Examen mécanique des fluides 2020 - 2021 — Corrigé rédigé par W. HERREMAN

I. Instabilité de Rayleigh – Taylor

1. On suppose $\vec{u} = \vec{\nabla}\phi$. Ainsi $\vec{\nabla}\times\vec{u} = 0 \Rightarrow$ écoulement irrotationnel

Suite à l'incompressibilité

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0 \iff \left[\nabla^2\phi = 0\right.$$

2. Les parois $x=0$, $x=L$ et $z=H$ sont imperméables.

On a donc

$$\vec{u}\cdot\vec{n}\Big|_S = 0$$

sur ces surfaces. Ici

$$\begin{cases} u_x|_{x=0} \\ u_x|_{x=L} = 0 \\ u_z|_{z=H} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \partial_x\phi|_{x=0} = 0 \\ \partial_x\phi|_{x=L} = 0 \\ \partial_z\phi|_{z=H} = 0 \end{cases}$$

3. On propose

$$\phi = A(t)\, f(x) \cosh(k(z-H))$$

comme solution

(a) On vérifie $\partial_z\phi|_{z=H} = 0$?

$$\partial_z\phi = A(t) f(x)\, k \sinh(k(z-H))$$

en $z=H$

$$\partial_z\phi|_{z=H} = A(t) f(x)\, k \underbrace{\sinh(0)}_{=0} = 0$$

OK

(b) On injecte ϕ dans $\nabla^2\phi = 0$

$$A \frac{d^2f}{dx^2}\cosh(k(z-H)) + A k^2 f \cosh(k(z-H)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2f}{dx^2} + k^2 f = 0$$

Ainsi $f(x) = \alpha \sin kx + \beta \cos kx$

On pose les CL en $x=0, L$.

$$\begin{cases} \partial_x \phi|_{x=0} = 0 \\ \partial_x \phi|_{x=L} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_x f|_{x=0} = 0 \\ \partial_x f|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha k \cos 0 - \beta k \cancel{\sin 0}^{0} = 0 & \Rightarrow \alpha = 0 \\ \alpha k \cos kL - \beta k \sin kL = 0 & \Rightarrow \beta \sin kL = 0 \end{cases}$$

La solution $k=0$ est écartée. On ne peut avoir $\alpha=\beta=0$ car sinon $\phi=0$. Ainsi k est tel que

$$\sin kL = 0 \iff \left[k = k_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \right.$$

Le potentiel est donc

$$\phi = A(t) \underbrace{B}_{=1 \text{ sans perte de généralité}} \cos(kx) \cosh(k(z-H)).$$

4. La loi de Bernoulli instationnaire pour les écoulements potentiels

$$\rho \partial_t \phi + \underbrace{\frac{\rho \|\vec{\nabla}\phi\|^2}{2}}_{\text{terme NL ignoré ds la suite}} + p + \rho g z = C$$

$$\left[\begin{aligned} p &\simeq C - \rho g z - \rho \partial_t \phi \\ &= C - \rho g z - \rho \dot{A} \cos(kx) \cosh(k(z-H)) \end{aligned} \right.$$

5. La condition cinématique exprime que la surface libre se déplace comme une surface matérielle = suivant les particules de fluide dans leur déplacement.

Si $f = -z + h(x,t)$ permet de localiser la surface en $f=0$, alors la condition cinématique s'écrit

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{f=0} = 0 \iff \partial_t f + \vec{u}\cdot\vec{\nabla} f \Big|_{f=0} = 0$$

Ici

$$\partial_t f = \partial_t h$$

$$\vec{u}\cdot\vec{\nabla} f = \vec{u}\cdot\left(-\vec{e}_z + \vec{\nabla} h\right) = -u_z + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})h$$

Ainsi la condition cinématique devient

$$\partial_t h + \underbrace{\vec{u}|_{z=h}\cdot\vec{\nabla} h}_{\text{terme NL ignoré}} = \underbrace{u_z|_{z=h}}_{\text{DL en } z=0}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t h \simeq u_z|_{z=0} + \underbrace{h\,\partial_z u_z|_{z=0}}_{\text{terme NL ignoré}} + \dots$$

Soit

$$\left[\partial_t h \simeq u_z|_{z=0}\right. \quad \text{ds une approx linéaire}$$

Ici cette condition devient

$$\partial_t h = \partial_z \phi|_{z=0} = A(t)\cos(kx)\,k\sinh(k(-H))$$
$$= -A(t)\cos(kx)\,k\sinh(kH)$$

Il est en effet possible d'avoir

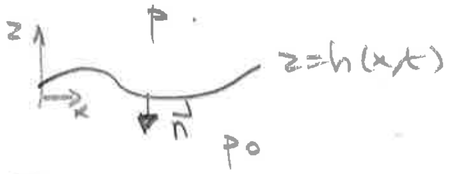
$$h(x,t) = B(t)\cos kx$$

et il faudra donc que

$$\left[\dot{B} = -Ak\sinh(kH)\right.$$

6. La loi de Young-Laplace exige

$$p|_S = p_0 + \gamma \kappa$$



On oriente $\vec{n}$ la normale sortante vers le bas

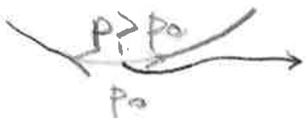
$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|} = \frac{(-\vec{e}_z + \partial_x f\, \vec{e}_x)}{\sqrt{1+(\partial_x f)^2}} \simeq -\vec{e}_z + \partial_x f\, \vec{e}_x$$

si $|\partial_x f| \ll 1$

La courbure

$$\kappa = \vec{\nabla} \cdot \vec{n} \simeq \partial^2_{xx} f\, \vec{e}_x$$

Est-ce que le signe est bon ? On imagine une surface de la forme



$\partial^2_{xx} f > 0$ ici

On s'attend à trouver $p > p_0$ et $p = p_0 + \underbrace{\gamma \partial^2_{xx} h}_{>0} > p_0$ en effet. Le signe est correct

$$\left[p|_{z=h} = p_0 + \gamma \partial^2_{xx} h \right.$$

Avec les profils de p et h

$$C - \rho g B \cos kx - \rho \dot{A} \cos(kx) \cosh(k(z-H))\Big|_{z=h}$$

$\hookrightarrow$ DL en $z=0$

$= \cosh(k(0-H))$

$= \cosh(kH)$

$$= p_0 - \gamma B k^2 \cos kx$$

On fixe $C = p_0$ puis il reste

$$\left[\rho g B + \rho \dot{A} \cosh kH = B \gamma k^2 \right.$$

7. On a 2 éq. diff.

$$\begin{cases} \dot{B} = -Ak\sinh(kH) \\ \left(\frac{\gamma k^2}{\rho} - g\right)B = \dot{A}\cosh(kH) \end{cases}$$

De la première éq.

$$-\frac{\ddot{B}}{k\sinh(kH)} = \dot{A}$$

substitué ds la 2ième éq. donne

$$\left(\frac{\gamma k^2}{\rho} - g\right)B = -\frac{\ddot{B}}{k\tanh(kH)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\ddot{B} + \left(\frac{\gamma k^3}{\rho} - gk\right)\tanh(kH)\,B = 0\right.$$

8. Solutions exponentielles $B \sim e^{\sigma t}$ si

$$\sigma = \pm\sqrt{\left(gk - \frac{\gamma k^3}{\rho}\right)\tanh(kH)}$$

Il existera un mode instable si $Re(\sigma) > 0$. Cela requiert

$$gk - \frac{\gamma k^3}{\rho} > 0$$

Soit

$$k < \underbrace{\sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}}_{\hookrightarrow\, l_c^{-1}}$$

inverse de la longueur capillaire

9. On a vu que $k = k_n = \frac{n\pi}{L}$. Alors

$$\frac{n\pi}{L} < \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}$$

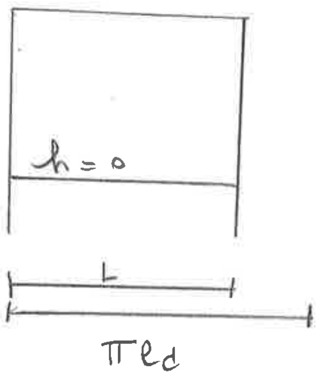
$\Leftrightarrow$

$$L > \underbrace{n\pi\sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}}_{L_{c,n} \,=\, n\pi \,\times\, \text{longueur capillaire}}$$

Pour observer le mode n, il faut que $L > L_{c,n}$

10. Si $L < L_{c,1}$, aucun mode est instable

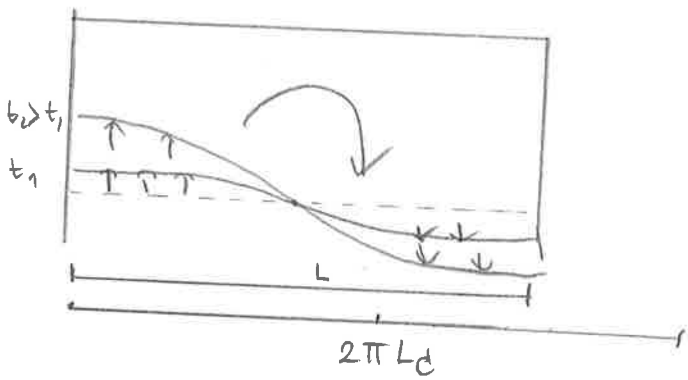
Si $L_{c,1} < L < L_{c,2}$, seul le mode $n=1$ est instable



$L < \pi \ell_d$

STABLE

$h = 0$ reste.



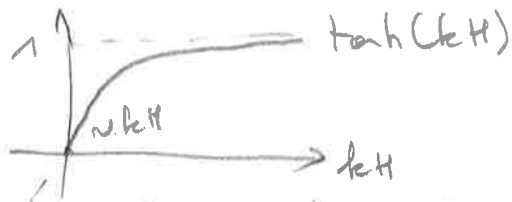
$\pi \ell_c < L < 2\pi \ell_c$

$k = k_1 = \frac{\pi}{L}$ INSTABLE

$h = h_0 e^{\sigma t} \cos \frac{\pi x}{L}$

11. Le taux de croissance est

$$\sigma = \sqrt{\left(gk - \frac{\gamma k^2}{\rho}\right)\underbrace{\tanh(kH)}_{\text{dépendance de } H \text{ ici}}}$$



La situation H plus grand est toujours plus instable

12 - Dans le régime de Stokes stationnaire on aurait dû résoudre

$$\begin{cases} 0 = -\vec{\nabla} p - \rho g \vec{e}_z + \eta \nabla^2 \vec{u} \\ 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \end{cases}$$

avec les CL d'adhérence sur les surfaces solides

$$\vec{u}\big|_{x=0} = \vec{0} \quad , \quad \vec{u}\big|_{x=L} = \vec{0} \quad , \quad \vec{u}\big|_{z=H} = \vec{0}$$

et les CL cinématique et dynamiques linéarisées sur la surface libre $z=h$

ciné : $\partial_t h = u_z\big|_{z=0}$

dyna : $\overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{n}\big|_S = -p_0 \vec{n}$

$$\begin{cases} -p\big|_{z=h} + 2\eta \partial_z u_z\big|_{z=0} = -p_0 \\ \eta(\partial_x u_z + \partial_z u_x)\big|_{z=0} = 0 \end{cases}$$

Problème difficile à résoudre.

II. Roulement à coussin d'air

1. On admet $\frac{F}{L} = f(U, \delta, h, R, \eta)$..

6 grandeurs.

$[\frac{F}{L}] = MT^{-2}$

$[U] = LT^{-1}$

$[\delta] = [h] = [R] = L$

$[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$

3 dim physiques indép (M, L, T)

$\Rightarrow$ 3 nombres sans dim

$$\pi_1 = \frac{F}{\eta U L} \quad , \quad \pi_2 = \frac{\delta}{h} \quad , \quad \pi_3 = \frac{h}{R}$$

Ainsi

$$\frac{F}{\eta U L} = \Phi\left(\frac{\delta}{h}, \frac{h}{R}\right)$$

2. L'équation du cercle décalé du stator

$$(x+\delta)^2 + y^2 = (R+h)^2$$

On remplace $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

$$r^2\cos^2\theta + 2\delta r\cos\theta + \underbrace{\delta^2}_{\text{petit}} + r^2\sin^2\theta = R^2 + 2Rh + \underbrace{h^2}_{\text{petit}}$$

$$\Rightarrow r^2 = R^2 + 2Rh - 2\delta r\cos\theta$$

$$\frac{r}{R} = \sqrt{1 + \underbrace{\frac{2h}{R} - \frac{2\delta r}{R^2}\cos\theta}_{\ll 1}}$$

loi binomiale $(1+a)^n$

DL : $(1+\alpha)^{1/2} = 1 + \frac{\alpha}{2} + o(\alpha^2)$

$$\frac{r}{R} \simeq 1 + \frac{h}{R} - \frac{\delta r}{R^2} \cos\theta$$

soit avec $h << R$ et $\delta << R$.

$$r \simeq R + h - \delta \frac{r}{R} \cos\theta \qquad (r \underset{\text{ici}}{\simeq} R)$$

$$\simeq R + h - \delta \cos\theta$$

3. On a une hypothèse sur le nombre de Reynolds.

$$\frac{\rho U h}{\eta} << \frac{R}{h}$$

Cette hypothèse permet d'ignorer les termes NL devant les termes visqueux.

4. Le modèle qui convient ici est

$$\begin{cases} 0 \simeq -\partial_x P & \text{(direction courte)} \\ 0 \simeq -\partial_y P + \eta \partial^2_{xx} u_y & \text{(direction longue)}. \end{cases}$$

et

$$\partial_x u_x + \partial_y u_y = 0$$

5. Conditions d'adhérence

$u_y|_{x=0} = U$ (vitesse du rotor)

$u_y|_{x=H(y)} = 0$ (au repos)

6. Avec

$\partial_x P = 0 \Rightarrow P = P(y)$ seulement

7. On intègre

$$\partial_y P = \eta \, \partial^2_{xx} u_y$$

deux fois selon x

$$u_y = \frac{\partial_y P}{2\eta} x^2 + Ax + B$$

En $x=0$, $u_y|_{x=0} = U \Rightarrow B = U$

En $x = H(y)$, $u_y|_{x=H(y)} = 0 \Rightarrow A = -\frac{U}{H} - \frac{\partial_y P}{2\eta} H$

Donc

$$\left[u_y = U\left(1 - \frac{x}{H(y)}\right) + \frac{\partial_y P}{2\eta}\left(x^2 - xH(y)\right) \right.$$

8. Débit constant.

$$Q = \int_0^H u_y \, dx$$

$$= U \int_0^H \left(1 - \frac{x}{H}\right) dx + \frac{\partial_y P}{2\eta} \int_0^H \left(x^2 - xH\right) dx$$

$$= U\left(H - \frac{H^2}{2H}\right) + \frac{\partial_y P}{2\eta}\left(\frac{H^3}{3} - \frac{H^3}{2}\right)$$

$$= \frac{UH}{2} - \frac{\partial_y P}{2\eta} \frac{H^3}{6}$$

Ainsi

$$\frac{\partial_y P}{12\eta} H^3 = \frac{UH}{2} - Q$$

$$\Leftrightarrow \left[\partial_y P = \frac{6\eta U}{H^2} - \frac{12\eta Q}{H^3} \right.$$

9. On remplace $H = H(Y) = h - \delta \cos\left(\frac{Y}{R}\right)$ et $Y = R\theta$.
Ainsi

$$\frac{1}{R}\frac{dp}{d\theta} = \frac{6\eta U}{(h-\delta\cos\theta)^2} - \frac{12\eta Q}{(h-\delta\cos\theta)^3}$$

On intègre de $\theta : 0 \to 2\pi$ et on utilise le fait que la pression est 2π-périodique.

$$0 = 6\eta U \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(h-\delta\cos\theta)^2} - 12\eta Q \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(h-\delta\cos\theta)^3}$$

$$\Leftrightarrow \quad Q = \frac{U}{2} \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(h-\delta\cos\theta)^2}}{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(h-\delta\cos\theta)^3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad Q = \frac{Uh}{2} \frac{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1-\varepsilon\cos\theta)^2}}{\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1-\varepsilon\cos\theta)^3}} \qquad \text{avec } \varepsilon = \frac{\delta}{h}$$

en effet

$$Q = \frac{Uh}{2} \frac{I_2(\varepsilon)}{I_3(\varepsilon)}$$

si on définit

$$I_n(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1-\varepsilon\cos\theta)^n}$$

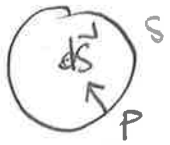
10. On avait

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{6\eta U R}{(h-\delta\cos\theta)^2} - \frac{12\eta Q R}{(h-\delta\cos\theta)^3}$$

On remplace $Q = \frac{Uh}{2} \frac{I_2(\varepsilon)}{I_3(\varepsilon)}$

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{6\eta UR}{h^2}\left[\frac{1}{(1-\varepsilon\cos\theta)^2} - \frac{I_2(\varepsilon)}{I_3(\varepsilon)}\frac{1}{(1-\varepsilon\cos\theta)^3}\right]$$

11.



Force de pression sur rotor

$$\vec{F} = \iint p\, d\vec{S}$$

$$= L\int_0^{2\pi} p(\theta)\,(-\vec{e_r})\,R\,d\theta$$

12. On remplace $\vec{e_r} = \vec{e_x}\cos\theta + \vec{e_y}\sin\theta$ puis on effectue une intégration par partie

$$\vec{F} = -RL\left\{\left[\int_0^{2\pi} p(\theta)\underbrace{\cos\theta\, d\theta}_{d\sin\theta}\right]\vec{e_x} + \left[\int_0^{2\pi} p(\theta)\underbrace{\sin\theta\, d\theta}_{-d\cos\theta}\right]\vec{e_y}\right\}$$

$$= -RL\left\{\left(\underbrace{\cancel{\left[p(\theta)\sin\theta\right]_0^{2\pi}}}_{\text{pério}}{}^{0} - \int_0^{2\pi}\sin\theta\frac{dp}{d\theta}\,d\theta\right)\vec{e_x}\right.$$

$$\left. + \left(-\underbrace{\cancel{\left[p(\theta)\cos\theta\right]_0^{2\pi}}}_{\text{pério}}{}^{0} + \int_0^{2\pi}\cos\theta\frac{dp}{d\theta}\,d\theta\right)\vec{e_y}\right\}$$

Ainsi

$$F_x = RL\int_0^{2\pi}\sin\theta\,\frac{dp}{d\theta}\,d\theta$$

$$F_y = -RL\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\frac{dp}{d\theta}\,d\theta$$

13. La fonction $\frac{dp}{d\theta}$ est paire pour $\theta \to -\theta$ mais $\sin\theta$ est impair. Ainsi $F_x = 0$ forcément.

14. On procède à l'intégration

$$F_y = -RL \int_0^{2\pi} \cos\theta \underbrace{\frac{dp}{d\theta}}_{\hookrightarrow \text{ formule de + haut}} d\theta$$

$$= -RL \frac{6\eta UR}{h^2} \left[\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \, d\theta}{(1-\varepsilon\cos\theta)^2} - \frac{I_2(\varepsilon)}{I_3(\varepsilon)} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \, d\theta}{(1-\varepsilon\cos\theta)^3} \right]$$

$$= \frac{6\eta UR^2 L}{h^2} \left[\frac{I_2(\varepsilon)}{I_3(\varepsilon)} J_3(\varepsilon) - J_2(\varepsilon) \right]$$

avec

$$J_n(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \, d\theta}{(1-\varepsilon\cos\theta)^n}$$

15. On calcule les intégrales ds la limite $\varepsilon \ll 1$

$$I_n = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-\varepsilon\cos\theta)^n} d\theta$$

$$\simeq \int_0^{2\pi} (1 + n\varepsilon\cos\theta) \, d\theta$$

$$\simeq 2\pi$$

$$J_n = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{(1-\varepsilon\cos\theta)^n} d\theta$$

$$\simeq \int_0^{2\pi} \cos\theta \, (1 + n\varepsilon\cos\theta) \, d\theta$$

$$\left[\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \pi \right]$$

$$\simeq \pi n \varepsilon$$

Ainsi la force de portance devient

$$F_y \simeq \frac{6\eta U R^2 L}{h^2}\left(\varepsilon 3\pi - \varepsilon 2\pi\right)$$

$$\simeq \frac{6\pi\eta U R^2 L}{h^2}\,\varepsilon$$

si $\varepsilon \ll 1$.

<u>16.</u> Le couple visqueux exercé sur le cylindre est

$$\vec{K} = -\iint_S R\,\vec{e}_x \times \left(\overline{\overline{\sigma}}^{v} \cdot d\vec{S}\right) \quad \text{avec}$$

$d\vec{S} = -\,dY\,dz\,\vec{e}_x$

$$\Rightarrow \left[\, K_z = +LR\int_0^{2\pi R} \sigma_{YX}^{(v)}\Big|_{X=0} dY \right.$$

<u>17.</u>
$$\sigma_{YX}^{(v)} = \eta\left(\underbrace{\frac{\partial u_X}{\partial Y}}_{\text{ordre } \frac{U h}{R^2}} + \underbrace{\frac{\partial u_Y}{\partial X}}_{\text{ordre } \frac{U}{h}}\right) \simeq \eta\,\frac{\partial u_Y}{\partial X}$$

Ainsi

$$K_z = LR\int_0^{2\pi R} \eta\,\frac{\partial u_Y}{\partial X}\Big|_{X=0} dY$$

18. Le profil de vitesse trouvé plus haut

$$u_y = U\left(1 - \frac{x}{H(y)}\right) + \frac{\partial_y P}{2\eta}\left(x^2 - xH(y)\right)$$

Ainsi

$$\eta\, \partial_x u_y = -\frac{U\eta}{H(y)} + \frac{\partial_y P}{2}\left(2x - H(y)\right)$$

en $x=0$

$$\eta\, \partial_x u_y \Big|_{x=0} = -\frac{U\eta}{H(y)} - \partial_y P \,\frac{H(y)}{2}$$

$$= -\frac{U\eta}{h(1-\varepsilon\cos\theta)} - \frac{1}{R}\frac{dp}{d\theta}\,\frac{h(1-\varepsilon\cos\theta)}{2}$$

remplacé par la formule.

donne

$$\eta\, \partial_x u_y\Big|_{x=0} = -\frac{U\eta}{h(1-\varepsilon\cos\theta)} - \frac{1}{\cancel{R}}\frac{6\eta U R}{h^{\cancel{2}}}\left[\frac{1}{(1-\varepsilon\cos\theta)^{\cancel{2}}} - \frac{I_2}{I_3}\frac{1}{(1-\varepsilon\cos\theta)^{\cancel{3}\,2}}\right] \times \frac{\cancel{h}\,\cancel{(1-\varepsilon\cos\theta)}}{2}$$

$$= +\frac{U\eta}{h}\left[-\frac{1}{(1-\varepsilon\cos\theta)} - \frac{3}{(1-\varepsilon\cos\theta)} + 3\frac{I_2}{I_3}\frac{1}{(1-\varepsilon\cos\theta)^2}\right]$$

$$= -\frac{U\eta}{h}\left[\frac{4}{(1-\varepsilon\cos\theta)} - 3\frac{I_2}{I_3}\frac{1}{(1-\varepsilon\cos\theta)^2}\right]$$

Intégration ($y = R\theta$)

$$K_z = LR^2\left(-\frac{U\eta}{h}\right)\int_0^{2\pi}\left[\frac{4}{1-\varepsilon\cos\theta} - 3\frac{I_2}{I_3}\frac{1}{(1-\varepsilon\cos\theta)^2}\right] d\theta$$

$$K_z = -\frac{U\eta}{h} R^2 L \left(4 I_1(\varepsilon) - 3\frac{I_2^2(\varepsilon)}{I_3(\varepsilon)} \right)$$

aved

$$I_n(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-\varepsilon\cos\theta)^n} d\theta$$

19. On a vu que $I_n(\varepsilon) \simeq 2\pi$ dans la limite $\varepsilon \ll 1$

Ainsi

$$K_z = -2\pi \frac{U\eta R^2 L}{h}$$

constant. Il s'agit du couple exercé par l'écoulement de Couette.

20 Puissance dissipée = puissance fournie à l'équilibre.

$$\mathcal{P} = |K_z|\Omega \qquad (\text{couple} \times \text{vitesse de rotation})$$

$$= 2\pi \frac{\Omega^2 \eta R^3}{h} L$$

Corrigé rédigé le 25/03/2021