Master de physique fondamentale et appliquée d'Orsay

Processus stochastiques et neutronique
Examen à distance du 2 juin 2020.
Tous les documents sont autorisés
Durée: 4h00
CORRECTION

1 Marches aléatoires en 1 dimension (3 points)

1. Le processus est markovien, l'état du système à l'instant $t + \tau$ ne dépend que de celui à l'instant t.

2. Écrire l'équation du mouvement $p(x, t + \tau) = \frac{1}{3}p(x - a, t) + \frac{1}{3}p(x + a, t) + \frac{1}{3}p(x, t)$.

3. Développement en série de Taylor:

$$\begin{aligned} p(x,t) + \tau\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} + ... = & \frac{1}{3}\left[p(x,t) - a\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + ...\right] \\ & + \frac{1}{3}\left[p(x,t) + a\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} + ...\right] \\ & + \frac{1}{3}p(x,t) \end{aligned}$$

soit,

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{3}\frac{a^2}{\tau}\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} = \frac{2}{3}D\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \quad (1)$$

Le coefficient de diffusion vaut donc $\frac{2}{3}D$.

2 Equation maîtresse (4 points)

1. (vue en TD)

$$P(n,s) = \frac{R+n+1}{2R}P(n+1, s-1) + \frac{R-n+1}{2R}P(n-1, s-1) \quad (2)$$

2.

$$
\begin{aligned}
\langle n(s)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nP(n,s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\left[\frac{R+n+1}{2R}P(n+1,s-1)+\frac{R-n+1}{2R}P(n-1,s-1)\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(n-1)\frac{R+n}{2R}P(n,s-1)+(n+1)\frac{R-n}{2R}P(n,s-1)\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2R}\left[nR+n^2-R+nR-n^2+R-n\right]P(n,s-1) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\frac{R-1}{2R}P(n,s-1) \\
&= \left(1-\frac{1}{R}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} nP(n,s-1) \\
&= \left(1-\frac{1}{R}\right)\langle n(s-1)\rangle
\end{aligned}
$$

Suite géometrique de raison $\left(1-\frac{1}{R}\right)$ d'où

$$
\langle n(s)\rangle = n_0\left(1-\frac{1}{R}\right)^s \tag{3}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
\langle n^2(s)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nP(n,s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2\left[\frac{R+n+1}{2R}P(n+1,s-1)+\frac{R-n+1}{2R}P(n-1,s-1)\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(n-1)^2\frac{R+n}{2R}P(n,s-1)+(n+1)^2\frac{R-n}{2R}P(n,s-1)\right] \\
&= \frac{1}{2R}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[2n^2R-4n^2+2R\right]P(n,s-1) \\
&= \left(1-\frac{2}{R}\right)\langle n^2(s-1)\rangle + 1
\end{aligned}
$$

Suite arithmético géométrique de type $u_{s+1} = au_s + b$ avec $a = \left(1-\frac{2}{R}\right)$ et $b = 1$. On pose $r = \frac{b}{1-a}$, on a :

$$
u_s = a^s(u_0 - r) + r \tag{4}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
\langle n^2(s)\rangle &= \left(1-\frac{2}{R}\right)^s\left(n_0^2 - \frac{1}{1-\left(1-\frac{2}{R}\right)}\right) + \frac{1}{1-\left(1-\frac{2}{R}\right)} \\
&= \left(1-\frac{2}{R}\right)^s\left(n_0^2 - \frac{R}{2}\right) + \frac{R}{2} \\
&= n_0^2\left(1-\frac{2}{R}\right)^s + \frac{R}{2}\left[1-\left(1-\frac{2}{R}\right)^s\right]
\end{aligned}
$$

4. à grands temps on a: $\langle n(s\to\infty)\rangle = 0$ et $\langle n^2(s\to\infty)\rangle = \frac{R}{2}$. La position moyenne de la particule tend vers 0 avec une variance finie. Ce système peut modéliser un ressort avec une force de rappel aléatoire.

3 Marche aléatoire en 2 dimensions (5 points)

1.

$$\vec{R}_n = \vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \ldots + \vec{l}_n\,,$$

$$\begin{aligned}\vec{R}_n^2 &= (\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \ldots + \vec{l}_n).(\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \ldots + \vec{l}_n)\\ &= \vec{l}_1^2 + \vec{l}_2^2 + \ldots + \vec{l}_n^2 + 2(\vec{l}_1.\vec{l}_2 + \vec{l}_1.\vec{l}_3 + ... + \vec{l}_1.\vec{l}_n\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + \vec{l}_2.\vec{l}_3 + ... + \vec{l}_2.\vec{l}_n\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ... \quad ...\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \vec{l}_{n-1}.\vec{l}_n)\end{aligned}$$

d'où en prenant la moyenne:

$$\begin{aligned}E[\vec{R}_n^2] = nE[l^2] + 2E[l]^2(&E[\cos\theta_1] + E[\cos(\theta_1+\theta_2] + ... + E[\cos(\theta_1+\theta_2+...+\theta_{n-1})]\\ &+ E[\cos\theta_2] + \quad ... \quad + E[\cos(\theta_2+...+\theta_{n-1})]\\ &\qquad ... \quad ...\\ &\qquad\qquad + E[\cos\theta_{n-1}])\end{aligned}$$

ou sous forme compacte:

$$E[R_n^2] = nE[l^2] + 2(E[l])^2 \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=j+1}^{n} E\left(\cos \sum_{k=j}^{m-1} \theta_k\right) = nE[l^2] + 2(E[l])^2 \sum_{m>j}^{n} E\left(\cos \sum_{k=j}^{m-1} \theta_k\right)$$

2.

$$\begin{aligned}E\left[\cos\sum_{k=j}^{n-1}\theta_k\right] &= E[\cos(\theta_j + ... + \theta_{n-1})]\\ &= \frac{1}{2}E[\left[e^{i(\theta_j+...+\theta_{n-1})} + e^{-i(\theta_j+...+\theta_{n-1})}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(E[e^{i\theta}]\right)^{n-j} + \left(E[e^{-i\theta}]\right)^{n-j}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((E[\cos\theta + i\sin\theta])^{n-j} + (E[\cos\theta - i\sin\theta])^{n-j}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((c+is)^{n-j} + (c-is)^{n-j}\right)\\ &= c^{n-j} \qquad \text{car} \;\; \text{s} = 0\end{aligned}$$

d'où:

$$
\begin{aligned}
E[\vec{R}_n^2] &= nE[l^2] + 2E[l]^2(c + c^2 + ... + c^{n-1} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + c + ... + c^{n-2} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ... \quad ... \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + c) \\
&= nE[l^2] + 2E[l]^2 c(1 + c + ... + c^{n-2} \to (1 - c^{n-1})/(1 - c) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + 1 + ... + c^{n-3} \to (1 - c^{n-2})/(1 - c) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ... \quad ... \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 1) \qquad \to (1 - c)/(1 - c) \\
&= nE[l^2] + 2E[l]^2 \frac{c}{1-c} \left((1 - c^{n-1}) + (1 - c^{n-2}) + ... + (1 - c)\right) \\
&= nE[l^2] + 2E[l]^2 \frac{c}{1-c} \left((n-1) - c(1 + c + ... + c^{n-2})\right) \\
&= nE[l^2] + 2E[l]^2 \frac{c}{1-c} \left(n - 1 - c\frac{1 - c^{n-1}}{1 - c}\right) \\
&= nE[l^2] + 2E[l]^2 \frac{c}{1-c} \left(n - \frac{1 - c^n}{1 - c}\right)
\end{aligned}
$$

3. pour $c = 0$: $E[\vec{R}_n^2] = nE[l^2]$ on retrouve le cas isotrope vu en TD

4 Mouvement brownien d'une bactérie (3 points)

$$
\begin{cases}
\langle x(t) \rangle &= v \int_0^t \langle \cos\theta(u) \rangle du \\
\langle y(t) \rangle &= v \int_0^t \langle \sin\theta(u) \rangle du
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\langle \cos\theta(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\theta p(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\theta \frac{1}{\sqrt{4\pi D_R t}} e^{-\frac{\theta^2}{4D_R t}} d\theta = e^{-D_R t} \\
\langle \sin\theta(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\theta p(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\theta \frac{1}{\sqrt{4\pi D_R t}} e^{-\frac{\theta^2}{4D_R t}} d\theta = 0
\end{cases}
$$

d'où

$$
\begin{cases}
\langle x(t) \rangle &= v \int_0^t e^{-D_R u} du = \frac{v}{D_R} \left[1 - e^{-D_R t}\right] \\
\langle y(t) \rangle &= 0
\end{cases}
$$

5 Traversée d'un barreau (3 points)

1.

$$p_0 = e^{-\Sigma_T L}$$

2.

$$p_1 = \int_0^L dx \, \left(\Sigma_T e^{-\Sigma_T x}\right) \times \left(\frac{\Sigma_s}{\Sigma_T}\right) \times \frac{1}{2} \times e^{-\Sigma_T (L-x)} = \frac{\Sigma_s L}{2} e^{-\Sigma_T L}$$