Master de physique fondamentale et appliquée d'Orsay

Processus stochastiques et neutronique
Examen à distance du 2 juin 2020.
Tous les documents sont autorisés
Durée : 4h00
le barème est approximatif

1 Marches aléatoires en 1 dimension (3 points)

Dans cet exercice on étudie un modèle simple de marche aléatoire sur un réseau de maille a en 1 dimension. Plus précisément, la particule se déplace à droite avec la probabilité 1/3, à gauche avec la probabilité 1/3, et reste sur place avec la probabilité 1/3. Soit $p(x,t)$ la probabilité de trouver un individu au point x au temps t. La durée de chaque saut est égale à τ.

1. Le processus est-il markovien ? Justifier brièvement votre réponse.
2. Écrire l'équation du mouvement (équation aux différences) reliant $p(x,t+\tau)$, $p(x,t)$, $p(x-a,t)$ et $p(x+a,t)$.
3. Effectuer un développement en série de Taylor de l'équation précédente pour obtenir l'équation aux dérivées partielles satisfaite par $p(x,t)$. On posera :

$$D = \lim_{\substack{a\to 0\\ \tau\to 0}} \frac{a^2}{2\tau}$$

2 Équation maîtresse (5 points)

On étudie un autre modèle de marche aléatoire sur un réseau en 1 dimension. Plus précisément, on étudie à nouveau le mouvement d'une particule se déplaçant par sauts le long de l'axe Ox sur un réseau de maille Δ. La durée de chaque saut est égale à τ. On désigne par $P(n,s)$ la probabilité d'être au site $n\Delta$ à l'instant $s\tau$ (sachant que la particule était au site 0 à l'instant 0). La probabilité de bouger à gauche ou à droite dépend de la position de la particule. Plus précisément, si la particule se trouve en $k\Delta$ la probabilité de saut vers la droite q et vers la gauche p données par :

$$q = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k}{R}\right); \qquad p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k}{R}\right)$$

R est un entier donné, et les positions accessibles de la particule sont limitées par $-R \leq k \leq R$.

1. Écrire l'équation du mouvement (équation aux différences) vérifiée par $P(n,s)$.
2. On pose $\langle n(s)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} nP(n,s)$. Donner une équation liant $\langle n(s)\rangle$ et $\langle n(s-1)\rangle$, puis donner l'expression de $\langle n(s)\rangle$ (on prendra comme condition initiale $\langle n(0)\rangle = n_0$).

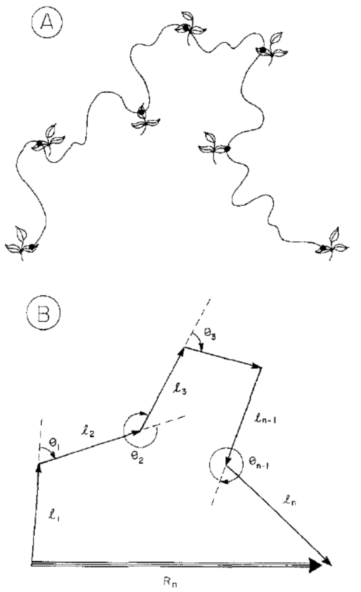
3. De même, on pose $\langle n^2(s)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(n,s)$. Donner la relation de récurrence liant $\langle n^2(s)\rangle$ et $\langle n^2(s-1)\rangle$, puis montrer que

$$\langle n^2(s)\rangle = n_0^2\left(1-\frac{2}{R}\right)^s + \frac{R}{2}\left[1-\left(1-\frac{2}{R}\right)^s\right]$$

Indication : une suite de la forme $U_{s+1} = aU_s + b$ peut s'étudier par l'intermédiaire d'une suite géométrique $V_s = cU_s + d$

4. Donner le comportement de la marche aléatoire à grands temps. Que peut modéliser une telle marche ?

3 Marche aléatoire en 2 dimensions (6 points)



On modélise le mouvement d'un organisme figure Ⓐ par une marche aléatoire bi-dimensionnelle figure Ⓑ. On note l_i la longueur du i^{eme} saut, et θ_i (ici mesuré dans le sens des aiguille d'une montre) l'angle avec lequel tourne l'organisme à la fin du i^{eme} saut. On suppose que les l_i sont des variables aléatoires continues indépendantes, on fait la même hypothèse pour les θ_i. On définit les densités de probabilité :

$p(l)dl$: probabilité que la longueur du saut soit comprise entre l et $l + dl$.

$g(\theta)d\theta$: probabilité que l'angle entre deux sauts successifs soit compris entre θ et $\theta + d\theta$.

Pour analyser le mouvement on introduit aussi les valeurs moyennes :

$$E[l] = \int_0^{\infty} l\, p(l)dl$$
$$E[l^2] = \int_0^{\infty} l^2\, p(l)dl$$
$$c = E[\cos\theta] = \int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta\, g(\theta)d\theta$$
$$s = E[\sin\theta] = \int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta\, g(\theta)d\theta$$

1. On suppose $g(\theta)$ symétrique par rapport à 0. Que vaut s ? On se place désormais dans cette hypothèse.
2. On définit R_n comme la distance à vol d'oiseau entre la position initiale et la position après n sauts (voir figure) et on veut montrer que

$$E[R_n^2] = nE[l^2] + 2(E[l])^2 \frac{c}{1-c}\left(n - \frac{1-c^n}{1-c}\right) \tag{1}$$

Pour se faire, établir le résultat intermédiaire

$$E[R_n^2] = nE[l^2] + 2(E[l])^2 \sum_{m>j}^{n} E\left(\cos \sum_{k=j}^{m-1} \theta_k\right)$$

Si vous préférez, vous pouvez écrire ce résultat intermédiaire d'une manière moins formelle, sans les doubles sommes.

Pour évaluer la partie difficile $\sum_{m>j}^{n} E\left(\cos \sum_{k=j}^{m-1} \theta_k\right)$ on utilise la formule d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Justifier que

$$E\left(\cos \sum_{k=j}^{n-1} \theta_k\right) = c^{n-j} \, ,$$

puis obtenir l'équation(1).
3. Que vaut $E[R_n^2]$ pour $c = 0$, donner une interprétation simple.

4 Mouvement brownien d'une bactérie (3 points)

On étudie le mouvement d'une bactérie brownienne auto-propulsée en 2 dimensions. Cette bactérie brownienne est modélisée par deux équations de Langevin qui s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} &= v\cos\theta(t) + \xi_x(t) \\ \dfrac{dy(t)}{dt} &= v\sin\theta(t) + \xi_y(t) \end{cases}$$

où $\xi_x(t)$ et $\xi_y(t)$ sont deux bruits blancs gaussiens indépendants. De plus, les deux degrés de liberté spatiaux sont couplés par un angle $\theta(t)$ qui définit la direction de l'auto-propulsion. Cet angle subit aussi les fluctuations du milieu et vérifie l'équation,

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \xi_\theta(t)$$

où $\xi_\theta(t)$ est un bruit blanc gaussien, indépendant de $\xi_x(t)$ et $\xi_y(t)$. Le coefficient de diffusion pour l'angle θ vaut D_R et par conséquent la densité de probabilité pour θ est donnée par

$$p(\theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_R t}} e^{-\frac{\theta^2}{4D_R t}}$$

1. En supposant qu'à l'instant initial on a $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$, donner les expressions de $\langle x(t)\rangle$ et $\langle y(t)\rangle$.

2. Que se passe-t-il à grands temps ?

   Rappel :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ds^2t}e^{-isx}ds = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \tag{2}$$

5 Traversée d'un barreau (3 points)

En 1 dimension, on considère un barreau de longueur L caractérisé par une section efficace totale $\Sigma_T = \Sigma_a + \Sigma_s$ où Σ_a est la section efficace d'absorption et Σ_s la section efficace de diffusion que l'on prendra isotrope (probabilité de diffuser vers la droite égale à la probabilité de diffuser vers la gauche).

1. Donner la probabilité p_0 qu'un neutron traverse le barreau sans collision.
2. Donner la probabilité p_1 qu'un neutron traverse le barreau en ayant exactement 1 collision.