Interférences et intrication.

L'objectif de ce problème est d'utiliser des photons polarisés et intriqués pour examiner la question bien connue en mécanique quantique : peut-on observer des interférences, et connaître simultanément le chemin suivi dans l'interféromètre ? Et sinon, quel est le "meilleur compromis" possible entre ces deux résultats ?

A. Question préliminaire

On rappelle que l'état de polarisation d'un photon peut être décrit dans un espace de Hilbert de dimension 2 dont une base possible est constituée des deux états $|h\rangle$ et $|v\rangle$ correspondant respectivement à une polarisation linéaire horizontale (h) ou verticale (v). On définit les états $|d\rangle = (|v\rangle + |h\rangle)/\sqrt{2}$ et $|g\rangle = (|v\rangle - |h\rangle)/\sqrt{2}$ correspondant à une polarisation linéaire* orientée respectivement à 45° à droite (d) ou à 45° à gauche (g). On note $\mathcal{P}_h$, $\mathcal{P}_v$, $\mathcal{P}_d$ et $\mathcal{P}_g$ les probabilités pour que la polarisation du photon soit respectivement h (horizontal), v (vertical), d (45° à droite), ou g (45° à gauche). On définit alors :

$$C_{hv} = \mathcal{P}_h - \mathcal{P}_v \qquad \text{et} \qquad C_{dg} = \mathcal{P}_d - \mathcal{P}_g.$$

1. Montrer que $|C_{hv}| = 1$ si on est certain du résultat dans la base de mesure $\{|h\rangle, |v\rangle\}$, et que $|C_{dg}| = 1$ si on est certain du résultat dans la base de mesure $\{|g\rangle, |d\rangle\}$.

2. On définit les opérateurs $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\{|h\rangle, |v\rangle\}$. Ces opérateurs sont-ils hermitiens ? Quels sont leurs valeurs propres et leurs états propres ?

3. Montrer que pour un état $|\psi\rangle$ quelconque, on a $C_{hv} = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$ et $C_{dg} = \langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle$.

4. *On utilisera la base* $\{|h\rangle, |v\rangle\}$ *dans toute la suite du problème* et on pose $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Montrer que $C_{hv}^2 + C_{dg}^2 = (|\alpha|^2 - |\beta|^2)^2 + (\alpha^*\beta + \alpha\beta^*)^2$.

5. En déduire que $C_{hv}^2 + C_{dg}^2 \leq 1$ pour tout état $|\psi\rangle$ (*on pourra borner la quantité* $(2Re(\alpha\beta^*))^2$).

6. Donner une interprétation physique de cette inégalité en vous aidant du résultat de la première question.

*On veillera à ne pas confondre les états $|g\rangle$ et $|d\rangle$ définis ici avec des états de polarisation circulaire parfois désignés par les mêmes symboles mais qui correspondent à des coefficients complexes dans la base $\{|h\rangle, |v\rangle\}$.

B. Interférences en lumière polarisée

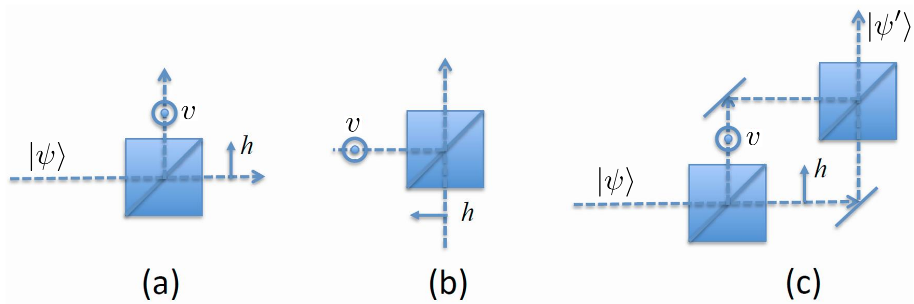
1. 

Figure 1: Montages utilisant des cubes polariseurs.

On considère le dispositif de la figure 1(a), appelé cube polariseur, possédant les propriétés suivantes

- La lumière polarisée suivant la direction notée h (dans le plan du dessin) est transmise
- La lumière polarisée suivant la direction notée v (perpendiculaire au plan du dessin) est réfléchie

On envoie sur ce cube un photon dans l'état de polarisation $|\psi\rangle = \alpha|h\rangle + \beta|v\rangle$. Quelle sont les probabilités que ce photon soit transmis ou réfléchi ?

2. Le cube polariseur a en fait deux entrées et deux sorties, et peut aussi "recombiner" deux faisceaux lumineux de polarisations orthogonales (figure 1(b)). Justifier que dans cette situation les deux faisceaux à l'entrée sortent du cube par la voie indiquée sur la figure. *On admettra que le cube redirige ainsi les faisceaux, sans modifier leur état de polarisation.*

3. On assemble deux cubes polariseurs comme indiqué sur la figure 1(c). Lors de leur propagation entre les deux cubes les faisceaux subissent des déphasages φ_h et φ_v, correspondant aux transformations $|h\rangle \to e^{i\varphi_h}|h\rangle$, et $|v\rangle \to e^{i\varphi_v}|v\rangle$. L'état $|\psi\rangle$ défini plus haut devient alors
$$|\psi'\rangle = \alpha e^{i\varphi_h}\,|h\rangle + \beta e^{i\varphi_v}\,|v\rangle$$
en sortie du dispositif. On mesure dans la base $\{|d\rangle\,,|g\rangle\}$ la polarisation du photon décrit par l'état $|\psi'\rangle$ (*i.e.* en sortie du dispositif). Montrer que les probabilités $\mathcal{P}_d$ et $\mathcal{P}_g$ dépendent du déphasage $\varphi = \varphi_h - \varphi_v$ entre les deux "chemins" possibles entre les deux polariseurs.

4. Sachant que le paramètre φ peut être contrôlé en déplaçant un miroir placé sur le trajet d'un des deux faisceaux de la figure 1(c), expliquer pour quelle raison le dispositif 1(c) est appelé un "interféromètre de polarisation".

5. On mesure maintenant la polarisation du photon décrit par l'état $|\psi'\rangle$ dans la base $\{|h\rangle\,,|v\rangle\}$. Que valent les probabilités $\mathcal{P}_h$ et $\mathcal{P}_v$? Dépendent-elles du déphasage φ ? Pouvez-vous interpréter ce résultat en terme de connaissance du "chemin suivi" dans l'interféromètre ?

6. Calculer les quantités C_{hv} et C_{dg} pour l'état $|\psi'\rangle$. En considérant des valeurs bien choisies de $|\alpha|$ et $|\beta|$, on montrera qu'on peut passer d'un comportement "ondulatoire" (observation des interférences) à un comportement "corpusculaire" (connaissance du chemin suivi) en fonction de l'état de polarisation $|\psi\rangle$ à l'entrée du dispositif.

Ceci suggère une nouvelle possibilité pour tester les limites de la mécanique quantique: si le photon envoyé dans l'interféromètre est intriqué avec un autre photon éloigné, pourquoi ne pas observer les interférences, tout en utilisant cet autre photon pour connaître le chemin suivi ? Cette possibilité est étudiée dans la question suivante.

C. Interférences en lumière polarisée et intrication

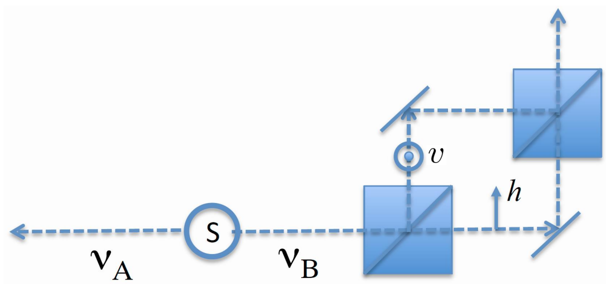


Figure 2: Interférométrie avec des photons intriqués. Les états de polarisations des photons ν_A et ν_B sont mesurés à l'aide d'autres polariseurs et détecteurs (non représentés sur la figure).

On suppose maintenant que le photon ν_B envoyé dans l'interféromètre de la question B est intriqué avec un autre photon ν_A, et que l'état fourni par la source S de paires de photons intriqués est

$$|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nu_A : h\rangle \otimes |\nu_B : h\rangle + |\nu_A : v\rangle \otimes |\nu_B : v\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|hh\rangle + |vv\rangle),$$

où l'on a utilisé les notations abrégées introduites dans le cours. La mesure du photon ν_B étant effectuée en aval de l'interféromètre de polarisation, on utilisera dans la suite l'état

$$|\xi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\varphi_h}\,|hh\rangle + e^{i\varphi_v}\,|vv\rangle\right).$$

1. La polarisation du photon ν_A est analysée par un polariseur orienté suivant la base $\{|h\rangle\,,|v\rangle\}$. Quels résultats peut-on trouver pour cette mesure, et avec quelles probabilités?

2. Même question pour le photon ν_B en sortie d'interféromètre, en mesurant sa polarisation soit dans la base $\{|h\rangle\,,|v\rangle\}$, soit dans la base $\{|d\rangle\,,|g\rangle\}$. Ces probabilités dépendent-elles de la valeur de φ ?

3. On détecte maintenant les deux photons ν_A et ν_B, en utilisant la même base $\{|h\rangle\,,|v\rangle\}$ pour chacun d'entre eux. Quelles sont les probabilités de détections conjointes $\mathcal{P}_{hh}$, $\mathcal{P}_{hv}$, $\mathcal{P}_{vh}$, $\mathcal{P}_{vv}$? Que peut-on en conclure quant au chemin suivi dans l'interféromètre ?

4. On utilise maintenant les bases $\{|h\rangle\,,|v\rangle\}$ pour ν_A et $\{|d\rangle\,,|g\rangle\}$ pour ν_B. Calculer les probabilités de détections conjointes $\mathcal{P}_{hd}$, $\mathcal{P}_{hg}$, $\mathcal{P}_{vd}$, $\mathcal{P}_{vg}$ (On pourra d'abord déterminer l'état du système en fonction du résultat de mesure obtenu pour ν_A). Observe-t-on des interférences, c'est-à-dire des variations des probabilités de détection en fonction de φ ?

5. On détecte à nouveau les deux photons conjointement, en utilisant maintenant la même base $\{|d\rangle\,,|g\rangle\}$ pour les deux photons ν_A et ν_B. Déterminer les probabilités de détections conjointes $\mathcal{P}_{dd}$, $\mathcal{P}_{dg}$, $\mathcal{P}_{gd}$ et $\mathcal{P}_{gg}$.

6. Interpréter les résultats obtenus ci-dessus en termes de connaissance du chemin suivi dans l'interféromètre, fournie (ou pas) par la détection du photon ν_A.

D. Orientation quelconque du polariseur "témoin"

1. On considère à nouveau la configuration de la question C, mais pour une orientation quelconque θ d'analyse de la polarisation du photon ν_A, et on note $|t\rangle = \cos(\theta)|h\rangle + \sin(\theta)|v\rangle$ et $|u\rangle = -\sin(\theta)|h\rangle + \cos(\theta)|v\rangle$ les états propres correspondants. Ecrire l'état $|\xi\rangle$ en utilisant la base $\{|t\rangle, |u\rangle\}$ pour les deux photons.

2. En déduire les valeurs des coefficients C_{hv} et C_{dg} pour le photon ν_B, en fonction de l'angle θ d'analyse du photon ν_A. On supposera que l'état $|t\rangle$ est obtenu pour ν_A.

3. Montrer qu'en modifiant θ on peut passer de façon continue d'un comportement "corpusculaire" du photon ν_B (connaissance du chemin suivi) à un comportement "ondulatoire" (observation des interférences). Conclure.