

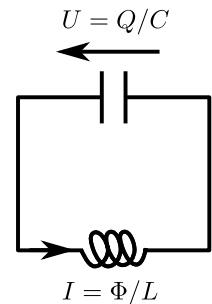
## Circuits quantiques

### Exercice 1 : L'oscillateur LC quantique

Un circuit LC est composé d'une bobine d'inductance  $L$  en parallèle avec un condensateur de capacité  $C$ . Un traitement classique de ce problème nous montre qu'il se comporte comme un oscillateur harmonique. En effet si je définis la charge  $Q$  aux bornes du condensateur et le flux  $\Phi$  dans la bobine alors ces deux variables obéissent aux équations

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\Phi}{LC} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{Q}{LC} = 0$$

qui sont bien celles d'un oscillateur harmonique de fréquence caractéristique  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ . Si la température du circuit est suffisamment basse ( $k_B T \ll \hbar \omega_0$ ), il est alors nécessaire de faire un traitement quantique du circuit.



**1.1.** Rappeler l'énergie du condensateur en fonction de  $Q$  puis celle de la bobine en fonction de  $\Phi$ . En déduire, grâce au principe de correspondance, l'Hamiltonien  $\hat{H}_0$  du circuit total.

**1.2.** Montrer, grâce au théorème d'Ehrenfest généralisé, que le courant  $I$  dans la bobine s'écrit

$$I = \frac{1}{2i\hbar L} \langle \hat{\Phi}[\hat{\Phi}, \hat{Q}] + [\hat{\Phi}, \hat{Q}]\hat{\Phi} \rangle.$$

En déduire que, pour retrouver la relation classique  $I = \Phi/L$ , on a nécessairement  $[\hat{\Phi}, \hat{Q}] = i\hbar$ .

**1.3.** On introduit les opérateurs d'échelle

$$\hat{a} = \frac{\hat{\Phi}}{\sqrt{2\hbar\omega_0 L}} + i\frac{\hat{Q}}{\sqrt{2\hbar\omega_0 C}} \quad \text{et} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{\Phi}}{\sqrt{2\hbar\omega_0 L}} - i\frac{\hat{Q}}{\sqrt{2\hbar\omega_0 C}}.$$

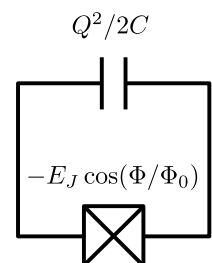
Calculer  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$  et en déduire que  $\hat{H}_0 = \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$ . Représenter le spectre d'énergie du circuit.

**1.4.** On peut exciter un circuit LC en utilisant une source de tension classique à la pulsation  $\omega_0$ , mais il est très difficile d'effectuer un "bit-flip" parfait entre l'état  $|0\rangle$  et  $|1\rangle$ . Pourquoi à votre avis ?

**1.5.** Comment faudrait-il modifier le spectre pour contourner ce problème ?

### Exercice 2 : Le qubit supraconducteur

Des géants de l'industrie tels IBM, Google et Microsoft ont récemment investi dans les circuits quantiques afin d'exploiter les spécificités de la mécanique quantique - la superposition d'état et l'intrication - pour développer de nouvelles technologies. Leur brique de base est le qubit supraconducteur dont l'état quantique, par exemple  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ , permet de stocker un bit d'information.



**2.1.** Quel est l'avantage évident d'utiliser un supraconducteur pour fabriquer un circuit quantique ?

**2.2.** Afin de réaliser un qubit, on ajoute une "anharmonicité" au circuit LC en remplaçant la bobine par un composant appelé jonction Josephson dont l'Hamiltonien est donnée par

$$\hat{H}_J = -E_J \cos(\hat{\Phi}/\Phi_0)$$

où  $E_J > 0$  est une constante et  $\Phi_0 = \hbar/2e$  est le quantum de flux. Si  $\Phi \ll \Phi_0$ , expliquer pourquoi, en première approximation, cette jonction peut être vue comme une simple inductance  $L_J = \Phi_0^2/E_J$ .

**2.3.** Montrer qu'à l'ordre  $\hat{\Phi}^4$  l'Hamiltonien total du circuit devient à une constante près

$$\hat{H} = \hbar\omega_0(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2) + \hat{W} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = 1/\sqrt{L_J C} \quad \text{et} \quad \hat{W} = \frac{E_J}{4!} \left( \frac{\hat{\Phi}}{\Phi_0} \right)^4$$

**2.4.** En utilisant la théorie des perturbations, donner, au premier ordre en  $\hat{W}$ , la correction  $\delta E_n$  en énergie pour l'état  $|n\rangle$ . Pour éviter les calculs fastidieux, on développera d'abord  $\hat{\Phi}^2|n\rangle \propto (\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2|n\rangle$ . Rappel:  $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$  et  $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ .

**2.5.** Représenter qualitativement la nouvelle échelle des niveaux d'énergie. Justifier alors pourquoi il est raisonnable d'écrire l'Hamiltonien du qubit sous la forme  $\hat{H}_{qb} = \frac{\hbar\Omega}{2}(|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|)$ .

### Exercice 3 : Cohérence et décohérence d'un qubit

La différence entre un bit classique et un qubit est que l'on peut préparer ce dernier dans une superposition d'état. En pratique, un tel état est malheureusement fragile et perd rapidement son caractère quantique, c'est ce qu'on appelle la décohérence.

**3.1.** On considère tout d'abord un qubit parfaitement isolé du monde extérieur préparé dans l'état  $|\psi\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$  et obéissant à l'Hamiltonien  $\hat{H}_{qb}$ . Donner son évolution  $|\psi(t)\rangle$ .

**3.2.** En utilisant le projecteur  $\Pi_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi|$ , calculer la probabilité  $\mathcal{P}_{|\psi\rangle}(t)$  de mesurer le qubit dans un état  $|\psi\rangle$  au bout d'un temps  $t$ . Pourquoi parle-t-on d'oscillations cohérentes ?

**3.3.** On prend maintenant en compte l'environnement du circuit que l'on décrit dans un espace de Hilbert  $\mathcal{E}$ . Soit une base d'état propre  $\{|\epsilon_n\rangle\}$ , son état  $|\mathcal{E}\rangle$  se décompose alors de la manière suivante

$$|\mathcal{E}\rangle = \sum_{n=0}^N c_n |\epsilon_n\rangle.$$

L'environnement obéissant à l'Hamiltonien  $\hat{H}_{\mathcal{E}} = \sum_{n=0}^N \epsilon_n |\epsilon_n\rangle\langle\epsilon_n|$ , donner son évolution  $|\mathcal{E}(t)\rangle$ .

**3.4.** L'interaction entre le qubit et l'environnement peut prendre des formes très diverses selon les détails microscopiques du problème. Ici, à titre d'illustration, on considèrera l'Hamiltonien d'interaction

$$\hat{H}_{int} = - \sum_{n=0}^N \frac{\delta_n}{2} (|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|) \otimes |\epsilon_n\rangle\langle\epsilon_n|$$

Donner les états propres et énergies propres de l'Hamiltonien total  $\hat{H} = \hat{H}_{qb} + \hat{H}_{\mathcal{E}} + \hat{H}_{int}$ .

**3.5.** À  $t = 0$  le système est dans l'état  $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\mathcal{E}\rangle$ . Montrer que l'on peut écrire son évolution sous la forme  $|\Psi(t)\rangle = (|0\rangle \otimes |\mathcal{E}_0(t)\rangle + |1\rangle \otimes |\mathcal{E}_1(t)\rangle)/\sqrt{2}$  avec

$$|\mathcal{E}_0(t)\rangle = e^{i\frac{\Omega t}{2}} \sum_{n=0}^N c_n e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon_n - \frac{\delta_n}{2})t} |\epsilon_n\rangle \quad \text{et} \quad |\mathcal{E}_1(t)\rangle = e^{-i\frac{\Omega t}{2}} \sum_{n=0}^N c_n e^{-\frac{i}{\hbar}(\epsilon_n + \frac{\delta_n}{2})t} |\epsilon_n\rangle$$

**3.6.** En utilisant le projecteur  $\Pi_{|\psi\rangle} \otimes \hat{I}$ , donner la probabilité  $\mathcal{P}_{|\psi\rangle}(t)$  de mesurer le qubit dans un état  $|\psi\rangle$  au bout d'un temps  $t$  en fonction de  $r(t) = \langle\mathcal{E}_0(t)|\mathcal{E}_1(t)\rangle$ .

**3.7.** Ayant  $N \gg 1$ , on suppose que dans l'état  $|\mathcal{E}\rangle$  les  $\delta_n$  ont une distribution aléatoire gaussienne de largeur  $\hbar/\tau$  où  $\tau$  est le temps typique d'interaction entre le qubit et l'environnement. On a alors

$$r(t) = e^{-i\Omega t} \sum_{n=0}^N |c_n|^2 e^{-i\delta_n t} \approx \frac{\tau e^{-i\Omega t}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\delta\tau}{\hbar})^2} e^{-i\frac{\delta t}{\hbar}} d\delta$$

Calculer  $r(t)$  et tracer qualitativement  $\mathcal{P}_{|\psi\rangle}(t)$ . Pourquoi appelle-t-on  $r(t)$  "facteur de décohérence" ?

**3.8.** Sur quelle échelle de temps toute trace de l'état initiale a-t-elle été perdue et pourquoi l'appelle-t-on temps de cohérence ? Où est partie l'information ?