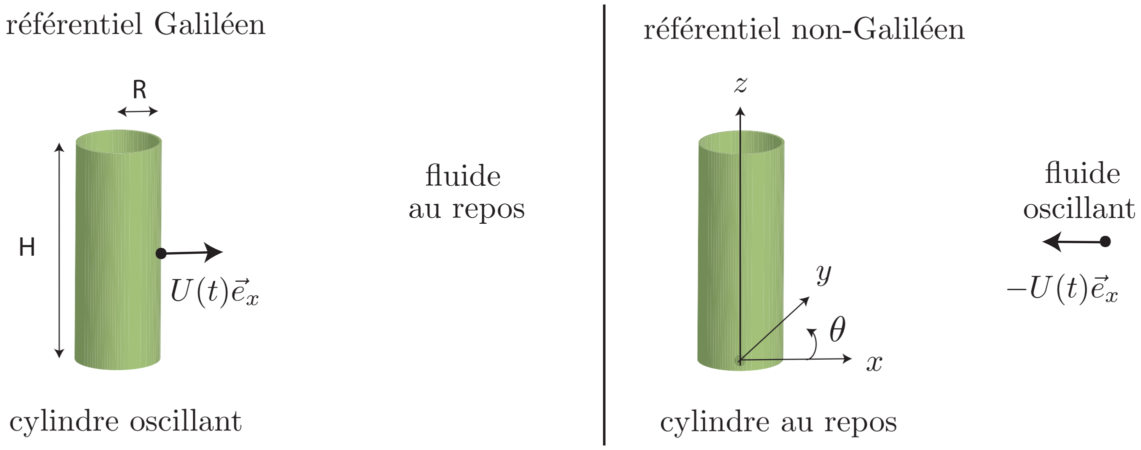
Examen de Mécanique des fluides

Lundi 29 octobre 2018, durée 3h

sans documents, ni calculatrice

I. Écoulement autour d'un cylindre en mouvement

On considère l'écoulement d'un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ, autour d'un cylindre imperméable de rayon R et de hauteur infinie ($H \to +\infty$). Ce cylindre avance à vitesse $U(t)\vec{e_x}$ instationnaire dans un fluide initialement au repos (figure à gauche). Dans ce problème, on souhaite calculer la résultante des forces de pression sur ce cylindre en mouvement.



Afin de simplifier la mise en équation du problème on décrit le mouvement dans le référentiel non-Galiléen attaché au cylindre (à droite sur la figure). Dans ce référentiel, le cylindre lui-même est au repos et l'équation d'Euler prend la forme

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right) + \rho\frac{dU}{dt}\vec{e}_x = -\nabla p \qquad (1)$$

Il y a un terme en plus dans le membre de gauche suite à l'accélération du référentiel. Dans ce référentiel, l'écoulement tend vers $\vec{u} \longrightarrow -U(t)\vec{e_x}$ pour $r \to \infty$ où r, θ, z seront les coordonnées cylindriques centrés sur l'axe du cylindre. La pesanteur ne joue aucun rôle ici et on peut donc l'ignorer.

1. L'écoulement est supposé potentiel est on note ϕ le potentiel de vitesse. Montrer que ce potentiel doit satisfaire l'équation de Laplace.
2. Donner la condition aux limites pour le potentiel sur la surface du cylindre. Spécifier aussi la forme du potentiel $\phi \to \Phi$ dans la limite $r \to +\infty$.
3. Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, on peut trouver

$$\phi = A(t)\, r^m \cos(m\theta) + B(t)\, r^{-m} \cos(m\theta),$$

comme solutions non-axisymétriques de l'équation de Laplace. Spécifier la valeur du nombre m dans ce problème, puis calculer $A(t)$ et $B(t)$ à l'aide des conditions aux limites sur la surface du cylindre et à l'infini.

4. Déterminer les composantes u_r,u_θ du vecteur vitesse.

5. Montrer comment l'équation d'Euler (1) mène à l'équation de Bernoulli instationnaire :

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t} + p + \frac{1}{2}\rho||\nabla\phi||^2 - \rho\frac{d\Phi}{dt} = C(t),$$

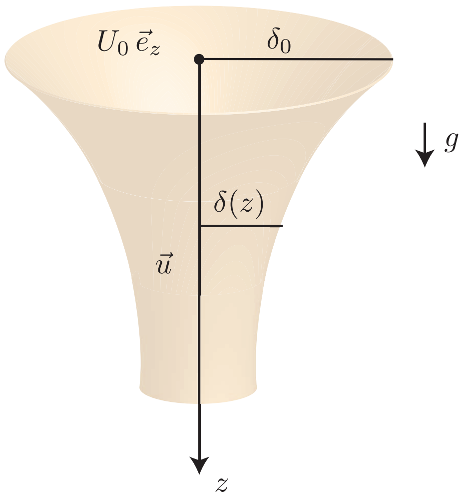
6. $C(t)$ est une fonction du temps que l'on fixera en raisonnant à $r \to +\infty$ où la pression est constante et égale à P. Déterminer ensuite la pression dans le fluide et à la surface du cylindre.
7. Calculer la résultante des forces de pression du fluide sur le cylindre (on notera H la hauteur du cylindre). Montrer que cette force s'exprime comme

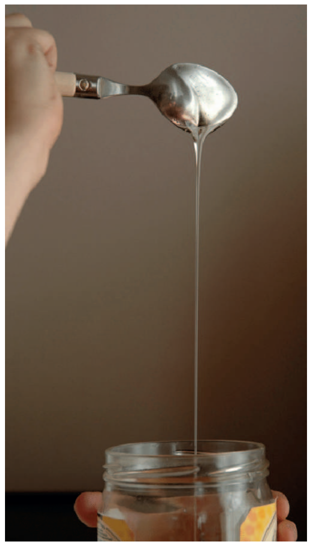
$$\vec{F} = -m_a\frac{dU}{dt}\vec{e}_x$$

   On parle d'un effet de masse ajoutée m_a. Est-ce que vous remarquez quelque chose de particulier dans l'expression pour cette masse ajoutée ?
8. Discuter ce résultat dans le contexte du paradoxe de d'Alembert.
9. A.N. : On considère un homme qui se met à courir dans l'eau et accélère à 1 m s^{-2}. On suppose qu'il est immergé sur une hauteur de 1 m et on assimile ses deux jambes à des cylindres de rayon 7 cm de masse volumique égale à celle de l'eau. Quelle est la force que l'eau exerce sur sa jambe ?

II. Filaments visqueux

Lorsqu'on laisse couler un fluide visqueux incompressible (miel) d'une cuillère sous l'effet de la gravité, il se forme un fin filament de forme axisymétrique. Dans cet exercice on s'intéresse à l'écoulement stationnaire dans ce filament et on trouve sa forme.





On note η la viscosité dynamique du fluide, ρ sa densité, g l'accélération gravitationnelle, p_{atm} la pression atmosphérique et γ la tension de surface. La surface libre du filament se place à l'endroit $r = \delta(z)$ en coordonnées cylindriques. A la hauteur $z = 0$, l'écoulement vertical est constant et égale à $u_z(0) = U_0\,\vec{e}_z$ et le rayon vaut $\delta(0) = \delta_0$. On choisit un référentiel avec **l'axe z dirigé vers le bas**.

A. Modèle de lubrification

Dans un premier temps, on approche l'équation de Navier-Stokes par le modèle de lubrification

$$\frac{\partial p}{\partial r} \approx 0 \tag{2a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} \approx \frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) + \rho g \tag{2b}$$

Attention ici au signe du terme gravitationnel qui est inhabituel.

1. Exprimer les inégalités supposées qui ont permis cette approximation à l'aide des variables $|u_z|$, δ, ρ, η, ν et $|\delta'| = |d\delta/dz|$.
2. Lorsqu'on exprime la condition dynamique à la surface libre et sous les approximations du modèle de lubrification on arrive sur deux conditions

$$p|_{r=\delta(z)} \approx p_{atm} + \frac{\gamma}{\delta} \quad , \quad \left.\frac{\partial u_z}{\partial r}\right|_{r=\delta(z)} \approx 0$$

   Discuter l'origine de cette condition dynamique (BONUS : quels termes ont été ignorés ici ?)
3. On obtient la forme du filament ainsi que la vitesse verticale.
   (a) Intégrer l'équation (2a) et utiliser la condition limite dynamique afin de relier la pression p à la forme du filament.
   (b) Injecter cette pression dans l'équation (2b) et la intégrer radialement. Montrer que la condition dynamique et la régularité à l'axe ne peuvent être satisfaites seulement si

$$u_z = u_z(z)$$

   est indépendant de r et si

$$\frac{1}{\lambda_c^2} + \frac{\delta'}{\delta^2} = 0$$

   avec λ_c la longueur capillaire à spécifier.
   (c) Calculer la forme du filament utilisant la condition $\delta(0) = \delta_0$ pour le rayon du filament en $z = 0$.
   (d) Calculer le débit volumique Q traversant un plan $z = Cst$ et un plan $z = 0$. Trouver la vitesse $u_z(z)$ en fonction de $U_0, \delta_0, \lambda_c, z$ en raisonnant sur la conservation du débit.
4. Faire un schéma qui montre la forme du filament ainsi que quelques vecteurs vitesse et quelques lignes de courant.

B. Modèles améliorés

Dans la balance (2b), nous avons fait l'hypothèse que la partie dominante dans le terme visqueux était due aux gradients radiaux. Ceci nous a permis d'obtenir un profil $u_z = u_z(z)$ sans structure radiale, ce qui est pertinent mais implique également que

$$\frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) = 0 \quad \text{et donc} \quad \partial p/\partial z \approx \rho g$$

La pression est en équilibre hydrostatique et cause directement la forme du filament à travers la loi de Young-Laplace. Ceci n'est pas très réaliste pour de faibles tensions de surface γ que l'on rencontre en pratique. Dans toute la suite on étudie ce qui se passe si on **ignore la tension de surface**. Notre nouveau modèle garde un profil d'écoulement en bouchon $u_z = u_z(z)$ mais remplace le modele (2) par

$$\frac{\partial p}{\partial r} \approx 0 \tag{3a}$$

$$\rho u_z \frac{du_z}{dz} + \frac{\partial p}{\partial z} \approx \eta \frac{d^2 u_z}{dz^2} + \rho g \tag{3b}$$

Dans la balance en z on inclue un terme inertiel ainsi qu'un terme visqueux précédemment ignorés.

1. Expliquer pourquoi le gradient de pression ne joue plus aucun rôle dans ce problème.
2. Montrer que l'on doit satisfaire la loi de conservation

$$\frac{\rho u_z^2}{2} - \rho g z - \eta \frac{du_z}{dz} = C \tag{4}$$

3. A l'aide de la conservation de la masse exprimés en coordonnées cylindriques, montrer que

$$u_r(r, z) = -\frac{r}{2}\frac{du_z}{dz}$$

4. Expliquer comment la condition limite en haut

$$u_z(0) = U_0 \quad , \quad u_r(r, 0) = 0,$$

   permet dans (4) de fixer la valuer de C.
5. **Régime visqueux :**
   Dans ce régime, on ignore tous les termes inertiels (d'ordre ρU_0^2) dans la balance (4)
   (a) Intégrer l'équation différentielle restante selon z , utilisant $u_z(0) = U_0$ comme condition aux limites.
   (b) Déduire le profil du filament $\delta(z)$ en raisonnant sur la conservation du débit.
   (c) Le résultat est un peu étonnant ici, pourquoi ? Faire apparaitre une longueur critique λ_c
   (d) Faire un schéma. Comparer avec le schéma de la première partie et commenter les principales différences .
   (e) Imaginer un endroit dans le filament visqueux où cette forme spécifique vous semble plus au moins adéquate.
6. **Régime inertiel :**
   Dans ce régime, on ignore le terme visqueux.
   (a) Combiner ce qui reste de (4) avec la loi qui exprime la conservation du débit Q afin de trouver u_z.
   (b) Trouver la forme du filet $\delta(z)$ dans ce régime et identifier un comportement en loi de puisssance $\delta(z) \sim z^{-\alpha}$.
   (c) Faire un schéma et comparer avec les schémas précédents
7. Expliquer qualitativement comment un filament de miel changera de forme en descendant selon z.

Divergence en coordonnées cylindriques :

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$