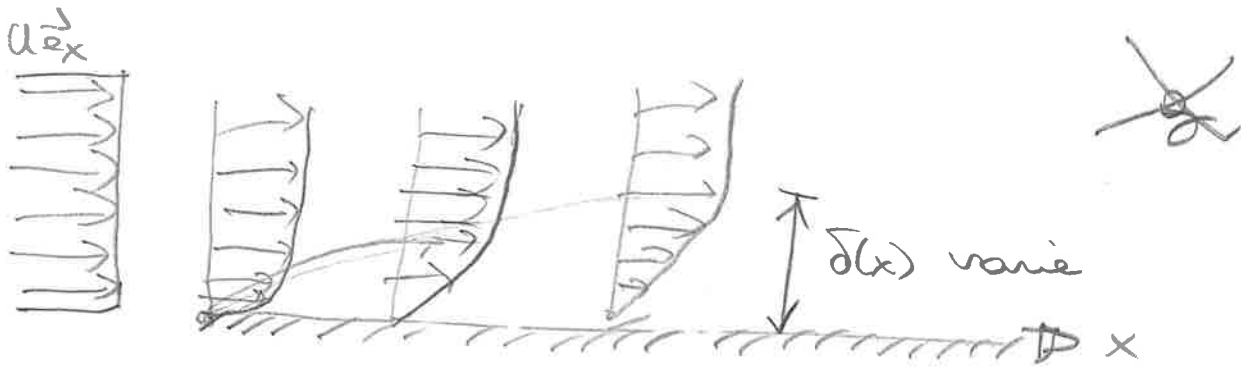


TD 5 Couches limites

1

5.2 Couche limite de Blasius



Un écoulement uniforme rencontre une plaque au repos située en $x \in [0, +\infty[$. Au départ de la plaque il se forme une fine couche d'épaisseur $\delta(x)$ variable suite à l'action de la viscosité et l'advection $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$.

On identifie la couche limite de Blasius comme une solution auto-similaire du modèle de Prandtl.

↓
gardant une même "forme" par changement d'échelle spatiale.

Permet de calculer la force de traînée visqueuse. Etapes du TD.

A. Etablir le modèle de Prandtl à partir de Navier-Stokes.

B. Adimensionner

C. Trouver l'éq. différentielle qui caractérise la solution auto-similaire

D. (solution numérique) \rightarrow E. Calcul de la force de traînée.

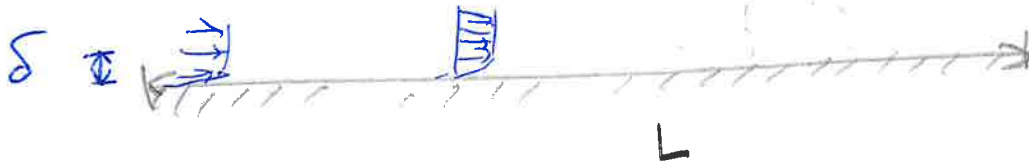
A. Modèle de Prandtl (Trouver un jeu d'éq + résoudre à l'échelle de l'écoulement pour une échelle contre le cas y).

$$1. \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \underbrace{u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}}_{\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial y}} = \underbrace{-\partial_x q}_{\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial x}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}}_{\frac{\nu}{L^2}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}}_{\frac{\nu}{\delta^2}}$$

$$2. \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \underbrace{u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}}_{\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial y}} = \underbrace{-\partial_y q}_{\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial y}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}}_{\frac{\nu}{L^2}} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}}_{\frac{\nu}{\delta^2}}$$

$$3. \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) + \underbrace{u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}}_{\frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial y}} = 0$$

3. On suppose $\frac{\delta}{L} \ll 1$ que la couche est fine devant son étendu selon x . (Folle de la plaque).



(a) Les deux termes de $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ sont du même ordre, Ainsi :

$$\frac{U}{L} \sim \frac{V}{\delta} \Rightarrow V \sim U \frac{\delta}{L}$$

\downarrow
petit

\Rightarrow La vitesse verticale V est bien plus petite que la vitesse horizontale

(b) $\underbrace{u_x \partial_x u_x}_{\frac{U^2}{L}}$ et $\underbrace{u_y \partial_y u_x}_{\frac{VU}{\delta} \sim \frac{U^2}{L}}$ avec les résultats de (a).

\Rightarrow Les deux termes sont du même ordre.

$\underbrace{u_x \partial_x u_y}_{\frac{UV}{L}}$ et $\underbrace{u_y \partial_y u_y}_{\frac{V^2}{\delta} \sim \frac{UV}{L}}$ avec (a).

\Rightarrow Les deux termes sont du même ordre.

(c) Le terme $\underbrace{\nu \partial_{yy}^2 u_x}_{\frac{\nu U}{\delta^2}}$ domine $\underbrace{\nu \partial_{xx}^2 u_x}_{\frac{\nu U}{L^2}}$? (4)


$$\frac{\nu U}{\delta^2} \gg \frac{\nu U}{L^2} \quad ?$$

oui car ça implique à

$$\frac{\delta^2}{L^2} \ll 1.$$

\Rightarrow On ne gardera que le terme $\nu \partial_{yy}^2 u_x$ ds le modèle de Prandtl.

(d) Si le terme de pression est du m^ê ordre que le terme visqueux on a.

$$\underbrace{-\partial_x \phi}_{\frac{Q}{L}} \sim \underbrace{\nu \partial_{yy}^2 u_x}_{\frac{\nu U}{\delta^2}} \sim \underbrace{u_x \partial_x u_x}_{\frac{U^2}{L}}$$


(e) Il faut que

$$\underbrace{u_x \partial_x u_y + u_y \partial_y u_y}_{\frac{U^2}{L}} < < \underbrace{-\partial_y \phi}_{\frac{Q}{\delta}}$$

Avec ① $\Rightarrow \frac{U^2}{L} \sim \frac{Q}{L}$ alors on doit avoir

$$\frac{Q}{L} < < \frac{Q}{\delta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\delta}{L} \ll 1 \quad \text{dk en effet.}$$

⇒ On pourra donc ignorer l'écrit devant la pression de la composante y de l'éq. (5)

Il faut aussi

$$\underbrace{\nu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}}_{\frac{\nu V}{\delta^2}} \ll \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial y}}_{\frac{Q}{\delta}}$$

Avec (1) $\Rightarrow \frac{Q}{\delta} \sim \frac{\nu U L}{\delta^3}$. Ainsi il faut que

$$\frac{\nu V}{\delta^2} \ll \frac{\nu U L}{\delta^3}$$

$$(a) \Rightarrow \frac{\cancel{\nu U}}{\delta L} \ll \frac{\cancel{\nu U} L}{\delta^2} \Rightarrow \frac{\delta^2}{L^2} \ll 1 \quad \&$$

⇒ On pourra en effet ignorer les termes visqueux devant le gradient de pression $\frac{\partial \phi}{\partial y}$.

4. Le modèle de Prandtl ne conserve que les termes dominants, de la limite $\frac{\delta}{L} \ll 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} \approx -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \\ 0 \approx -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \end{array} \right.$$

5. Si $\partial_y p \approx 0$ alors $p \approx p(x)$. La pression ne change pas dans la couche limite et correspond donc à celle de l'écoulement au dessus de la corde. (Parfois on y suppose Bernoulli $p(x) + \rho \frac{U^2(x)}{2} = \text{cte.}$) (6)

6e $u_x|_{y=0} = 0$
 $u_y|_{y=0} = 0$ } \rightarrow adhérence

$u_x|_{y \rightarrow \infty} = U$ } \rightarrow écoulement uniforme

7. Un écoulement uniforme ne crée pas de gradient de pression. Soit a a

$$\cancel{U} \cancel{\partial_x U} = -\partial_x \phi(x) + \cancel{\nu \partial_x^2 U}$$

$$\Rightarrow \partial_x \phi(x) = 0$$

La pression est uniforme partout. Ainsi le modèle se simplifie encore +

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x \partial_x u_x + u_y \partial_y u_x = \nu \partial_{yy}^2 u_x \\ \partial_x u_x + \partial_y u_y = 0. \end{array} \right.$$

8. $[u] = U$

$[v] = \frac{\nu}{U}$



$\left(\frac{L^2}{\frac{\nu}{U}} = L \right)$

9. $u_x = U \tilde{u}_x$

$u_y = U \tilde{u}_y$

$x = \frac{\nu}{U} \tilde{x}$

$y = \frac{\nu}{U} \tilde{y}$

ds le modèle de Prandtl

$\cancel{U^2 \frac{U}{\nu}} \left(\tilde{u}_x \partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_x + \tilde{u}_y \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}_x \right)$


$= \cancel{\nu U \left(\frac{U}{\nu} \right)^2} \partial_{\tilde{y}\tilde{y}}^2 \tilde{u}_x$

$\cancel{U \frac{U}{\nu}} \left(\partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_x + \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}_y \right) = 0$

Pb dimensionné

$$\begin{cases} \tilde{u}_x \partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_x + \tilde{u}_y \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}_x = \partial_{\tilde{y}\tilde{y}}^2 \tilde{u}_x \\ \partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_x + \partial_{\tilde{y}} \tilde{u}_y = 0. \end{cases}$$

des CL adim.

$\tilde{u}_x|_{\tilde{y}=0} = 0, \tilde{u}_y|_{\tilde{y}=0} = 0, \tilde{u}_x|_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} = 1$ 

10. Il faut vérifier que

$$\tilde{u}_y \ll \tilde{u}_x$$

et que

$$\partial_x \tilde{u}_x \ll \partial_y \tilde{u}_x$$

car c'est ça qui a permis les simplifications.

Plus de filles dans la suite !

⚡ Solution auto-similaire de Blasius.

11. On remplace $u_x(x,y) = A u_x(ax, by)$
 $u_y(x,y) = B u_y(ax, by).$

Dans le modèle. On nomme

$$X = ax$$

$$Y = by.$$

Alors

$$\begin{aligned} u_x \partial_x u_x &= A^2 u_x(X,Y) \partial_X u_x(x,y) \frac{\partial X}{\partial x} \\ &= A^2 a u_x(X,Y) \partial_X u_x(X,Y) \end{aligned}$$

$$u_y \partial_y u_x = ABb u_y(X,Y) \partial_Y u_x(X,Y)$$

$$\partial_{yy}^2 u_x(x,y) = Ab^2 \partial_{yy}^2 u_x(x,y)$$

$$\partial_x u_x = Aa \cdot \partial_X u_x(x,y)$$

$$\partial_y u_y = Bb \partial_y u_y(x,y)$$

Alors du système original :

$$\begin{cases} u_x \partial_x u_x + u_y \partial_y u_y = \partial_{yy}^2 u_x \\ \partial_x u_x + \partial_y u_y = 0 \end{cases}$$

on déduit

$$\begin{aligned} A^2 a u_x \partial_x u_x + ABb u_y \partial_y u_x \\ = Ab^2 \partial_{yy}^2 u_x. \end{aligned}$$

$$Aa \partial_x u_x + Bb \partial_y u_y = 0$$

Ce système d'équations est identique à s'ajoute si

$$\begin{cases} A^2 a = ABb = Ab^2 \\ Aa = Bb. \end{cases}$$

Dans la condition aux limites

(10)

$$u_x|_{y \rightarrow +\infty} = 1 \Rightarrow A u_x(x, y)|_{y \rightarrow +\infty} = 1$$

Cette condition est identique à l'original si

$$A = 1.$$

Il reste donc

$$\begin{cases} a = Bb = b^2 \\ a = Bb \end{cases} \rightarrow 2 \text{ relations.}$$

$$1) \frac{b^2}{a} = 1 \Leftrightarrow \frac{b}{\sqrt{a}} = 1.$$

$$2) Bb = a \Leftrightarrow B\sqrt{a} = a \Leftrightarrow \frac{B}{\sqrt{a}} = 1$$

12. On propose

$$u_x(x, y) = F\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) \quad (*)$$

$$u_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}} G\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) \quad (**)$$

TF (5.9) : $u_x(x, y) = A u_x(x, y) \cdot \dots$

$$F\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) = A F\left(\frac{by}{\sqrt{a}\sqrt{x}}\right)$$

$$= F\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) \text{ avec } \begin{cases} A = 1 \\ \frac{b}{\sqrt{a}} = 1 \end{cases}$$

OK (*) = ~~autorégressive~~ invariance par changement d'échelle.

TF (5.9) : $u_y(x,y) = \frac{B}{\sqrt{x}} u_y(ax, by) ??$

(11)

$$\frac{1}{\sqrt{x}} G\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) = \frac{B}{\sqrt{ax}} G\left(\frac{by}{\sqrt{ax}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} G\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) \text{ avec}$$

$$B = \sqrt{a}$$

$$\frac{b}{\sqrt{a}} = 1.$$

Ok (**) autosimilaire aussi.

⇒ La proposition de solution a bien cette propriété d'invariance par changement d'échelle.

13. $u_x = \partial_y \psi$, $u_y = -\partial_x \psi$ alors

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \text{ automatiquement}$$

Dens : $\partial_x (\partial_y \psi) + \partial_y (-\partial_x \psi) = 0$ ✓

Ici $\psi = \sqrt{x} \Psi\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right)$ [pas le $\frac{1}{\sqrt{x}}$ que tout à l'heure.]

$$u_x = \partial_y \psi = \sqrt{x} \partial_y \Psi \frac{\partial y}{\partial y} = \sqrt{x} \partial_y \Psi \frac{1}{\sqrt{x}}$$

\downarrow
 Ψ'

Dens avec $u_x = F(y)$ on a

$$\boxed{F = \Psi'}$$

Pour la composante $u_y = -\partial_x \psi$ on a

$$\begin{aligned} u_y &= -\partial_x (\sqrt{x} \Psi(y)) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} \Psi - \sqrt{x} \partial_y \Psi \frac{\partial y}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{\sqrt{x}} \right) = -\frac{y}{2} x^{-3/2} = -\frac{1}{2x} \frac{y}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x} Y$$

Ainsi remplaçant $u_y = \frac{1}{\sqrt{x}} G(Y)$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} G(Y) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} Y + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} Y \psi'$$

et $\left[u_y = \frac{1}{2\sqrt{x}} (-Y + Y\psi') \right]$

$$\Rightarrow \left[G(Y) = \frac{1}{2} (-Y + Y\psi') \right]$$

14. On exprime tous les termes en ψ et Y

$$\begin{aligned} u_x \partial_x u_x &= F \underbrace{\partial_Y F}_{\downarrow} \frac{\partial Y}{\partial x} \\ &= F F' \left(-\frac{1}{2x} Y \right) = \psi' \psi'' \left(-\frac{1}{2x} Y \right) \end{aligned}$$

$$u_y \partial_y u_x = \frac{1}{2\sqrt{x}} (-Y + Y\psi') \partial_Y F \frac{\partial Y}{\partial y}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (-Y + Y\psi') \psi'' \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x} (-Y + Y\psi') \psi''$$

$$\begin{aligned} \text{Somme} &= \frac{1}{2x} \left(-\cancel{\psi' \psi''} Y - \psi \psi'' + Y \cancel{\psi' \psi''} \right) \\ &\quad \uparrow \text{s'annule.} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2x} \psi \psi''$$

Le terme visqueux.

(13)

$$\partial_{yy} u_x = \frac{1}{x} \partial_{yy}^2 u_x$$

$$= \frac{1}{x} F'' = \frac{1}{x} \psi'''$$

15 Si on suppose que $u_x \partial_x u_x + u_y \partial_y u_y = \partial_{yy} u_x$
alors on obtient

$$- \frac{1}{2x} \psi \psi'' = \frac{1}{x} \psi'''$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2\psi''' + \psi\psi'' = 0}$$

les a

$$u_x|_{y=0} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\psi'|_{y=0} = 0}$$

$$u_y|_{y=0} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} (-\psi + \psi\psi')|_{y=0} = 0$$

avec $\psi'|_{y=0} = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{\psi|_{y=0} = 0}$$

$$u_x|_{y \rightarrow +\infty} = 1 \Leftrightarrow \boxed{\psi'|_{y \rightarrow +\infty} = 1}$$

de problème aux conditions aux-limites de Blasius. Trouver $\psi(\eta) \rightarrow 0$.

(14)

$$2\psi''' + \psi\psi'' = 0$$

$$\begin{cases} \psi|_{\eta=0} = 0 \\ \psi'|_{\eta=0} = 0 \\ \psi'|_{\eta \rightarrow \infty} = 1 \end{cases}$$

D. Solution numérique : Blasius - ipynb.

→ méthode de shooting (à connaître si cela vous intéresse)

→ Pb à condition initiale + optimisation.

On résout le pb comme un pb à conditions initiales avec

$$\begin{cases} \psi|_{\eta=0} = 0 \\ \psi'|_{\eta=0} = 0 \\ \psi''|_{\eta=0} = \varepsilon \end{cases}$$

On intègre numériquement
sur $\eta = 0 \rightarrow +\infty$.

↳ l'optimisation varie ε pour avoir $\psi'|_{\eta \rightarrow \infty} \approx 1$



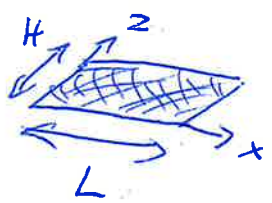
SHOOTING: trouver le bon ε qui permet d'atteindre le but ($\eta \rightarrow \infty$)

E. Force de traînée.

L'écoulement sous une force visqueuse sur la plaque. Formule :

$$F_v = H \int_0^L \eta \left(\cancel{\partial_x u_y} + \partial_y u_x \right) \Big|_{y=0} dx$$

logue



⚠ Ici tout est dimensionné

$$\rightarrow x = \frac{U}{\nu} \tilde{x} \quad \tilde{x} \in [0, L]$$

$$\rightarrow y = \frac{U}{\nu} \tilde{y}$$

$$\rightarrow u_x = U \tilde{u}_x = U F(y)$$

$$\partial_y u_x = U F' \frac{\partial y}{\partial \tilde{y}} = \frac{U F'}{\sqrt{x}} = \frac{U \psi''}{\sqrt{x}}$$

Alors

$$F_v = H \eta U \int_0^{\frac{UL}{\nu}} \psi'' \Big|_{y=0} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$\psi'' \Big|_{y=0} \approx \frac{1}{3}$
adimension.

$$\approx \frac{H \eta U}{3} \left[\frac{\sqrt{x}}{(1/2)} \right]_0^{\frac{UL}{\nu}} = \frac{2}{3} H \eta U \sqrt{\frac{UL}{\nu}}$$

5. Sat

$$F_r \approx \frac{2}{3} H g v^{1/2} U^{3/2} L^{1/2}$$

$\underbrace{v^{1/2} U^{3/2}}_{\text{exposant } \frac{3}{2}}$

4. Changement de référence Galiléenne.
On déplace une plaque à vitesse U . Il faut opposer cette force F_r .



Marche bien en régime de couche limite laminaire.

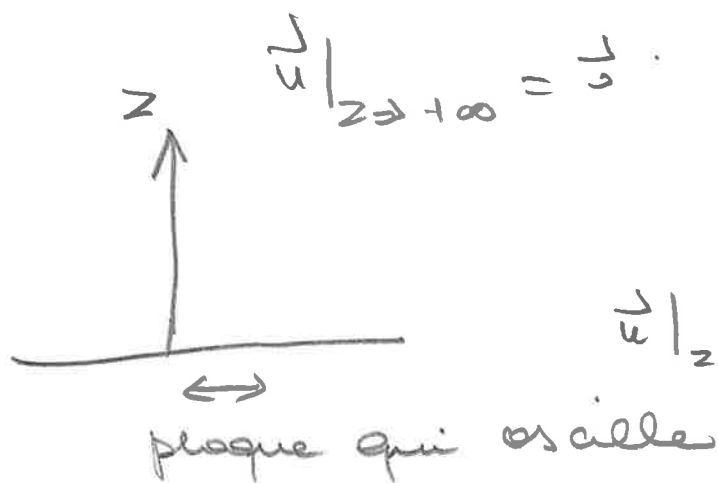


Désolé pour ce corrigé moins propre que d'habitude. Il a été rédigé sur un trajet de TGV.

5.1 Couche limite de Stokes.

(17)

L'énoncé contient une erreur. Il faut mieux résoudre le pb. avec un mur qui bouge et un écoulement au repos à l'infini.



$$\vec{u}|_{z=0} = (U e^{i\omega t} + \text{c.c.}) \vec{e}_x$$

pas besoin

$$\underline{1.} \quad g \partial_t u_x + g u_x \partial_x u_x = - \cancel{\partial_x p} + \eta \partial_{zz}^2 u_x.$$

avec $\nu = \eta/g$

$$\Rightarrow \left[\partial_t u_x = \nu \partial_{zz}^2 u_x \right.$$

eq. de diffusion

CL: $u_x|_{z=0} = U e^{i\omega t} + \text{c.c.}$

$$u_x|_{z \rightarrow +\infty} = 0.$$

2. En régime permanent. (après un transitoire initial)

3.

$$u_x(z, t) = v(z) e^{i\omega t} + \text{c.c.}$$

l'équation pour $v(z)$

(18)

$$i\omega v(z) = \mu \partial_{zz}^2 v(z).$$

$$\Leftrightarrow v'' - \frac{i\omega}{\nu} v = 0$$

$$v(z) = A_+ e^{kz} + A_- e^{-kz}$$

avec

$$k = \sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) \underbrace{\sqrt{\frac{\omega}{\nu}}}_{\delta^{-1}}$$

On peut remarquer que

$$\delta = \sqrt{\frac{\nu}{\omega}} \text{ est une échelle spatiale}$$

= épaisseur de la couche limite.

Alors la solution qui décroît vers 0 à $z \rightarrow +\infty$ sera celle $\sim e^{-kz}$. On fixe donc $A_+ = 0$.

$$v(z) = A_- e^{-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \frac{z}{\delta}}$$

CL en $z=0$

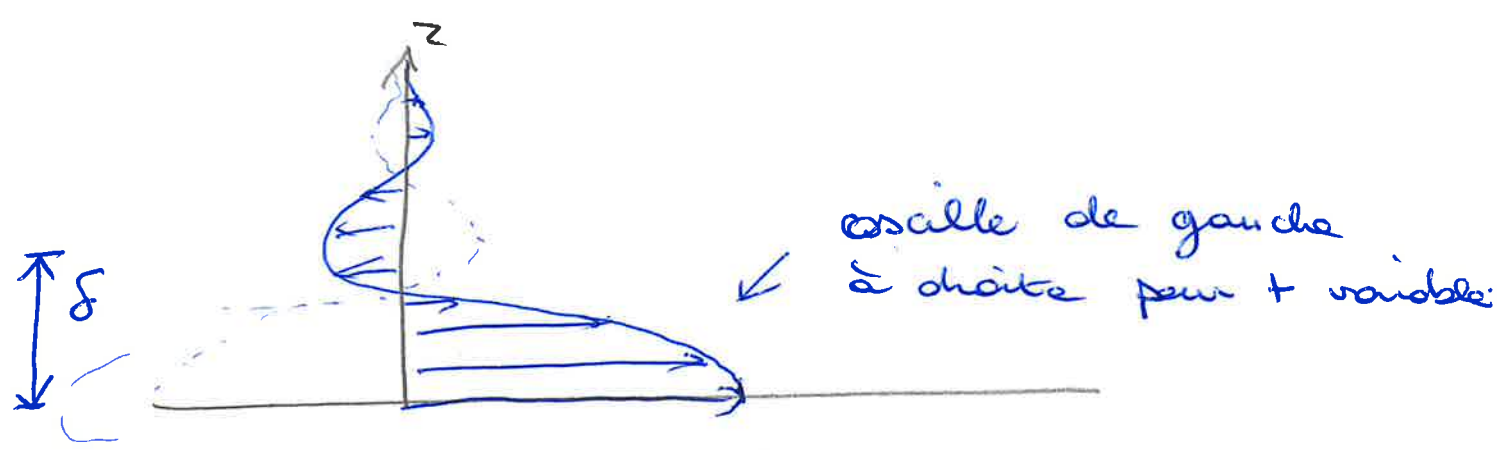
$$v(0) = U \Rightarrow A_- = U$$

La solution est :

$$u_x(z,t) = U \cdot e^{-\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \frac{z}{\delta}} e^{i\omega t} + c.c.$$

$$= U e^{-\frac{z}{\sqrt{2}\delta}} e^{i\left(\omega t - \frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right)} + c.c.$$

$$= 2U \underbrace{e^{-\frac{z}{\sqrt{2}\delta}}}_{\substack{\text{décroissance} \\ \text{exp selon} \\ z}} \underbrace{\cos\left(\omega t - \frac{z}{\sqrt{2}\delta}\right)}_{\substack{\text{déphasage selon } z}}$$



Le mouvement imposé par la plaque pénètre sur une distance d'ordre δ , dans le fluide

4. Effet de peau

ondes
EM
fréquence ω .

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{\sigma \mu \omega}}$$

ici pas de champ

σ : conductivité
 μ : perméabilité

