Information Quantique - Lundi 10 octobre 2022 - Exercices

1. Le théorème de non-clonage.

Le clonage d'un état quantique arbitraire contredit à la fois la linéarité et l'unitarité de la mécanique quantique. Nous allons faire ici les deux démonstrations.

On considère donc une "machine cloneuse" dont le but est de recopier un état quantique arbitraire et inconnu sur un état initial $|\psi_0\rangle$ ("page blanche"), en conservant l'original afin d'avoir deux copies identiques. Si on considère deux "originaux" distincts $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ on doit donc avoir :

$$|\phi_1\rangle \otimes |\psi_0\rangle \to |\phi_1\rangle \otimes |\psi_1\rangle$$
$$|\phi_2\rangle \otimes |\psi_0\rangle \to |\phi_2\rangle \otimes |\psi_2\rangle$$

Les copies sont notées $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ car elles sont à priori effectuées sur des systèmes physiques différents : on pourrait par exemple "cloner" l'état d'un photon polarisé sur une particule de spin 1/2.

1. Raisonnement basé sur la linéarité.

   En supposant que cette machine est réalisable, quelle état sortant va-t-elle fournir si l'état entrant est $|\phi_3\rangle = (|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle)/\sqrt{2}$? Est-ce que cette état sortant est la copie souhaitée de $|\phi_3\rangle$? Conclure.

2. Raisonnement basé sur l'unitarité.

   La transformation réalisée par la machine doit être unitaire, et donc conserver les produits scalaires. Que peut-on en conclure sur les produits scalaires des états concernés ? A quelle condition sur $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ le clonage est-il possible ? Conclure.

2. Clonage optimal.

D'après le théorème de non-clonage, il est impossible de construire une transformation unitaire qui réalise une copie parfaite d'un état quantique inconnu. Mais rien n'interdit de faire une copie imparfaite : quelle est alors la "qualité" de la copie que l'on obtient ?

Pour quantifier cette qualité, on introduit la notion de fidélité : si une matrice densité ρ est utilisée comme une approximation d'un état pur $|\psi\rangle$, on dit que la fidélité de l'approximation est $F = \langle\psi|\rho|\psi\rangle$.

1. On peut justifier cette définition par le raisonnement suivant : on suppose que le système est dans l'état ρ, et on effectue une mesure (orthogonale) qui donne les résultats "oui" si le système est dans l'état $|\psi\rangle$, et "non" si le système est dans un état orthogonal à $|\psi\rangle$. Quelle est la probabilité d'obtenir le résultat "oui" ? En déduire une justification de la notion de fidélité.

2. On considère une machine agissant sur trois qubits de la façon suivante :

$$|000\rangle_{ABC} \to |\chi_0\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|00\rangle_{AB}\,|0\rangle_C + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\psi^+\rangle_{AB}\,|1\rangle_C$$

$$|100\rangle_{ABC} \to |\chi_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|11\rangle_{AB}\,|1\rangle_C + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\psi^+\rangle_{AB}\,|0\rangle_C$$

où $|\psi^+\rangle_{AB}$ est l'état de Bell :

$$|\psi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|01\rangle_{AB} + |10\rangle_{AB}).$$

Il est clair d'après les notations que le qubit A est recopié sur le qubit B, le qubit C étant un auxiliaire de calcul.

Vérifier que les produits scalaires $\langle 000|000\rangle$, $\langle 100|100\rangle$ et $\langle 000|100\rangle$ sont conservés dans cette opération. Cette transformation est-elle envisageable physiquement ?

3. On suppose que le qubit A est dans un état initial arbitraire $|\psi\rangle_A = a|0\rangle_A + b|1\rangle_A$, et que les qubits B et C sont initialement dans dans les états $|0\rangle_B$ et $|0\rangle_C$. Quel est l'état $|\psi\rangle_{ABC}$ transformé après la machine cloneuse, en fonction de $|\chi_0\rangle$ et $|\chi_1\rangle$?

4. Quelle est la matrice densité initiale associée à l'état $|\psi\rangle_A$?

5. On souhaite déterminer explicitement la matrice densité réduite du qubit A après la transformation. Pour faire ce calcul il est très laborieux d'écrire la matrice densité initiale de dimension 8×8, puis d'effectuer deux traces partielles sur les qubits B et C. On procède donc de la façon suivante :

   - justifier la formule $\mathrm{Trace}_{B,C}\rho_{ABC} = \sum_{b,c} |\psi(A)_{b,c}\rangle\langle\psi(A)_{b,c}|$, où $|\psi(A)_{b,c}\rangle$ est l'état non normalisé obtenu en projetant $|\psi\rangle_{ABC}$ sur l'état correspondant aux résultats b et c lors des mesures de B et C.

   - déterminer les 4 résultats possibles pour les qubits B et C.

   - pour chacun de ces résultats, déterminer par projection l'état puis la matrice densité (non normalisée) $|\psi(A)_{b,c}\rangle\langle\psi(A)_{b,c}|$ associée au qubit A.

   - en utilisant le résultats précédents, calculer la matrice densité globale du qubit A après la transformation

6. Que peut-on dire des matrices densités réduites des qubits A et B après la transformation ? Montrer que l'état de ces qubits constituent des copies approchées de l'état du qubit A initial. Calculer la fidélité de cette copie (on montrera que cette fidélité est indépendante des coefficients a et b de $|\psi\rangle_A$).

3. Décomposition de Schmidt.

On considère deux particules décrites dans des espaces des états respectifs $\mathcal{E}_A$ et $\mathcal{E}_B$. L'état quantique le plus général de la paire de particules s'écrit ;

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |u_i\rangle_A |v_j\rangle_B$$

où $\{|u_i\rangle_A\}$ et $\{|v_j\rangle_B\}$ sont des bases orthonormées des espaces $\mathcal{E}_A$ et $\mathcal{E}_B$.

1. Montrer que l'on peut écrire $|\psi_{AB}\rangle = \sum_i |u_i\rangle_A |w_i\rangle_B$ et donner l'expression de $|w_i\rangle_B$.
2. On considère l'opérateur densité $\rho = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|$ des deux particules, et on définit les opérateurs densité réduits : $\rho_A = Tr_B(\rho)$, et $\rho_B = Tr_A(\rho)$. Donner l'expression de ρ_A en fonction des produits scalaires $\langle w_i|w_j\rangle$.
3. On suppose que ρ_A est diagonal dans la base $\{|u_i\rangle_A\}$, c'est à dire que :

   $$\rho_A = \sum_i p_i \ (|u_i\rangle|\langle u_i|)_A.$$

   En déduire que les vecteurs $\{|w_j\rangle_B\}$ sont orthogonaux. Quel est la valeur de la norme de $|w_j\rangle_B$?
4. En déduire que l'on peut écrire $|\psi_{AB}\rangle = \sum_i \sqrt{p_i}\ |u_i\rangle_A |\tilde{w}_i\rangle_B$ où $\{|\tilde{w}_j\rangle_B\}$ est une base orthonormée que l'on précisera.
5. Cette expression s'appelle la décomposition de Schmidt de l'état $|\psi_{AB}\rangle$. En utilisant cette décomposition donner une expression simple de ρ_B, et montrer que ρ_A et ρ_B ont les mêmes valeurs propres non nulles. Le nombre de telles valeurs propres non nulles est appelé *nombre de Schmidt*.
6. On dit que l'état $|\psi_{AB}\rangle$ est *séparable* si et seulement si il peut s'écrire sous une forme factorisée $|\psi_{AB}\rangle = |\phi_A\rangle|\chi_B\rangle$. Un état non séparable est appelé aussi *intriqué*. Montrer qu'un état est séparable si et seulement si le nombre de Schmidt est égal à un.