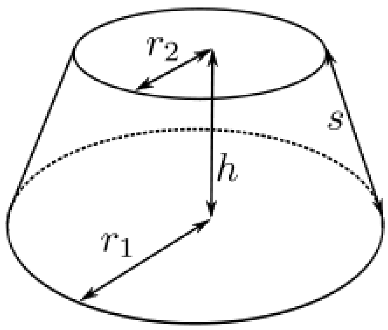
Master de physique fondamentale et appliquée d'Orsay

Option :Processus stochastiques et neutronique
Examen du 23 novembre 2018

Document autorisé : une page manuscrite
Durée : 3h00
le barème est approximatif

1 Monte Carlo : tirage uniforme dans le volume d'un tronc de cône (3 points)

1. Donner un algorithme pour tirer uniformément des points à l'intérieur d'un tronc de cône de hauteur h et de rayons r_1 et r_2.



2. On peut aussi utiliser la méthode de rejet. Dans ce cas, donner le taux de rejet, quand l'algorithme de rejet vous paraît-il inefficace ?

2 Simulation d'une densité de probabilité (2 pts)

On souhaite simuler une variable aléatoire définie sur $\mathbf{R}^+$ de loi :

$$f(x) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x}{2}\right)\mathbf{1}_{[0;2]}(x) + e^{3(1-x)}\mathbf{1}_{[1;\infty[}(x) \tag{1}$$

où $\mathbf{1}_{[x_1;x_2]}(x)$ est la fonction indicatrice définie par

$$\mathbf{1}_{[x_1;x_2]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad .$$

1. Ecrire un algorithme pour simuler cette loi.

3 Equation Maîtresse : décroissance radioactive (4 points)

On considère un système caractérisé par le nombre d'atomes n d'une espèce A qu'il contient à l'instant t et dont l'évolution suit un processus de décroissance radioactive. Le taux de transition $W(n \to m)$ d'un état n à l'état m satisfait :

$$W(n \to m) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \geq n \\ \gamma n & \text{si} \quad m = n-1 \\ 0 & \text{si} \quad m < n-1 \end{cases}$$

On désigne par $P(n,t)$ la probabilité d'avoir une population de n individus au temps t.

1. Donner l'équation maîtresse satisfaite par le système.
2. Pour résoudre ce système d'équations on introduit la fonction génératrice définie par :

$$G(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(n,t). \tag{2}$$

   Montrer que $G(z,t)$ satisfait à :

$$\frac{\partial G(z,t)}{\partial t} = \gamma(1-z)\frac{\partial G(z,t)}{\partial z} \tag{3}$$

3. Donner les relations liant $G(z,t)$ et les moments $\langle n(t) \rangle$ et $\langle n(t)^2 \rangle$.
4. On cherche une solution de l'équation (3) sous la forme $\left[c(z-1)e^{-\gamma t}+1\right]^d$. Déterminer les constantes c et d pour la solution particulière correspondant à la condition initiale $P(n,0) = \delta_{n,n_0}$ (à l'instant $t=0$ il y a n_0 individus).
   En déduire la valeur moyenne du nombre d'individus $\langle n(t) \rangle$ ainsi que la variance du processus. Que signifie les crochets $\langle \rangle$ dans cette expression ?
5. Énoncer (sans calcul) une autre méthode permettant d'obtenir $\langle n(t) \rangle$ et $\langle n(t)^2 \rangle$.
6. En développant $G(z,t)$ donner les expressions des $P(n,t)$.
   On rappelle la formule du binôme :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{4}$$

4 Marches aléatoires en 1 dimension (3 points)

Dans cet exercice on étudie un modèle simple de marche aléatoire sur un réseau en 1 dimension. Plus précisément, on étudie le mouvement d'une particule se déplaçant par sauts le long de l'axe Ox sur un réseau de maille a. Soit $p(x,t)$ la probabilité de trouver un individu au point x au temps t. La durée de chaque saut est égale à τ. Pendant cet intervalle, l'individu a trois options : ne pas bouger avec la probabilité $N(x)$, faire un saut de longueur a à droite avec la probabilité $R(x)$ ou faire un saut de longueur a à gauche avec la probabilité $L(x)$.

1. Le processus est-il markovien ? Justifier brièvement votre réponse.
2. Donner la relation liant $N(x)$, $R(x)$ et $L(x)$.
3. Écrire l'équation du mouvement (équation aux différences) vérifiée par $p(x,t)$.
4. On étudie la limite $a \to 0$ et $\tau \to 0$, montrer que l'équation aux différences précédente satisfait alors une équation de type FOKKER-PLANCK

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\beta(x)p(x,t)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D(x)p(x,t)\right).$$

   Donner les expressions de $\beta(x)$ et $D(x)$ en fonction de $a, \tau, R(x), L(x)$ ainsi qu'une interprétation physique de ces deux termes.

5 Neutronique : Sources uniformes dans une plaque (4 points)

Dans cet exercice on prendra comme condition aux limites l'annulation du flux à l'interface entre le milieu diffusif et le vide.

On considère une plaque homogène infinie d'épaisseur $2a$ placée dans le vide, constituée d'un milieu diffusif caractérisé par le coefficient $k^2 = \frac{\Sigma_a}{D}$ où Σ_a est la section efficace macroscopique d'absorption et D la constante de diffusion.

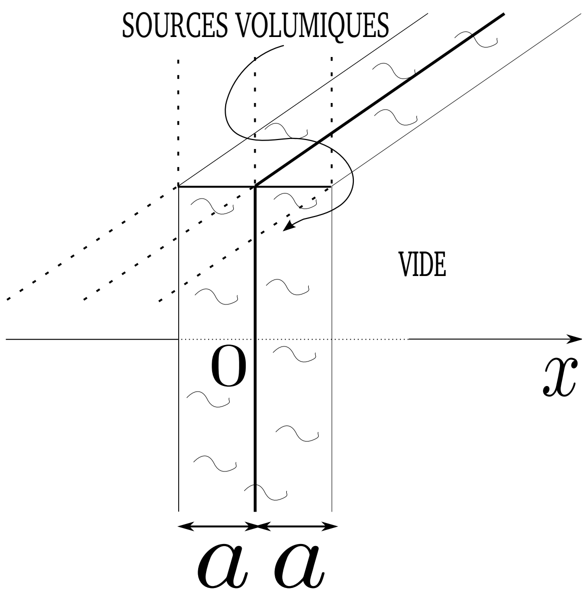
1. Calculer le flux $\Phi(x)$ résultant d'une source uniforme émettant S neutrons par unité de volume et par unité de temps dans la plaque.
2. En déduire le facteur de forme F, défini par :

$$F = \frac{\Phi_{maximum}}{\Phi_{moyen}}.$$

Données :
En coordonnées cartésiennes le gradient $\vec{\nabla}$ et le laplacien Δ s'écrivent respectivement :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$



Tournez la page SVP

6 Mouvement brownien d'une molécule diatomique (4 points)

On étudie le mouvement d'une molécule diatomique brownienne en 1 dimension. La molécule diatomique est modélisée par deux atomes de masse m attachés par un ressort très flexible de constante k. La longueur du ressort au repos est beaucoup plus petite que les fluctuations causées par les forces aléatoires. La molécule est immergée dans un fluide visqueux ayant un coefficient de friction γ à la température T. Les équations de Langevin s'écrivent :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1(t) = -k(x_1(t) - x_2(t)) - \gamma\dot{x}_1(t) + F_1(t) \\ m\ddot{x}_2(t) = k(x_1(t) - x_2(t)) - \gamma\dot{x}_2(t) + F_2(t) \end{cases} \tag{5}$$

où $x_i(t)$ est le déplacement de l'atome i, et $F_i(t)$ est la force aléatoire agissant sur cet atome au temps t. La corrélation des forces aléatoires vérifie,

$$\langle F_i(t)F_j(t')\rangle = 2\gamma T\delta_{ij}\delta(t-t'). \tag{6}$$

1. Dans toute la suite, on néglige les termes d'accélération.

   On définit $R(t) = \dfrac{x_1(t) + x_2(t)}{2}$ et $r(t) = x_1(t) - x_2(t)$.

   Résoudre les équations de Langevin pour $R(t)$ et $r(t)$ (on posera $r_0 = r(0)$ et $R_0 = R(0)$), puis déterminer $\langle (r(t) - r_0)^2\rangle$ et $\langle (R(t) - R_0)^2\rangle$.
2. Généraliser les résultats à 3 dimensions pour $\langle (\vec{R(t)} - \vec{R_0})^2\rangle$.

7 Diffusion aléatoire anisotrope (question bonus)

On considère la limite continue d'une marche aléatoire en 1 dimension avec un coefficient de diffusion D et un terme de dérive négatif $-\nu$ (avec $\nu > 0$). La concentration $c(x)$ (ou densité de probabilité si il y a une seule particule) est donnée par l'équation

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = \nu\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} + D\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2}.$$

Avec comme condition initiale $\delta(x - x_0)$, la solution, trouvée au TD n°2, est :

$$c_{x_0}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left(-\frac{(x - x_0 + \nu t)^2}{4Dt}\right).$$

On suppose que $x_0 > 0$ et on place une trappe en $x = 0$, ce qui signifie que la concentration $c(x,t)$ vaut 0 en $x = 0$ quelque soit t. En vous inspirant de la méthode des images donner la solution $c(x,t)$ pour $x \geq 0$ lorsque l'on place la trappe.