Corrigé

I. Le jet d'eau

1. En absence de viscosité

$$p|_{\Sigma} = p_0 \quad \text{avec } \Sigma \text{ la surface du jet}$$

Si on suppose que $p = p(s)$ avec s l'abscisse curviligne alors on a

$$p(s) = p_0$$

sur la surface. La pression est donc constante dans tout le jet car p_0 ne dépend pas de s.

2. Euler pour $\vec{u}$ et $p = p_0$.

$$\rho(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = \cancel{-\vec{\nabla}p}^{\,0} - \rho g \vec{e}_z$$

3. On propose $\vec{u} = u(s)\vec{t}(s)$

$$\cancel{\rho}\, u(s)\frac{d}{ds}\left(u(s)\vec{t}(s)\right) = -\cancel{\rho}\, g\vec{e}_z$$

$$\Leftrightarrow \left(u(s)\frac{du(s)}{ds}\right)\vec{t} + u^2(s)\frac{d\vec{t}}{ds} = -g\vec{e}_z$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{du^2(s)}{ds}\vec{t} - K u^2(s)\vec{n} = -g\vec{e}_z$$

On projette selon $\vec{t}$ et $\vec{n}$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{du^2(s)}{ds^2} = -g\left(\vec{e}_z\cdot\vec{t}\right) \\[2ex] -Ku^2(s) = -g\left(\vec{e}_z\cdot\vec{n}\right) \end{cases}$$

4. On remplace dans

$$\underbrace{\kappa}_{\frac{-h''}{(1+h'^2)^{3/2}}} u^2(s) = g(\vec{e}_z \cdot \underbrace{\vec{n}}_{\frac{-h'\vec{e}_x + \vec{e}_z}{(1+h'^2)^{1/2}}})$$

Donne

$$-h'' u^2 = g(1+h'^2)$$

soit

$$u^2 = -g\frac{(1+h'^2)}{h''}$$

coquille [illegible]

5. On remplace cette expression de u^2 dans (6)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(+\cancel{g}\frac{(1+h'^2)}{h''}\right) = +\cancel{g}(\vec{e}_z \cdot \underbrace{\vec{t}}_{\frac{\vec{e}_x + h'\vec{e}_z}{(1+h'^2)^{1/2}}})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1+h'^2}{h''}\right) = \frac{h'}{(1+h'^2)^{1/2}}$$

Avec

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{(1+h'^2)^{1/2}}\frac{d}{dx}$$

on simplifie

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1+h'^2}{h''}\right) = h'$$

6. Evaluer le membre de gauche

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1+h'^2}{h''}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2h'h''}{h''} - \frac{(1+h'^2)}{(h'')^2}h'''\right)$$

Donne dans l'éq. diff.

$$\cancel{h'} - \frac{(1+h'^2)}{2(h'')^2} h''' = \cancel{h'}$$

Soit

$$\frac{(1+h')^2}{2(h'')^2} h''' = 0$$

Si $h'' \neq 0$ alors il faut que

$$h''' = 0$$

Cette équation indique que $h(x)$ sera un polynôme arbitraire d'ordre 2 en x. $\Rightarrow$ h est une parabole

7. Intégration

$$h(x) = Ax^2 + Bx + C$$

En $x=0$ on a

$$\left.\begin{array}{l} h(0)=0 \\ h'(0)=0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} C=0 \\ B=0. \end{array}$$

Le jet est donc

$$h(x) = Ax^2$$

8. $$k = \frac{-h''}{(1+h'^2)^{3/2}} = \frac{-2A}{(1+(2Ax)^2)^{3/2}}$$

On utilise (7)

$$u^2 \frac{2A}{(1+(2Ax)^2)^{3/2}} = \frac{-g}{(1+(2Ax)^2)^{1/2}}$$

Donne

$$u^2 = -\frac{g}{2A}(1+(2Ax)^2)$$

9. en $x=0$, $u=u_0$ donc

$$u_0^2 = -\frac{g}{2A} \Leftrightarrow A = -\frac{g}{2u_0^2}$$

La solution

$$h(x) = -\frac{g}{2u_0^2} x^2$$

$$u(x) = u_0 \left(1 + \frac{g^2 x^2}{u_0^4}\right)^{1/2}$$

10. Loi de Bernoulli : sur une ligne de courant on veut

$$\rho \frac{u^2}{2} + p + \rho g h = C$$

Test ici

$$\frac{\rho}{2} u_0^2 \left(1 + \cancel{\frac{g^2 x^2}{u_0^2}}\right) + p_0 + \rho g \cancel{\left(-\frac{g}{2u_0^2} x^2\right)} = C$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{\rho}{2} u_0^2 + p_0 = C \right.$$

indép de x.

La loi de Bernoulli est donc vérifiée.

⚠ Ici l'écoulement $\vec{u} = u(x)\vec{t}$ n'est pas exactement incompressible, donc à priori Bernoulli pourrait être mis à défaut.

11. Le débit est conservé

$$u_0 \pi R_0^2 = u(x) \pi R^2(x)$$

$$\Leftrightarrow R(x) = R_0 \left(\frac{u_0}{u(x)}\right)^{1/2}$$

Donc

$$R(x) = R_0 \left(1 + \frac{g^2 x^2}{u_0^4}\right)^{-1/4}$$

le rayon diminue progressivement ds le jet.

12. En variables lagrangiennes on a pour $p = p_0$.

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u} \\ \cancel{\rho} \frac{d\vec{u}}{dt} = -\cancel{\rho} g \vec{e}_z \end{cases} \quad (\text{pas de forces de pression})$$

Les particules de fluides se déplacent comme des masses ponctuelles, soumises à leur poids.

$\Rightarrow$ trajectoire parabolique

$$\begin{cases} x(t) = u_0 t \\ z(t) = -g\frac{t^2}{2} \\ u_x(t) = u_0 \\ u_z(t) = -gt \end{cases} \rightarrow \quad t = \frac{x}{u_0}$$

En éliminant t on trouve

$$z(x) = -\frac{g x^2}{2u_0^2} = h$$

et

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_z^2} = \left(u_0^2 + \frac{g^2 x^2}{u_0^2}\right)^{1/2}$$

Les m̂ résultats avec bien moins de calculs. Cette simplification est une conséquence de l'absence de forces de pression ds le jet

$\rightarrow$ les particules fluides n'interagissent pas !

13. On peut dans l'exercice remplacer.

$$z = h(x) \longrightarrow z = h(r)$$

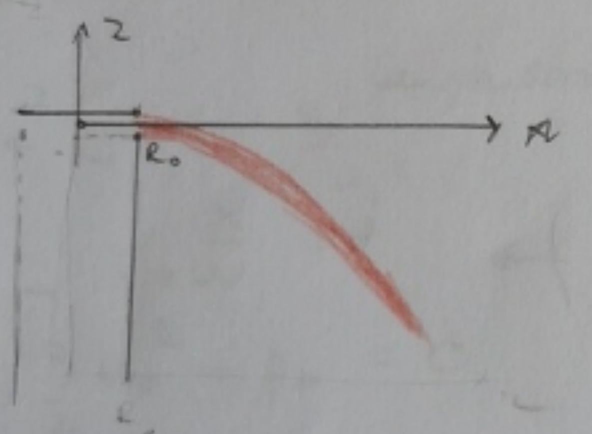
$$\vec{e}_x \longrightarrow \vec{e}_r$$

$$\frac{d}{ds} = \frac{dx}{ds}\frac{d}{dx} \longrightarrow \frac{d}{ds} = \frac{dr}{ds}\frac{d}{dr}$$

mais rien ne changera la forme des eqs 6-7.
En géométrie cylindrique, on a donc également

$$h'''(r) = 0 \iff h(r) = Ar^2 + Br + C$$

Ici la condition au limite est modifiée



$$h(R_0) = 0$$

$$h'(R_0) = 0$$

$$u(R_0) = U$$

La forme de la nappe sera.

$$h(r) = A(r - R_0)^2$$

et le coeff A est comme avant $A = \frac{-g}{2U_0^2}$

Donc

$$h(r) = -\frac{g(r-R_0)^2}{2U_0^2}$$

II. Air hockey

A. Puck à l'équilibre

1. On admet que $F_p = f(\eta, V, R, H)$

$$[F_p] = \frac{ML}{T^2}$$

$$[\eta] = \frac{M}{LT} \qquad [R] = L$$

$$[H] = L$$

$$[V] = \frac{L}{T}$$

Il y a 5 grandeurs physiques et 3 dimensions physique. Le problème dépend de 2 nbrs sans dimension.

$$\Pi_1 = \frac{H}{R} \qquad \Pi_2 = \frac{F_p}{\eta V R}$$

et

$$\Pi_2 = \Phi(\Pi_1) \iff \frac{F_p}{\eta V R} = \Phi\left(\frac{H}{R}\right)$$

2. Par déf l'écoulement est stationnaire. Il y a 2 hypothèses supplémentaires nécessaires.

(géométrie contrainte) (inertie négligeable)

(I) $\frac{H}{R} \ll 1$ et (II) $Re = \frac{UH}{\nu} \ll \frac{R}{H}$

Reynolds

viscosité cinématique $\nu = \frac{\eta}{\rho}$

Ici U est l'échelle de vitesse typique selon r.
On peut estimer

$$U \sim \frac{R}{H} V \qquad (\text{sort de } \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0).$$

et ainsi réécrire

(II) $\frac{VH}{\nu} \ll 1$

3. Eq (11) indique que $p = p(r)$ ne dépend pas de z. Ceci nous permet d'intégrer (10) selon z.

$$u_r = \frac{1}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) z^2 + Az + B.$$

En haut et en bas la vitesse radiale s'annule

$$u_r|_{z=0} = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0$$

$$u_r|_{z=H} = 0 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) H$$

Donc

$$\left| u_r = \frac{1}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \underbrace{z(z-H)}_{\text{profil parabolique}} \right.$$

4. En coordonnées cylindriques

$$\vec{\nabla}.\vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

donne

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)\right)}_{f \text{ de } r.} \frac{z(z-H)}{2\eta}$$

Intégration

$$u_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)\frac{1}{2\eta}\left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^2 H}{2}\right] + C$$

On fixe la constante d'intégration C en exprimant

$$u_z|_{z=0} = V \quad \rightarrow \text{la table souffle.}$$

Donne $C = V$ et donc

$$u_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)\frac{1}{2\eta}\left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^2 H}{2}\right] + V \qquad (*)$$

5. On exprime la CL en haut

$$u_z\big|_{z=H} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)\frac{1}{2\eta}\underbrace{\left[\frac{H^3}{3}-\frac{H^3}{2}\right]}_{-\frac{H^3}{6}} + V$$

Donne

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) = -\underbrace{\frac{12\eta V}{H^3}}_{f(\eta, V, H)}$$

6. On intègre cette éq. en 2 temps

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) = -\frac{12\eta V}{H^3}\, r$$

$$\Leftrightarrow \quad r\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{12\eta V}{H^3}\frac{r^2}{2} + D$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{12\eta V}{H^3}\frac{r}{2} + \frac{D}{r}$$

$$\Leftrightarrow \quad p = -\frac{12\eta V}{H^3}\frac{r^2}{4} + D\ln r + E$$

A l'axe $r=0$ p est régulier $\Rightarrow D = 0$
En $r = R$ la pression vaut celle de l'air ambiant p_0.

$$p_0 = -\frac{12\eta V}{H^3}\frac{R^2}{4} + E$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{3\eta V}{H^3}\left(R^2 - r^2\right) + p_0$$

7. On revient en arrière pour remplacer ce p ds les profils de u_r et u_z.

$$u_r = \frac{1}{2\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) z(z-H)$$

$$= \frac{1}{2\eta}\left(-\frac{6\eta V r}{H^3}\right) z(z-H)$$

$$= -3V\frac{rz(z-H)}{H^3}$$

soit

$$u_r = 3V\frac{rz(H-z)}{H^3} > 0$$

Pour u_z on sait que $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) = -\frac{12\eta V}{H^3}$

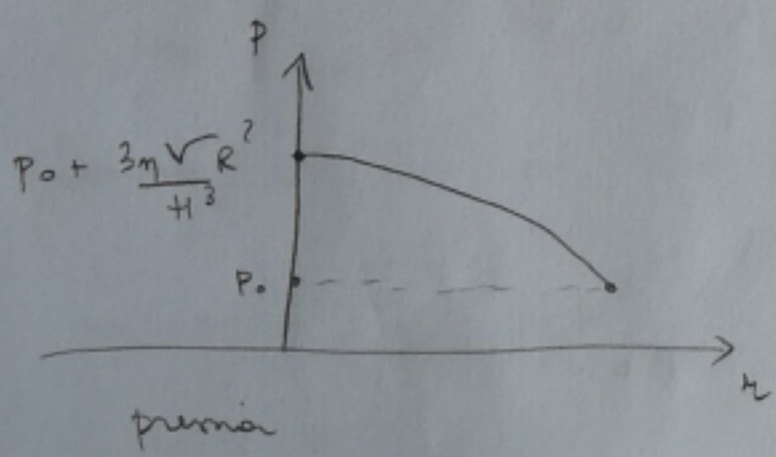
Donc $(*) \Rightarrow$

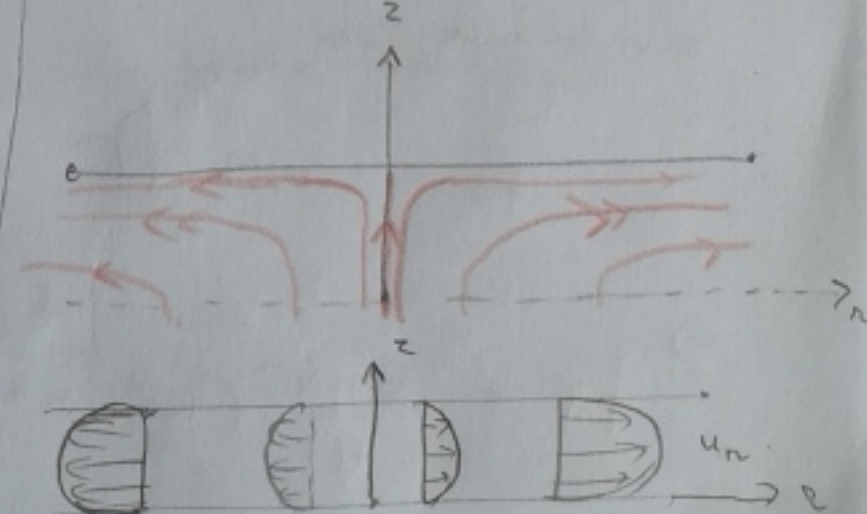
$$u_z = \frac{12\eta V}{H^3}\frac{1}{2\eta}\left[\frac{z^3}{3} - \frac{z^2 H}{2}\right] + V$$

soit

$$u_z = V\left[1 + \frac{2z^3}{H^3} - \frac{3z^2}{H^2}\right]$$

Schema





8. La force qui s'exerce sur le puck

$$\vec{F}_p = \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \left(p_0 + \frac{3\eta V}{H^3}(R^2 - r^2)\right) r\,dr \quad \vec{e}_z$$

$$- p_0 \pi R^2 \vec{e}_z$$

$$= \frac{6\pi\eta V}{H^3} \int_0^R (R^2 - r^2)\, r\,dr \; \vec{e}_z$$

$$= \frac{6\pi\eta V}{H^3}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right]\vec{e}_z$$

$$= \frac{3\pi\eta V R^4}{2 H^3}\vec{e}_z$$

On retrouve pour $F_p = \|\vec{F}_p\|$

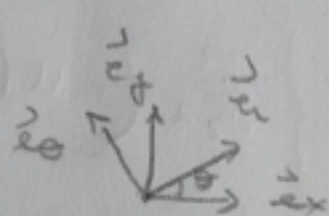
$$\frac{F_p}{\eta V R} = \frac{3\pi R^3}{2 H^3}$$

bien de la forme (9).

9. Les forces exercées par la contrainte visqueuse sont radiales. Par symétrie la résultante de ces forces de contraintes s'annulent sur le disque

B. Puck en mouvement

10. En $z = 0$



$$\vec{u}|_{z=0} = -U\vec{e}_x + V\vec{e}_z$$

Avec $\vec{e}_x = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta$

$$\begin{cases} u_r|_{z=0} = -U\cos\theta \\ u_\theta|_{z=0} = +U\sin\theta \\ u_z|_{z=0} = V \end{cases}$$

11. Selon l'énoncé : écoulement nouveau + Couette.

$$\vec{u} = \left(\underbrace{3V\frac{rz(H-z)}{H^3}\,\vec{e_r} + V\left(1+\frac{2z^3}{H^3}-\frac{3z^2}{H^2}\right)\vec{e_z}}_{\text{précédent}} \right)$$

repérand

$$\underbrace{-U\left(\frac{H-z}{H}\right)\vec{e_x}}_{\text{Couette}}$$

$$= \left(-U\left(\frac{H-z}{H}\right)\cos\theta\,\vec{e_r} + U\left(\frac{H-z}{H}\right)\sin\theta\,\vec{e_\theta}\right.$$

On voit que

$$\begin{cases} \vec{u}|_{z=0} = V\vec{e_z} - U\vec{e_x} \\ \vec{u}|_{z=H} = 0. \end{cases}$$

L'écoulement de Couette satisfait le modèle de lubrification.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial r} = \eta\dfrac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} & = 0 \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} = \eta\dfrac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} & = 0 \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 & = 0 \end{cases}$$

Car
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\left(-U\left(\dfrac{H-z}{H}\right)\cos\theta\right) = 0. \\ \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\left(+U\left(\dfrac{H-z}{H}\right)\sin\theta\right) = 0 \end{cases}$$

donnent.

et n'affectent donc pas la pression.

12 Ceci se voit également en remplaçant

$$u_r = 3V r z \frac{(H-z)}{H^3} - U\left(\frac{H-z}{H}\right)\cos\theta$$

dans eq. (10), ça donne.

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \eta\left(-\frac{6Vr}{H^3}\right)$$

$$\Rightarrow \quad p = p_0 + \frac{3\eta V}{H^3}(R^2 - r^2)$$

comme avant.

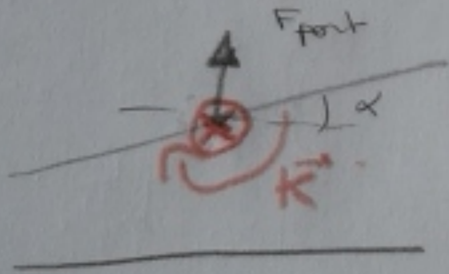
13. L'écoulement d'équilibre ne contribue pas, l'écoulement de Couette exerce une contrainte constante sur chaque portion du puck.

$$d\vec{F}_r = \underbrace{-\eta\frac{U}{H}}_{-\eta\frac{\partial u_x^{\text{Couette}}}{\partial z}}\vec{e}_x\, dS.$$

La force de frottement.

$$\vec{F}_r = -\frac{\eta U}{H}\pi R^2\,\vec{e}_x$$

14. Si le puck est incliné il apparaître une force de portance $\sim U$ et un couple supplémentaire

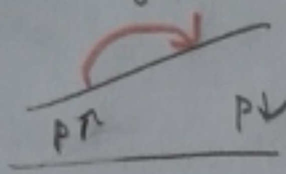


On s'attend à que

$$F_{port} \sim \alpha U$$

Et que le couple tendra à remettre le puck à l'horizontal.

Cette dernière est possible car la pression sera plus grande dans la zone amincie.



Corrigé rédigé par W. Herreman
le 3/6/2020