

CHAPITRE V

Développement perturbatif Diagrammes de Feynman

Ce chapitre se propose de développer de façon systématique des concepts et des techniques qui ont été introduits dans les trois premiers chapitres : fonction de corrélation et fonction génératrice (I-D.1), transformation de Legendre (I-D.5), développement perturbatif et développement en nombre de boucles (II-D.2, III-D.3 et III-E.3). Les outils utilisés seront la fonctionnelle génératrice et l'intégration gaussienne. Dans plusieurs cas il sera possible d'expliquer la méthode utilisée sur un exemple à une seule variable, dont l'étude préalable permettra de mieux suivre la démonstration générale.

Dans le paragraphe A, nous établissons le théorème de Wick, qui sera à la base du développement perturbatif, comme conséquence de l'intégration gaussienne. Le paragraphe B est consacré au développement perturbatif des fonctions de corrélation $G^{(2)}$ et $G^{(4)}$, et introduit les diagrammes de Feynman : à chaque terme (ou plus exactement à chaque groupement de termes) du développement perturbatif, on fait correspondre un diagramme, et à chaque diagramme correspondent des règles de calcul. Au paragraphe C on étudie la classification des fonctions de corrélation : connexes, une particule irréductibles et vertex propres. La transformation de Legendre est utilisée pour obtenir la fonctionnelle génératrice des vertex propres. Cette fonctionnelle génératrice, qui généralise le potentiel de Gibbs, permettra de préciser au paragraphe D les notions de symétrie brisée et de développement en nombre de boucles. L'évaluation pratique des graphes de Feynman est expliquée au paragraphe E, tandis que des arguments simples, mais riches de conséquences, sont donnés au paragraphe F pour déterminer le comportement des graphes lorsque certains moments tendent vers l'infini (comportement ultraviolet) ou vers zéro (comportement infra-rouge).

J'utiliserai dans ce chapitre le vocabulaire et les notations de la théorie quantique des champs. Ainsi le hamiltonien de Ginzburg-Landau (II.19) sera écrit avec le changement de notations : $r_0 \rightarrow m^2$ et $u_0 \rightarrow g$, où m est une masse et g une constante de couplage. Les vecteurs d'onde seront appelés moments ($\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ avec $\hbar = 1$). Enfin les notations vectorielles seront supprimées pour \mathbf{k} et \mathbf{x} ($\mathbf{k} \rightarrow k$, $\mathbf{x} \rightarrow x$), sauf s'il peut y avoir ambiguïté.

A. THÉORÈME DE WICK ET FONCTIONNELLE GÉNÉRATRICE

Dans ce paragraphe, nous reprendrons en les généralisant des résultats du chapitre I (paragraphe D) et de l'appendice A. Le point essentiel est d'obtenir une expression compacte pour les fonctions de corrélation à N -points $\langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_N) \rangle$ et des règles de calcul pour un hamiltonien gaussien. La méthode peut être expliquée dans le cas d'une seule variable.

A.1. Fonction génératrice pour une seule variable

Soit $P(\varphi)$ la distribution de probabilité d'une variable aléatoire : $P(\varphi) \geq 0$; toutefois on ne suppose pas que $P(\varphi)$ est normalisée : $\int P(\varphi) d\varphi$ n'est pas nécessairement égal à 1.

La *fonction génératrice* $Z(j)$ est définie par :

$$Z(j) = \int d\varphi P(\varphi) e^{j\varphi} ; \quad (1)$$

on suppose implicitement que $P(\varphi)$ décroît suffisamment rapidement à l'infini pour que l'intégrale dans (1) soit convergente. L'intérêt de $Z(j)$ est qu'elle permet d'obtenir par dérivation les moments $\langle \varphi^n \rangle$ de la distribution de probabilité $P(\varphi)$:

$$\langle \varphi^n \rangle = \frac{\int d\varphi \varphi^n P(\varphi)}{\int d\varphi P(\varphi)} = \frac{1}{Z(0)} \left. \frac{\partial^n Z}{\partial j^n} \right|_{j=0} . \quad (2)$$

Inversement $Z(j)/Z(0)$ est donné en fonction des $\langle \varphi^n \rangle$ par :

$$Z(j)/Z(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j^n}{n!} \langle \varphi^n \rangle . \quad (3)$$

Dans le cas d'une distribution de probabilité gaussienne :

$$P(\varphi) = \exp\left(-\frac{1}{2} \varphi \frac{1}{A} \varphi\right) \quad (4)$$

on trouve, en utilisant l'équation (A.9) :

$$Z(j) = Z(0) \exp\left(\frac{1}{2} j A j\right) \quad (5)$$

(remarquez que les rôles de A et A^{-1} ont été échangés) et (l'indice 0 indique une valeur moyenne pour une distribution de probabilité gaussienne) :

$$\begin{aligned} \langle \varphi^{2n} \rangle_0 &= \frac{\partial^{2n}}{\partial j^{2n}} \exp\left(\frac{1}{2} j A j\right) \Big|_{j=0} = \frac{\partial^{2n}}{\partial j^{2n}} \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} (j A j)^n \\ &= \frac{(2n)!}{2^n n!} A^n = (2n-1)!! A^n. \end{aligned} \quad (6)$$

Pour obtenir la deuxième égalité, on a développé l'exponentielle et remarqué qu'un seul des termes du développement peut contribuer, à cause des $2n$ dérivations et de la condition $j=0$; $(2n-1)!! = (2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$. Naturellement, tous les moments impairs sont nuls : $\langle \varphi^{2n+1} \rangle_0 = 0$. L'équation (6) peut être réécrite en fonction du moment d'ordre 2 : $\langle \varphi^2 \rangle_0 = A$

$$\boxed{\langle \varphi^{2n} \rangle_0 = (2n-1)!! \langle \varphi^2 \rangle_0^n} \quad (7)$$

Si $P(\varphi)$ n'est plus gaussien, mais a par exemple la forme :

$$P(\varphi) = \exp\left(-\frac{1}{2A} \varphi^2 + f(\varphi)\right)$$

alors :

$$Z(j) = \int d\varphi \exp\left(-\frac{1}{2A} \varphi^2 + f(\varphi) + j\varphi\right).$$

La fonction génératrice peut être écrite :

$$Z(j) = \exp\left(f\left(\frac{\partial}{\partial j}\right)\right) \int d\varphi \exp\left(-\frac{1}{2A} \varphi^2 + j\varphi\right). \quad (8)$$

Cette égalité s'obtient à partir de :

$$f\left(\frac{\partial}{\partial j}\right) e^{j\varphi} = f(\varphi) e^{j\varphi}$$

que l'on démontre en écrivant un développement de Taylor au voisinage de 0 pour $f\left(\frac{\partial}{\partial j}\right)$.

A.2. Théorème de Wick

La généralisation à N variables des considérations précédentes permet de démontrer un théorème fondamental pour les intégrations gaussiennes, le théorème de Wick. Partons d'une distribution de probabilité gaussienne à N variables :

$$P(\varphi_1, \dots, \varphi_N) = \exp\left(-\frac{1}{2} \varphi^T A^{-1} \varphi\right)$$

où :

$$\varphi^T A^{-1} \varphi = \sum_{i,j} \varphi_i A_{ij}^{-1} \varphi_j$$

et définissons la fonction génératrice $Z(j)$:

$$Z(j_1, \dots, j_N) = \int \prod_{i=1}^N d\varphi_i \exp\left(-\frac{1}{2} \varphi^T A^{-1} \varphi + j^T \varphi\right). \quad (9)$$

D'après l'équation (A.10) cette fonction est égale à :

$$Z(j) = Z(0) \exp\left(\frac{1}{2} j^T A j\right) \quad (10)$$

et l'équation (10) donne les moments de $P(\varphi)$ par dérivation :

$$\langle \varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_{2n}} \rangle_0 = \frac{\partial^{2n}}{\partial j_{i_1} \dots \partial j_{i_{2n}}} \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} (j^T A j)^n. \quad (11)$$

L'équation (11) permet de démontrer la généralisation de (6) : *pour une distribution gaussienne, tous les moments s'expriment en fonction des moments d'ordre 2*. En théorie quantique des champs, ce résultat est connu sous le nom de *Théorème de Wick*. La démonstration n'est pas difficile ; commençons par le moment d'ordre 2 :

$$\langle \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \rangle_0 = \frac{\partial^2}{\partial j_{i_1} \partial j_{i_2}} \left(\frac{1}{2} \sum_{k,l} j_k A_{kl} j_l \right) = A_{i_1 i_2} = \overline{\varphi_{i_1} \varphi_{i_2}}. \quad (12)$$

La quantité $\overline{\varphi_{i_1} \varphi_{i_2}}$ est appelée *contraction* de φ_{i_1} et φ_{i_2} . La dérivation dans (11) donne $(2n)!$ termes ; cependant il faut diviser par $2^n n!$ et le nombre total de termes dans le membre de droite de (11) est donc $(2n-1)!!$. Mais ce nombre n'est pas autre chose que le nombre de

façons de former les paires $\overline{\varphi_{i_1} \varphi_{i_2}} \overline{\varphi_{i_3} \varphi_{i_4}} \dots \overline{\varphi_{i_{2n-1}} \varphi_{i_{2n}}}$: en effet il y a $(2n-1)$ façons de former la première paire $\overline{\varphi_{i_1} \varphi_{i_k}}$, $(2n-3)$ façons de former la seconde, etc. On trouve donc :

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \varphi_{i_1} \dots \varphi_{i_{2n}} \rangle_0 &= \overline{\varphi_{i_1} \varphi_{i_2}} \overline{\varphi_{i_3} \varphi_{i_4}} \dots \overline{\varphi_{i_{2n-1}} \varphi_{i_{2n}}} \\ &\quad + \text{Permutations} \\ \text{avec : } \overline{\varphi_{i_1} \varphi_{i_2}} &= \langle \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \rangle_0 = A_{i_1 i_2} \end{aligned}}. \quad (13)$$

Exemple :

$$\langle \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \rangle_0 = \overline{\varphi_1 \varphi_2} \overline{\varphi_3 \varphi_4} + \overline{\varphi_1 \varphi_3} \overline{\varphi_2 \varphi_4} + \overline{\varphi_1 \varphi_4} \overline{\varphi_2 \varphi_3}.$$

Il est important de noter que le *nombre total de termes ne change pas même si certains indices sont identiques* :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_1 \varphi_2 \varphi_2 \varphi_4 \rangle_0 &= \overline{\varphi_1 \varphi_2} \overline{\varphi_2 \varphi_4} + \overline{\varphi_1 \varphi_2} \overline{\varphi_2 \varphi_4} + \overline{\varphi_1 \varphi_4} \overline{\varphi_2 \varphi_2} \\ &= 2 \overline{\varphi_1 \varphi_2} \overline{\varphi_2 \varphi_4} + \overline{\varphi_1 \varphi_4} \overline{\varphi_2 \varphi_2}. \end{aligned}$$

D'ailleurs si tous les indices sont identiques on retrouve le résultat (7) :

$$\langle \varphi^{2n} \rangle_0 = (2n-1)!! \langle \varphi^2 \rangle_0^n.$$

A.3. Fonctionnelle génératrice

Les résultats précédents peuvent être appliqués à une théorie continue, considérée comme la limite d'une théorie sur réseau : cf. II-A.3. Si l'on suppose que la densité de probabilité est donnée par un hamiltonien du type Ginzburg-Landau (II.19) :

$$P[\varphi] = \exp(-H_{GL}) = \exp\left(-\int d^D x \left(\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{g}{4!} \varphi^4 \right)\right)$$

la « *fonctionnelle génératrice* » (des fonctions de corrélation) $Z(j)$ sera définie par :

$$Z(j) = \int \mathcal{D}\varphi(x) \exp\left(-H + \int d^D x j(x) \varphi(x)\right). \quad (15)$$

La fonction $j(x)$, appelée *source du champ* φ , joue le rôle du champ magnétique $B(x)$. Il est utile de définir la *densité de hamiltonien*

$\mathcal{H}(x)$ par :

$$H = \int d^D x \mathcal{H}(x) ; \quad \mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{g}{4!} \varphi^4 .$$

Les moments d'ordre $(2n)$, qui ne sont pas autre chose que les fonctions de corrélation à $(2n)$ -points, sont obtenus par dérivation fonctionnelle de $Z(j)$:

$$\begin{aligned} G^{(2n)}(x_1, \dots, x_{2n}) &= \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_{2n}) \rangle = \\ &= \frac{1}{Z(0)} \frac{\delta^{(2n)} Z(j)}{\delta j(x_1) \dots \delta j(x_{2n})} \Big|_{j=0} . \end{aligned} \quad (16)$$

La fonction de corrélation à deux points :

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \rangle$$

avait été appelée simplement « fonction de corrélation » dans la première partie, car c'était la seule à intervenir et il n'était pas nécessaire de préciser le nombre de variables.

Il est commode de séparer dans le hamiltonien H une partie gaussienne (i.e. quadratique en φ) H_0 :

$$H_0 = \int d^D x \left(\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right) \quad (17)$$

et un terme V dit d'interaction :

$$V = \frac{g}{4!} \int d^D x \varphi^4(x) . \quad (18)$$

Plus généralement on pourrait prendre au lieu de $\frac{g}{4!} \varphi^4$ un polynôme en φ , $\mathcal{V}(\varphi)$, pair si l'on veut respecter la symétrie $\varphi \rightarrow -\varphi$; on pourrait aussi introduire des interactions du type $\varphi^2 (\nabla \varphi)^2$, dites *interactions dérivatives* ; afin de simplifier la discussion, je les laisserai provisoirement de côté. L'expression (8) se généralise alors à :

$$\begin{aligned} Z(j) &= \exp \left(- \int d^D x \mathcal{V} \left(\frac{\delta}{\delta j(x)} \right) \right) \int \mathcal{D} \varphi(x) \times \\ &\quad \times \exp \left(- H_0 + \int d^D x j(x) \varphi(x) \right) \end{aligned} \quad (19)$$

pour une interaction :

$$V = \int d^D x \mathcal{V}(\varphi) = \int d^D x \left(\frac{g}{4!} \varphi^4 + \frac{g_6}{6!} \varphi^6 + \dots \right) .$$

L'intégrale sur $\varphi(x)$ dans (19) est une intégrale gaussienne ; en utilisant (10) on obtient :

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}\varphi(x) \exp \left(- \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - j(x) \varphi(x) \right] \right) = \\ = Z_0(j=0) \exp \left(\frac{1}{2} \int d^D x d^D y j(x) G_0(x-y) j(y) \right) \end{aligned} \quad (20)$$

où $G_0(x-y)$ est la fonction de corrélation à 2 points du modèle gaussien ($G_0(x, y)$ joue le rôle de A_{ij}) :

$$G_0(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{-ik \cdot x}}{k^2 + m^2} = \langle \varphi(x) \varphi(0) \rangle_0. \quad (21)$$

La fonctionnelle génératrice $Z(j)$ peut donc être mise, à une constante multiplicative près, sous la forme :

$$\begin{aligned} Z(j) = \mathcal{N} \exp \left(- \int d^D x \mathcal{V} \left(\frac{\delta}{\delta j(x)} \right) \right) \times \\ \times \exp \left(\frac{1}{2} \int d^D x d^D y j(x) G_0(x-y) j(y) \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Dans toute la suite, \mathcal{N} désignera une constante de normalisation des fonctionnelles génératrices. Cette constante ne joue en général aucun rôle, et il ne sera pas nécessaire de la préciser. Aussi compacte que soit la forme (22) de $Z(j)$, celle-ci n'est pas directement calculable. Il faudra développer en série perturbative.

Avant de passer à ce développement, rappelons que pour décrire un système physique dont le paramètre d'ordre est de dimension n , nous avons dû généraliser le hamiltonien de Ginzburg-Landau en introduisant un champ à n composantes $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) :

$$H = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\nabla \varphi_i)^2 + \frac{1}{2} m^2 \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 + \frac{g}{4!} \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i^2 \right)^2 \right]. \quad (23)$$

Ce hamiltonien est invariant par rotation dans l'espace à n dimensions des « indices internes » i : en effet il ne dépend que de la (« longueur »)² du champ dans cet espace :

$$\vec{\varphi}^2 = \sum_{i=1}^n \varphi_i^2$$

ou de termes contenant des dérivées, également invariants par rotation. Comme le groupe des rotations dans un espace à n dimensions est en

général noté $O(n)$ ($O(n)$ contient aussi les opérations de symétrie $\varphi_i \rightarrow -\varphi_i$, qui elles aussi laissent le hamiltonien invariant), on appelle ce hamiltonien : « hamiltonien de Ginzburg-Landau avec symétrie $O(n)$ ».

B. DÉVELOPPEMENT PERTURBATIF DE $G^{(2)}$ ET $G^{(4)}$ DIAGRAMMES DE FEYNMAN

L'objectif de ce paragraphe est d'établir des règles générales pour le calcul perturbatif des fonctions de corrélation, qui donneront le résultat sous forme d'un développement en puissances de g :

$$G = G_0 + g G_1 + g^2 G_2 + \dots + g^n G_n + \dots$$

où G_0 est la fonction de corrélation du modèle gaussien. Ces règles s'expriment très simplement sous forme diagrammatique : ce sont les fameux « diagrammes de Feynman ». Comme précédemment je commencerai par le cas d'une seule variable afin d'exposer le principe de ce développement. Je prendrai comme exemple l'interaction en φ^4 , mais les résultats se généralisent aisément à une interaction polynomiale $\mathcal{V}(\varphi)$ quelconque.

B.1. Développement perturbatif pour une variable

Considérons une distribution de probabilité

$$P(\varphi) = e^{-\frac{1}{2A}\varphi^2 - \frac{g}{4!}\varphi^4}$$

et essayons de calculer les moments de cette distribution. Il n'est pas possible d'obtenir une formule exacte pour $Z(0)$, mais si g est petit on peut développer $\exp\left(-\frac{g}{4!}\varphi^4\right)$:

$$\begin{aligned} Z(0) &= \int d\varphi e^{-\frac{1}{2A}\varphi^2} \left(1 - \frac{g}{4!}\varphi^4 + \frac{g^2}{2!(4!)^2}\varphi^8 + \dots \right) \\ &= \sqrt{2\pi A} \left(1 - \frac{1}{8}gA^2 + \frac{35}{384}g^2A^4 + \dots \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Calculons maintenant $\langle \varphi^2 \rangle$, analogue pour une variable de la fonction

de corrélation à deux points :

$$\begin{aligned} \int d\varphi \varphi^2 P(\varphi) &= \int d\varphi \varphi^2 e^{-\frac{1}{2A}\varphi^2} \left(1 - \frac{g}{4!} \varphi^4 + \frac{g^2}{2!(4!)^2} \varphi^8 + \dots \right) \\ &= \sqrt{2\pi A} \left(A - \frac{5}{8} g A^3 + \frac{105}{128} g^2 A^5 + \dots \right). \end{aligned} \quad (25)$$

$\langle \varphi^2 \rangle$ s'obtient en faisant le rapport de (24) et (25) :

$$\langle \varphi^2 \rangle = A \left(1 - \frac{1}{2} g A^2 + \frac{2}{3} g^2 A^4 + \dots \right). \quad (26)$$

L'équation (26) est un exemple élémentaire de développement perturbatif. Remarquez que si $g = 0$, on retrouve simplement $\langle \varphi^2 \rangle = A =$ valeur gaussienne ; remarquez aussi que la constante $\sqrt{2\pi A}$ disparaît dans le rapport : on vérifie sur ce cas particulier que la constante due à l'intégration gaussienne est sans effet sur la fonction de corrélation.

B.2. Calcul de $G^{(2)}$ à l'ordre g

Revenons maintenant au cas d'une théorie de Ginzburg-Landau et calculons le terme d'ordre g de la fonction de corrélation $G^{(2)}(x - y)$: Il faut évaluer à l'ordre g l'intégrale :

$$\begin{aligned} I(x, y) &= \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x) \varphi(y) e^{-H} \\ &= \int \mathcal{D}\varphi \varphi(x) \varphi(y) e^{-H_0} \left[1 - \frac{g}{4!} \int d^D z \varphi^4(z) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Le premier terme du crochet donne simplement

$$\mathcal{N} \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle_0 = \mathcal{N} G_0(x - y)$$

où la constante \mathcal{N} vaut :

$$\mathcal{N} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-H_0} = Z_0(j = 0).$$

L'intégrale correspondant au second terme :

$$\int \mathcal{D}\varphi \varphi(x) \varphi(y) e^{-H_0} \int d^D z \varphi^4(z) \quad (27)$$

est évaluée à l'aide du théorème de Wick (13). Le nombre de contractions dans (27) est égal au nombre de contractions de $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ et $\varphi^4(z)$. Il est commode de représenter ces contractions sur une figure en dessinant deux points « externes » (c'est-à-dire se référant aux arguments de la fonction de corrélation) x et y , marqués d'une croix, et un point « interne » ou « vertex » z , provenant du développement de e^{-V} , et sur lequel on intégrera. Comme $\varphi(z)$ intervient par sa quatrième puissance, ce point apparaîtra dans un premier temps en quatre exemplaires. Chaque contraction sera représentée par une ligne joignant les arguments de φ : par exemple :

$$\overbrace{\varphi(x) \varphi(y)} \longrightarrow \begin{array}{c} \times \text{---} \times \\ x \qquad y \end{array}$$

Deux types de termes sont possibles (figure 1) :

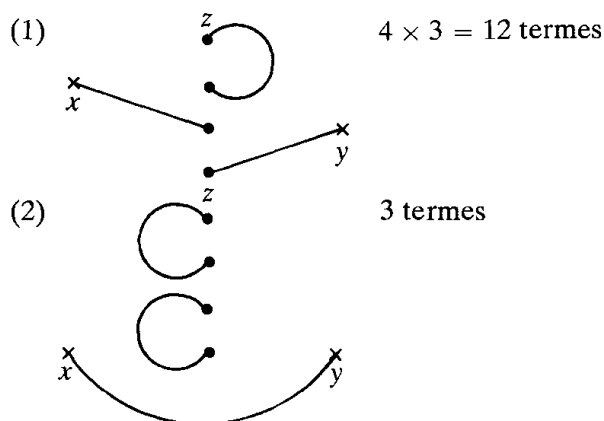


Figure 1.

On vérifie que $12 + 3 = 15 = (6 - 1)!!$. Afin de simplifier les figures, on groupe les quatre points z en un seul, obtenant les figures suivantes (figure 2) :

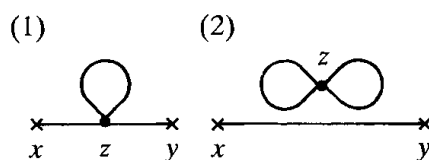


Figure 2. Les deux diagrammes d'ordre g .

Ces figures sont appelées *diagrammes (ou graphes) de Feynman* ; à tout terme, ou plus exactement à tout groupement de termes, du

développement perturbatif correspondra un tel diagramme. L'intégrale I vaut :

$$\begin{aligned} I(x, y) = \mathcal{N} [& G_0(x - y) - \\ & - \frac{1}{2} g \int d^D z G_0(x - z) G_0(0) G_0(z - y) \\ & - \frac{1}{8} g G_0(x - y) (G_0(0))^2 \int d^D z] . \end{aligned} \quad (28)$$

Pour obtenir la fonction de corrélation, il faut diviser par $Z(0)$, comme dans l'exemple à une variable :

$$\begin{aligned} Z(0) &= \int \mathcal{D}\varphi e^{-H_0} \left(1 - \frac{g}{4!} \int d^D z \varphi^4(z) + \dots \right) \\ &= \mathcal{N} \left[1 - \frac{g}{8} (G_0(0))^2 \int d^D z + \dots \right] . \end{aligned} \quad (29)$$

Le deuxième terme du crochet de (29) est représenté par le graphe de la figure 3 :

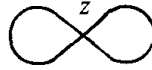


Figure 3. Diagramme de fluctuation du vide.

Pour obtenir la fonction de corrélation à l'ordre g , il faut faire le rapport de (28) par (29) :

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x - y) &= \frac{I(x, y)}{Z(0)} = G_0(x - y) - \\ & - \frac{1}{2} g \int d^D z G_0(x - z) G_0(0) G_0(z - y) + O(g^2) . \end{aligned}$$

Le graphe (2) de la figure 2 n'apparaît pas dans le développement perturbatif de G . Un diagramme de ce type contient une partie dite de « fluctuation du vide » ou diagramme « vide-vide » (terminologie empruntée à la théorie quantique des champs), c'est-à-dire *un sous-graphe complètement disconnecté des points « externes » x et y* (cf.

figure 2). D'autres exemples de diagrammes de ce type sont dessinés sur la figure 4 :

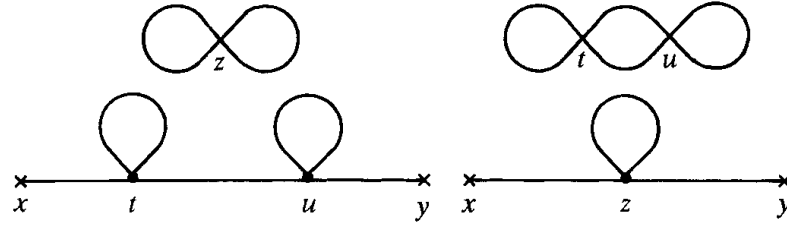


Figure 4. Diagrammes ne contribuant pas à $G^{(2)}(x - y)$.

Ces graphes n'apparaissent jamais dans le développement perturbatif des fonctions de corrélation. La somme des diagrammes de fluctuation du vide est égale à $Z(0) = \int \mathcal{D}\varphi e^{-H}$, et c'est l'analogue de (24) dans le cas d'une variable. La division par $Z(0)$ fait disparaître tous les graphes contenant une partie « fluctuation du vide » disconnectée du reste du graphe. La démonstration de ce résultat dans le cas général n'est pas très compliquée.

Considérons un diagramme faisant intervenir le hamiltonien d'interaction à l'ordre $(p + q)$, et comprenant une partie de fluctuation du vide d'ordre q ; un exemple est donné dans la figure 5 dans le cas où $\mathcal{V} = g\varphi^4/4!$:

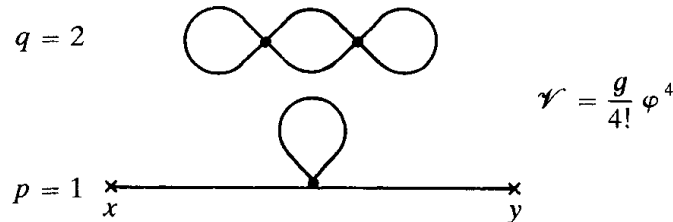


Figure 5.

Si $n = p + q$, il y a C_n^q façons de choisir q facteurs V pour former des diagrammes de fluctuation du vide. D'autre part le développement de l'exponentielle e^{-V} fait apparaître un facteur $1/n!$. Un graphe de topologie donnée apparaîtra donc avec un facteur $\frac{1}{n!} C_n^q = \frac{1}{q! p!}$. Comme :

$$\sum_n \sum_{p+q=n} = \sum_{p,q},$$

dans le calcul de la fonction de corrélation, le numérateur pourra s'écrire :

$$\sum_{p,q} \frac{1}{p! q!} [\text{Fluct. vide } (q)] [\text{Connecté } (p)]$$

$$\left(\sum_p \frac{1}{p!} [\text{Connecté } (p)] \right) \left(\sum_q \frac{1}{q!} [\text{Fluct. vide } (q)] \right).$$

Mais le second facteur est exactement égal à $Z(0)$ et la fonction de corrélation est donnée par :

$$\sum_p \frac{1}{p!} [\text{Connecté } (p)].$$

Le calcul qui précède permet de commencer à deviner les « règles de Feynman », c'est-à-dire les règles associant au développement perturbatif des diagrammes, ainsi que les prescriptions pour évaluer ces diagrammes (une démonstration complète sera donnée en B.5). A l'ordre g nous avons déterminé l'expression de $G^{(2)}(x-y)$:

$$G^{(2)}(x-y) = G_0(x-y) - \frac{1}{2} g \int d^D z G_0(x-z) G_0(0) G_0(z-y) \quad (31)$$

que l'on représente graphiquement par (figure 6) :

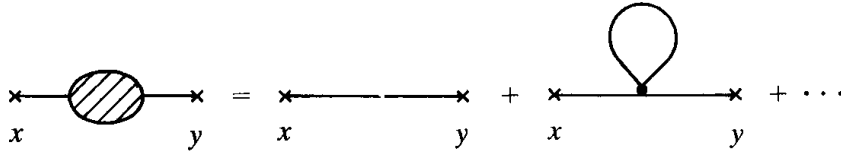


Figure 6. Développement diagrammatique de $G^{(2)}(x-y)$.

L'expression analytique correspondant à un graphe est évaluée grâce aux règles suivantes (« règles de Feynman dans l'espace des x ») :

- 1) A chaque point interne, ou vertex, correspond un facteur $-g$.
- 2) A chaque ligne joignant deux points x_i et x_j correspond un facteur $G_0(x_i - x_j)$ souvent appelé « *propagateur* » (terminologie empruntée à la théorie quantique des champs).

3) On intègre sur tous les points internes z_i : $\int d^D z_i$.

4) Chaque graphe est affecté d'un facteur numérique multiplicatif appelé « *facteur de symétrie* ». Dans le cas discuté plus haut, ce facteur vaut 1/2.

En prenant une transformée de Fourier, l'équation (31) devient dans l'espace des k :

$$G^{(2)}(k) = G_0(k) - \frac{1}{2} g G_0(k) \left[\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} G_0(q) \right] G_0(k). \quad (32)$$

Cette expression suggère les « règles de Feynman dans l'espace des k » (démonstration complète en B.5) :

- 1) A chaque vertex correspond un facteur $-g$.
- 2) A chaque ligne correspond un facteur $G_0(k)$.
- 3) A chaque boucle indépendante (cette notion sera précisée ultérieurement) correspond une intégration $\int d^D q / (2\pi)^D$.

4) Enfin chaque graphe est multiplié par un facteur de symétrie.

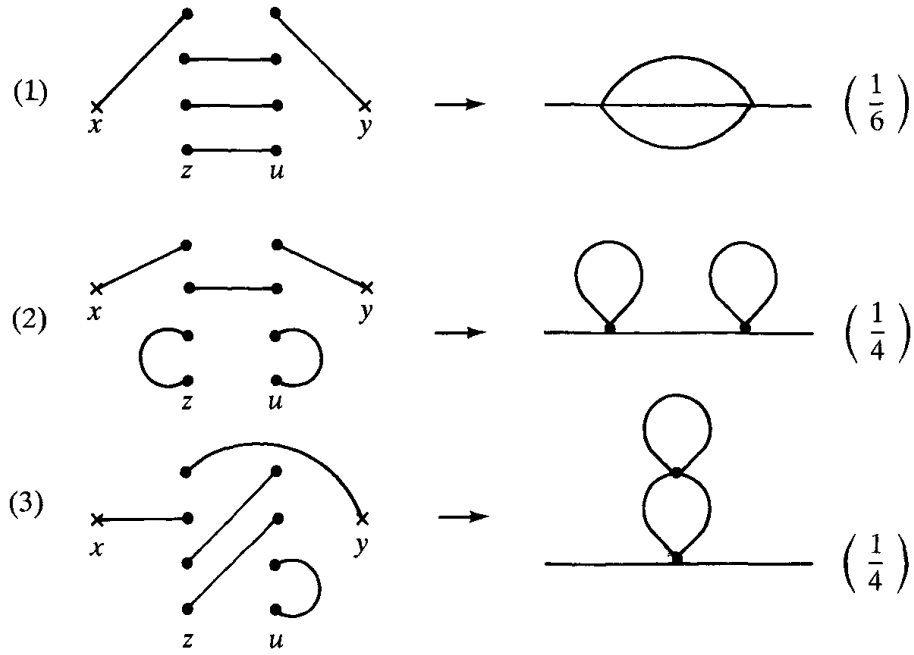
Le développement diagrammatique et les règles de Feynman sont des conséquences immédiates du théorème de Wick (13) : tout terme du développement perturbatif est un produit de $G_0(x_i - x_j)$. Le seul facteur qui n'est pas complètement évident est le facteur de symétrie. Par ailleurs on doit encore préciser la notion de « boucle indépendante ». Afin de se familiariser avec le développement perturbatif et les règles de Feynman, il vaut la peine de pousser le calcul de $G^{(2)}$ à l'ordre g^2 .

B.3. Calcul de $G^{(2)}$ à l'ordre g^2

Il faut appliquer le théorème de Wick à l'expression :

$$\varphi(x) \varphi(y) \int d^D z d^D u \varphi^4(z) \varphi^4(u).$$

Éliminant les termes contenant une partie de fluctuation du vide, on trouve trois types de graphes dessinés sur la figure 7 avec entre parenthèses leur facteur de symétrie (exercice 1) :

Figure 7. Diagrammes à l'ordre g^2 .

Il faut remarquer que les vertex z et u peuvent être permutés, ce qui donne un facteur multiplicatif $2!$; cependant le développement de l'exponentielle donne un facteur $1/2!$ qui le compense exactement. En règle générale, si l'on considère un terme en g^n , le facteur $n!$ venant de la possibilité de permuter les vertex sera compensé par le $1/n!$ venant du développement de l'exponentielle.

Nous nous contenterons d'examiner la contribution $\bar{G}(x-y)$ du graphe (1) de la figure 7 à la fonction de corrélation, en laissant au lecteur le soin d'établir l'expression analytique des deux autres graphes :

$$\bar{G}(x-y) = \frac{1}{6} g^2 \int d^D z d^D u G_0(x-z) [G_0(z-u)]^3 G_0(u-y).$$

Ecrivons $\bar{G}(x-y)$ sous forme d'une transformée de Fourier, en remplaçant chacun des facteurs G_0 par sa représentation de Fourier :

$$\begin{aligned} \bar{G}(x-y) = \frac{1}{6} g^2 \int d^D z d^D u \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k'}{(2\pi)^D} \prod_{l=1}^3 \left\{ \frac{d^D q_l}{(2\pi)^D} e^{-i \sum_{l=1}^3 q_l \cdot (z-u)} \right\} \\ \times e^{-ik \cdot (x-z)} e^{-ik' \cdot (u-y)} G_0(k) G_0(k') \prod_{l=1}^3 G_0(q_l). \end{aligned}$$

Les intégrations sur z et u donnent un produit de deux fonctions δ :

$$(2\pi)^D \delta^{(D)}(k - q_1 - q_2 - q_3) \times (2\pi)^D \delta^{(D)}(k' - q_1 - q_2 - q_3)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \bar{G}(x-y) = & \frac{1}{6} g^2 \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik \cdot (x-y)} [G_0(k)]^2 \times \\ & \times \int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} G_0(q_1) G_0(q_2) G_0(k - q_1 - q_2) . \end{aligned}$$

Cette dernière expression montre que $\bar{G}(x-y)$ est la transformée de Fourier d'une fonction $\bar{G}(k)$:

$$\begin{aligned} \bar{G}(k) = & \frac{1}{6} g^2 G_0(k) \times \\ & \times \left[\int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} G_0(q_1) G_0(q_2) G_0(k - q_1 - q_2) \right] G_0(k) \quad (33) \end{aligned}$$

et la représentation diagrammatique de (33) est donnée sur la figure 8. Le graphe dessiné sur cette figure comporte deux propagateurs externes $G_0(k)$ et trois propagateurs internes ; à cause des deux fonctions $\delta^{(D)}(\dots)$, seules deux des trois lignes internes sont indépendantes. Le diagramme de la figure 8 permet d'introduire la notion de boucles indépendantes : on peut tracer trois boucles fermées suivant les propagateurs internes, mais à cause des fonctions $\delta^{(D)}$, seules deux de ces boucles sont indépendantes : il y a seulement deux variables d'intégration dans (33).

Pour terminer cette discussion du développement perturbatif de $G^{(2)}$, examinons le facteur de symétrie, d'abord dans le cas du hamiltonien de Ginzburg-Landau simple. A l'ordre (p) de la théorie des perturbations, on trace tous les diagrammes de Feynman topologiquement inéquivalents et chaque diagramme est évalué avec les règles énoncées précédemment. En principe les $4!$ permutations des qua-

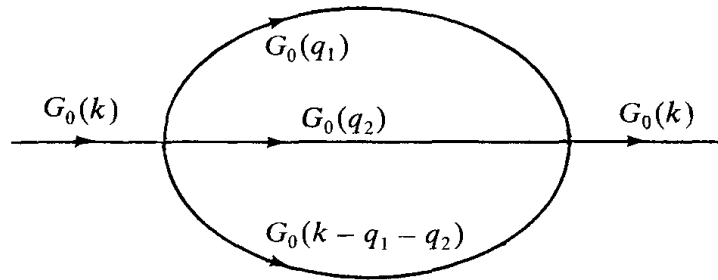


Figure 8. Représentation diagrammatique de (33).

tre points de chaque vertex compensent le $1/4!$ qui multiplie g . Cependant certaines de ces permutations peuvent correspondre au même terme du théorème de Wick (13), et il ne faut pas faire de double comptage. On peut essayer de donner des règles générales pour le calcul de ce facteur (cf. Itzykson-Zuber, p. 265-268). Je me contenterai de le calculer explicitement dans chaque cas particulier.

Généralisons maintenant à un hamiltonien de Ginzburg-Landau avec symétrie $O(n)$ (cf. équation (23)). Pour un hamiltonien de ce type, la fonction de corrélation gaussienne vaut :

$$\langle \varphi_i(x) \varphi_j(y) \rangle_0 = G_{0;ij}(x-y) = \delta_{ij} G_0(x-y). \quad (34)$$

Pour calculer la correction d'ordre g , il faut appliquer le théorème de Wick à :

$$\left\langle \int d^D z \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k^2(z) \right)^2 \varphi_i(x) \varphi_j(y) \right\rangle_0.$$

Remarquons que :

$$\left(\sum_{k=1}^n \varphi_k^2(z) \right)^2 = \sum_{k,l} \varphi_k^2(z) \varphi_l^2(z)$$

et que le point « quadruple » z peut être décomposé en deux points d'indice k et deux points d'indice l . Il y a donc deux types de graphes (le pointillé relie le groupe d'indices (k) au groupe d'indices (l)) : figures 9 et 10) :

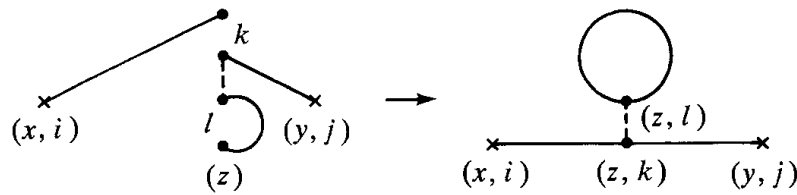


Figure 9.

Comme $\sum_{k,l} \delta_{ik} \delta_{jk} \delta_{ll} = n \delta_{ij}$, le facteur de symétrie est $\frac{1}{4!} (4n) = \frac{n}{6}$.

Le facteur de symétrie du graphe de la figure 10 vaut : $\frac{1}{4!} 8 = \frac{1}{3}$.

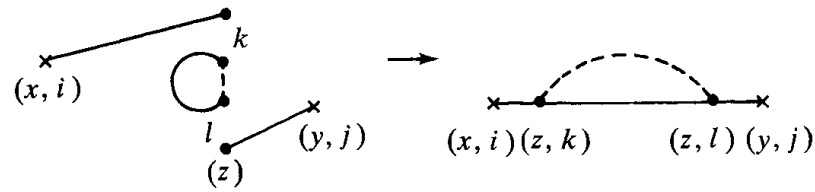


Figure 10.

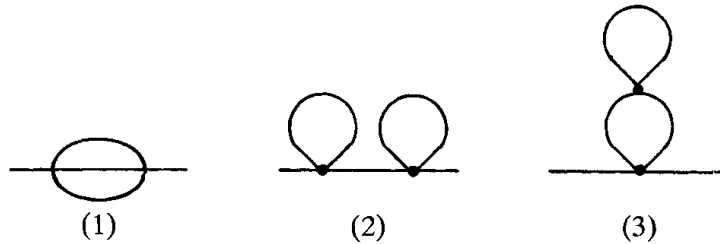
La somme des deux graphes (figure 11) :



Figure 11.

aura un facteur de symétrie : $\frac{1}{6} (n + 2)$ ($= \frac{1}{2}$ si $n = 1$).

A l'ordre g^2 , les trois graphes de la figure 12

Figure 12. $G^{(2)}$ à l'ordre g^2 .

ont un facteur de symétrie $\frac{n+2}{18}$, $\frac{(n+2)^2}{36}$ et $\frac{(n+2)^2}{36}$ respectivement (exercice 4).

B.4. Fonction de corrélation à quatre points $G^{(4)}$

Continuons à utiliser le hamiltonien (23) ; la fonction de corrélation à quatre points $G_{ijkl}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ est donnée par :

$$G_{ijkl}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle \varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2) \varphi_k(x_3) \varphi_l(x_4) \rangle .$$

Par invariance par translation, cette fonction ne dépend que de trois différences de coordonnées : par exemple $(x_1 - x_2)$, $(x_2 - x_3)$, $(x_3 - x_4)$.

A l'ordre g^0 , $G_{0;ijkl}^{(4)}$ est la somme de trois graphes disconnectés (figure 13) :

$$G_{0;ijkl}^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = G_{0;ij}(x_1 - x_2) G_{0;kl}(x_3 - x_4) + \\ + G_{0;ik}(x_1 - x_3) G_{0;jl}(x_2 - x_4) + G_{0;il}(x_1 - x_4) G_{0;jk}(x_2 - x_3) .$$

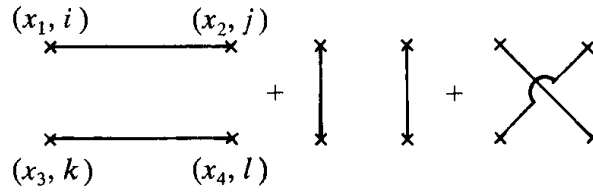


Figure 13. $G^{(4)}$ à l'ordre g^0 .

A l'ordre g on aura trois types de graphes (figure 14) :

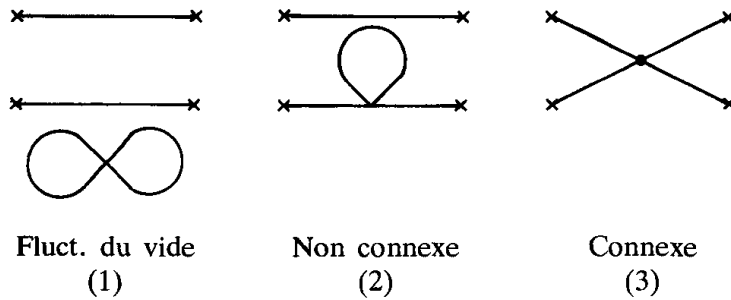


Figure 14. $G^{(4)}$ à l'ordre g .

Les graphes de type (1) contiennent des parties de fluctuation du vide et sont éliminés quand on divise par $Z(0)$. Les graphes de type (2) peuvent être écrits comme le produit de deux termes indépendants : ce sont des *graphes non connexes*. Leur expression est connue car ils font intervenir des fonctions de corrélation à deux points, déjà calculées. Les graphes de type (3) sont les plus intéressants. Ecrivons l'expression analytique du graphe (3) de la figure 14 :

$$\bar{G}_{ijkl} = - \bar{F}_{ijkl} \int d^D z G_0(x_1 - z) G_0(x_2 - z) \times \\ \times G_0(x_3 - z) G_0(x_4 - z) . \quad (35)$$

(Remarquez le signe $-$ dans (35)). Il est immédiat de calculer $\bar{\Gamma}_{ijkl}$:

$$\begin{cases} \bar{\Gamma}_{ijkl} = \frac{1}{3} g S_{ijkl} \\ S_{ijkl} = \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} . \end{cases} \quad (36)$$

Si $n = 1$, on a simplement $\bar{\Gamma} = g$ car $S_{ijkl} = 3$. Le signe $(-)$ dans (35) assure que $\bar{\Gamma}$ est égal à $+g$, et non $-g$ (cf. C.3).

Remplaçons maintenant les G_0 dans (35) par leur représentation de Fourier :

$$\begin{aligned} \bar{G}_{ijkl} &= -\bar{\Gamma}_{ijkl} \int d^D z \left\{ \prod_{i=1}^4 \frac{d^D k_i}{(2\pi)^D} e^{-ik_i(x_i - z)} G_0(k_i) \right\} \\ &= -\bar{\Gamma}_{ijkl} \int \prod_{i=1}^4 \left\{ \frac{d^D k_i}{(2\pi)^D} e^{-ik_i x_i} G_0(k_i) \right\} \times \\ &\quad \times (2\pi)^D \delta^{(D)} \left(\sum_{i=1}^4 k_i \right) \end{aligned} \quad (37)$$

On remarque dans (37) le facteur $(2\pi)^D \delta^{(D)} \left(\sum k_i \right)$: ce facteur provient de l'invariance par translation de $G^{(4)}(x_i)$; établissons-le dans le cas général, c'est-à-dire sans invoquer le développement perturbatif, en effectuant le changement de variables :

$$y_1 = x_1 - x_4 ; \quad y_2 = x_2 - x_4 ; \quad y_3 = x_3 - x_4 ; \quad y_4 = x_4$$

$$\sum_{i=1}^4 k_i x_i = \sum_{i=1}^3 k_i y_i + \left(\sum_{i=1}^4 k_i \right) y_4$$

dans l'intégrale :

$$\int \left[\prod_{i=1}^4 d^D x_i e^{ik_i x_i} \right] G^{(4)}(x_i) .$$

Par invariance par translation, $G^{(4)}(x_i)$ peut s'écrire en fonction de y_1, y_2, y_3 uniquement ; l'intégrale sur $y_4 = x_4$ donne bien $(2\pi)^D \delta^{(D)} \left(\sum_{i=1}^4 k_i \right)$. De façon générale on extraira un facteur $(2\pi)^D \delta^{(D)} \left(\sum_{i=1}^4 k_i \right)$ dans la définition de la transformée de Fourier $G^{(4)}(k_i)$:

$$(2\pi)^D \delta^{(D)} \left(\sum_{i=1}^4 k_i \right) G^{(4)}(k_i) = \int \left[\prod_{i=1}^4 d^D x_i e^{ik_i x_i} \right] G^{(4)}(x_i) . \quad (38)$$

Dans le cas d'une fonction de corrélation d'ordre N , on extraira un facteur $(2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_{i=1}^N k_i\right)$. Le lecteur vérifiera sans difficulté que cette convention avait été adoptée implicitement pour $G^{(2)}$. Lorsque l'on utilise des variables k_i discrètes, on extrait un facteur $L^D \delta_{\sum k_i}^N$, en utilisant cette fois un δ de Kronecker (L est la taille de l'échantillon considéré).

Les exemples précédents ont permis de deviner la forme des règles de Feynman ; il reste à les établir de façon générale. Je me contenterai de le faire dans l'espace des k , qui est le plus utile en pratique.

B.5. Règles de Feynman dans l'espace des k

Définissons la transformée de Fourier de $j(x)$ par :

$$j(k) = \int \frac{d^D x}{(2\pi)^{D/2}} e^{ik \cdot x} j(x).$$

D'après la relation de Parseval on peut écrire :

$$\int d^D x j(x) \varphi(x) = \int d^D k \varphi(k) j(-k).$$

La fonctionnelle génératrice gaussienne s'écrit dans l'espace des k :

$$\begin{aligned} Z_0(j) &= \int \mathcal{D}\varphi(k) \exp \left(-\frac{1}{2} \int d^D k (m^2 + k^2) \varphi(k) \varphi(-k) + \right. \\ &\quad \left. + \int d^D k \varphi(k) j(-k) \right) \\ &= Z_0(0) \exp \left(\frac{1}{2} \int d^D k j(k) G_0(k) j(-k) \right) \end{aligned} \quad (39)$$

tandis que l'interaction V devient :

$$V = \frac{g}{4!} \int \left[\prod_{i=1}^4 \frac{d^D q_i}{(2\pi)^{D/2}} \varphi(q_i) \right] (2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum q_i\right). \quad (40)$$

Relions maintenant la transformée de Fourier de la fonction de corrélation d'ordre N à $\langle \varphi(k_1) \dots \varphi(k_N) \rangle$:

$$\begin{aligned} G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) &= \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_N) \rangle = \\ &= \int \left\{ \prod_{i=1}^N \frac{d^D k_i}{(2\pi)^{D/2}} e^{-ik_i \cdot x_i} \right\} \langle \varphi(k_1) \dots \varphi(k_N) \rangle. \end{aligned}$$

Mais d'après l'équation (38), écrite dans le cas général, $G^{(N)}(x_i)$ vaut également :

$$\int \left\{ \prod_{i=1}^N \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_i \cdot x_i} \right\} (2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_1^N k_i\right) G^{(N)}(k_1 \dots k_N)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} (2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_1^N k_i\right) G^{(N)}(k_1, \dots, k_N) = \\ = (2\pi)^{ND/2} \langle \varphi(k_1) \dots \varphi(k_N) \rangle . \end{aligned} \quad (41)$$

On note le cas particulier :

$$(2\pi)^D \delta^{(D)}(k_1 + k_2) G^{(2)}(k_1) = (2\pi)^D \langle \varphi(k_1) \varphi(k_2) \rangle$$

soit :

$$G^{(2)}(k) = \langle \varphi(k) \varphi(-k) \rangle .$$

En combinant (39), (40) et (41) on trouve pour $G^{(N)}(k_1, \dots, k_N)$:

$$\begin{aligned} (2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_1^N k_i\right) G^{(N)}(k_1, \dots, k_N) = \\ = \mathcal{N} (2\pi)^{ND/2} \exp\left(-V\left(\frac{\delta}{\delta j(-q)}\right)\right) \frac{\delta^N}{\delta j(-k_1) \dots \delta j(-k_N)} \times \\ \times \exp\left(\frac{1}{2} \int d^D k j(k) G_0(k) j(-k)\right) \end{aligned} \quad (42)$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2}{\delta j(-k_1) \delta j(-k_2)} \int d^D k j(k) G_0(k) j(-k) = \\ = 2 \delta^{(D)}(k_1 + k_2) G_0(k_1) . \end{aligned}$$

A chaque ligne, interne ou externe, est associé le facteur $\delta^{(D)}(k_1 + k_2) G_0(k_1)$; d'autre part, à cause du facteur $(2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum k_i\right)$ dans (40), la somme de tous les moments entrant dans un vertex doit être nulle. On peut choisir sur chaque ligne (interne ou externe) du diagramme une direction pour le flot de moment ; à un vertex donné arrivent quatre lignes de moments k_i , comptées positive-

ment si le moment entre dans le vertex et négativement dans le cas contraire. La fonction δ dans (40) conduit à la loi de conservation pour chaque vertex :

$$\sum_{i=1}^4 (\pm k_i) = 0 .$$

Il sera souvent commode d'adopter la *convention* suivante : les moments externes k_1, \dots, k_N sont orientés de façon à entrer dans le diagramme. Ainsi, à cause du facteur $\delta^{(D)}(k_1 + k_2)$, une ligne arrivant dans un vertex avec un moment k , ou bien arrive dans le diagramme avec un moment k , ou bien entre dans un autre vertex avec un moment $-k$. Un exemple est donné sur la figure 15 où :

$$k_1 + k_2 - q_1 - q_2 = 0 ; \quad q_1 + q_2 + k_3 + k_4 = 0$$

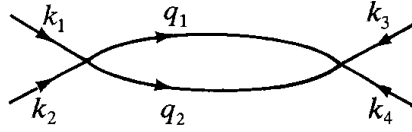


Figure 15. Une contribution à $G^{(4)}$.

La conservation du moment à chaque vertex assure la conservation totale du moment : $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$.

Etablissons pour terminer les facteurs (2π) . La fonction de corrélation possède N lignes externes et V vertex à l'ordre V de la théorie des perturbations. A cet ordre on a donc un facteur (cf. (40) et (42)) :

$$(2\pi)^{ND/2} (2\pi)^{-4VD/2} (2\pi)^{VD} .$$

Mais dans un diagramme connexe on a la relation :

$$4V = 2I + N$$

où I est le nombre de lignes internes du diagramme : en effet si l'on coupe chaque ligne interne, quatre lignes arrivent à chaque vertex et le nombre total de lignes est $2I + N$. Un exemple est donné sur la figure 16 :

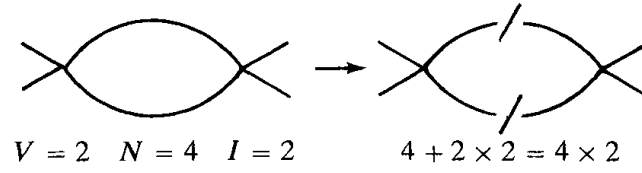


Figure 16.

Le facteur multiplicatif est donc :

$$(2\pi)^{VD} (2\pi)^{(N-4V)D/2} = (2\pi)^{VD} (2\pi)^{-ID}.$$

On peut résumer les règles de Feynman pour $G^{(N)}(k_1 \dots k_N)$ dans l'espace des k sous deux formes équivalentes (dans le cas de diagrammes disconnectés il peut y avoir des modifications triviales : à titre d'exercice on pourra écrire la contribution à $G^{(4)}$ des diagrammes de la figure 13) :

(1) Tracer tous les diagrammes topologiquement inéquivalents à un ordre donné de la théorie des perturbations.

(2) Associer à chaque ligne du diagramme un facteur $G_0(k)$.

(3) Associer à chaque vertex un facteur : $-g(2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_1^4 q_i\right)$ et extraire le facteur de conservation du moment $(2\pi)^D \delta^{(D)}\left(\sum_1^N k_i\right)$.

(4) Intégrer sur chaque ligne interne avec une mesure d'intégration $\frac{d^D q}{(2\pi)^D}$.

(4) Multiplier par le facteur de symétrie.

La deuxième forme s'obtient en utilisant la notion de boucles : dans un diagramme, il y a

$$L = I - V + 1$$

variables d'intégration indépendantes, ou bien L *boucles indépendantes* : en effet chaque vertex introduit une fonction δ , mais une de ces fonctions δ est déjà incluse dans la conservation du moment. Le facteur $(2\pi)^{(-I+V)D}$ peut s'écrire :

$$(2\pi)^{-ID} (2\pi)^{VD} = (2\pi)^{-LD} (2\pi)^D.$$

Le facteur $(2\pi)^D$ est à associer au $\delta(\dots)$ de conservation du moment dans le diagramme. On pourra donc remplacer (3) et (4) par :

(3a) Associer à chaque vertex un facteur $-g$.

(4a) Ecrire les moments internes en assurant la conservation du moment à chaque vertex, et intégrer sur toutes les boucles indépendantes avec une mesure $d^D q / (2\pi)^D$. Donnons un exemple d'application de ces règles (figure 17). La contribution du graphe de la figure 17 à $G^{(2)}$ s'écrit :

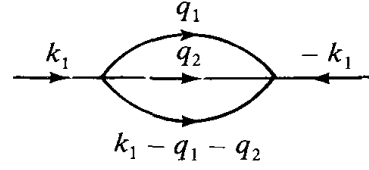


Figure 17. Une contribution à $G^{(2)}$.

$$\frac{1}{6} g^2 G_0(k_1) \left[\int \frac{d^D q_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D q_2}{(2\pi)^D} \times \right. \\ \left. \times G_0(q_1) G_0(q_2) G_0(k_1 - q_1 - q_2) \right] G_0(k_1).$$

Le résultat est bien en accord avec (33).

C. FONCTIONS DE CORRÉLATION CONNEXES VERTEX PROPRES

Nous avons vu que certaines contributions aux fonctions de corrélation pouvaient se mettre sous la forme de deux ou plusieurs facteurs indépendants : par exemple la contribution du diagramme de la figure 18 à $G^{(4)}$ s'écrit comme le produit de deux facteurs. Afin de limiter le nombre de diagrammes il est utile de définir les *diagrammes connexes* : ce sont les diagrammes qui ne peuvent pas être décomposés en deux ou plusieurs parties indépendantes sans couper au moins une ligne du diagramme. La décomposition en diagrammes connexes généralise l'écriture des moments d'une distribution de probabilité en termes de *cumulants*.

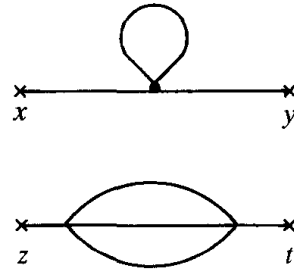


Figure 18. Une contribution non connexe à $G^{(4)}$.

C.1. Cumulants d'une distribution de probabilité

Soit $Z(j)$ la fonction génératrice d'une distribution de probabilité $P(\varphi)$:

$$Z(j) = Z(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} j^n \langle \varphi^n \rangle .$$

On pose $Z(j) = Z(0) \exp[W(j)]$ ou $W(j) = \ln(Z(j)/Z(0))$ (W est l'analogie d'une énergie libre) et on définit les cumulants d'ordre n , $\langle \varphi^n \rangle_c$ par :

$$W(j) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j^n}{n!} \langle \varphi^n \rangle_c$$

$$\langle \varphi^n \rangle_c = \left. \frac{\partial^n W(j)}{\partial j^n} \right|_{j=0} .$$

On obtient par identification :

$$\begin{aligned} \langle \varphi \rangle_c &= \langle \varphi \rangle \\ \langle \varphi^2 \rangle_c &= \langle \varphi^2 \rangle - \langle \varphi \rangle^2 = \langle (\varphi - \langle \varphi \rangle)^2 \rangle \\ \langle \varphi^3 \rangle_c &= \langle \varphi^3 \rangle - 3 \langle \varphi \rangle \langle \varphi^2 \rangle + 2 \langle \varphi \rangle^3 = \langle (\varphi - \langle \varphi \rangle)^3 \rangle \\ \langle \varphi^4 \rangle_c &= \langle \varphi^4 \rangle - 4 \langle \varphi \rangle \langle \varphi^3 \rangle - 3 \langle \varphi^2 \rangle^2 + 12 \langle \varphi \rangle^2 \langle \varphi^2 \rangle - 6 \langle \varphi \rangle^4 \\ &= \langle (\varphi - \langle \varphi \rangle)^4 \rangle - 3 \langle (\varphi - \langle \varphi \rangle)^2 \rangle^2 . \end{aligned}$$

Les cumulants d'une distribution gaussienne sont nuls pour $n \geq 3$. En effet, d'après (5), $Z(j) \sim \exp\left(\frac{1}{2} A j^2\right)$ et $W(j) = \frac{1}{2} A j^2$. Si la distribution gaussienne n'est pas centrée à l'origine, le seul effet est d'ajouter un terme linéaire en j à $F(j)$: $\langle \varphi \rangle_c$ et $\langle \varphi^2 \rangle_c$ sont $\neq 0$, mais $\langle \varphi^n \rangle_c = 0$ si $n \geq 3$. Nous allons généraliser ce qui précède au cas des fonctions de corrélation avec la correspondance : fonction de corrélation \rightarrow moment et fonction de corrélation connexe \rightarrow cumulant.

C.2. Fonctionnelle génératrice des diagrammes connexes

Commençons par un exemple en examinant la fonction de corrélation $G^{(4)}$; $G^{(4)}$ se décompose en un diagramme connexe et trois diagrammes non connexes :

$$G^{(4)}(1, 2, 3, 4) = G_c^{(4)}(1, 2, 3, 4) + \{ G_c^{(2)}(1, 2) G_c^{(2)}(3, 4) + \text{Permutations} \}$$

où G_c désigne une fonction de corrélation connexe ; remarquez que $G_c^{(2)} = G^{(2)}$. Graphiquement on obtient l'équation de la figure 19 :

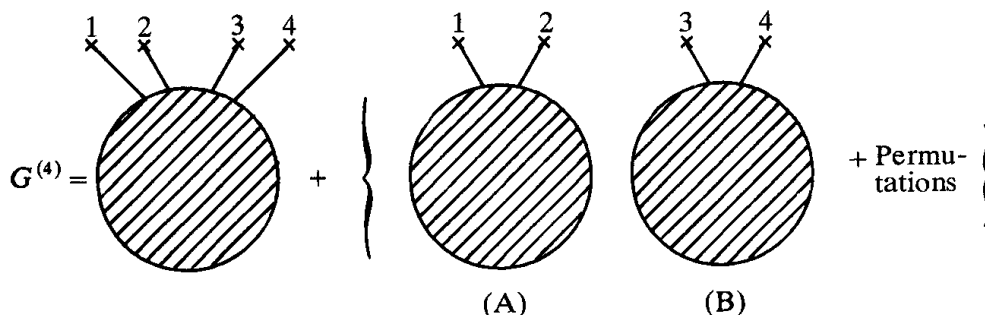


Figure 19.

Le nombre de termes non connexes est $3 = 4! / [(2!)^2 \times (2!)]$: $4!$ est le nombre de permutations des points externes (1, 2, 3, 4) ; mais permuter (1, 2), ou (3, 4), ou les deux boules (A) et (B) ne change pas le résultat, d'où le facteur $(2!)^2 \times 2!$.

Le cas d'une théorie en φ^4 est un peu particulier car toutes les fonctions de corrélation telles que N est impair sont nulles : $G^{(2k+1)} = 0$. (*) Pour être tout à fait général, on supposera que l'interaction comprend des termes en φ^{2p+1} , par exemple φ^3 , de telle sorte que $G^{(2k+1)} \neq 0$. Considérons un diagramme non connexe de $G^{(N)}$ correspondant à la décomposition de la figure 20 en diagrammes connexes :

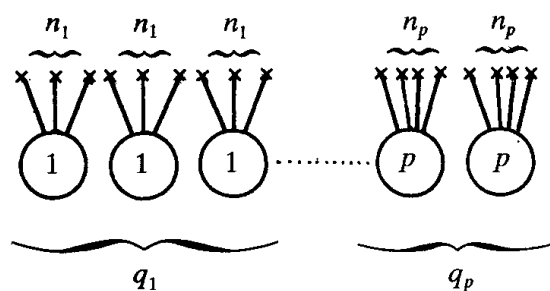


Figure 20.

(*) On peut avoir $G^{(1)} = \langle \varphi \rangle \neq 0$ dans le cas d'une symétrie brisée, ou bien si $\mathcal{V}(\varphi)$ contient des termes impairs en φ , par exemple φ^3 .

Il y a q_1 boules connectées à n_1 points externes... q_p boules connectées à n_p points externes avec :

$$q_1 n_1 + \dots + q_p n_p = N .$$

Le nombre de termes indépendants est :

$$\frac{N!}{[(n_1!)^{q_1} q_1!] \dots [(n_p!)^{q_p} q_p!]} . \quad (43)$$

La fonction génératrice $Z(j)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{Z(j)}{Z(0)} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dx_1 \dots dx_N j(x_1) \dots j(x_N) \times \\ &\quad \times \sum_{q_1 n_1 + \dots + q_p n_p = N} G_c^{(n_1)}(x_1 \dots x_{n_1}) \dots G_c^{(n_p)}(\dots x_N) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{q_1 n_1 + \dots + q_p n_p = N} \prod_{i=1}^p \frac{1}{q_i!} \times \\ &\quad \times \left[\frac{\int dx_1 \dots dx_{n_i} j(x_1) \dots j(x_{n_i}) G_c^{(n_i)}(x_1 \dots x_{n_i})}{n_i!} \right]^{q_i} \\ &= \sum_{q_i} \prod_i \frac{1}{q_i!} \left[\frac{\int dx_1 \dots dx_{n_i} j(x_1) \dots j(x_{n_i}) G_c^{(n_i)}(x_1 \dots x_{n_i})}{n_i!} \right]^{q_i} \\ &= \exp \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dx_1 \dots dx_N j(x_1) \dots j(x_N) G_c^{(N)}(x_1, \dots, x_N) . \end{aligned}$$

Pour passer de la première à la deuxième égalité, on a utilisé (43) et la symétrie de G_c par rapport à ses variables. On trouve donc que la fonctionnelle génératrice $W(j)$ des fonctions de corrélation connexes est $\ln [Z(j)/Z(0)]$:

$$W(j) = \ln \frac{Z(j)}{Z(0)} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N!} \int dx_1 \dots dx_N j(x_1) \dots j(x_N) \times$$

$$\times G_c^{(N)}(x_1, \dots, x_N) .$$

(44)

Notez que $G^{(N)}$ peut s'écrire :

$$G^{(N)} = G_c^{(N)}(x_1, \dots, x_N) + \sum_{U I_\alpha = I} \prod_{\alpha} G_c(I_\alpha)$$

où $I = \{x_1, \dots, x_N\}$ et I_α est une partition de I : $U(I_\alpha) = I$. Chaque terme apparaît une fois et une seule dans le membre de droite. Remarquez aussi que dans le cas d'un hamiltonien gaussien, les fonctions de corrélation connexes sont nulles pour $N \geq 3$.

C.3. Vertex propres et fonctionnelle génératrice

On peut encore trouver une simplification supplémentaire. En effet dans l'espace des k un diagramme tel que celui de la figure 21 s'écrit $\hat{G}_1 G_0(k) \hat{G}_2$.

Il suffit donc de savoir calculer \hat{G}_1 et \hat{G}_2 indépendamment pour obtenir l'expression de ce diagramme. Un tel diagramme est appelé 1-particule réductible (1-PR). On appellera *fonction de corrélation 1-particule irréductible* (1-PI) toute fonction de corrélation connexe qui ne peut pas être séparée en deux parties indépendantes en coupant une seule ligne interne (figure 22).

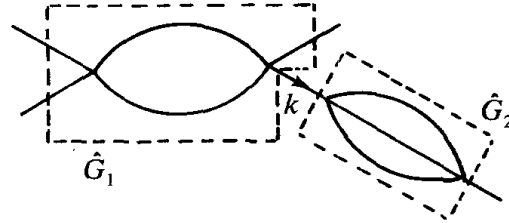
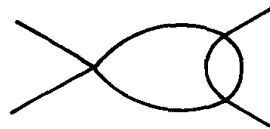
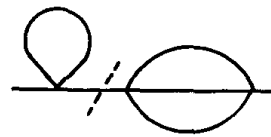


Figure 21. Un diagramme 1-particule réductible.



1-PI



1-PR.

Figure 22. Diagrammes 1-PI et 1-PR.

Enfin on appellera *vertex propre* une fonction de corrélation 1-PI que l'on a amputée de ses lignes externes.

Par exemple l'expression du vertex propre de la figure 23 est donnée par :

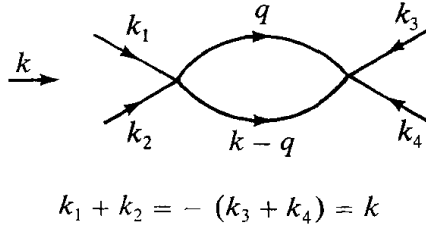


Figure 23.

$$-\frac{g^2}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + m^2)} \times \frac{1}{((k-q)^2 + m^2)}.$$

Il n'y a pas de facteur $\prod_{i=1}^4 G_0(k_i)$

associé aux lignes externes. Un vertex propre sera en général noté Γ . On démontre le résultat remarquable suivant :

Théorème : La fonctionnelle génératrice des vertex propres est la transformée de Legendre de $W(j)$.

Afin d'alléger les notations dans la démonstration qui va suivre, il sera commode d'utiliser :

$$\frac{\delta}{\delta j(x)} \rightarrow \frac{\delta}{\delta j_i}; \quad \int d^D x \rightarrow \sum_i.$$

Soit $\bar{\varphi}_i = \frac{\delta W}{\delta j_i}$ la valeur moyenne du champ et Γ la transformée de Legendre de W ; en théorie des champs, le potentiel de Gibbs Γ est appelé *action effective* (remarquez que $j(x)$ joue le rôle du champ magnétique et $\bar{\varphi}(x)$ celui de l'aimantation; les équations qui vont suivre généralisent celles du chapitre I, paragraphe D.5) :

$$\Gamma = \sum_i \bar{\varphi}_i j_i - W(j); \quad \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\varphi}_k} = j_k. \quad (45)$$

Nous avons déjà vu (I-D.5) l'identité :

$$\sum_l \frac{\delta^2 W}{\delta j_i \delta j_l} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\varphi}_l \delta \bar{\varphi}_k} = \sum_l G_{il}^{(2)} \Gamma_{lk}^{(2)} = \delta_{ik} \quad (46)$$

montrant que $\Gamma_{kl}^{(2)} = \delta^2 \Gamma / \delta \bar{\varphi}_k \delta \bar{\varphi}_l$ est l'inverse de la fonction de corrélation $G_{kl}^{(2)}$. Avec des variables continues, l'équation (46) s'écrit :

$$\int d^D z G^{(2)}(x-z) \Gamma^{(2)}(z-y) = \delta^{(D)}(x-y)$$

et dans l'espace de Fourier :

$$G^{(2)}(k) = 1/\Gamma^{(2)}(k).$$

Il est utile de définir l'énergie propre (*) $\Sigma(k)$; $-\Sigma(k)$ est la somme de tous les diagrammes à deux points 1-PI et amputés de leurs lignes externes (c'est-à-dire la somme de tous les vertex propres à deux points) :

$$-\Sigma(k) = \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} + \text{diagramme 3} + O(g^3)$$

La fonction de corrélation $G^{(2)}(k)$ s'exprime en fonction de $\Sigma(k)$:

$$\begin{aligned} G^{(2)}(k) &= G_0(k) - G_0(k) \Sigma(k) G_0(k) + \dots \\ &= G_0(k) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} [-\Sigma(k) G_0(k)]^n \right) = [G_0^{-1}(k) + \Sigma(k)]^{-1}. \end{aligned}$$

On en déduit les expressions de $G^{(2)}(k)$ et $\Gamma^{(2)}(k)$:

$$\boxed{G^{(2)}(k) = \frac{1}{k^2 + m^2 + \Sigma(k)} ; \quad \Gamma^{(2)}(k) = k^2 + m^2 + \Sigma(k)} \quad (47)$$

Passons maintenant aux fonctions de corrélation d'ordre plus élevé, en dérivant l'identité (46) par rapport à j_m :

$$\sum_l \frac{\delta^3 W}{\delta j_i \delta j_l \delta j_m} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \bar{\varphi}_l \delta \bar{\varphi}_k} + \sum_l \frac{\delta^2 W}{\delta j_i \delta j_l \delta j_m} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \bar{\varphi}_l \delta \bar{\varphi}_k} = 0. \quad (48a)$$

Comme Γ est une fonction des $\bar{\varphi}_i$, il faut transformer la deuxième dérivation dans (48.a) ; faisons-le dans le cas général ($\Gamma_{i_1 \dots i_N}^{(N)} = \delta^{(N)} \Gamma / \delta \varphi_{i_1} \dots \delta \varphi_{i_N}$) :

$$\frac{\delta}{\delta j_m} \Gamma_{i_1 \dots i_N}^{(N)} = \sum_n \frac{\delta \bar{\varphi}_n}{\delta j_m} \frac{\delta \Gamma_{i_1 \dots i_N}^{(N)}}{\delta \bar{\varphi}_n} = \sum_n G_{mn}^{(2)} \Gamma_{n i_1 \dots i_N}^{(N+1)}. \quad (48b)$$

(*) Terminologie empruntée à la théorie quantique des champs. Il faut prendre garde au fait que le signe de $\Sigma(k)$ varie selon les auteurs.

Les équations (48) peuvent s'écrire sous forme graphique en représentant les $\Gamma^{(N)}$ par des boules hachurées (figure 24) (on a utilisé (48.b) pour transformer (48.a)) :

$$\begin{aligned} \sum_l i \text{---} \textcircled{3} \text{---} l \text{---} \textcircled{\text{hachuré}} \text{---} k &= - \sum_{l,n} i \text{---} \textcircled{} \text{---} l \text{---} \textcircled{3} \text{---} k \\ &\quad \text{avec } \textcircled{} \text{---} m \text{---} \textcircled{} \text{---} n \end{aligned} \quad (a)$$

$$\frac{\delta}{\delta j_m} \textcircled{N} \text{---} i_1 \text{---} \dots \text{---} i_N = \sum_n m \text{---} \textcircled{} \text{---} n \text{---} \textcircled{N+1} \text{---} i_1 \text{---} \dots \text{---} i_N \quad (b)$$

Figure 24. Représentation graphique de (48).

Multipliant à droite les deux membres de (48.a) par G_{kp} et sommant sur k on obtient la relation entre $G_c^{(3)}$ et $\Gamma^{(3)}$:

$$- G_c^{(3)}(i, m, p) = \sum_{l,k,n} i \text{---} \textcircled{} \text{---} l \text{---} \textcircled{3} \text{---} k \text{---} \textcircled{} \text{---} p \\ m \text{---} \textcircled{} \text{---} n \text{---} \textcircled{3} \quad (49)$$

L'équation (49) permet d'identifier $\Gamma_{kln}^{(3)} = \frac{\delta^{(3)} \Gamma}{\delta \bar{\varphi}_k \delta \bar{\varphi}_l \delta \bar{\varphi}_n}$ avec le vertex

propre $\bar{\Gamma}_{kln}^{(3)}$: en effet $\Gamma_{kln}^{(3)}$ est bien la fonction de corrélation connexe amputée de ses propagateurs externes complets, et c'est bien une fonction de corrélation 1-PI.

Continuons le processus en dérivant une nouvelle fois l'équation (49) par rapport à j_l . En utilisant (48.a) et (48.b) nous obtenons la relation entre $G^{(4)}$ et $\Gamma^{(4)}$ (figure 25) :

$$-\frac{\delta}{\delta j_l} G_c^{(3)}(i, m, p) = -G_c^{(4)}(i, m, p, l) =$$

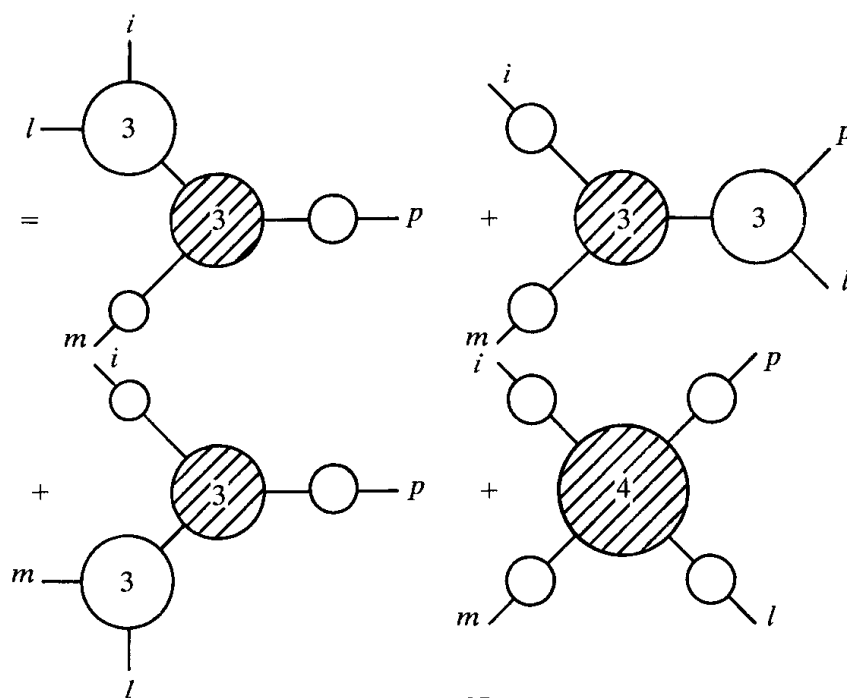


Figure 25.

Les trois premiers termes peuvent être réécrits en utilisant l'équation de la figure 26 :

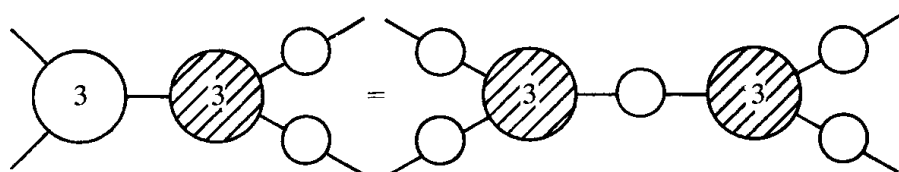


Figure 26.

Dans une théorie en φ^4 , en l'absence de brisure de symétrie, le résultat final est très simple car un seul terme est non nul (figure 27) :

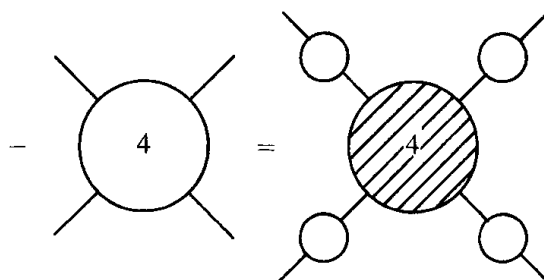


Figure 27.

Comme précédemment, la figure 25 (ou dans le cas le plus simple la figure 27) permet d'identifier $\delta^{(4)}\Gamma/(\delta\varphi)^4$ avec le vertex propre $\bar{\Gamma}^{(4)}$.

Les cas particuliers $N = 3$ et $N = 4$ que nous venons d'étudier démontent le mécanisme de démonstration du théorème annoncé précédemment. Il suffit de procéder par récurrence, en admettant que nous ayons pu écrire à l'ordre N une équation analogue à celle de la figure 25, et que nous ayons pu identifier le vertex propre $\bar{\Gamma}^{(N)}$ avec la dérivée d'ordre N du potentiel de Gibbs Γ . Dérivant cette équation par rapport à j_l nous obtenons :

$$- \text{Diagram}(N+1) = \frac{\delta}{\delta j_l} \text{Diagram}(N) + \frac{\delta}{\delta j_l} (\text{Reste})$$

où le « reste » ne contient pas $\Gamma^{(N)}$, mais seulement $\Gamma^{(N-1)}$, $\Gamma^{(N-2)}$ etc. (cf. figure 25). Nous en déduisons :

$$- \text{Diagram}(N+1) = \text{Diagram}(N+1) + \sum_{k=1}^N \text{Diagram}(N) + \frac{\delta}{\delta j_l} (\text{Reste})$$

En amputant les deux membres de l'équation précédente des propagateurs externes complets, nous pouvons identifier $\bar{\Gamma}^{(N+1)}$ dans le membre de gauche avec $\Gamma^{(N+1)}$ dans le membre de droite : en effet, après amputation, il ne reste qu'un seul graphe 1-PI dans chacun des deux membres de l'équation.

D. POTENTIEL EFFECTIF DÉVELOPPEMENT EN NOMBRE DE BOUCLES

Compte tenu de ce que nous venons d'établir dans les deux paragraphes précédents, il est utile de revenir sur les résultats démontrés en II-D et de les réinterpréter à la lumière des propriétés du développement perturbatif. Rappelons que le champ extérieur (ou source) est $j(x)$ qui joue le rôle du champ magnétique $B(x)$ du chapitre II, et que l'aimantation est notée $\bar{\varphi}(x)$.

D.1. Symétrie brisée et potentiel effectif

Lorsque $T < T_c$, la valeur moyenne de $\varphi(x)$ est non nulle, même en l'absence de champ extérieur :

$$\lim_{j \rightarrow 0} \lim_{L^D \rightarrow \infty} \bar{\varphi}(x) = v \neq 0.$$

Je me limiterai au cas d'un hamiltonien de Landau-Ginzburg simple : $n = 1$, bien que le cas $n > 1$ introduise une nouveauté intéressante : les bosons de Goldstone (exercice II.4 et XIII-C.1).

En champ extérieur nul ($j = 0$) nous avons :

$$\Gamma^{(1)} = \left. \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\varphi}} \right|_{j=0} = 0$$

et l'on peut écrire $\Gamma(\bar{\varphi}(x))$ sous la forme :

$$\Gamma[\bar{\varphi}] = \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N!} \int d^D x_1 \dots d^D x_N \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N; v) \times \\ \times (\bar{\varphi}(x_1) - v) \dots (\bar{\varphi}(x_N) - v) \quad (50)$$

où le vertex propre $\Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N; v)$ est calculé en présence d'une brisure de symétrie. On remarque que le développement de Taylor d'une fonction $f(\bar{\varphi})$ peut être écrit, soit au voisinage de $\bar{\varphi} = v$:

$$f(\bar{\varphi}) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} f^{(N)}(v) (\bar{\varphi} - v)^N$$

ou au voisinage de $\bar{\varphi} = 0$:

$$f(\bar{\varphi}) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} f^{(N)}(0) \bar{\varphi}^N.$$

L'expression (50) peut donc être transformée en :

$$\Gamma[\bar{\varphi}] = \sum_{N=2}^{\infty} \frac{1}{N!} \int d^D x_1 \dots d^D x_N \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \bar{\varphi}(x_1) \dots \bar{\varphi}(x_N) \quad (51)$$

où :

$$\Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N; v = 0).$$

Dans l'expression (51) de $\Gamma(\bar{\varphi})$, les *vertex propres* sont donc calculés en l'absence de brisure de symétrie (valeur moyenne du champ nulle).

Si $\bar{\varphi}(x)$ est indépendant de x : $\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}$ l'expression (51) devient :

$$\Gamma(\bar{\varphi}) = \sum_{N=2}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}^N}{N!} \int d^D x_1 \dots d^D x_N \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N).$$

Si l'on se souvient que l'on extrait un facteur $(2\pi)^D \delta^{(D)}(\Sigma k_i)$, ou $L^D \delta_{\Sigma k_i}$, dans la définition de la transformée de Fourier d'une fonction de corrélation, on trouve pour le potentiel de Gibbs par unité de volume :

$$\boxed{L^{-D} \Gamma(\bar{\varphi}) = \sum_{N=2}^{\infty} \frac{\bar{\varphi}^N}{N!} \Gamma^{(N)}(k_i = 0)} \quad (52)$$

La quantité $L^{-D} \Gamma(\bar{\varphi})$ est souvent appelée *potentiel effectif* $U(\bar{\varphi})$. L'équation d'état (en champ extérieur uniforme) est :

$$dU/d\bar{\varphi} = j.$$

En champ extérieur nul, la valeur moyenne v est obtenue en cherchant le minimum du potentiel effectif $U(\bar{\varphi})$. Ceci a été vu en détail (II-B) dans le cadre de l'approximation de Landau pour $\Gamma(\bar{\varphi})$.

Il est maintenant instructif de faire le lien entre l'expression exacte (52) et les expressions approchées (approximation de Landau : II-B ; première correction à Landau : II-D) que nous avons obtenues précédemment. Ce lien sera établi grâce au développement en nombre de boucles.

D.2. Développement en nombre de boucles

Remplaçons H par $\frac{1}{\hbar} H$ et cherchons un développement en puissances de \hbar de la fonctionnelle génératrice $Z(j)$:

$$\begin{aligned} Z(j) &= \mathcal{N} \exp \left(- \int \frac{1}{\hbar} V \left(\frac{\delta}{\delta j} \right) \right) \int \mathcal{D}\varphi \times \\ &\quad \times \exp \left(- \frac{1}{2} \int \varphi \frac{1}{\hbar} G^{(0)-1} \varphi + \int j \varphi \right) \\ &= \mathcal{N}' \exp \left(- \int \frac{1}{\hbar} V \left(\frac{\delta}{\delta j} \right) \right) \exp \left(\frac{1}{2} \hbar \int j G^{(0)} j \right). \end{aligned}$$

On obtient le même développement perturbatif que précédemment à ceci près que :

- chaque interaction est multipliée par $1/\hbar$,
- chaque ligne est multipliée par \hbar .

Un vertex propre à un certain ordre de la théorie des perturbations sera donc multiplié par :

$$\hbar^{I-V} = \frac{1}{\hbar} \hbar^{I-V+1} = \frac{1}{\hbar} \hbar^L$$

où I est le nombre de lignes internes (un vertex propre n'a pas de lignes externes), V le nombre d'interactions et L le nombre de boucles.

Nous avons effectué au chapitre II un calcul direct de $\Gamma(\bar{\varphi})$ sous forme d'un développement en puissances de \hbar ; d'après ce qui précède *ce développement est donc un développement en nombre de boucles* ; en particulier :

$L = 0$ correspond à l'approximation de Landau

$L = 1$ correspond à la première correction calculée au II-D .

Dans le cas d'une interaction *monomiale* ($\mathcal{V}(\varphi) = c\varphi^n$), il y a, à N fixé, correspondance biunivoque entre l'ordre de la théorie des perturbations et le nombre de boucles : en effet, par exemple si $\mathcal{V} = c\varphi^4$, $L = p + 1 - N/2$, où p est l'ordre de la théorie des perturbations. Cette remarque confirme le raisonnement utilisé au II-D.2.

Nous avons donc à notre disposition deux méthodes pour calculer le potentiel effectif $U(\bar{\varphi})$:

- soit effectuer comme au II-D un calcul direct à chaque ordre en \hbar ,

• soit utiliser l'équation (52) en calculant perturbativement tous les $\Gamma^{(N)}$ et en obtenant $\Gamma^{(N)}$ à l'ordre $L = 0$, $L = 1$, etc. On montre explicitement dans l'exercice 6 que les deux méthodes donnent le même résultat pour $L = 0$ et $L = 1$. Notons que l'approximation de Landau $L = 0$ est souvent appelée *approximation en arbres* (figure 28), ou *approximation classique* ($\hbar \rightarrow 0$, cf. note p. 76).

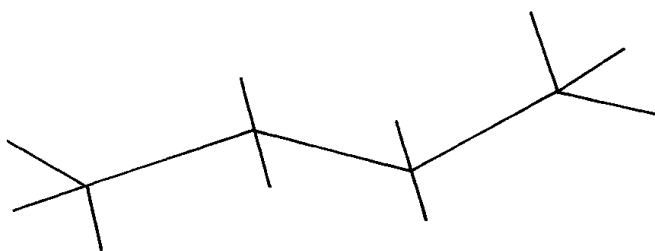


Figure 28. Un diagramme en arbres.

E. ÉVALUATION DES INTÉGRALES DE FEYNMAN

Sauf dans le cas à une boucle ($L = 1$), l'évaluation des diagrammes de Feynman est complexe, et en règle générale un calcul analytique exact est impossible. Cependant il arrive souvent que l'on n'ait pas besoin de l'expression complète du graphe, mais seulement de son comportement dans certaines limites. Il n'existe pas de recette générale pour ce type de calcul, et la technique doit être adaptée à chaque cas particulier. Il n'est évidemment pas question de faire dans ce livre une revue de tous les procédés d'évaluation mis au point depuis quatre décennies par les physiciens. Je me contenterai de décrire les calculs à une boucle de façon assez détaillée, et de donner une représentation paramétrique qui peut, ou peut ne pas être une technique pratique d'évaluation, mais qui permet en tout cas la démonstration de nombreuses propriétés générales.

E.1. Un cas élémentaire

Examinons d'abord un cas très simple, celui de la correction d'ordre g à $G^{(2)}(k)$; le graphe de la figure 29 est appelé « tadpole » (dans la théorie en φ^3 , ces graphes ont, avec un peu d'imagination, la forme d'un têtard) : techniquement un tadpole est un graphe dont l'expression est indépendante des moments externes. L'expression ana-



Figure 29.

lytique du vertex propre de la figure 29 est :

$$\bar{\Sigma} = g \frac{1}{2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 + m^2} = \frac{1}{2} g K_D \int_0^\Lambda \frac{q^{D-1} dq}{q^2 + m^2}.$$

L'intégrale est convergente si le cut-off Λ est fini. Lorsque $\Lambda/m \gg 1$, et pour $D > 2$, l'intégrale se comporte comme Λ^{D-2} . En théorie quantique des champs on souhaitera prendre la limite $\Lambda \rightarrow \infty$, et il faudra interpréter les divergences des intégrales de Feynman : les divergences qui proviennent de la région $q \rightarrow \infty$, sont appelées *divergences ultraviolettes*. Lorsque $m^2 = 0$, l'intégrale diverge à cause de la région $q \rightarrow 0$ si $D \leq 2$: cette fois il s'agit d'une *divergence infrarouge*.

Supposons $D < 2$ et faisons tendre Λ vers l'infini ; il est alors possible d'obtenir une expression analytique pour $\bar{\Sigma}$:

$$\bar{\Sigma} = \frac{1}{4} g K_D m^{D-2} \int_0^\infty \frac{x^{D/2-1} dx}{x+1} = \frac{1}{4} g K_D m^{D-2} \Gamma\left(\frac{D}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right). \quad (53)$$

Le pôle de la fonction $\Gamma(1 - D/2)$ à $D = 2$ reflète la divergence ultraviolette pour $D \geq 2$. Cependant cette expression peut être utilisée pour définir $\bar{\Sigma}$ par prolongement analytique pour des valeurs de D différentes de 2, 4, 6 ...

A la limite $m^2 = 0$, et pour des valeurs de $D > 2$, $D \neq 4, 6, \dots$, $\bar{\Sigma}$ s'annule. Ceci suggère (mais ne prouve pas !) que si l'on définit les intégrales de Feynman pour $\Lambda \rightarrow \infty$ par prolongement analytique, ce que nous appellerons au chapitre suivant « régularisation dimensionnelle », on peut purement et simplement ignorer les tadpoles, bien que pour $m = 0$, l'intégrale, à strictement parler, ne soit définie pour aucune valeur de D ! Une justification de ce résultat est donnée par exemple dans le livre de Collins, chapitre 4. Nous nous contenterons de l'argument heuristique exposé ci-dessus.

E.2. Méthode de l'identité de Feynman

Dans le cas des diagrammes à une boucle, on utilise en général l'identité de Feynman (exercice 8) :

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dx}{[ax + b(1-x)]^2}. \quad (54)$$

Appliquons cette identité pour calculer la contribution de la figure 30 à $\Gamma_{ijkl}^{(4)}$:

$$\bar{\Gamma}_{ijkl}^{(4)} = \frac{g^2}{18} [\delta_{ij} \delta_{kl} (n+4) + 2 \delta_{ik} \delta_{jl} + 2 \delta_{il} \delta_{jk}] I(k)$$

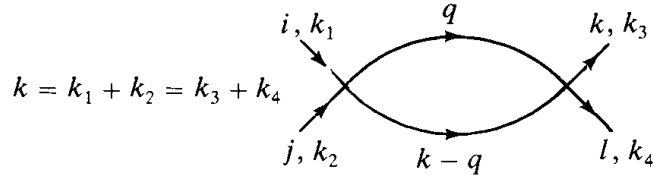


Figure 30.

(pour le facteur entre crochets, cf. exercice 3) ; l'intégrale $I(k)$ vaut :

$$I(k) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + m^2)((k - q)^2 + m^2)}.$$

En utilisant l'identité (54) on obtient :

$$I(k) = \int_0^1 dx \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(1-x)(q^2 + m^2) + x((k - q)^2 + m^2)]^2}.$$

Le changement de variables $q \rightarrow q' + xk$ met $I(k)$ sous la forme :

$$I(k^2) = \int_0^1 dx \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(q^2 + x(1-x)k^2 + m^2)^2}.$$

Cette forme montre que I est en fait une fonction de k^2 uniquement. L'intégrale sur q s'effectue en coordonnées polaires :

$$I(k^2) = K_D \int_0^1 dx \int_0^\infty \frac{q^{D-1} dq}{(q^2 + x(1-x)k^2 + m^2)^2}.$$

On pose $u = q^2$ et on utilise :

$$\int_0^\infty \frac{u^\alpha du}{(u + r)^\beta} = r^{\alpha+1-\beta} \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta-\alpha-1)}{\Gamma(\beta)}$$

ce qui donne :

$$I(k^2) = \frac{\Gamma(2 - D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx [m^2 + x(1-x)k^2]^{\frac{D}{2}-2}. \quad (55)$$

Dans l'intégration sur q , on a supposé $\Lambda \rightarrow \infty$. Ceci n'est possible que si $D < 4$, car dans le cas contraire l'intégrale présente une divergence ultraviolette, c'est-à-dire une divergence provenant de la région $q \rightarrow \infty$. La divergence à $D = 4$ est reflétée par le pôle de la fonction $\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right)$ à $D = 4$. L'expression (55) de $I(k^2)$ peut être utilisée pour définir $I(k^2)$ pour des valeurs arbitraires de D (sauf $D = 4, 6, 8, \dots$).

Lorsque $m^2 \neq 0$, le résultat de l'intégration sur x s'exprime sous forme de fonctions hypergéométriques, ce qui n'est pas particulièrement illuminant. Lorsque $m^2 = 0$, les choses se simplifient en remarquant que (*) :

$$\int_0^1 du u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

On trouve :

$$I(k^2) = \frac{\Gamma(2 - D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right) \right]^2}{\Gamma(D - 2)} (k^2)^{\frac{D}{2} - 2}. \quad (56)$$

Le facteur $(k^2)^{\frac{D}{2} - 2}$ a une origine purement dimensionnelle : en effet la dimension de I est $D - 4$ et k est la seule quantité dimensionnée à notre disposition.

D'autre part une nouvelle divergence apparaît pour $D = 2$ à cause du facteur $[\Gamma(D/2 - 1)]^2 / \Gamma(D - 2)$. Cette divergence provient de la région $q \rightarrow 0$: c'est un nouvel exemple de divergence infrarouge.

E.3. Représentation paramétrique générale

Etablissons maintenant une représentation paramétrique générale des intégrales de Feynman en suivant Itzykson-Zuber ; considérons un vertex propre $\Gamma^{(E)}$ comprenant (**):

- E lignes externes $k_s : 1 \leq s \leq E$,
- I lignes internes $p_i : 1 \leq i \leq I$, correspondant à des masses m_i ,
- L variables d'intégration indépendantes $q_r : 1 \leq r \leq L$.

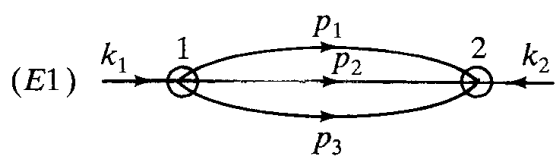
Tous les moments externes sont supposés entrer dans le diagramme ; les lignes internes sont orientées arbitrairement. Considérons un vertex v et une ligne interne i , et choisissons un facteur ε_{vi} de la façon suivante :

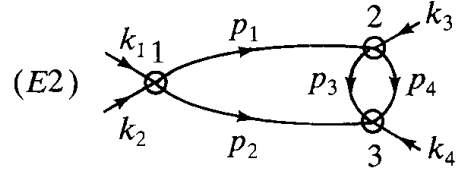
$$\begin{aligned} \varepsilon_{vi} &= +1 && \text{si la ligne } i \text{ part du vertex } v \\ \varepsilon_{vi} &= -1 && \text{si la ligne } i \text{ arrive au vertex } v \\ \varepsilon_{vi} &= 0 && \text{si la ligne } i \text{ n'est pas connectée directement au vertex } v. \end{aligned}$$

(*) De façon générale, l'évaluation des intégrales de Feynman est plus simple quand les masses sont nulles.

(**) Jusqu'à la fin du chapitre, je désignerai par E (et non N) le nombre de lignes externes.

Exemples :

(E1)  $\varepsilon_{vi} = \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} (E1)$

(E2)  $\varepsilon_{vi} = \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} (E2)$

L'expression de l'intégrale sera :

$$J' = \int \prod_{i=1}^I \left\{ \frac{d^D p_i}{(2\pi)^D} \frac{1}{p_i^2 + m_i^2} \right\} \prod_{v=1}^V (2\pi)^D \delta^{(D)} \left(k_v - \sum_i \varepsilon_{vi} p_i \right) \quad (57)$$

où k_v = somme de tous les moments externes arrivant au vertex v ($k_v = 0$ si le vertex n'est pas connecté directement aux lignes externes).

Nous allons utiliser la « régularisation de Schwinger » du propagateur :

$$\frac{1}{p^2 + m^2} = \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(p^2 + m^2)}. \quad (58)$$

Cette représentation a un double avantage :

- elle permet de ramener le calcul de (57) au calcul d'intégrales gaussiennes,
- elle se prête bien à l'introduction d'un cut-off :

$$\frac{1}{p^2 + m^2} \rightarrow \int_{\Lambda^{-2}}^\infty d\alpha e^{-\alpha(p^2 + m^2)} = \frac{e^{-(p^2 + m^2)/\Lambda^2}}{p^2 + m^2}. \quad (59)$$

Cette façon d'introduire un cut-off est beaucoup plus élégante que celle qui consiste à couper brutalement les intégrales sur q à $q = \Lambda$; dès que $L > 1$, le cut-off brutal devient impraticable. En utilisant (58) et la représentation exponentielle de la fonction δ l'expression de J' devient :

$$J' = \int \prod_{i=1}^I \left\{ \frac{d^D p_i}{(2\pi)^D} d\alpha_i \exp(-\alpha_i(p_i^2 + m_i^2)) \right\} \times \\ \times \prod_{v=1}^V \left\{ d^D y_v \exp \left(-i y_v \cdot \left(k_v - \sum_i \varepsilon_{vi} p_i \right) \right) \right\}.$$

L'intégrale sur p est une transformée de Fourier d'une gaussienne :

$$\int \frac{d^D p_i}{(2\pi)^D} \exp \left(-\alpha_i p_i^2 + i p_i \cdot \sum_v \varepsilon_{vi} y_v \right) = \frac{1}{(4\pi\alpha_i)^{D/2}} \times \\ \times \exp \left(-\frac{1}{4\alpha_i} \left(\sum_v \varepsilon_{vi} y_v \right)^2 \right) \\ J' = \int \prod_{i=1}^I \left\{ \frac{d\alpha_i e^{-\alpha_i m_i^2} \exp \left(-\frac{1}{4\alpha_i} \left(\sum_v \varepsilon_{vi} y_v \right)^2 \right)}{(4\pi\alpha_i)^{D/2}} \right\} \prod_{v=1}^V \{d^D y_v e^{-ik_v \cdot y_v}\}.$$

Effectuons maintenant les intégrations sur les variables y_v , en numérotant les vertex de 1 à V et en faisant le changement de variables de jacobien 1 :

$$y_1 = z_1 + z_V ; \quad y_2 = z_2 + z_V ; \quad \dots ; \quad y_V = z_V .$$

Remarquons que $\sum_v \varepsilon_{vi} = 0$ car à i fixé seuls deux ε_{vi} sont $\neq 0$, l'un est égal à +1 et l'autre à -1.

$$\sum_{v=1}^V \varepsilon_{vi} y_v = \sum_{v=1}^{V-1} \varepsilon_{vi} z_v + \sum_{v=1}^V \varepsilon_{vi} z_V = \sum_{v=1}^{V-1} \varepsilon_{vi} z_v .$$

L'intégrale sur z_V donne donc un facteur $(2\pi)^D \delta^{(D)} \left(\sum_{i=1}^V k_v \right)$:

$$J' = (2\pi)^D \delta^{(D)} \left(\sum_{s=1}^E k_s \right) J$$

et par convention ce facteur $(2\pi)^D \delta(\dots)$ est à extraire de $\Gamma^{(E)}$; J devient :

$$J = \int \prod_{i=1}^I \left\{ \frac{d\alpha_i e^{-\alpha_i m_i^2} \exp \left(-\frac{1}{4\alpha_i} \left(\sum_{v=1}^{V-1} \varepsilon_{vi} z_v \right)^2 \right)}{(4\pi\alpha_i)^{D/2}} \right\} \prod_{v=1}^{V-1} \{d^D z_v e^{-ik_v \cdot z_v}\}.$$

Introduisons maintenant la matrice symétrique $(V-1) \times (V-1) A_{st}(\alpha)$:

$$A_{st}(\alpha) = \sum_i \varepsilon_{si} \frac{1}{\alpha_i} \varepsilon_{ti} .$$

On peut montrer que cette matrice est non singulière et positive. L'intégrale sur les variables z_v est à nouveau gaussienne :

$$\int \left(\prod_{v=1}^{V-1} d^D z_v e^{-ik_v \cdot z_v} \right) \exp \left(-\frac{1}{4} \sum_{s,t} z_s A_{st}(\alpha) z_t \right) = \\ = \frac{(4\pi)^{\frac{D}{2}(V-1)}}{[\det A(\alpha)]^{D/2}} \exp \left(-\sum_{s,t=1}^{V-1} k_s A_{st}^{-1}(\alpha) k_t \right).$$

Notez que $I - V + 1 = L$ est le nombre de boucles indépendantes. On trouve donc finalement :

$$\boxed{J = (4\pi)^{-LD/2} \int \prod_{i=1}^I \left\{ d\alpha_i e^{-\alpha_i m_i^2} \right\} \left[\frac{1}{P(\alpha)} \right]^{D/2} e^{-k^T A^{-1} k} \quad (60)}$$

$$A_{si} = \sum_j \varepsilon_{sj} \frac{1}{\alpha_j} \varepsilon_{ji}; \quad P(\alpha) = \alpha_1 \dots \alpha_I \det A(\alpha)$$

Ecrivons explicitement les intégrales correspondant aux exemples E1 et E2 :

$$(E1) \quad A_{11} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$$

$$P(\alpha) = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3$$

$$J = (4\pi)^{-D} \int \prod_{i=1}^3 \left\{ d\alpha_i e^{-\alpha_i m_i^2} \right\} [P(\alpha)]^{-D/2} e^{-k^2 \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{P(\alpha)}}$$

$$(E2) \quad A_{11} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}; \quad A_{12} = A_{21} = \frac{-1}{\alpha_1}; \quad A_{22} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_4}$$

$$P(\alpha) = \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_4 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_3 \alpha_4.$$

Il est possible de donner des règles générales pour écrire $P(\alpha)$ et $A^{-1}(\alpha)$ dans le cas d'un graphe arbitraire : cf. Itzykson-Zuber, p. 297.

La dernière étape consiste à introduire les variables d'homogénéité :

$$\lambda = \alpha_1 + \dots + \alpha_I; \quad \alpha_i = \lambda x_i; \quad 0 \leq x_i \leq 1$$

$$\int \prod d\alpha_i = \int \prod dx_i \frac{d\lambda}{\lambda^{-I+1}} \delta\left(1 - \sum x_i\right).$$

D'autre part :

$$A(\alpha) = \frac{1}{\lambda} A(x)$$

$$P(\alpha) = \alpha_1 \dots \alpha_I \det A(\alpha) = \lambda^{I-(V-1)} (x_1 \dots x_I \det A(x)) \\ = \lambda^{LD/2} P(x)$$

d'où le résultat :

$$\boxed{J = (4\pi)^{-LD/2} \int \frac{\prod dx_i \delta\left(1 - \sum x_i\right)}{[P(x_i)]^{D/2}} \int \frac{d\lambda}{\lambda^{1-I+LD/2}} \times} \quad (61)$$

$$\times \exp\left(-\lambda \left(\sum_i x_i m_i^2 + k^T A^{-1}(x) k\right)\right)$$

Si $m_i = m$, $\sum m_i^2 x_i = m^2$; d'autre part si l'intégrale sur λ converge à $\lambda = 0$:

$$J = \frac{\Gamma(I - LD/2)}{(4\pi)^{LD/2}} \int \frac{\prod dx_i \delta\left(1 - \sum x_i\right)}{[P(x_i)]^{D/2}} (m^2 + k^T A^{-1}(x) k)^{\frac{LD}{2} - I}. \quad (62)$$

On retrouve bien l'équation (55) dans le cas $I = 2$, $L = 1$; il est facile de vérifier que $P(x) = 1$ et $A^{-1}(x) = x(1 - x)$. L'exposant $\left(\frac{LD}{2} - I\right)$ se retrouve par un argument dimensionnel : la dimension de J est en effet $LD - 2I$.

Il faut se méfier de la simplicité apparente de l'équation (62) : des divergences sont cachées dans les intégrales sur les variables x_i ; cela ne se produit pas dans le cas d'une boucle, mais les ennuis arrivent dès que $L > 1$. Je donne maintenant deux exemples d'évaluation explicite.

E.4. Calcul de η à l'ordre ε^2

Les divergences des intégrales de Feynman au voisinage de $D = 4$ vont jouer un rôle crucial dans les deux chapitres suivants. Commençons par étudier un cas simple, celui de $\Gamma^{(4)}$, en reprenant l'expression (55) de $I(k^2)$ et en l'évaluant au voisinage de $\varepsilon (= 4 - D) = 0$.

$$I(k^2) = \frac{\Gamma(\varepsilon/2)}{(4\pi)^{D/2}} \int_0^1 dx [m^2 + x(1-x)k^2]^{-\varepsilon/2}.$$

En utilisant :

$$X^{-\varepsilon} \simeq 1 - \varepsilon \ln X; \quad \Gamma(\varepsilon) \simeq \frac{1}{\varepsilon}$$

on trouve à l'ordre $(\varepsilon)^0$:

$$(4\pi)^2 I(k^2) = \frac{2}{\varepsilon} - \int_0^1 dx \ln [m^2 + x(1-x)k^2] + \text{Cte}. \quad (63)$$

Le pôle à $\varepsilon = 0$ reflète la divergence ultraviolette à $D = 4$.

L'étude de l'exemple (E1) va permettre le calcul de η à l'ordre ε^2 ; le graphe de l'exemple (E1) donne une contribution à l'énergie propre $\Sigma(k^2)$ et cette fois,

on calculera directement en dimension $D = 4$ avec un cut-off Λ :

$$I(k^2) = (4\pi)^{-4} \int \frac{\prod_1^3 dx_i \delta(1 - \sum x_i)}{[P(x_i)]^2} \int_{c\Lambda^{-2}}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \exp(-\lambda(m^2 + k^2 f(x_i)))$$

$$P(x_i) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 ; \quad f(x_i) = (x_1 x_2 x_3)/P(x_i)$$

et c est une constante.

L'intégrale est une intégrale à deux boucles et présente des divergences de recouvrement, qui se traduisent par la divergence de l'intégrale sur les x_i .

Ces divergences se produisent quand certains des x_i tendent vers zéro ; en réalité, à cause du cut-off, les x_i ne peuvent jamais être nuls, mais tenir compte du cut-off est compliqué. Heureusement nous aurons uniquement besoin de la dérivée :

$$\frac{dI}{dk^2} = -\frac{1}{(4\pi)^4} \int \frac{\prod_1^3 dx_i \delta(1 - \sum x_i) f(x_i)}{[P(x_i)]^2} \times$$

$$\times \int_{c\Lambda^{-2}}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda} \exp(-\lambda(m^2 + k^2 f(x_i))) .$$

L'intégrale sur les x_i est maintenant convergente. En effet comme :

$$P(x_i) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

on voit que la région dangereuse est celle où (x_1, x_2) , (x_1, x_3) ou (x_2, x_3) tendent vers zéro *simultanément* ; par exemple si $x_3 \rightarrow 1$, $P(x_i) \simeq (x_1 + x_2)$ et

$$\int \frac{dx_1 dx_2}{(x_1 + x_2)^2}$$

diverge. Par contre :

$$\int \frac{x_1 x_2 dx_1 dx_2}{(x_1 + x_2)^3}$$

est parfaitement convergent. L'intégrale sur λ donne un facteur $\ln \Lambda^2$ + termes non divergents ; on trouve :

$$\frac{dI}{dk^2} \simeq -\frac{\ln \Lambda^2}{(4\pi)^4} \int \frac{\prod_1^3 dx_i \delta(1 - \sum x_i) f(x_i)}{[P(x_i)]^2} .$$

Pour calculer l'intégrale, on effectue le changement de variables :

$$x_1 = \rho x ; \quad x_2 = x(1 - \rho) ; \quad x_3 = 1 - x .$$

Un calcul ennuyeux, mais sans aucune difficulté, montre que l'intégrale vaut $1/2$:

$$\frac{dI}{dk^2} = -\frac{1}{2(4\pi)^4} \ln \Lambda^2 + \text{termes non divergents} . \quad (64)$$

Comme application, calculons l'exposant critique η à l'ordre ε^2 . Le graphe que nous venons d'étudier est le seul à donner une contribution dépendant de k à l'ordre g^2 . En effet, l'autre graphe 1-PI (figure 31) donne une contribution indépendante de k . Lorsque $m^2 = 0$, le terme logarithmique de $\Sigma(k^2)$ est en $\ln(\Lambda^2/k^2)$, car l'argument du logarithme doit être sans dimensions. Rétablissant tous les facteurs, la contribution à $\frac{d}{dk^2} \Sigma(k^2)$ que nous venons de calculer est :

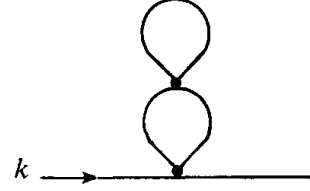


Figure 31.

$$-\frac{g^2}{12(4\pi)^4} \ln \frac{k^2}{\Lambda^2}$$

ce qui donne pour la dérivée de la fonction de corrélation inverse :

$$\frac{d}{dk^2} \Gamma(k^2) = 1 - \frac{g^2}{12(4\pi)^4} \ln \frac{k^2}{\Lambda^2} + O(g^2 \times 1, g^3).$$

D'autre part à $T = T_c$ on sait que

$$\Gamma(k^2) = k^{2-\eta} = k^2 \left(1 - \frac{\eta}{2} \ln k^2 + \dots \right), \quad \Gamma'(k^2) \simeq 1 - \frac{\eta}{2} \ln k^2.$$

On sait également que l'on doit choisir pour g la valeur au point fixe (cf. III.67) :

$$g = g^* = \frac{(4\pi)^2 \varepsilon}{3}.$$

Par identification des termes en $\ln k^2$, on obtient η :

$$\eta = \frac{(g^*)^2}{6(4\pi)^4} = \frac{\varepsilon^2}{54}. \quad (65)$$

F. COMPTAGE DE PUISSANCES DIVERGENCES ULTRAVIOLETES ET INFRAROUGES

Dans des facteurs tels que $\lambda^{-1+I-LD/2}$ dans (61) ou $(m^2 + k^T A^{-1} k)^{LD/2-I}$ dans (62), les exposants ont une origine purement dimensionnelle : l'intégrant est, schématiquement, $\int (d^D q)^L (p^2)^{-I}$ et a pour dimension $LD - 2I$. On définit une quantité $\omega(G)$, appelée *degré (ou indice) superficiel de divergence* du

diagramme, qui permet de déterminer le *degré de divergence ultraviolet* ($q \rightarrow \infty$), par :

$$\omega(G) = LD - 2I.$$

L'intégrale sur q se comporte schématiquement comme $\int^\Lambda q^{\omega(G)-1} dq$: si $\omega(G) > 0$, l'intégrale divergera comme $\Lambda^{\omega(G)}$ (plus exactement comme $\Lambda^{\omega(G)}(\ln \Lambda)^p$ où p est entier), et si $\omega(G) = 0$, comme $(\ln \Lambda)^p$. Si $\omega(G) < 0$, le graphe est superficiellement convergent (superficiellement car une sous-intégration peut conduire à une divergence). Nous allons obtenir une expression intéressante de $\omega(G)$, faisant intervenir le nombre de lignes externes du diagramme, en utilisant d'abord un argument topologique, puis un argument dimensionnel.

F.1. Argument topologique

Supposons une interaction de type tout à fait général, avec des termes en φ^3 , φ^4 , etc., et même des couplages dérivatifs : $\varphi^2(\nabla\varphi)^2$ etc. Dans le cas d'une interaction dérivative, chaque ∇ donne un facteur ik au vertex ; en effet dans l'application du théorème de Wick :

$$\overline{\varphi(x)} \nabla \varphi(z) \rightarrow \nabla_z G_0(x-z) = \text{T.F.} (ikG_0(k)).$$

Si l'on a un vertex de type (i) avec une interaction contenant δ_i dérivées, il faudra multiplier l'intégrand du diagramme par un facteur $(k)^{\delta_i}$. On aura donc dans le cas de couplages dérivatifs :

$$\omega(G) = LD - 2I + \sum_i \delta_i.$$

Utilisons d'abord $L = I - V + 1$:

$$\omega(G) - D = I(D - 2) + \sum_i (\delta_i - D).$$

Au vertex (i) arrivent n_i lignes si le vertex correspond à une interaction en $(\varphi)^{n_i}$, avec éventuellement des dérivées ; $n_i = n_i^{(\text{int})} + n_i^{(\text{ext})}$ et :

$$I = \frac{1}{2} \sum_i n_i^{(\text{int})}; \quad E = \sum_i n_i^{(\text{ext})}.$$

Définissons un index ω_i dont l'interprétation sera donnée un peu plus loin :

$$\omega_i = n_i \left(\frac{D}{2} - 1 \right) + \delta_i. \quad (66)$$

L'expression de $\omega(G)$ devient :

$$\begin{aligned}\omega(G) - D &= \left(\frac{D}{2} - 1\right) \sum_i n_i^{(\text{int})} + \sum_i (\delta_i - D) \\ &= \left(\frac{D}{2} - 1\right) \sum_i n_i - \left(\frac{D}{2} - 1\right) \sum_i n_i^{(\text{ext})} + \sum_i (\delta_i - D) \\ &= \sum_i (\omega_i - D) - E \left(\frac{D}{2} - 1\right)\end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{\omega(G) - D = \sum_i (\omega_i - D) - E \left(\frac{D}{2} - 1\right)} . \quad (67)$$

Exemple : Théorie en $g\varphi^4$: $\omega = 4 \left(\frac{D}{2} - 1\right) = 2D - 4$

$$\begin{aligned}E = 2 & \quad \omega(G) = V(D - 4) + 2 \\ E = 4 & \quad \omega(G) = V(D - 4) + 4 - D \\ E = 6 & \quad \omega(G) = V(D - 4) + 6 - 2D .\end{aligned}$$

De façon générale, l'équation (66) montre que pour $D > 2$ (mais sinon la théorie n'est pas définie), $\omega(G)$ décroît avec le nombre de lignes externes. Pour une théorie en $g\varphi^4$, et pour $D = 4$, seuls les diagrammes $E = 2$ ($\omega(G) = 2$) et $E = 4$ ($\omega(G) = 0$) sont superficiellement divergents.

F.2. Argument dimensionnel

Nous avons vu (III-D.2) que la dimension du champ φ est $[\varphi] = \frac{D}{2} - 1$. Un terme d'interaction général s'écrira :

$$g_i \int d^D x (\nabla)^{\delta_i} (\varphi)^{n_i} .$$

Cette quantité doit être sans dimensions, ce qui impose :

$$[g_i] - D + \delta_i + n_i \left[\frac{D}{2} - 1 \right] = 0$$

ou

$$\boxed{[g_i] = D - \omega_i} . \quad (68)$$

La dimension $[g_i]$ de la constante de couplage est donc reliée très directement à l'index ω_i défini en (66).

Pour retrouver l'équation (67), déterminons d'abord la dimension de $\Gamma^{(E)}$ dans l'espace des k ; $\Gamma^{(E)}(k_i = 0)$ s'obtient en dérivant E fois le potentiel de Gibbs (sans dimension) par rapport à une aimantation uniforme M , de dimension $\left(\frac{D}{2} - 1\right)$, et en divisant par un volume (dimension $-D$) :

$$[\Gamma^{(E)}] = D - E \left(\frac{D}{2} - 1 \right). \quad (69)$$

La quantité :

$$\left(\prod_{i=1}^v g_i \right) \int k^{\omega(G)-1} dk$$

doit avoir pour dimension $D - E \left(\frac{D}{2} - 1 \right)$, et compte tenu de (68) on retrouve bien le résultat (67).

F.3. Divergences infrarouges (interaction en φ^4)

Lorsque $m^2 = 0$, on peut avoir dans certains cas des divergences infrarouges. Contrairement au cas des divergences ultraviolettes, *ces divergences ne se produisent que pour des configurations particulières des moments externes, du moins lorsque $D = 4$* . Par exemple la contribution de la figure 32 à $\Gamma^{(6)}$

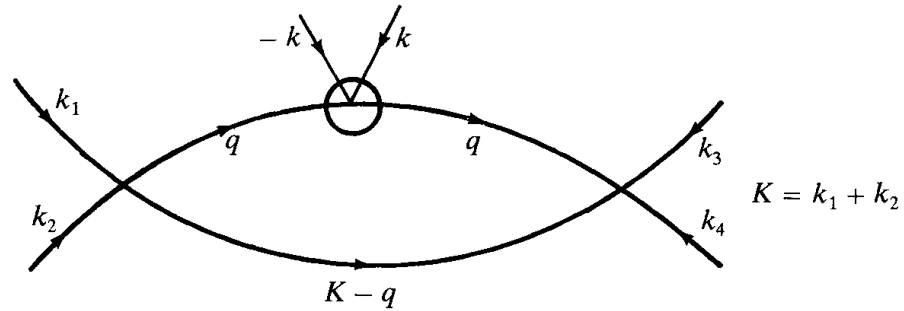


Figure 32.

sera donnée, à un facteur près, par l'intégrale ($D = 4, m^2 = 0$) :

$$\int \frac{d^4 q}{q^4 (K - q)^2}$$

qui est infrarouge divergente. Cette divergence provient de ce qu'au vertex encerclé entre un moment externe nul. De façon générale, on appellera *configuration non exceptionnelle* une configuration des moments externes telle qu'aucune somme partielle des k_i n'est nulle :

$$\sum_{i \in I} k_i \neq 0 \quad \forall I$$

où I est un sous-ensemble quelconque des indices $(1, \dots, E)$ des E moments externes k_i . Lorsqu'une configuration est non exceptionnelle, il est possible de relier tous les moments externes par des lignes internes dont les moments sont $\neq 0$, appelées lignes de « moments durs ». En effet si cela n'était pas possible, on pourrait séparer le diagramme en deux parties en coupant uniquement des lignes internes de moment $\simeq 0$ (appelées lignes de « moments mous »). Cependant dans une des parties du diagramme entre un moment $\sum_{i=1}^{E_i} k_i \neq 0$, alors que les lignes internes emportent un moment nul.

Considérons par exemple le graphe de la figure 33, emprunté à Itzykson-Zuber :

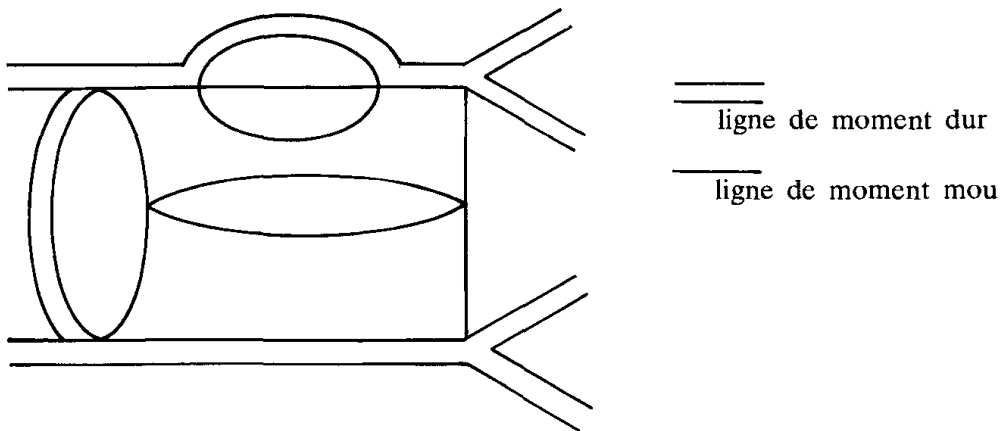


Figure 33.

avec un schéma possible pour le « flot des moments durs ». Imaginons de contracter toutes les lignes internes de moment dur en un vertex unique (figure 34) et soient I , L et V le nombre de boucles, de lignes internes et de vertex du diagramme *contracté* ; soit n le nombre de

lignes internes de moment mou accrochées au vertex contracté. Nous avons les relations :

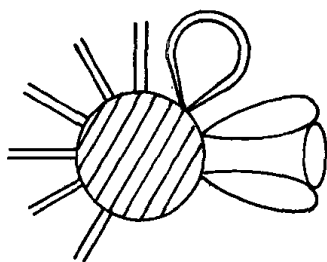


Figure 34.

$$L = I - (V + 1) + 1 = I - V$$

$$2I = 4V + n.$$

Le degré superficiel de divergence du diagramme contracté est :

$$\omega = DL - 2I = L(D - 4) + 4L - 2I$$

$$\omega = n + L(D - 4). \quad (70)$$

Le degré d'homogénéité du diagramme contracté lorsque toutes les boucles internes ont des moments ≈ 0 est ω : si $D = 4$, cet argument semi-heuristique montre que *le diagramme est infrarouge convergent dans une configuration non exceptionnelle* : en effet comme le diagramme est 1-PI, $n \geq 2$.

Au contraire pour $D < 4$, on peut facilement trouver des diagrammes infrarouges-divergents même dans une configuration non exceptionnelle. Par exemple le diagramme de la figure 35 :

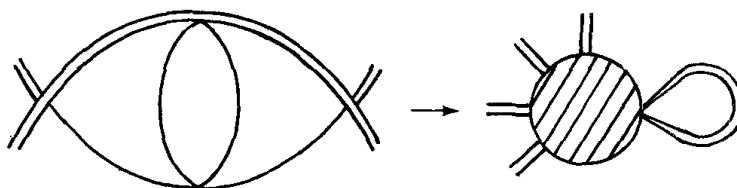


Figure 35.

a un degré superficiel de divergence :

$$\omega = 4 + 3(D - 4) = 3D - 8.$$

Il sera donc infrarouge-divergent, même dans une configuration non exceptionnelle lorsque $D \leq \frac{8}{3}$.

Le raisonnement précédent montre que l'interaction en φ^4 est la plus singulière dans la région infrarouge (celle en φ^3 étant exclue par la symétrie $\varphi \rightarrow -\varphi$). Ceci justifie, au moins de façon heuristique, l'utilisation du hamiltonien de Ginzburg-Landau (II.19) pour l'étude du comportement critique.

Le *théorème de Weinberg* ⁽¹⁾ permet de déterminer le comportement asymptotique d'un graphe lorsque tous les moments externes tendent vers l'infini au même rythme : $k_i \rightarrow \lambda k_i$, $\lambda \rightarrow \infty$. Plaçons-nous en dimension 4 dans le cadre d'une interaction en φ^4 , et supposons que l'intégrale dans (62) converge dans le domaine ultraviolet ; si la limite $m = 0$ de cette intégrale existe, ce qui sera le cas si la configuration $[k_i]$ est non exceptionnelle, alors :

$$J(\lambda k_i) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^{\omega(G)}. \quad (71)$$

Lorsque $J(k)$ doit être renormalisée à cause des divergences ultraviolettes (chapitre VI)

$$J(\lambda k_i) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} \lambda^{\omega(G)} (\ln \lambda)^p \quad (72)$$

où p est un entier dépendant du graphe considéré.

EXERCICES

1) Dans le cas $n = 1$, quels sont les facteurs de symétrie des graphes de la figure 36 :

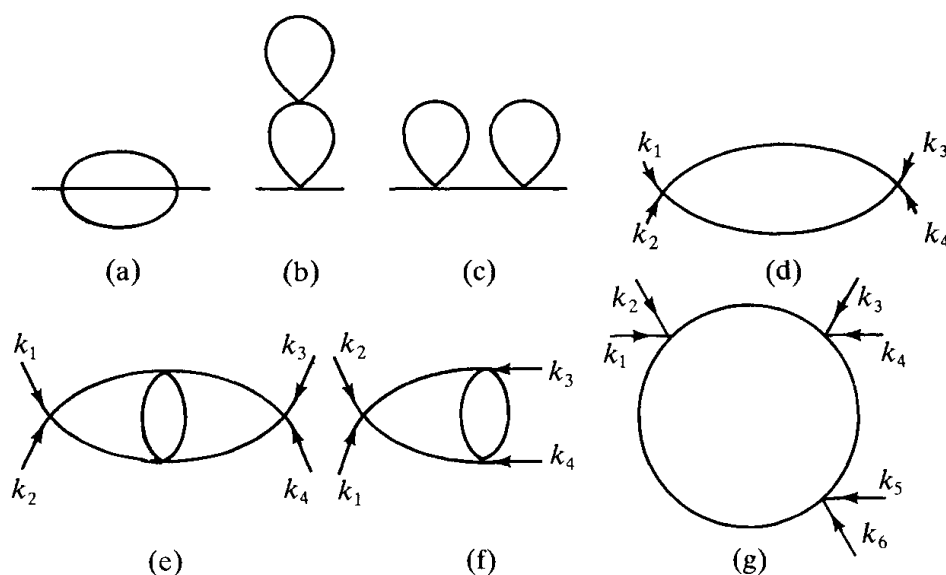


Figure 36.

2) Quels sont les facteurs de symétrie des diagrammes de fluctuation du vide de la figure 37 (cas $n = 1$) ?

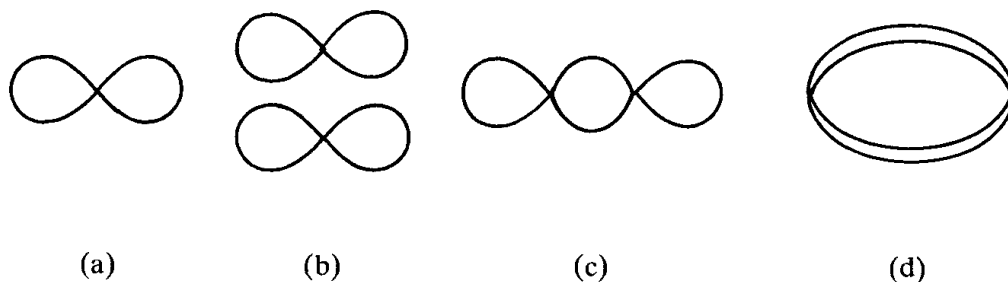


Figure 37.

Vérifiez votre résultat en utilisant (24).

3) Dans le cas où n est quelconque, déterminer le facteur de symétrie du graphe de la figure 38 :

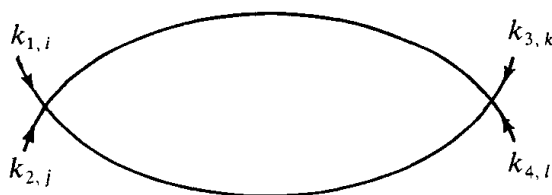


Figure 38.

4) Dans le cas où n est quelconque, quels sont les facteurs de symétrie des graphes de la figure 39 ?

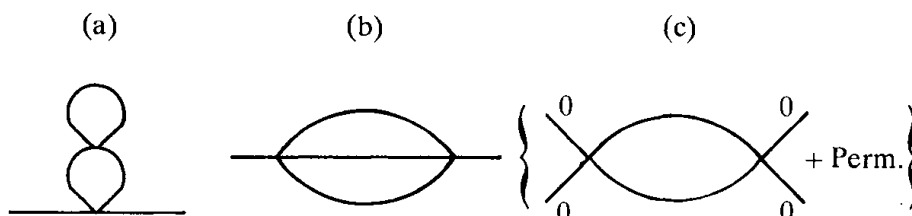


Figure 39.

5) (a) Dans le cas d'une interaction en $\frac{g}{3!} \varphi^3$, dessiner :

- les diagrammes de fluctuation du vide à l'ordre g^2 et g^4
- $G^{(1)}$ à l'ordre g et g^3
- $G^{(2)}$ à l'ordre g^2 et g^4
- $G^{(3)}$ à l'ordre g et g^3
- $G^{(4)}$ à l'ordre g^2 et g^4 .

(b) Quels sont à ces ordres les graphes 1-PI de $G^{(2)}$, $G^{(3)}$ et $G^{(4)}$?

6) (a) Quel est le facteur de symétrie du graphe de la figure 40 contribuant à $\Gamma^{(2N)}(k_i = 0)$? (On se limitera au cas $n = 1$.)

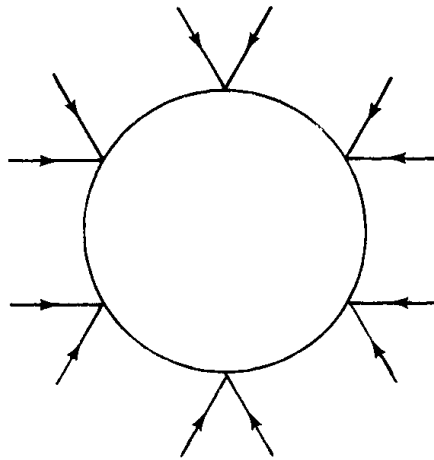


Figure 40.

(b) En sommant sur tous les graphes à zéro et à une boucle, retrouver à l'ordre \hbar l'expression (II.44) du potentiel effectif.

7) Obtenir dans le cas $n = 1$ l'expression du type (60) pour le graphe de la figure 41, les lignes internes étant numérotées comme l'indique la figure. Vérifier votre résultat en utilisant les règles données dans Itzykson et Zuber, p. 297.

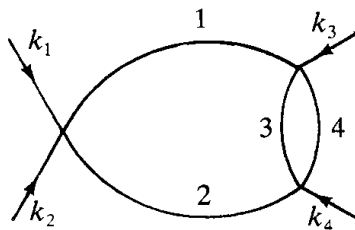


Figure 41.

8) Identité de Feynman

Démontrer l'identité :

$$\frac{1}{a^{\alpha_1} a^{\alpha_2}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 \frac{dx_1 dx_2 x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \delta(1 - x_1 - x_2)}{(x_1 a_1 + x_2 a_2)^{\alpha_1 + \alpha_2}}.$$

Suggestion :

$$\int dx x^n e^{-ax} = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}.$$

Généraliser à $(a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n})^{-1}$ (cf. équation B.1).

9) Calculer l'intégrale :

$$\int \frac{\prod_{i=1}^3 dx_i \delta(1 - \sum x_i) x_1 x_2 x_3}{(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)^3}.$$

10) Montrer par un calcul direct à $(4 - \varepsilon)$ dimensions que :

$$\bar{\Sigma}'(k^2) = -\frac{d}{dk^2} \text{---}\bigcirc\text{---} = \frac{g^2}{12(4\pi)^4} \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon)^0.$$

11) Calcul de $\bar{\Sigma}(k^2)$ dans l'espace des $x(D=4)$ ⁽²⁾

(a) Montrer que

$$\bar{\Sigma}(k^2) = (\text{Cte}) \int d^4x e^{ik \cdot x} [G_0(x)]^3.$$

(b) En utilisant l'expression de $G_0(x)$ avec un cut-off Λ (cf. exercice II.6)

$$G_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^2 \|\mathbf{x}\|^2} (1 - J_0(\Lambda \|\mathbf{x}\|))$$

déterminer le coefficient de $k^2 \ln(k^2/\Lambda^2)$.

12) Intégration successive sur les boucles

Une méthode d'évaluation des intégrales de Feynman consiste à intégrer successivement sur les boucles. Cette méthode est bien adaptée au cas $m=0$ et à la régularisation dimensionnelle.

(a) On écrit l'intégrale $I(k^2)$ du graphe :

$$\begin{aligned} \text{---}k\text{---} \bigcirc \text{---} &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p-k)^2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2(p-q)^2} \\ &= \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p-k)^2} \Pi(p^2) = I(k^2) \end{aligned}$$

Donner l'expression de $I(k^2)$ obtenue en utilisant l'expression (56) pour $\Pi(p^2)$ et l'identité de l'exercice 8, sans faire l'intégration sur x .

(b) Montrer que le calcul se simplifie si l'on souhaite seulement déterminer la partie divergente (en $1/\varepsilon$) de $I(k^2)$, et retrouver le résultat de l'exercice 10.

13) Développement en $1/n$ (²)

On se propose de calculer les corrections en $1/n$ aux résultats de l'exercice (III.7), en utilisant une méthode diagrammatique reposant sur la représentation des figures 9 à 11. On supposera que la constante de couplage u_0 du hamiltonien de Ginzburg-Landau avec symétrie $O(n)$ est d'ordre $1/n$: $u_0 \rightarrow u_0/n$.

(a) Montrer que les graphes dominants de $\Sigma(k^2, r_0)$ sont donnés à la limite $n \rightarrow \infty$ par la figure 42 :

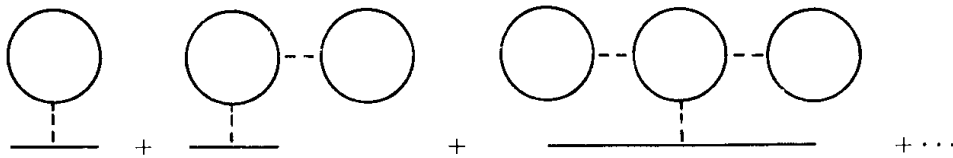


Figure 42.

et en déduire pour $\Sigma(0, r_0)$ la relation :

$$\Sigma(0, r_0) = \frac{u_0}{6} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{p^2 + r_0 + \Sigma(0, r_0)}.$$

Retrouver à partir de cette équation les résultats de l'exercice (III.7) :

$$\eta = 0; \quad \nu = \frac{1}{D-2} \quad \text{pour } 2 < D < 4.$$

(b) La contribution dominante dépendant de k^2 à $\Sigma(k^2)$ est d'ordre $1/n$. Montrer qu'elle est donnée par les graphes de la figure 43 :

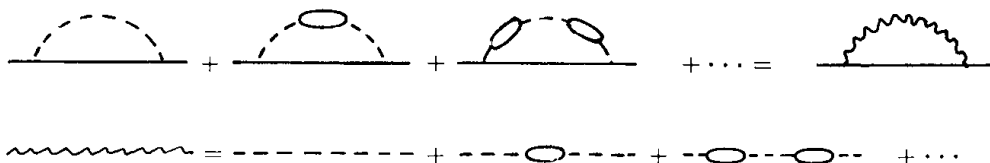


Figure 43.

En déduire l'expression de $\Sigma(k^2, 0)$ à l'ordre $1/n$:

$$\Sigma(k^2, 0) = \frac{u_0}{3n} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{\left(1 + \frac{u_0}{6} \Pi(p^2)\right) (p+k)^2}$$

où

$$\Pi(p^2) = \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2(q+p)^2}.$$

(c) On utilise la méthode de raccordement pour déterminer η :

$$\Gamma^{(2)} \simeq k^2 \left(1 - \frac{\eta}{2} \ln k^2 + \dots\right)$$

en identifiant le coefficient de $\ln k^2$ (il faut remarquer que $y_2 \simeq D - 4$: cf. exercice III.7(g)). Montrer que la singularité en $\ln k^2$ de $\Sigma(k^2)$ provient de la région d'intégration $p \rightarrow 0$, et calculer le coefficient de $\ln k^2$ en se servant de l'expression (56) de $\Pi(p^2)$. Suggestion : calculer $\partial^2 \Sigma / (\partial k^2)^2$ et identifier le coefficient de $1/k^2$. Résultat :

$$\eta = \frac{2(4-D) \Gamma(D-2)}{n \Gamma\left(\frac{D}{2} + 1\right) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \left(\Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right)\right)^2}.$$

14) Reprendre le raisonnement du paragraphe F.3 lorsqu'une ligne externe est de moment mou. Montrer que l'on doit remplacer dans (70) n par $(n-1)$.

NOTES ET RÉFÉRENCES

Le théorème de Wick et les diagrammes de Feynman sont exposés dans Amit (chapitres 2 et 4). Pour la fonctionnelle génératrice des vertex propres et le développement en nombre de boucles, on pourra consulter Amit (chapitre 5), Itzykson-Zuber (chapitres 6 et 9) ou Abers-Lee (section 16). La représentation paramétrique des intégrales de Feynman est détaillée dans Itzykson-Zuber (chapitre 6), tandis que le problème des divergences est traité dans la même référence (chapitre 8) ou dans Amit (chapitre 7).

⁽¹⁾ S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **118**, 838 (1960). Y. Hahn et W. Zimmermann, *Comm. Math. Phys.*, **10**, 330 (1968).

⁽²⁾ Ma, chapitre 9.