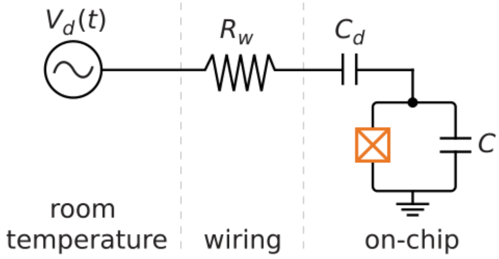
**ARTEQ : Quantum Hardware - Cours 5 - Qubits supraconducteurs II**
Jean-Damien Pillet - jean-damien.pillet@polytechnique.edu

# Du qubit supraconducteur au processeur quantique

Ces exercices sont inspirés de la review "A quantum engineer's guide to superconducting qubits" que l'on peut trouver sur le lien https://doi.org/10.1063/1.5089550 ou https://arxiv.org/abs/1904.06560. Nous allons voir comment des qubits supraconducteurs sont couplés, manipulés et lus dans un processeur quantique.

## Exercice 1 : Manipulation d'un qubit supraconducteur

Contrôler l'état d'un qubit, c'est-à-dire de transformer son état arbitrairement entre deux points de la sphère de Bloch, est essentielle à la mise en œuvre d'un ordinateur quantique. Cela s'effectue par le biais de transformations unitaires (portes), qui correspondent à des rotations autour des trois axes dans la représentation de la sphère de Bloch, réalisées en pratique avec des impulsions micro-onde.




**1.1.** Considérons un transmon composé d'un SQUID plutôt qu'une jonction Josephson unique et dont la fréquence est alors ajustable. Proposez un protocole pour effectuer une porte $Z_\pi$.

**1.2.** Pour effectuer des portes $X_\theta$ ou $Y_\theta$, on utilise une source de tension micro-onde, comme sur le schéma. Expliquer pourquoi on branche cette source à travers une capacité de couplage $C_d$ plutôt que directement sur le transmon. Remarque: Ici, "$d$" fait référence à "drive".

**1.3.** Pour ce circuit, on peut écrire l'Hamitonien du système total

$$\hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C_\Sigma} - E_J \cos\frac{\hat{\Phi}}{\Phi_0} + \frac{C_d}{C_\Sigma} V_d(t)\hat{Q}$$

où $C_\Sigma = C + C_d$ et $\hat{Q}$ est la charge totale aux bornes des condensateurs (*i.e.* $Q_C - Q_d$). Montrer que l'on retrouve bien des lois classiques correctes à partir de $\hat{H}$.

**1.4.** Ecrire le terme de couplage avec la source en fonction des opérateurs d'échelle $\hat{a}$ et $\hat{a}^\dagger$

$$\hat{a} = \frac{\hat{\Phi}}{\sqrt{2\hbar\omega_0 L_J}} + i\frac{\hat{Q}}{\sqrt{2\hbar\omega_0 C_\Sigma}} \qquad \text{et} \qquad \hat{a}^\dagger = \frac{\hat{\Phi}}{\sqrt{2\hbar\omega_0 L_J}} - i\frac{\hat{Q}}{\sqrt{2\hbar\omega_0 C_\Sigma}}$$

où $\omega_0 = 1/\sqrt{L_J C_\Sigma}$. On pourra introduire la notation $Q_{zpf} = \sqrt{\hbar/2Z_{LC}}$ où $Z_{LC} = \sqrt{L_J/C}$ que l'on commentera.

**1.5.** En se restreignant au sous-espace $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ du qubit de fréquence $\omega_q$, écrire $\hat{H}$ avec les matrices de Pauli

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quel autre système physique obéit à un tel Hamiltonien ?

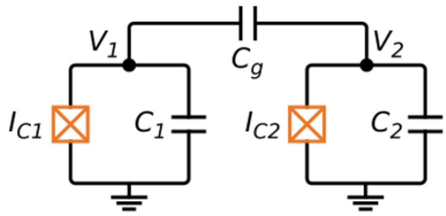
**1.6.** On veut élucider l'effet d'une tension $V_d(t) = V_0 \sin(\omega_d t + \phi)$. On se place dans le référentiel tournant à la fréquence $\omega_q$. Un état arbitraire $|\psi\rangle$ devient alors $e^{-i\frac{\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z t}|\psi\rangle$. A quel Hamiltonien effectif obéit ce nouvel état ? On pourra faire le calcul pour $\omega_d = \omega_q$ avec $\phi = 0$ puis $\pi/2$.

**1.7.** Le qubit est dans l'état $|0\rangle$ à l'instant $t$. Donner son évolution dans la base tournante pour $\phi = 0$.

**1.8.** Calculer alors la probabilité de le mesurer dans l'état $|1\rangle$ en fonction du temps dans le référentiel du laboratoire. Proposer un protocole pour faire un “bit-flip”.

## Exercice 2 : Portes à 2 qubits

Pour générer de l'intrication entre deux qubits supraconducteurs, il est nécessaire de mettre au point une interaction hamiltonienne qui relie les degrés de liberté de ces systèmes individuels. Pour 2 qubits faiblement couplés, on écrira l'Hamiltonien sous la forme $\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_{int}$, où $\hat{H}_1$ et $H_2$ sont les Hamitoniens de 2 transmons et $H_{int}$ leur Hamiltonien d'interaction.




**2.1.** Ecrire l'énergie totale du circuit en fonction de $V_{i=1,2}$ et $\Phi_{i=1,2}$.

**2.2.** Proposer un Hamiltonien décrivant le circuit. En déduire $\hat{H}_{int}$ en fonction de la capacité de couplage $C_g$ et les opérateurs charge $\hat{Q}_1$ et $\hat{Q}_2$. Quel est le terme pertinent dans ce couplage ?

**2.3.** Dans la limite $C_g \ll C_1, C_2$, on pourra supposer que l'on préserve les relations de commutations de deux transmons indépendants $[\hat{\Phi}_1, \hat{Q}_1] = [\hat{\Phi}_2, \hat{Q}_2] = i\hbar$. Réécrire $\hat{H}_{int}$ avec les opérateurs d'échelle

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{\Phi}_1}{\sqrt{2\hbar\omega_1 L_1}} + i\frac{\hat{Q}_1}{\sqrt{2\hbar\omega_1 C_1}} \qquad \text{et} \qquad \hat{a}_2 = \frac{\hat{\Phi}_2}{\sqrt{2\hbar\omega_2 L_2}} + i\frac{\hat{Q}_2}{\sqrt{2\hbar\omega_2 C_2}}.$$

agissant sur les espaces de Hilbert respectifs des 2 transmons $\{|n\rangle_{i=1,2}\}$ où $n$ est entier. On introduit ici $\omega_1$ et $\omega_2$ les fréquences des 2 qubits.

**2.4.** On suppose que la non-linéarité des transmons permet d'ignorer les états $|n \geq 2\rangle_{i=1,2}$. Exprimer alors $\hat{H}_{int}$ puis $\hat{H}$ dans la base $\{|0\rangle_1, |1\rangle_1\} \otimes \{|0\rangle_2, |1\rangle_2\}$ avec les matrices de Pauli

$$\hat{\sigma}_{x,i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_{y,i} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_{z,i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

où $i = 1, 2$.

**2.5.** Diagonaliser $\hat{H}$. On pourra remarquera que les sous-espace $\{|00\rangle\, |11\rangle\}$ et $\{|01\rangle\, |10\rangle\}$ sont stables par $\hat{H}$.

**2.6.** Montrer que l'on peut alors écrire un Hamiltonien d'interaction sous la forme

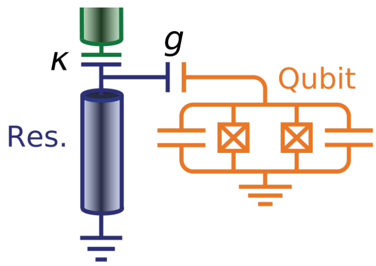
$$\hat{H}_{int} = \hbar g(|01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01|)$$

dans le cas de deux qubits identiques et d'un couplage faible c'est à dire quand $g \ll \omega_{1,2}$.

**2.7.** Ecrire l'opérateur d'évolution associé, puis proposer un protocole pour réaliser les portes $iSWAP$ et $\sqrt{iSWAP}$.

## Exercice 3 : Lecture QND d'un qubit en cavité

La lecture rapide et fiable des qubits est une pierre angulaire importante de tout processeur quantique. La technique de lecture la plus couramment utilisée repose sur une architecture cQED dans laquelle chaque qubit est couplé à un résonateur de lecture. Dans le régime dispersif, c'est-à-dire lorsque le qubit est désaccordé par rapport à la fréquence du résonateur, le qubit induit un décalage de fréquence du résonateur en fonction son état qui peut donc être déduit en interrogeant le résonateur.




**3.1.** En s'inspirant de l'exercice précédent, justifier la forme de l'Hamiltonien suivant

$$\hat{H} = \hbar\omega_r(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) - \frac{\hbar\omega_q}{2}\sigma_z + \hbar g(\hat{a}^\dagger|0\rangle\langle 1| + \hat{a}|1\rangle\langle 0|)$$

**3.2.** Sans calcul, justifier pourquoi le résonateur ne permettrait pas d'effectuer de lecture QND si on avait $\omega_r \approx \omega_q$.

**3.3.** En remarquant que le sous-espace $\{|0, n+1\rangle, |1, n\rangle\}$ est stable par $\hat{H}$, montrer que diagonaliser l'Hamiltonien revient à diagonaliser une matrice $2 \times 2$. Donner ses valeurs propres.

**3.4.** On se place dans la limite dispersive, c'est à dire que l'on a $\Delta = |\omega_q - \omega_r| \gg g$. Montrer que la fréquence de la cavité est donnée par $\omega_r \pm \chi$ selon que le qubit est dans $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. Que vaut $\chi$ ? Construire un Hamiltonien effectif ayant les bonnes valeurs propres.

**3.5.** Pourquoi dit-on que cette mesure est QND ?

**3.6.** Montrer que l'on peut également utiliser le qubit pour mesurer le nombre de photons dans la cavité. Quel critère est selon vous nécessaire pour que cela soit possible ?