EXAMEN D'

OPTIQUE QUANTIQUE

2020-2021

Documents interdits – calculatrice interdite

sauf une feuille A4 recto-verso

Exercice 1

Barème non contractuel : 5 points

Cet exercice comporte une série de questions indépendantes entre elles. La réponse (avec justification !) à chacune d'entre elles ne comportera que quelques lignes.

---

1. Soit $\hat{a}$ l'opérateur annihilation d'un mode $(\vec{k}, \lambda)$ et $\{|n\rangle\}_n$ les états de Fock de ce mode.
   (a) Que valent $\hat{a}|n\rangle$ et $\hat{a}^\dagger|n\rangle$?
   (b) Définissez les opérateurs quadratures $\hat{U}$ et $\hat{V}$.
   (c) Calculez valeur moyenne et écart-type des opérateurs quadratures pour l'état $|\Psi\rangle = (|\alpha\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$ où $|\alpha\rangle$ est un état cohérent.
2. Donnez une matrice de passage licite d'une séparatrice 20/80.
3. Donnez l'expression générale d'un opérateur champ magnétique polarisé linéairement suivant l'axe y.
4. Qu'est ce que le bruit de grenaille ? ; quel état quantique a un bruit égal à celui-ci ?
5. Donnez un exemple de matrice densité d'un mélange statistique. En quoi une telle matrice différe-t-elle d'une matrice densité d'un état pur ?

Exercice 2 - Inégalité de Bell

Barème non contractuel : 15 points

La partie 2 utilise principalement les résultats de la question 7 dont une solution partielle est donnée.

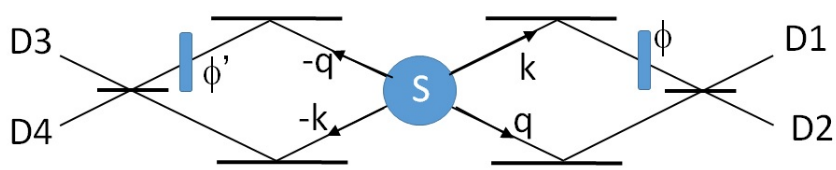
La partie 3 est indépendante des deux premières.

1 Calculs préliminaires

On considère une source S émettant de la lumière dans 4 modes. Dans un premier temps, on va considérer qu'elle émet des photons dans l'état

$$|\Psi_B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger + e^{i\chi} \hat{a}_q^\dagger \hat{a}_{-q}^\dagger \right) |0\rangle$$

où $\hat{a}_i$ est un opérateur annihilation d'un photon de vecteur d'onde $i = k, -k, q$ ou $-q$ (tous les photons ont même polarisation).



Cet état se propage suivant la figure ci-dessus. Par exemple la partie de l'état de vecteur d'onde k est réfléchie par un miroir, passe à travers une lame de phase avant d'être mélangée avec la partie de vecteur d'onde q sur une séparatrice 50/50. On négligera dans la suite tout effet des miroirs. En particulier on ne tiendra pas compte d'éventuels déphasage et on continuera à à noter $\hat{a}_k^\dagger|0\rangle$ l'état après réflexion sur le miroir par exemple.

Sur chacune des voies de sortie des deux séparatrices 50/50 sont disposés des détecteurs de photons D_i avec $i = 1, 2, 3$ et 4. On considère des séparatrices dont la matrice de transfert est réelle.

Sur les voies d'entrées k et $-q$ se trouvent des lames ajoutant respectivement un déphasage de ϕ et ϕ' réglable.

1. Ecrivez $\hat{a}'_k$ opérateur annihilation après la lame de phase ϕ en fonction de cette phase et de $\hat{a}_k$. Faites de même pour $\hat{a}'_{-q}$.
2. La séparatrice de droite est telle que $\hat{a}_1 = (\hat{a}'_k + \hat{a}_q)/\sqrt{2}$. Donnez alors une expression licite de $\hat{a}_2$ en fonction de $\hat{a}'_k$ et $\hat{a}_q$.
3. Donnez de même l'expression de $\hat{a}_4$ sachant que $\hat{a}_3 = (\hat{a}'_{-q} + \hat{a}_{-k})/\sqrt{2}$.
4. On note $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. Montrez que l'opérateur $\hat{N}_1 + \hat{N}_2$ est indépendant de ϕ.
5. Quels sont les résultats possibles et quelles sont les probabilités correspondantes d'une mesure de $\hat{N}_1 + \hat{N}_2$ avec l'état $|\Psi_B\rangle$?
6. En utilisant l'état $|\Psi_B\rangle$, calculez les valeurs moyennes de $\hat{N}_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.
7. Calculez de même $\langle \hat{N}_i \hat{N}_j \rangle$ avec $i = 1, 2$ et $j = 3, 4$. Montrez en particulier que $\langle \hat{N}_1 \hat{N}_3 \rangle = \dfrac{1}{2} \cos^2(\dfrac{\phi - \phi' + \chi}{2})$.
8. A quelle quantité physique sont reliées ces valeurs moyennes ?

2 Paramètre de Bell

On définit le corrélateur E par :

$$E(\phi, \phi') = \frac{\langle \hat{N}_1 \hat{N}_3 \rangle + \langle \hat{N}_2 \hat{N}_4 \rangle - \langle \hat{N}_1 \hat{N}_4 \rangle - \langle \hat{N}_2 \hat{N}_4 \rangle}{\langle \hat{N}_1 \hat{N}_3 \rangle + \langle \hat{N}_2 \hat{N}_4 \rangle + \langle \hat{N}_1 \hat{N}_4 \rangle + \langle \hat{N}_2 \hat{N}_4 \rangle}$$

1. En utilisant les résultats de la question 7 de la partie 1, calculez $E(\phi, \phi')$.
2. On prend $\phi_a = \pi/4$, $\phi_b = -\pi/4$. Trouvez un couplet (ϕ'_a, ϕ'_b) tel que $E(\phi_a, \phi'_a) + E(\phi_a, \phi'_b) + E(\phi_b, \phi'_a) - E(\phi_b, \phi'_b) = 2\sqrt{2}$.
3. En pratique, les détecteurs ont une efficacité de détection η inférieure à 100%.
   (a) Comment modélise-t-on ce phénomène ?
   (b) Donnez alors la nouvelle expression de $\langle \hat{N}_i \rangle$ en fonction de η.
   (c) Faites de même pour $\langle \hat{N}_i \hat{N}_j \rangle$.
   (d) En déduire la nouvelle expression de $E(\phi, \phi')$. Conclusion ?

3 Inégalité de Bell

On va voir que la valeur de $2\sqrt{2}$ est impossible quelque soit le modèle classique utilisé.

On cherche tout d'abord une interprétation classique de l'expérience de la partie 1. Le fait qu'à chaque répétition de l'expérience, D_1 ou D_2 « clique », tout comme D_3 ou D_4 mais que ce n'est pas forcément les mêmes qui cliquent à la répétition suivante, il est alors logique d'utiliser une loi de probabilité pour comprendre les résultats. En mécanique classique, cette loi de probabilité est une propriété de la source et doit permettre de calculer **toutes** les mesures sur les détecteurs. On va montrer que quelque soit cette loi, une inégalité pourra être écrite.

On notant $\overline{N_i}(\phi)$ la valeur moyenne sur beaucoup de répétitions du nombre de coups détectés sur D_i $(i = 1, 2)$ pour un déphasage ϕ, $\bar{N}_j(\phi')$ celle sur D_j $(j = 3, 4)$ pour un déphasage ϕ'. On a donc

$$\overline{N_i}(\phi) = \int d\lambda \, p_\lambda \, N_i(\lambda, \phi)$$

$$\overline{N_j}(\phi') = \int d\lambda \, p_\lambda \, N_j(\lambda, \phi')$$

où p_λ est la loi de probabilité avec évidemment $\int d\lambda \, p_\lambda = 1$; λ est appelé « variable cachée » dans la théorie de Bell.

Mais on doit également être capable de calculer la valeur moyenne du produit $N_i N_j$ par la formule

$$\overline{N_i N_j}(\phi, \phi') = \int d\lambda \, p_\lambda \, N_i(\lambda, \phi) N_j(\lambda, \phi')$$

On va admettre le résultat mathématiques suivant :

$$\forall (x_a, x_b, y_a, y_b) \in [0, 1], -1 \leq x_a y_a + x_a y_b + x_b y_a - x_b y_b - x_a - y_a \leq 0 \qquad (1)$$

Notant que $N_i(\lambda, \phi)/[N_1(\lambda, \phi) + N_2(\lambda, \phi)]$, $i = 1, 2$ est bien entre 0 et 1 et expression similaire pour 3 et 4, on peut écrire une inégalité de type (1).

De plus, en utilisant le résultat 4 de la partie 1 (que l'on peut aussi montrer en électromagnétisme), le terme $N_1(\lambda, \phi) + N_2(\lambda, \phi)$ tout comme $N_3(\lambda, \phi') + N_3(\lambda, \phi')$ ne dépend pas de ϕ (resp. ϕ'). On peut donc supprimer ce paramètre dans les dénominateurs précédents et on notera ces sommes par $N_{12}(\lambda)$ et $N_{34}(\lambda)$.

On considère deux angles quelconques pour ϕ et ϕ' notés $(\phi_a, \phi_b, \phi'_a, \phi'_b)$. Les nombres x_n (respectivement y_n) se réfèrent aux angles ϕ_n (resp. ϕ'_n) pour $n = a, b$.

---

1. Écrivez l'inégalité (1) pour $x_a = N_1(\lambda, \phi_a)/N_{12}(\lambda)$, $x_b = N_1(\lambda, \phi_b)/N_{12}(\lambda)$, $y_a = N_3(\lambda, \phi'_a)/N_{34}(\lambda)$ et $y_b = N_3(\lambda, \phi'_b)/N_{34}(\lambda)$.
2. Dans l'inégalité précédente on avait associé x à N_1 et y à N_3, mais on peut aussi avoir les couples $(x, y) = (N_2, N_4), (N_1, N_4)$ et (N_2, N_3). Écrivez ces 3 autres inégalités.
3. Montrez qu'une combinaison linéaire des 4 équations précédentes permet d'éliminer les termes linéaires de l'inégalité (1).
4. On définit $e(\lambda, \phi, \phi') = \dfrac{[N_1(\lambda, \phi) - N_2(\lambda, \phi)] \times [N_3(\lambda, \phi') - N_4(\lambda, \phi')]}{N_{12}(\lambda)N_{34}(\lambda)}$
   Développez $e(\lambda, \phi_a, \phi'_a) + e(\lambda, \phi_a, \phi'_b) + e(\lambda, \phi_b, \phi'_a) - e(\lambda, \phi_b, \phi'_b)$.
5. En utilisant les résultats des deux questions précédentes, montrez alors
   $$-2 \leq e(\lambda, \phi_a, \phi'_a) + e(\lambda, \phi_a, \phi'_b) + e(\lambda, \phi_b, \phi'_a) - e(\lambda, \phi_b, \phi'_b) \leq 2$$
6. En déduire
   $$\forall (\phi_a, \phi_b, \phi'_a, \phi'_b), -2 \leq E(\phi_a, \phi'_a) + E(\phi_a, \phi'_b) + E(\phi_b, \phi'_a) - E(\phi_b, \phi'_b) \leq 2$$
   avec $E(\phi, \phi') = \dfrac{\overline{N_1N_3}(\phi, \phi') + \overline{N_2N_4}(\phi, \phi') - \overline{N_1N_4}(\phi, \phi') - \overline{N_2N_3}(\phi, \phi')}{\overline{N_1N_3}(\phi, \phi') + \overline{N_2N_4}(\phi, \phi') + \overline{N_1N_4}(\phi, \phi') + \overline{N_2N_3}(\phi, \phi')}$.

   L'inégalité de Bell écrite ici est sous la forme donnée par Clauser, Horne, Shimony et Holt. Une seule expérience avec un seul jeu d'angles $(\phi_a, \phi_b, \phi'_a, \phi'_b)$ donnant des résultats incompatibles avec cette inégalité démontre que la physique classique n'est pas adaptée pour décrire la « Nature ». Ce paramètre E étant équivalent à celui défini dans la partie 2, une source S produisant l'état $|\Psi_B\rangle$ viole donc cette inégalité.