Processus stochastiques et neutronique : TD n°2

28 janvier 2022

1 Marches aléatoires en 1 dimension

Dans cet exercice on étudie un modèle simple de marche aléatoire sur un réseau en 1 dimension. C'est un modèle important car il conduit lorsque le pas du réseau tend vers 0 d'une manière appropriée (précisé à la deuxième question) vers un processus de diffusion [1]. Plus précisément, on étudie le mouvement d'une particule se déplaçant par sauts le long de l'axe Ox sur un réseau de maille Δ. La durée de chaque saut est égale à τ. Les probabilités de saut vers la droite q et vers la gauche p sont égales $p = q = \frac{1}{2}$. On désigne par $P(m\Delta, s\tau)$ la probabilité d'être au site $m\Delta$ à l'instant $s\tau$ sachant que la particule était au site 0 à l'instant 0.

1. Ecrire l'équation du mouvement (équation aux différences) vérifiée par $P(m\Delta, s\tau)$ sur le réseau.
2. On fait maintenant tendre le pas du réseau et la durée des sauts vers 0 de telle sorte que,

$$D = \lim_{\substack{\Delta\to 0\\ \tau\to 0}} \frac{\Delta^2}{2\tau} \tag{1}$$

   soit fini.
   Montrer que la limite continue $P(x,t)$ de l'équation aux différences précédente (avec $x = \lim_{\Delta\to 0} m\Delta$ et $t = \lim_{\tau\to 0} s\tau$), est :

$$\boxed{\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}} \tag{2}$$

3. On cherche une solution telle que :

$$\lim_{\mathrm{t}\to 0} P(x,t) \to \delta(x) \tag{3}$$

   Essayer une solution de la forme $P(x,t) = f(x)g(t)$ où l'on sépare les variables. Conclure.
   On cherche à résoudre l'équation Eq.(2) en utilisant une transformée de Fourier. On prendra les conventions :

$$\begin{cases} \tilde{P}(s,t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(x,t)e^{isx}dx \\ P(x,t) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{P}(s,t)e^{-isx}ds \end{cases}$$

1. Une version beaucoup plus complète de ce modèle se trouve dans l'article de Mark Kac "random walk and the theory of brownian motion" The American Mathematical Monthly, 54(7) : 369-391, 1947 et disponible sur `http://www.cs.fsu.edu/~mascagni/Kac_AMM_1947.pdf`

Rappel :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Ds^2t}e^{-isx}ds = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \tag{4}$$

4. Donner la solution $P(x,t)$.
5. Calculer $< X(t) >$, $< X^2(t) >$
6. Reprendre le problème précédent avec des probabilités de sauts asymétriques
   $p = \frac{1}{2} + \beta\Delta \qquad q = \frac{1}{2} - \beta\Delta$

2 Diffusion (examen 2012)

Pour une marche aléatoire symétrique nous avons établi que la densité de probabilité $P(x,t)$ de trouver la particule en x à l'instant t satisfait l'équation de la diffusion :

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}$$

En multipliant l'équation précédente par x^2 et en intégrant sur la coordonnée spatiale montrer que $\frac{d<x^2>}{dt} = 2D$ (i.e. on retrouve le résultat : $< x^2 >= 2Dt$).

3 Marches aléatoires en 1 dimension (examen 2014)

Dans cet exercice on étudie un modèle simple de marche aléatoire sur un réseau en 1 dimension. Plus précisément, on étudie le mouvement d'une particule se déplaçant par sauts le long de l'axe Ox sur un réseau de maille Δ. La durée de chaque saut est égale à τ. Les probabilités de saut vers la droite et vers la gauche sont égales et notées p (avec $p \leq 1/2$), la marche peut aussi rester sur place avec la probabilité q. On désigne par $P(m\Delta, s\tau)$ la probabilité d'être au site $m\Delta$ à l'instant $s\tau$ sachant que la particule était au site 0 à l'instant 0.

1. Le processus est-il markovien ? Justifier brièvement votre réponse.
2. Donner la relation liant p et q.
3. Écrire l'équation du mouvement (équation aux différences) vérifiée par $P(m,s)$ sur le réseau.
4. On fait maintenant tendre le pas du réseau et la durée des sauts vers 0 de telle sorte que,

   $$D = \lim_{\substack{\Delta\to 0\\ \tau\to 0}} \frac{\Delta^2}{2\tau} \tag{5}$$

   soit fini.
   Trouver la limite continue $P(x,t)$ de l'équation aux différences précédente. Montrer que $P(x,t)$ satisfait une équation de la diffusion dont on donnera le coefficient de diffusion D^* en fonction de D et p. Pouvait-on s'attendre à $D^* \leq D$? Que ce passe-t-il quand $p = 1/2$?

4 Marches aléatoires en 1 dimension (examen 2015)

Dans cet exercice on étudie un modèle simple de marche aléatoire sur un réseau en 1 dimension. Plus précisément, on étudie le mouvement d'une particule "élastique" se déplaçant par sauts le long de l'axe Ox sur un réseau de maille Δ. La durée de chaque saut est égale à τ. Si la particule se trouve à gauche de l'origine elle aura tendance à aller à droite et vice versa comme si elle était attachée à un ressort. Pour une particule placée en $k\Delta$, on modélise ce comportement avec les probabilités de saut vers la droite q et vers la gauche p données par :

$$q = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k}{R}\right) ; \qquad p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k}{R}\right),$$

avec R un entier délimitant une borne pour le déplacement : $-R \leq k \leq R$.
On désigne par $P(m\Delta, s\tau)$ la probabilité d'être au site $m\Delta$ à l'instant $s\tau$ sachant que la particule était au site n à l'instant 0.

1. Le processus est-il markovien ? Justifier brièvement votre réponse.
2. Écrire l'équation du mouvement (équation aux différences) vérifiée par $P(m\Delta, s\tau)$ sur le réseau.
3. On fait maintenant tendre le pas du réseau et la durée des sauts vers 0 (et $R \to \infty$) de telle sorte que,

   $$D = \lim_{\substack{\Delta \to 0 \\ \tau \to 0}} \frac{\Delta^2}{2\tau} \qquad \text{et} \qquad \gamma = \lim_{\substack{R \to \infty \\ \tau \to 0}} \frac{1}{R\tau}$$

   soient finis.
   Trouver la limite continue $P(x,t)$ de l'équation aux différences précédente. Montrer que $P(x,t)$ satisfait une équation de type Fokker-Planck

   $$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)P(x,t)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(b(x)P(x,t)\right).$$

   Donner les expressions de $a(x)$ et $b(x)$ en fonction des données du problème.

5 Marches aléatoires en 1 dimension (examen 2016)

Dans cet exercice, on étudie un modèle simple de marche aléatoire sur un réseau en 1 dimension. Plus précisément, on étudie le mouvement de particules se déplaçant par sauts δ le long de l'axe Ox sur un réseau de maille δ. La durée de chaque saut est égale à τ. On note $\alpha(x,t)$ la densité de particules au point x et au temps t se déplaçant vers la droite, et $\beta(x,t)$ la densité de particules se déplaçant vers la gauche. On note aussi, $p(x,t) = \alpha(x,t) + \beta(x,t)$ la densité de particules au point x à l'instant t. A chaque pas de temps τ une particule :

- soit change de direction et se déplace de δ dans la nouvelle direction avec une probabilité $r = \lambda\tau$
- soit se déplace de δ dans la direction incidente avec une probabilité $q = 1 - \lambda\tau$.

1. Le processus est-il markovien ? Justifier brièvement votre réponse.
2. Ecrire les équations du mouvement (équations aux différences) vérifiées par $\alpha(x, t+\tau)$ et $\beta(x, t+\tau)$ sur le réseau.
3. On fait maintenant tendre le pas du réseau et la durée des sauts vers 0 ($\delta \to 0$, $\tau \to 0$) de telle sorte que $\delta/\tau = v$ (v : vitesse constante). Montrer que :
$$\frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial t} = -v\frac{\partial \alpha(x,t)}{\partial x} + \lambda(\beta(x,t) - \alpha(x,t)) \tag{6}$$
$$\frac{\partial \beta(x,t)}{\partial t} = v\frac{\partial \beta(x,t)}{\partial x} - \lambda(\beta(x,t) - \alpha(x,t)) \tag{7}$$
4. En déduire que $p(x,t)$ vérifie l'équation dite du télégraphe :
$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} + 2\lambda\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = v^2\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \tag{8}$$
Est-ce une équation de type Fokker-Planck ?

6 Diffusion aléatoire anisotrope (examen 2018, question bonus)

On considère la limite continue d'une marche aléatoire en 1 dimension avec un coefficient de diffusion D et un terme de dérive négatif $-\nu$ (avec $\nu > 0$). La concentration $c(x)$ (ou densité de probabilité si il y a une seule particule) est donnée par l'équation
$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = \nu\frac{\partial c(x,t)}{\partial x} + D\frac{\partial^2 c(x,t)}{\partial x^2}.$$
Avec comme condition initiale $\delta(x - x_0)$, la solution, trouvée au TD n˚2, est :
$$c_{x_0}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left(-\frac{(x - x_0 + \nu t)^2}{4Dt}\right).$$
On suppose que $x_0 > 0$ et on place une trappe en $x = 0$, ce qui signifie que la concentration $c(x,t)$ vaut 0 en $x = 0$ quelque soit t. En vous inspirant de la méthode des images donner la solution $c(x,t)$ pour $x \geq 0$ lorsque l'on place la trappe.