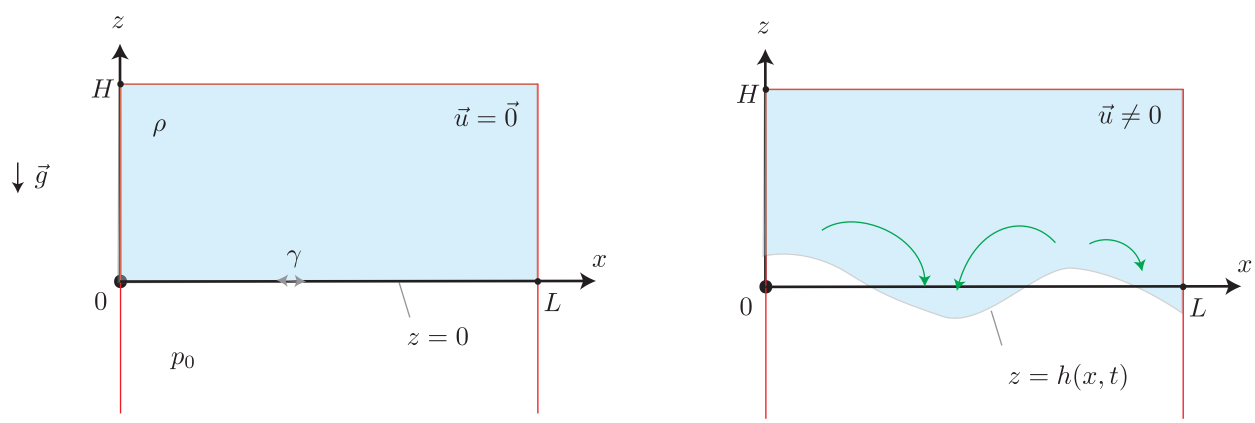
Examen de mécanique des fluides

Lundi 29 mars 2021, durée 3h

Polycopié de cours autorisé

I. Instabilité de Rayleigh-Taylor

Lorsqu'on place un liquide lourd au dessus d'un liquide léger, l'interface entre les deux liquides peut se déstabiliser sous l'effet de la gravité, mais pas toujours car la tension de surface est stabilisante. Dans cet exercice on étudie cette instabilité de Rayleigh-Taylor dans un fluide parfait et incompressible.



équilibre — instabilité

A l'équilibre, on place le liquide lourd de densité ρ dans le domaine $x \in [0, L]$ et $z \in [0, H]$ qui est invariant selon y. Les parois $x = 0$, $x = L$ et $z = H$ sont imperméables et la surface libre est initialement plate et placée en $z = 0$. On note $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$ la gravité et γ est la tension de surface. Comme le montre la figure de droite, cet équilibre peut devenir instable : la surface va alors se déformer et un écoulement apparaitra. Dans l'exercice, on formule une **analyse de stabilité linéaire** de cet équilibre et on cherche à obtenir un critère d'instabilité non-visqueux.

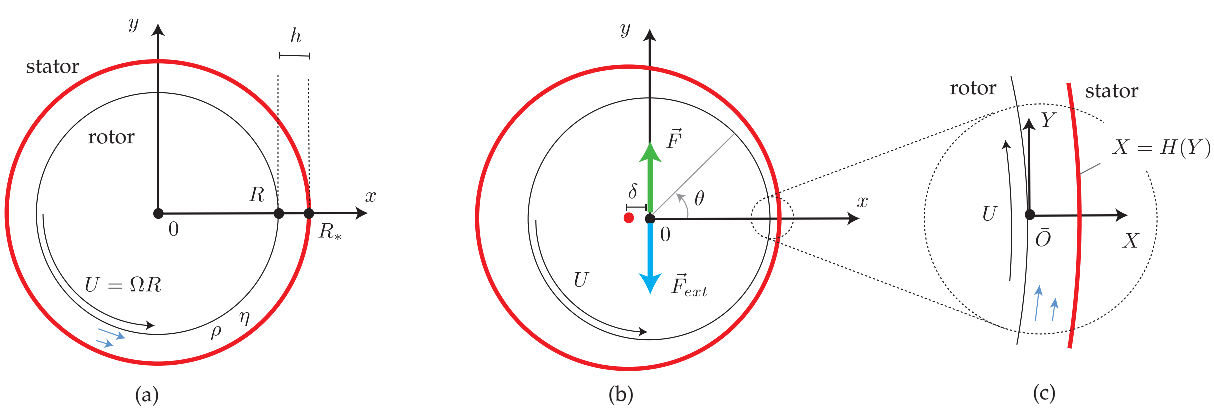
1. L'écoulement $\vec{u}$ est supposé potentiel. Expliquer ce que cela signifie et donner l'équation différentielle que le potentiel hydrodynamique ϕ doit satisfaire.
2. Donner les conditions aux limites pour ϕ sur les parois $x = 0$, $x = L$ et $z = H$ imperméables.
3. Une solution de la forme $\phi = A(t) f(x) \cosh(k(z - H))$ convient ici [1] avec $k > 0$. On spécifie $f(x)$ et k mais $A(t)$ restera arbitraire pour l'instant.
   (a) Montrer que la solution proposée satisfait la condition limite en $z = H$.
   (b) Identifier une famille dénombrable de solutions $f(x)$ admissibles. Préciser les valeurs (discrètes) possibles du nombre $k = k_n$ à l'aide d'un indice $n = 1, 2, 3, \ldots$ entier et strictement positif.
4. L'écoulement étant potentiel, on peut calculer la pression $p(x, z, t)$ à l'aide de la loi de Bernoulli. Ignorer les termes non-linéaires dans cette loi, pour trouver une approximation linéaire de la pression.

1. Les fonctions hyperboliques $\cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$, $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$, $\tanh(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$.

5. Sur la surface libre, on doit imposer une condition cinématique. Expliquer cette condition cinématique et comment on peut la simplifier pour arriver sur
$$\partial_t h = u_z|_{z=0} \tag{1}$$
dans l'approximation linéaire. Montrer que cette condition cinématique implique que $h(x,t) = B(t)f(x)$ avec $A(t)$ et $B(t)$ reliés par une première équation différentielle qui est à spécifier.
6. Sur la surface libre, on doit imposer une condition dynamique, ici la loi de Young-Laplace. Exprimer cette loi en faisant bien attention aux signes (faire un schéma) et en y ignorant les termes non-linéaires (limite $|\partial_x h| << 1$). Injecter les profils de $h(x,t)$ et $p(x,z,t)$ pour trouver une deuxième équation différentielle qui relie $A(t)$ et $B(t)$.
7. Découpler les deux équations différentielles reliant $A(t)$ et $B(t)$ afin d'isoler l'équation différentielle pour $B(t)$ qui sera de la forme
$$\ddot{B} + (\dots)\tanh(kH)B = 0 \tag{2}$$
8. Cette équation différentielle peut admettre des solutions exponentiellement croissantes, $B(t) \sim e^{\sigma t}$ avec $\mathrm{Re}(\sigma) > 0$. Montrer, en étudiant le taux de croissance σ qu'il y a un critère d'instabilité qui se met sous la forme
$$\text{système instable si} \quad k < k_c \tag{3}$$
Exprimer k_c.
9. On a vu que les nombres d'onde admissibles sont discrètes, $k = k_n$. Montrer que le mode n ne pourra que se déstabiliser si le système a une taille $L > L_{c,n}$. Donner ces longueurs critiques $L_{c,n}$ en fonction de la longueur capillaire.
10. Schématiser la forme de la surface libre qu'on s'attend à observer lorsque $L < L_{c,1}$.
Schématiser la forme de la surface libre qu'on s'attend à observer lorsque $L_{c,1} < L < L_{c,2}$.
11. Quelle sera la situation la plus instable, petit H ou grand H ? Argumentez votre réponse.
12. Dans l'exercice on a ignoré la viscosité, mais on aurait pu au contraire étudier le phénomène dans le régime très visqueux de Stokes stationnaire. Définir le problème linéaire à résoudre (équations + conditions aux limites partout).

II. Roulement à cousin d'air

Dans les turbomachines utilisées dans l'aviation, on utilise souvent des roulements à cousin d'air. Comme le montre le schéma (a) suivant, l'air se situe dans la zone mince entre le rotor et le stator et y agit effectivement comme lubrifiant lorsque le rotor tourne suffisamment rapidement. On note ρ la densité de l'air et η sa viscosité dynamique. On ignore la gravité. Le rotor est le cylindre de rayon R qui tourne à vitesse Ω. On note $U = \Omega R$ dans la suite. Le stator est le cylindre de rayon $R_* = R + h$ légèrement plus grand.



Lorsqu'on charge le rotor par une force extérieure $\vec{F}_{ext}$ comme dans le schéma (b), celui-ci se déplacera très légèrement sur une distance δ afin qu'un nouveau équilibre de forces puisse s'établir. Suite à la constriction, la pression sera plus forte sous le rotor et plus faible au dessus. Ceci cause une force de portance $\vec{F}$ dirigée vers le haut. Le but de l'exercice est de caractériser cette force de portance $\vec{F}$ en fonction de U, δ, h, R, η et L la longueur du rotor selon z.

On utilise deux référentiels différents. Le premier référentiel (O, x, y) est centré sur le rotor central et on y utilisera les coordonnées cylindriques (r, θ) définies par $x = r\cos\theta$, $y = r\cos\theta$. Le deuxième référentiel $(\bar{O}, X, Y)$ est centré sur le bord du rotor comme le montre la figure (c). On définit

$$X = r - R \quad , \quad Y = R\theta \tag{4}$$

Ce référentiel sera utile pour plus facilement calculer l'écoulement dans la fine couche de fluide [2].

Analyse dimensionnelle

1. On admet que la force de portance par unité de longueur $\vec{F}/L$ est une fonction de U, δ, h, R, η. Que peut on dire à partir de l'analyse dimensionnelle ? Préciser un jeu de nombres sans dimension qui contrôlent le problème.

Position approximative du stator

La surface du rotor se trouve en $r = R$ ou $X = 0$, mais celle du stator à l'air moins simple à mettre en équation. Ici on trouve la position approximative du stator par rapport à l'origine O.

2. BONUS : Le stator est défini par un cercle de rayon $R + h$ décalé de $-\delta\,\vec{e}_x$ par rapport à O. Donner l'équation de ce cercle utilisant les coordonnées Cartésiennes (x, y), puis remplacer $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Le décentrement est faible, $\delta \gg r$, la couche de gaz est fine, $h \ll r$. Montrer à l'aide d'un développement limité que dans cette limite

$$r \approx R + h - \delta\cos\theta \tag{5}$$

convient comme approximation. *(Ne faire cet exercice que si vous avez le temps)*

La position de la surface du stator s'exprime alternativement dans les variables X et Y comme

$$X = H(Y) = h - \delta\cos\left(\frac{Y}{R}\right) \tag{6}$$

On utilisera la notation $H(Y)$ dans la suite.

Ecoulement & gradient de pression

L'écoulement d'air a donc lieu dans la zone $X \in [0, H(Y)]$ et $Y \in [0, 2\pi R]$ et comme il s'agit d'une fine couche, $h \ll R$, on peut utiliser un modèle de lubrification.

3. A coté de l'hypothèse $h \ll R$, le modèle de lubrification nécessite une hypothèse supplémentaire. Préciser cette hypothèse à l'aide des grandeurs U, h, ρ, η, R.
4. Donner les équations du modèle de lubrification adapté au problème. Utiliser X, Y comme variables et noter

$$\vec{u} = u_X\,\vec{e}_X + u_Y\,\vec{e}_Y \tag{7}$$

2. On ignore les termes de courbure, comme en TD5 dans l'exercice sur l'amortisseur.

5. Préciser les conditions limites

$$u_Y|_{X=0} = \ldots, \quad u_Y|_{X=H(Y)} = \ldots \tag{8}$$

qui sont les seules dont on va se servir.

6. Montrer que la pression $p = p(Y)$ est indépendante de X.
7. Intégrer l'équation différentielle pour la composante de vitesse u_Y selon X et imposer les deux conditions aux limites pour obtenir u_Y en fonction de dp/dY, η, U, X et H.
8. Le débit par unité de longueur selon z, $Q = \int_0^H u_Y \, dX$ ne peut pas dépendre de Y. Montrer que cette exigence mène à l'équation différentielle

$$\frac{dp}{dY} = \frac{6\eta U}{H^2} - \frac{12\eta Q}{H^3} \tag{9}$$

9. Dans (9), remplacer $H = H(Y)$ par sa définition et $Y = R\theta$. Intégrer cette relation sur $\theta \in [0, 2\pi]$ et utiliser la périodicité $p|_{\theta=0} = p|_{\theta=2\pi}$ de la pression pour trouver la relation

$$Q = \frac{Uh}{2} \frac{I_2(\epsilon)}{I_3(\epsilon)} \tag{10}$$

où

$$I_n(\epsilon) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 - \epsilon \cos\theta)^n} \quad , \quad \epsilon = \frac{\delta}{h} \tag{11}$$

Cette relation relie le débit Q à U, h et ϵ.

10. Grace au résultat précédent, on peut remplacer Q dans la formule (9) afin d'arriver sur la formule

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{6\eta UR}{h^2} \Big[\ldots \text{fonction de } \theta \text{ et } \epsilon \ldots \Big] \tag{12}$$

qui est à spécifier.

Force de pression $\vec{F}$ sur le rotor

Même si on ne connait que le gradient de pression, on peut calculer la force de pression sur le rotor.

11. Ecrire l'intégrale qui permet de calculer la force de pression sur le rotor. On note L la longueur du rotor selon z.
12. Remplacer $\vec{e}_r = \vec{e}_x \cos\theta + \vec{e}_y \sin\theta$ dans l'intégrale. Faire une intégration par partie, afin de trouver des formules pour les composantes F_x et F_y qui ne nécessitent que de connaitre $dp/d\theta$ *(Ne pas oublier d'utiliser la périodicité de $p(\theta)$).*
13. Argumenter pourquoi $F_x = 0$ sans faire de calcul.
14. Montrer que la force de portance F_y vaut

$$F_y = \frac{6\eta UR^2 L}{h^2} \left(\frac{I_2(\epsilon)}{I_3(\epsilon)} J_3(\epsilon) - J_2(\epsilon) \right) \tag{13}$$

avec

$$J_n(\epsilon) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \, d\theta}{(1 - \epsilon \cos\theta)^n} \quad , \quad \epsilon = \frac{\delta}{h} \tag{14}$$

15. On cherche une approximation de la force F_y valable dans la limite $\epsilon \ll 1$, c.a.d. pour de très faibles déplacements du rotor. Utiliser le développement limité de la fonction binomiale

$$(1+\alpha)^m = 1 + m\alpha + O(\alpha^2) \quad \text{si} \quad |\alpha| \ll 1 \tag{15}$$

pour calculer une approximation des intégrales $I_n(\epsilon), J_n(\epsilon)$. Donner ensuite F_y dans cette limite $\epsilon \ll 1$.

Dans la limite $\epsilon \to 1$, la force F_y devient singulière. Dans cette limite, la contribution majeure aux intégrales vient du voisinage de $\theta = 0$ et on peut remplacer $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$ dans les intégrales I_2, I_3, J_2, J_3 pour trouver après de longs calculs que

$$F_y \approx \frac{6\pi\sqrt{2}\eta U R^2 L}{3h^2\sqrt{1-\epsilon}} \quad \text{si} \quad \epsilon \to 1 \tag{16}$$

La force devient donc très grande si on écrase le fluide beaucoup.

Couple visqueux $\vec{K}$ sur le rotor

Le couple visqueux exercé par le fluide sur le rotor est $\vec{K} = K_z \vec{e}_z$ par symétrie.

16. Donner une formule (intégrale) utilisant les coordonnées Cartésiennes X et Y, pour calculer K_z. Cette formule ne dépendra que de R, L et la composante $\sigma^v_{YX}|_{X=0}$ du tenseur des contraintes visqueuses en $X = 0$.
17. Simplifier la formule en ne gardant dans la contrainte visqueuse σ^v_{YX} que le terme dominant dans la limite $h/R \ll 1$.
18. Evaluer la contrainte visqueuse utilisant le profil de vitesse calculée plus haut à la question 7 en $X = 0$. Revenir ensuite sur la variable $\theta = Y/R$ et remplacer le gradient de pression par l'expression (12). Montrer que le couple vaut

$$K_z = -\frac{\eta U}{h} R^2 L \left(4I_1(\epsilon) - 3\frac{I_2^2(\epsilon)}{I_3(\epsilon)}\right) \tag{17}$$

Ici on réfère aux intégrales $I_n(\epsilon)$ définies plus haut.
19. Donner l'expression du couple K_z dans la limite $\epsilon \ll 1$.
20. Donner une formule pour la puissance dissipée par le roulement dans cette limite $\epsilon \ll 1$.