TD 4 : Ecoulements visqueux

4.1 Ecoulement visqueux sur plan incliné

1. $\rho(\partial_t u_x + u_x \partial_x u_x + u_y \partial_y u_x) = -\partial_x p + \eta(\partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}) u_x + \rho g \sin\beta$

$\rho(\partial_t u_x + u_x \partial_x u_y + u_y \partial_y u_y) = -\partial_y p + \eta(\partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}) u_y - \rho g \cos\beta$

et $\partial_x u_x + \partial_y u_y = 0$

2. FOND = adhérence sur surface au repos.

$u_x|_{y=0} = 0$

$u_y|_{y=0} = 0$

SURFACE LIBRE = imperméable et condition dynamique

$u_y|_{y=h} = 0$

$\partial_y u_x|_{y=h} = 0$

$p|_{y=h} = p_0$

3. Ici $u_y = 0$ partout, $\partial_x u_x = 0$, $\partial_t u_x = 0$

Ainsi il reste à résoudre

$$0 = -\partial_x p + \eta \partial^2_{yy} u_x + \rho g \sin\beta$$

$$0 = -\partial_y p - \rho g \cos\beta$$

On comprend que (2) suggère

$$p = C(x) - \rho g \cos\beta \, y$$

Avec la CL sur la pression $p|_{y=h} = p_0$

$$\Rightarrow p = p_0 + \rho g \cos\beta (h - y).$$

Ainsi la pression semble indépendante de x.

$\Rightarrow \partial_x p = 0$.

Pour trouver u_x, il reste à résoudre

$$0 = \eta \, \partial^2_{yy} u_x + \rho g \sin\beta$$

ce qui donne avec $\nu = \eta/\rho$ la viscosité cinématique

$$u_x = - \frac{g \sin\beta}{\nu} \frac{y^2}{2} + A y + B$$

On impose les 2 CL's. Sur le fond $u_x|_{y=0} = 0$

$\Rightarrow B = 0$

Sur la surface libre $\partial_y u_x|_{y=h} = 0$

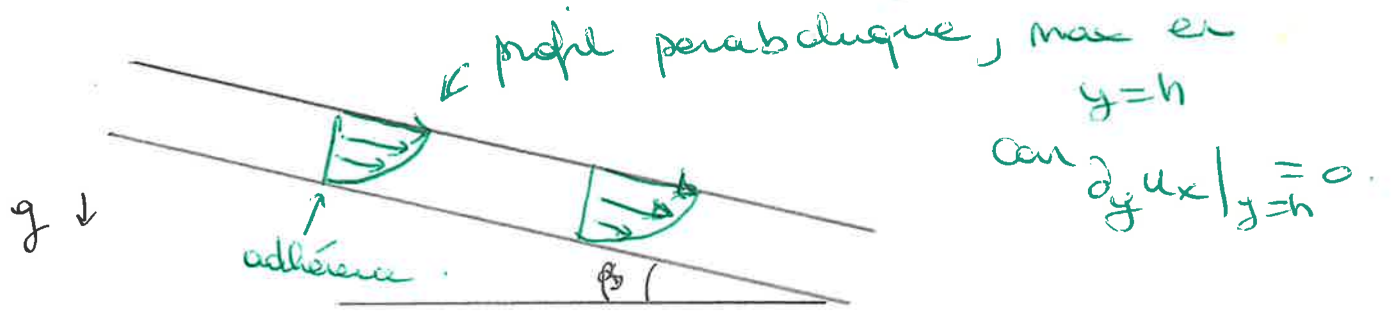
$$\Rightarrow \quad 0 = - \frac{g \sin\beta}{\nu} h + A$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{g \sin\beta}{\nu} h$$

Solution u_x

$$u_x = \frac{g \sin\beta}{\nu} \left(h y - \frac{y^2}{2} \right)$$

4. Schéma



5. On calcule Q débit. Si L est la section transverse (longueur selon z) alors

$$Q = L \int_0^h u_x(y)\, dy$$

$$= L \int_0^h \frac{g \sin\beta}{\nu} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right) dy$$

$$= L \frac{g \sin\beta}{\nu} \left[\frac{h y^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_0^h$$

$$= L \frac{g \sin\beta}{\nu} \left[\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{6} \right] \qquad \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad Q = \frac{L h^3 g \sin\beta}{3\nu}$$

Ainsi

$$h = \left(\frac{3\nu Q}{L g \sin\beta} \right)^{1/3}$$

$\Rightarrow$ on peut prédire la hauteur de liquide qui se formera sur la plaque si on fournit ν, Q, L, g et β.

6. La contrainte visqueuse sur la plaque du bas

$$\vec{\vec{\sigma}}^{(v)} \cdot \underbrace{\vec{e}_y}_{\text{normale de la plaque}} \Big|_{y=0} = \sigma_{xy}^{(v)} \vec{e}_x + \sigma_{yy}^{(v)} \vec{e}_y$$

$$\sigma_{xy}^{(v)}\Big|_{y=0} = \eta\left(\cancel{\partial_x u_y}\Big|_{y=0} + \partial_y u_x\Big|_{y=0}\right) \qquad u_y = 0$$

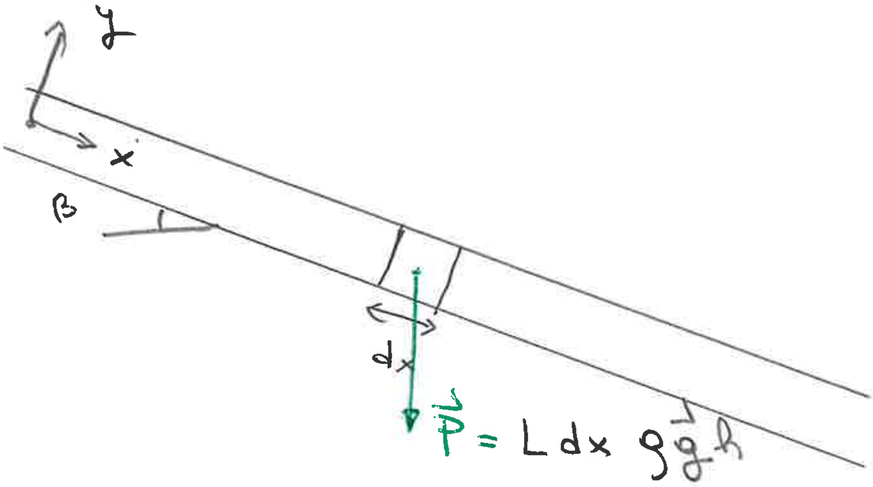
$$\sigma_{yy}^{(v)}\Big|_{y=0} = 2\eta\, \cancel{\partial_y u_y}\Big|_{y=0} \qquad u_y = 0 .$$

Uniquement contrainte tangentielle

$$\sigma_{xy}^{(v)}\Big|_{y=0} \vec{e}_x = \eta\, g \frac{\sin\beta}{\nu}\, \partial_y\left(hy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}$$

$$= \rho g h \sin\beta$$

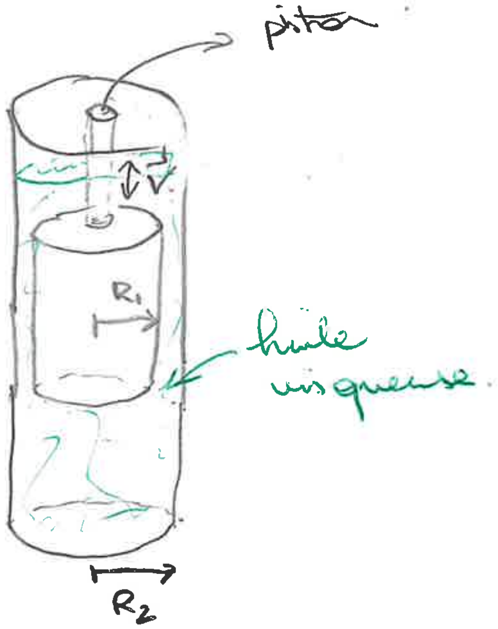
On remarque que cette contrainte est indépendante de la viscosité. Interprétation ?



$$\vec{P} = L\,dx\,\rho\,\vec{g}\,h$$
$$= dm\,\vec{g}$$
$$= g\,dm\left(\sin\beta\,\vec{e}_x - \cos\beta\,\vec{e}_y\right)$$

$$\sigma_{xy}^{(v)}\Big|_{y=0} dx\,L = g\,dm \sin\beta$$ $\Rightarrow$ compense le poids en dir x.

4.2 Amortisseur à effet visqueux.

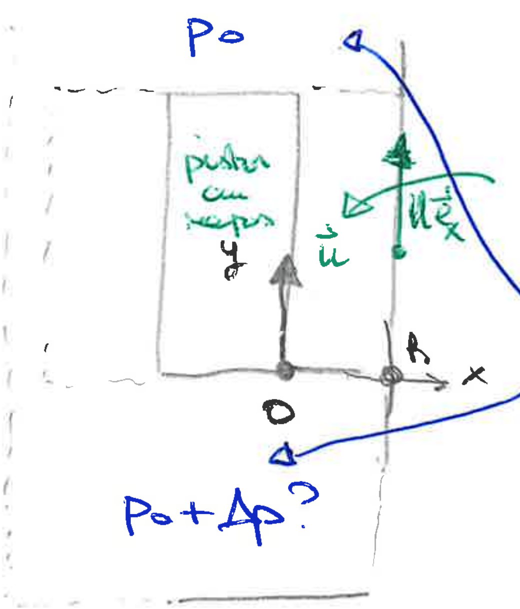


La vitesse $\vec{V}$ du piston est ralentie par une force de friction

$$\vec{F} = -\underbrace{\alpha}_{\text{que vaut ce } \alpha.} \vec{V}$$

Q: α dû aux contraintes visqueuses ? ou dû à la pression ?

On se place ds le référentiel du piston et on suppose l'entrefer $R_2 - R_1 = h << R_1$ ou R_2. Cela permet d'ignorer les effets de courbure (cylindrique). On utilise un système de coordonnées locale, attaché sur le bord du piston



On est intéressé par l'écoulement ici. En $x=h$, on a une paroi qui se déplace $u\vec{e}_x$. En $x=0$, piston au repos

ici on veut seulement connaître la pression. En haut on suppose $p = P_0$ d'ailleurs

$$\Delta p ?$$

1. $\rho(\partial_t u_x + u_x \partial_x u_x + u_y \partial_y u_x) = -\partial_x p + \eta(\partial^2_{xx} + \partial^2_{yy}) u_x$ (6)

Dans l'entrefer on a en bonne approx.

$\vec{u} \simeq u_y(x)\, \vec{e_y}$

Ainsi il reste

$0 \simeq -\partial_x p \Rightarrow p = p(y)$

La pression ne varie que selon y.

2. Selon y

$\rho(\cancel{\partial_t u_y} + u_x \cancel{\partial_x u_y} + u_y \cancel{\partial_y u_y}) = \cancel{-\partial_y p} + \eta(\partial^2_{xx} + \cancel{\partial^2_{yy}}) u_y$

stat. | invar selon $u_x = 0$ | invar selon y | invar.

eh non on doit le garder (stylo)!!

On doit bien garder $-\partial_y p$! Mes excuses.

$$0 \simeq -\partial_y p + \eta \partial^2_{xx} u_y \quad (*)$$

Les CL pour u_y sont.

$u_y|_{x=0} = 0$

$u_y|_{x=h} = U$

(⚠ réf. pu For)

3. Comme $\partial_y p$ ne dépend pas de x, on peut intégrer $(*)$ selon x.

$$u_y = \frac{(\partial_y p)}{\eta} \frac{x^2}{2} + Ax + B$$

Avec la CL en $x=0$, $u_y|_{x=0}=0$ on a

$B=0$.

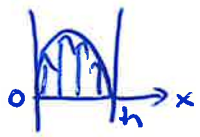
Avec la CL en $x=h$, $u_y|_{x=h}=U$

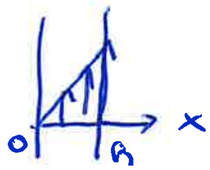
$$U = \frac{(\partial_y p)}{2\eta} h^2 + A h$$

$$\iff A = -\frac{(\partial_y p)}{2\eta} h + \frac{U}{h}$$

Ainsi

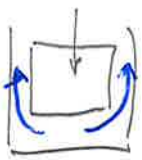
$$u_y = \underbrace{\frac{\partial_y p}{2\eta} x(x-h)}_{\text{Poiseuille}} + \underbrace{\frac{U}{h} x}_{\text{Couette (plan)}}$$





⚠ On ne connait pas encore $\partial_y p$. L'écoulement n'est donc pas encore parfaitement connu.

Le mouvement du piston injecte de la matière dans l'entrefer



$\Rightarrow$ Débit dans entrefer corrélé à U

4. On utilise la formule approximative pour calculer Q_v.

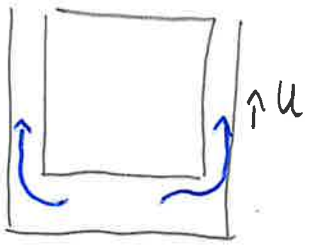
$$Q_v = 2\pi \underbrace{R_1}_{\text{ou } R_2} \int_0^h u_y(x)\, dx$$

$$= 2\pi R_1 \int_0^h \left[\left(\frac{\partial_y p}{2\eta}\right)\left(x^2 - hx\right) + \frac{U}{h} x \right] dx$$

$$= 2\pi R_1 \left[\left(\frac{\partial_y p}{2\eta}\right) \underbrace{\left(\frac{h^3}{3} - \frac{h^3}{2}\right)}_{-\frac{h^3}{6}} + \frac{Uh}{2} \right]$$

$$= 2\pi R_1 \left[-\left(\frac{\partial_y p}{12\eta}\right) h^3 + \frac{Uh}{2} \right]$$

5.



Le débit injecté dans l'entrefer

?

$$\underbrace{\pi R_1^2 U}_{\text{débit créé par le déplacement du piston à vitesse } U} = Q_v$$

Ici R_1 ou R_2.

$$\cancel{\pi} R_1^{\cancel{2}} U = \cancel{2\pi} \cancel{R_1} \left[-\frac{\partial_y p}{12\eta} h^3 + \frac{Uh}{2} \right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \partial_y p = \underbrace{-\frac{6\eta U R_1}{h^3}}_{\downarrow} + \frac{6\eta U}{h^2}$$

terme dominant car $\frac{R_1}{h^3} >> \frac{1}{h^2}$

sous les hypothèses que nous nous sommes données.

En bonne approx, on a donc

$$\partial_y p \simeq -\frac{6\eta U R_1}{h^3}$$

6. Intégration

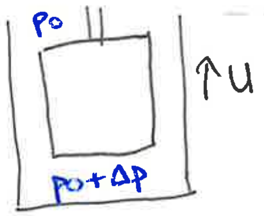
$$p(y) \simeq -\frac{6\eta U R_1}{h^3} y + C$$

Avec $p(\ell) = p_0$ et $p(0) = p_0 + \Delta p$ on a

$$p(y) \simeq p_0 + \frac{6\eta U R_1}{h^3} (\ell - y).$$

Le mouvement crée une surpression

$$\Delta p = \frac{6\eta U R_1 \ell}{h^3}$$ dans le bas.



Signe ok : le fluide du bas est comprimé si $U > 0$

$\Rightarrow \Delta p > 0$

7. Cette surpression crée une force vers le haut

$$F_p = \Delta p \; \pi R_1^2$$

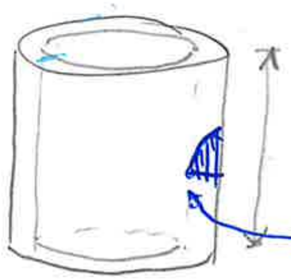
$$= 6\pi \eta U \ell \frac{R_1^3}{h^3} = \alpha U$$

forte dépendance avec $\frac{h}{R_1}$

Cette force a le bon signe car si la paroi se déplace à vitesse $+U$ alors le piston à vitesse $V=-U$ ds le référentiel de l'amortisseur

$$\Rightarrow F_p = -\alpha V$$

8. Les contraintes visqueuses peuvent contribuer aussi à la force.



Force sur piston
contrainte visqueuse ici

$$\sigma_{yx}^{(v)}\Big|_{x=0} = \eta \, \partial_x u_y \Big|_{x=0}.$$

$$= \eta \left(\frac{\partial_y P}{2\eta} (-h) + \frac{U}{h} \right)$$

La force visqueuse supplémentaire sera donc

$$F_v = \sigma_{yx}^{(v)}\Big|_{x=0} \underbrace{2\pi R_1 e}_{\text{surface du piston}}$$

$$= \left(-h \frac{\partial_y p}{2} + \eta \frac{U}{h}\right) 2\pi R_1 e$$

$$= \left(3\eta \frac{U R_1}{h^2} + \eta \frac{U}{h}\right) 2\pi R_1 e$$

$$= \underbrace{6\pi \eta U e \frac{R_1^2}{h^2}}_{\text{terme dominant si } h \ll R_1} + 2\pi \eta U e \frac{R_1}{h}$$

$$\simeq 6\pi \eta U e \frac{R_1^2}{h^2}$$

Si on compare cette force visqueuse à la force de pression

$$\frac{F_v}{F_p} \simeq \frac{6\pi \eta U e \frac{R_1^2}{h^2}}{6\pi \eta U e \frac{R_1^3}{h^3}} \simeq \frac{h}{R_1} \ll 1$$

$\Rightarrow$ La force visqueuse est négligeable devant la force de pression

4.3 Vortex de Burgers

1. $\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{r}\partial_r(r u_r) + \frac{1}{r}\partial_\theta u_\theta + \partial_z u_z = 0$$

Ici

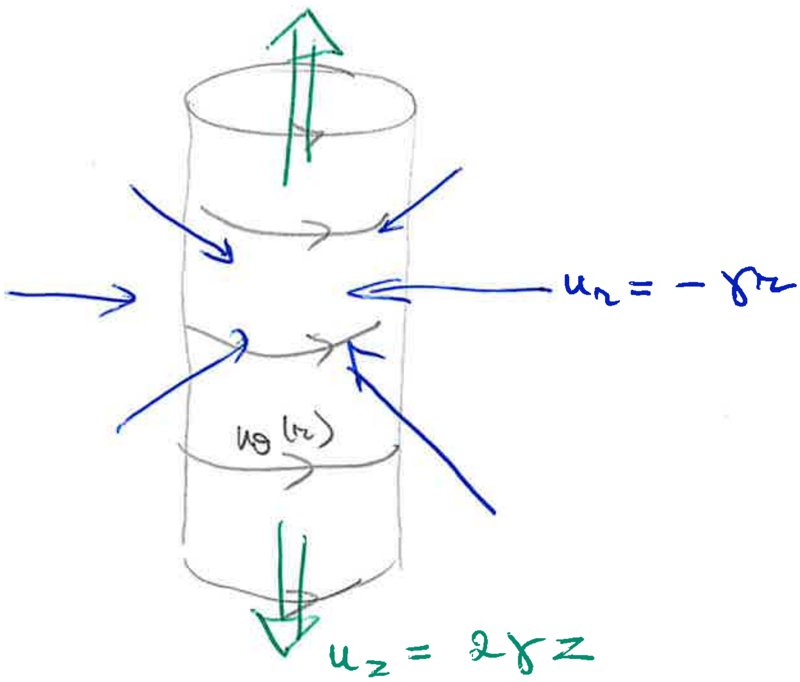
$$\frac{1}{r}\partial_r(-\gamma r^2) + 0 + \partial_z(\alpha\gamma z) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad -2\gamma + \alpha\gamma = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = 2$$

L'écoulement est

$$\vec{u} = \gamma(-r\vec{e}_r + 2z\vec{e}_z) + u_\theta(r)\,\vec{e}_\theta$$



On étire le tourbillon selon z. Etirement de vorticité = mécanisme d'amplification

VORTEX de Burgers = équilibre étirement $\Leftrightarrow$ diffusion (viscosité)

2. $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{u} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_z \\ u_r & r u_\theta & u_z \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \partial_r & 0 & \partial_z \\ -\gamma r & r u_\theta(r) & 2\gamma z \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{r} \partial_r \left(r u_\theta(r) \right)}_{\omega_z(r) \text{ en effet}} \vec{e}_z$$

3. $\underbrace{\vec{\nabla} \times \left(\rho \partial_t \vec{u}}_{\rho \partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{u})} + \rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = \underbrace{\cancel{\vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla} p)}}_{\vec{0}} + \underbrace{\eta \vec{\nabla} \times \nabla^2 \vec{u}}_{\eta \nabla^2 (\vec{\nabla} \times \vec{u})}$

$$\Rightarrow \rho \partial_t \vec{\omega} + \rho \vec{\nabla} \times \left((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = \eta \nabla^2 \vec{\omega}$$

Avec l'identité $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\nabla} \left(\frac{\|\vec{u}\|^2}{2} \right)$

$$\rho \partial_t \vec{\omega} + \rho \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{u}) + \rho \underbrace{\cancel{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \left(\frac{\|\vec{u}\|^2}{2} \right)}}_{\vec{0}} = \eta \nabla^2 \vec{\omega}$$

On divise par ρ et $\eta / \rho = \nu$. On utilise la seconde identité :

$$\partial_t \vec{\omega} + \vec{\omega} \underbrace{\cancel{(\vec{\nabla} \cdot \vec{u})}}_{0} - \vec{u} \underbrace{\cancel{(\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega})}}_{0} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \eta \nabla^2 \vec{\omega}$$

On trouve donc

$$\underbrace{\partial_t \vec{\omega} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega}}_{\substack{\text{la vorticité}\\ \text{varie car elle}\\ \text{est transporté}\\ \text{par l'écoulement}}} = \underbrace{(\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}}_{\substack{\text{car elle}\\ \text{est étirée}\\ \text{par } \vec{u}}} + \underbrace{\nu \nabla^2 \vec{\omega}}_{\substack{\text{car elle}\\ \text{diffuse}}}$$

$\frac{1}{2}(\vec{\nabla u} + \vec{\nabla u}^T) \rightarrow$ tenseur de taux d'étirement

4. La composante selon z, pour $\vec{\omega} = \omega_z(r)\,\vec{e_z}$

$$\underbrace{\cancel{\partial_t \omega_z}}_{\text{stat.}} + \Big(u_r \partial_r + \underbrace{\cancel{\tfrac{u_\theta}{r}\partial_\theta}}_{\text{axi sym.}} + \underbrace{\cancel{u_z \partial_z}}_{\text{invar. selon } z}\Big)\omega_z$$

$$= (\omega_z \partial_z) u_z + \nu \nabla^2 \omega_z$$

Donne ici

$$-\gamma r \partial_r \omega_z = \omega_z (2\gamma) + \nu\left(\frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r \omega_z\right)\right)$$

On introduit l'échelle de longueur

$$\lambda = \sqrt{\frac{\nu}{\gamma}} \qquad \left(\sqrt{\frac{L^2/T}{1/T}} = L \text{ en effet}\right)$$

Si on multiplie l'équation par $\frac{r}{\nu}$ alors

$$\partial_r(r\partial_r \omega_z) + \frac{1}{\lambda^2}\Big(\underbrace{2r\omega_z + r^2\partial_r \omega_z}_{\partial_r(r^2\omega_z)}\Big) = 0$$

Ainsi l'éq. diff. se laisse récrire comme

$$\partial_r \left(r \partial_r \omega_z + \frac{r^2}{\lambda^2} \omega_z \right) = 0$$

Une intégration plus tard.

$$r \partial_r \omega_z + \frac{r^2}{\lambda^2} \omega_z = A$$

$$\Leftrightarrow \partial_r \omega_z + \frac{r}{\lambda^2} \omega_z = \frac{A}{r}$$

Il s'agit d'une ED ordinaire inhomogène.

→ Solution particulière associée à $\frac{A}{r}$

⇒ donne une solution singulière à l'axe. Cf situation du tourbillon de Lamb-Oseen (poly).

On va donc écarter cette solution $A = 0$.

→ Solution homogène = Vortex de Burgers.

On trouve la solution de

$$\partial_r \omega_z + \frac{r}{\lambda^2} \omega_z = 0$$

$$\frac{d\omega_z}{\omega_z} = -\frac{r\,dr}{\lambda^2}$$

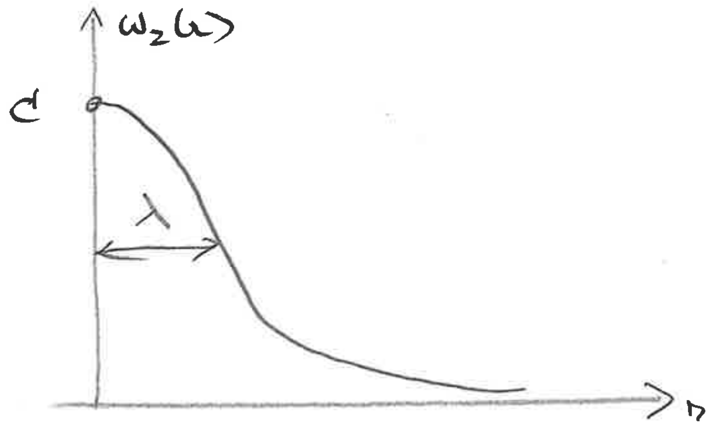
Intégration

$$\ln \omega_z = -\frac{r^2}{2\lambda^2} + \tilde{C}$$

On prend l'exponentielle $C = e^{\tilde{C}}$, donne

$$\omega_z = C\, e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}}$$

On retrouve bien une vorticité de forme Gaussienne.



Le coeur du tourbillon est de largeur $\lambda = \sqrt{\frac{\nu}{\gamma}}$

Loin du tourbillon, la vorticité sera nulle mais pas u_θ. On verra que

$$u_\theta \xrightarrow[\frac{r}{\lambda}\ \text{grand}]{} \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

vortex ponctuel (solution potentielle)

5. On avait trouvé

$$\omega_z = \frac{1}{r}\partial_r(r u_\theta)$$

Ici

$$\frac{1}{r}\partial_r(r u_\theta) = C e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \partial_r(r u_\theta) = C r e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}}.$$

Dut

$$r u_\theta = C\int^{r} \tilde{r}\, e^{-\frac{\tilde{r}^2}{2\lambda^2}}\, d\tilde{r} + \underbrace{D}_{\text{constante}}$$

$$= C(-\lambda^2)\int^{r} e^{-\frac{\tilde{r}^2}{2\lambda^2}}\, d\left(-\frac{\tilde{r}^2}{2\lambda^2}\right) + D$$

$$\Rightarrow \quad u_\theta = C\left(-\frac{\lambda^2}{r}\right) e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}} + \frac{D}{r}.$$

Au centre $u_\theta\big|_{r=0}$ pour symétrie.

$$\lim_{r \to \varepsilon \ll 1} u_\theta\Big| = C\left(-\frac{\lambda^2}{\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2\lambda^2}\right) + \frac{D}{\varepsilon}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\left(C(-\lambda^2) + D\right) + O(\varepsilon)$$

Pour ne pas avoir une singularité en $r=0$; Il faut donc

$$+\lambda^2 C = 0$$

Soit

$$u_\theta(r) = \frac{C}{r}\lambda^2\left[1 - e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}}\right]$$

Le coeff C est arbi mais le plus souvent on l'écrit avec Γ_∞, la circulation à l'∞.. Sur un très grand contour.

$$\Gamma_\infty = \lim_{R\to\infty} \oint_{\mathcal{C}} \vec{u}\cdot d\vec{r}$$

$$= \lim_{R\to\infty} u_\theta\Big|_{r=R} 2\pi R$$

$$= \frac{C\lambda^2}{\cancel{R}} 2\pi \cancel{R}$$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{\Gamma_\infty}{2\pi\lambda^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega_z = \dfrac{\Gamma_\infty}{2\pi\lambda^2} e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}} \\[2ex] u_\theta = \dfrac{\Gamma_\infty}{2\pi r}\left[1 - e^{-\frac{r^2}{2\lambda^2}}\right] \end{cases}$$