <u>Débit</u>

$z = cst$ $$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\delta} u_z(z)\, r\, dr\, d\theta = u_z(z)\, \pi\, \delta(z)^2$$

$z=0$ $$Q = U_0 \pi \delta_0^2.$$

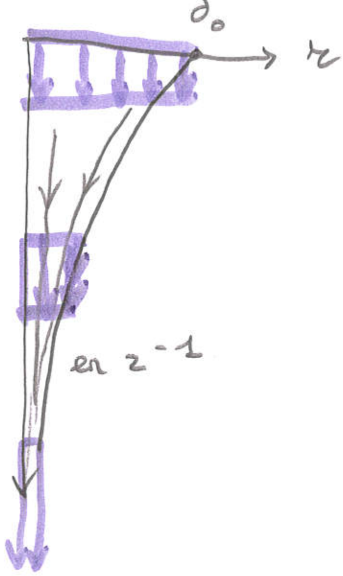
Ce débit se conserve.

$$Q = U_0 \pi \delta_0^2 = U_z(z) \pi \delta^2(z).$$

Ceci signifie que.

$$u(z) = U_0 \frac{\delta_0^2}{\delta^2(z)} = U_0 \frac{\delta_0^2}{\dfrac{\delta_0^2}{\left(1 + \frac{z\delta_0}{\lambda_c^2}\right)^2}} = U_0\left(1 + \frac{z\delta_0}{\lambda_c^2}\right)^2$$

4.



B. Modèles améliorés

1. On intègre

$$\partial_r p \simeq 0 \iff p = p(z)$$

Si on exprime la CL dynamique

$$p(z) = p_{atm} \quad \text{constant}$$

Du coup $\partial_z p \simeq 0$ aussi si on ignore la tension de surface

2. Du coup il reste.

$$\underbrace{\rho u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}}_{\partial_z(\rho u_z^2/2)} = \eta \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \rho g$$

dans la projection selon z. On intègre une fois selon z.

$$\Rightarrow \rho \frac{u_z^2}{2} = \eta \frac{\partial u_z}{\partial z} + \rho g z + C. \quad \Rightarrow (4)$$

3. $D \cdot \vec{u} = 0$ en coord cyl donne

$$\frac{1}{r}\partial_r(r u_r) + \partial_z u_z = 0$$

soit

$$\partial_r(r u_r) = -r(\partial_z u_z)$$

Intégration donne

$$r u_r = -\frac{r^2}{2}(\partial_z u_z) + D(z)$$

$$\Leftrightarrow \quad u_r = -\frac{r}{2}(\partial_z u_z) + \frac{D(z)}{r}$$

La régularité à l'axe impose que $D = 0$.

$\Rightarrow$

$$\boxed{u_r = -\frac{r}{2}(\partial_z u_z)}$$

4. Si $u_r|_{z=0} = 0$ alors $\partial_z u_z|_{z=0} = 0$ à cause de la formule précédente. On a donc (4) exprimé en $z=0$ qui donne

$$\rho\frac{u_0^2}{2} - \cancel{\rho g 0} - \cancel{\eta 0} = C$$

Resultat: La loi de conservation sera

$$\rho\frac{u_z^2}{2} - \rho g z - \eta\frac{\partial u_z}{\partial z} = \rho\frac{u_0^2}{2}.$$

5. Régime visqueux: On ignore tous les termes inertiels

$$-\rho g z - \eta\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\rho g}{\eta} z \quad \Leftrightarrow \quad u_z = -\frac{\rho g}{2\eta} z^2 + D$$

Avec la CL $u_z(0) = U_0$ on trouve $D = u_0$. La vitesse verticale sera donc.

$$u_z = U_0 - \frac{\rho g}{2\eta} z^2$$

la vitesse diminue avec $z \uparrow$

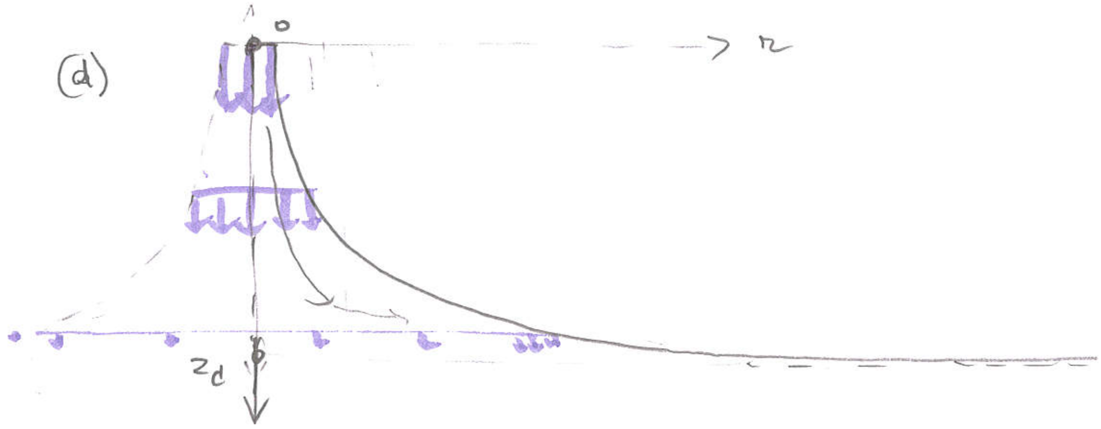
(b) $Q = \pi u_z \delta^2 = \pi u_0 \delta_0^2$. Donc on doit avoir.

$$\delta^2 = \delta_0^2 \frac{u_0}{u_z(z)}$$

$$= \frac{\delta_0^2 U_0}{\left(U_0 - \frac{\rho g}{2\eta} z^2\right)} = \frac{\delta_0^2}{\left(1 - \frac{\rho g}{2\eta U_0} z^2\right)}$$

(c) On voit que $u_z \to 0$ pour $z = z_d = \sqrt{\frac{2\eta U_0}{\rho g}}$ et $\delta(z) \to +\infty$. Le filament devient de + en + large.

(d)



Le filament s'étale. A $z = z_d$ la vitesse verticale devient 0. = comme sur un support solide.

(e) On imagine une telle situation à proximité de l'endroit où le miel tombe dans le pot.

6. Regime inertiel : Il reste de (4).

$$\cancel{\rho}\frac{u_z^2}{2} - \cancel{\rho} g z = \cancel{\rho}\frac{u_0^2}{2}$$

(a) A combiner avec debit, plutôt question d'après.

$$u_z = \sqrt{u_0^2 + 2gz}$$

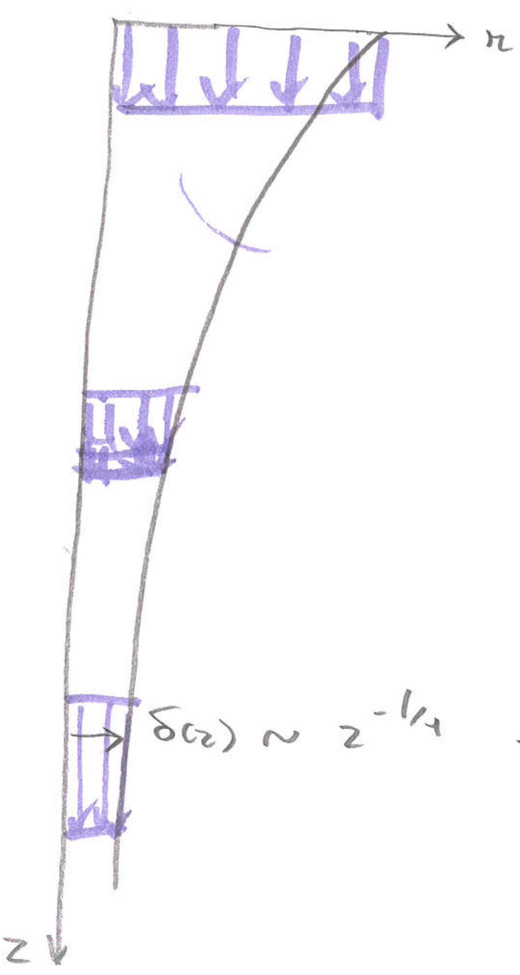
(b) Forme du filet

$$\Rightarrow \quad \delta^2 = \frac{u_0 \delta_0^2}{u_z} = \frac{u_0 \delta_0^2}{\sqrt{u_0^2 + 2gz}} = \frac{\delta_0^2}{\sqrt{1 + \frac{2gz}{u_0^2}}}$$

A quand z à trouve

$$\delta \sim \delta_0 \left(\frac{z}{(u_0^2/2g)}\right)^{-1/4} \quad \rightarrow \quad \alpha = +1/4$$

(c) Schema.



$= \left\{\begin{array}{l}\text{décroissance de } \delta \\ \text{bien plus lente} \\ \text{que dans la} \\ \text{première partie } (\delta \sim z^{-1})\end{array}\right.$

7. Les effets de l'inertie deviennent progressivement plus importants.

→ d'abord Régime en $\delta \sim z^{-1}$

→ puis Régime en $\delta \sim z^{-1/4}$.

→ puis à l'approche du support solide, régime visqueux ?

Régime 1 : $\delta \sim z^{-1}$?

Régime 2 : $\delta \sim z^{-1/4}$.

Régime 3 : δ s'épaissit ? régime visqueux.