Processus stochastiques et neutronique : TD n°1

21 janvier 2022

1 Equation Maîtresse (examen 2015)

1.

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\langle n(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\sum_{n=0}^{\infty} nP(n,t)}{\mathrm{d}t} &= \sum_{n=0}^{\infty} \big[n\mu P(n-1,t) + \nu n(n+1)P(n+1,t) - n(\mu+\nu n)P(n,t)\big] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \big[(n+1)\mu + \nu(n-1)n - n(\mu+\nu n)\big] P(n,t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \big[\mu - \nu n)\big] P(n,t) \\
&= \mu - \nu\langle n(t)\rangle
\end{aligned}
$$

2. Solution

$$\langle n(t)\rangle = \frac{\mu}{\nu} + \left(n_0 - \frac{\mu}{\nu}\right) e^{-\nu t}.$$

donc $\langle n(t)\rangle$ croissante si $n_0 < \mu/\nu$, décroissante si $n_0 > \mu/\nu$, et la population est constante dans le cas critique $n_0 = \mu/\nu$. Dans tous les cas $\lim_{t\to\infty}\langle n(t)\rangle = \mu/\nu$.

2 Equation Maîtresse (examen 2016) (Entraînement à faire chez soi)

Remarque : l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial t} = (z-1)(\beta z - \alpha)\frac{\partial G(z,t)}{\partial z} \tag{1}$$

de type $\partial_t G(z,t) + c(z)\partial_z G(z,t) = 0$ se résoud par la méthode des caractéristiques.

1. $$\frac{\partial P(n,t)}{\partial t} = \alpha(n+1)P(n+1,t) + \beta(n-1)P(n-1,t) - (\alpha+\beta)nP(n,t)$$

2. En multipliant par z^n puis en sommant sur n, on trouve immédiatement l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $G(z,t)$.

3. $$\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_{z=1} = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n,t) = \langle n(t) \rangle \tag{2}$$

   et
   $$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right)_{z=1} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)P(n,t) = \langle n(t)^2 \rangle - \langle n(t) \rangle \tag{3}$$

4. En utilisant l'expression de $G(z,t)$ et l'Eq.2 on trouve après un rapide calcul :
   $$\langle n(t) \rangle = n_0 e^{(\beta-\alpha)t} \tag{4}$$

   Lorsque les naissances et les morts sont égales, la population moyenne est constante. Les crochets $\langle\rangle$ indiquent une moyenne sur les réalisations du processus.

5. Une autre méthode pour obtenir les moments consiste à multiplier l'équation maîtresse par n ou n^2 puis à sommer sur n afin d'obtenir directement une équation différentielle pour les moments.