M1 de physique fondamentale
Université Paris-Saclay
Examen distanciel du 22 mai 2020

Examen de physique non-linéaire

1 Exercices de cours

Les exercices sont indépendants.

1.1 Application discrète 1

1. On considère l'application discrète $x_{n+1} = x_n^3$. Donner ses points fixes et calculer leur stabilité.
2. Justifier la stabilité de chacun des points fixes par un diagramme de "toile d'araignée".

1.2 Application discrète 2

1. On considère désormais l'application discrète $x_{n+1} = x_n^2 + c$, avec x et c réels. Donner ses points fixes et leur stabilité en fonction du paramètre c et tracer le diagramme de bifurcation.
2. Quelle équation faut-il résoudre pour trouver un cycle de période 2 ? Quelle est la méthode pour trouver les points de ce cycle $x_1^\star$ et $x_2^\star$? Ne pas les calculer.
3. Justifier qu'ils ont la même stabilité.

1.3 Pendule

On considère une balançoire avec un enfant qui bat des pieds à une fréquence double. L'équation correspondante s'écrit

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + [\omega^2 + A\cos(2\omega t)]\sin x = 0 \tag{1}$$

1. Indiquer la signification de chacun des termes.
2. Mettre cette équation sous forme normale. Quelle est la dimension du système différentiel ?
3. Est-ce que le théorème de Poincaré-Bendixson interdit l'apparition de chaos ?
4. On se place dans un cas sans forçage, c'est-à-dire $A = 0$ et on oublie le temps. Indiquer un point fixe et sa stabilité dans le cas où les frottements sont faibles.

2 Problème : Fiscalité chaotique

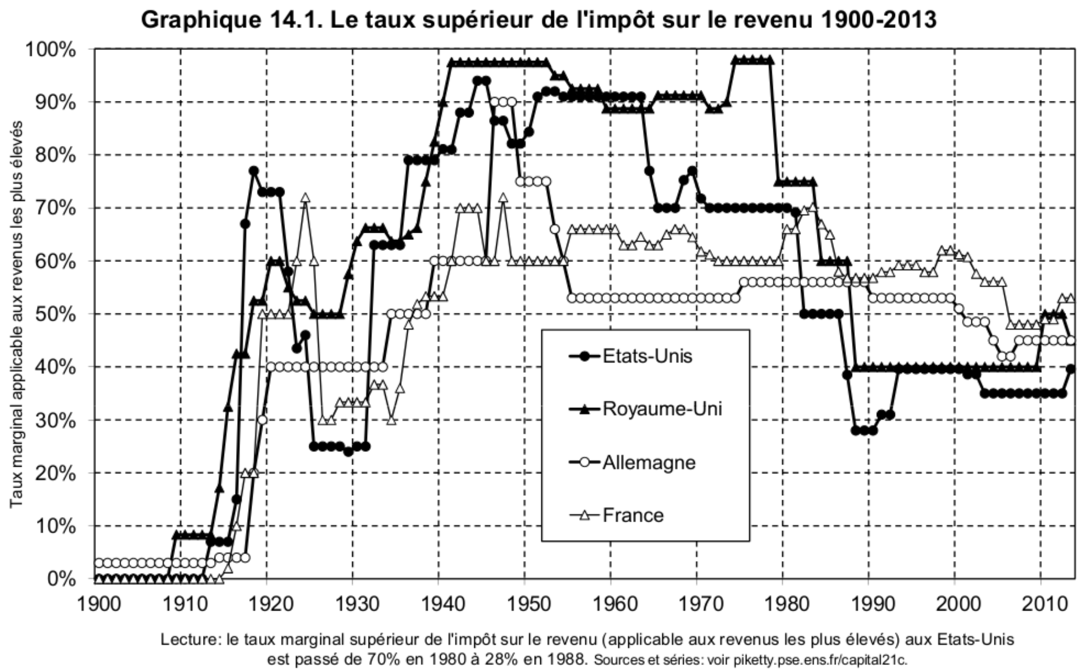
Problème proposé par Ludovic Bellon.

On considère un pays de rentiers, dans lequel chacun possède une capital initial k_0 qu'il laisse fructifier sur les marchés sans jamais y toucher. Pour simplifier, on suppose un taux de rentabilité annuel R unique pour tous, et des frais bancaires fixes F. Les intérêts sont calculés annuellement et s'ajoutent au capital de l'année qui vient de se terminer k_n. Si un rentier se retrouve à découvert, c'est-à-dire que k_{n+1} devrait être négatif, alors sa dette est épongée mais il se retrouve sans capital $k_{n+1} = 0$.

1. Justifier l'évolution suivante du capital

$$\begin{aligned} k_{n+1} &= (1+R)\,k_n - F \qquad \text{si} \qquad k_{n+1} > 0 \\ k_{n+1} &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad \text{sinon} \end{aligned} \tag{2}$$

2. Quels sont les points fixes de cette application $g(k)$. Donner leur stabilité et en conclure qu'il n'existe que deux avenirs possibles : on est infiniment riche ou ruiné selon son capital de départ k_0. Donner la valeur de ce capital de départ critique qu'on appelera "seuil de pauvreté" k_p.
3. Soucieux de restaurer un minimum d'équité, un gouvernement progressiste instaure un impôt sur la fortune (ISF) afin de financer une réforme pour les plus pauvres. L'application g est définie de la manière suivante : si le capital k_n est supérieur au seuil d'application de l'ISF $k_{ISF} = 10\,k_p$, alors l'intégralité du capital est taxé au taux T, c'est-à-dire que le prélèvement en fin d'année est $T\,k_n$. De plus, les frais bancaires restent fixes. Ecrire $g(k)$ et étudier son comportement pour $R > T$, en se plaçant par exemple dans le cas $T = 0.8\,R$ et $k_0 > k_{ISF}$.
La figure 1 illustre l'évolution de l'ISF pour quelques pays. Ces courbes ne sont pas utilisées dans le problème.
4. Cet ISF permet de financer la mesure suivante : pour les rentiers sous le seuil de pauvreté ($k_n < k_p$), les frais bancaires sont fixés chaque année à la moitié du capital $F = k_n/2$. A partir de quelle valeur de R, cette réforme a-t-elle un effet positif sur la pauvreté ?
5. Le gouvernement révolutionnaire suivant réforme le système : il décrète la gratuité des frais bancaires $F = 0$. Cette réforme est financée en créant un impôt progressif I qui est nul si $k_n < 1$. Expliquer pourquoi cette réforme permet d'éradiquer la pauvreté quel que soit R.
6. Cet impôt progressif a un taux T qui est proportionnel à la partie du capital supérieure à 1 : $T = A(k_n - 1)$, avec $A > 0$. Et il ne s'applique qu'à la partie du capital supérieure à 1 : $I = T(k_n - 1) = A(k_n - 1)^2$. Expliquer pourquoi cet impôt revient à exproprier les plus grandes fortunes, c'est-à-dire qu'elles sont ruinées dès la première année. On n'attend pas un calcul exact, juste l'idée générale.



7. On suppose alors que A est fixé par le gouvernement pour suivre le taux de rentabilité sous la forme $A = 2(1+R)$. Ecrire l'expression de $g(k)$ pour $k > 1$. Quelle est la valeur maximale possible du capital k_{max} au-delà de laquelle il y a expropriation ?
8. On considère l'application $g(k)$ entre $k = 1$ et k_{max}. Montrer par la méthode de votre choix qu'elle possède un seul point fixe qui devient instable pour $R > R_c$. On ne cherchera pas à calculer R_c.
9. Que pensez-vous qu'il arrive pour $R > R_c$?
10. En 1973 (donc avant l'article de Feigenbaum), Metropolis, Stein et Stein publient un article où ils décrivent une séquence universelle de bifurcations suivant le paramètre $r > 0$ pour des applications de la forme $x_{n+1} = r\,f(x_n)$ avec $x_n \in [0, 1]$. Il faut aussi que f vérifie $f(0) = f(1) = 0$, f strictement positive sur $]0, 1[$ et f a un unique maximum où elle est dérivable. Peut-on appliquer ce résultat à notre problème ?
Référence de l'article : Journal of combinatorial theory (A), vol. 15, p. 25 (1973).
11. Expliquer par quel mécanisme l'évolution du capital devient chaotique pour R suffisamment grand. Cette redistribution aléatoire des richesses dans le temps rend les rentiers égaux : le capital initial est sans influence sur l'état asymptotique du système.

Remarque : Ce modèle n'est qu'un jeu et n'a aucune prétention à une quelconque "vérité économique".