

# Chapitre 1

---

## *Temps et distances caractéristiques*

---

### 1.1 Introduction

*Références:*

- *Polycopié: chapitre 1.5, 6.1 et 6.3*
- *Livre: chapitre 3 p 74-89 et p 96-98*
- F. Chen, Introduction to plasma physics and controlled fusion, chapitre 4

Lorsque l'on cherche à modéliser un phénomène physique, on est amené à trier parmi les forces, échelles de temps et d'espace celles qui seront dominantes et que l'on va donc retenir, de celles que l'on pourra au contraire considérer comme négligeables. On est alors conduit à comparer deux à deux les grandeurs physiques de même nature en formant des rapports adimensionnés. Ainsi, en mécanique des fluides le nombre de Reynolds est introduit pour comparer l'importance des effets d'inerties par rapport aux forces de viscosité. De même, un modèle fluide est pertinent lorsque la taille des plus petites structures considérées dans l'écoulement (tourbillons, couche limite...) est grande devant le libre parcours moyen des molécules.

La physique des plasmas ne procède pas autrement. Ce type d'analyse permet de circonscrire la complexité d'un phénomène, de choisir une description appropriée (approche fluide, cinétique? orbites de particules individuelles?), de formuler des hypothèses pertinentes et d'en connaître les limites (peut-on considérer le plasma comme neutre? si oui, à partir de quelle échelle?), de décider quelles forces ou quels termes retenir dans les équations fondamentales de la dynamique ou de l'électromagnétisme.

Dans ce chapitre nous allons aborder de cette manière deux questions centrales de la physique des plasmas.

- Un plasma est la plupart du temps obtenu en ionisant de la matière (gaz, solide...) initialement neutre. Le plasma peut-il être lui aussi considéré comme neutre ?
- Un plasma est un ensemble de charges positives et négatives en interaction avec des champs extérieurs mais également en interactions mutuelles. Les charges positives et négatives s'attirant, pourquoi le plasma ne collapse pas ? Cette question est d'autant plus pertinente que les interactions entre particules sont des interactions à longue portée (force de Coulomb).

## 1.2 Pulsation plasma

### 1.2.1 Oscillation de Langmuir

Considérons un plasma uniforme composé d'ions et d'électrons. **Ce plasma est supposé initialement neutre.** Cette hypothèse conduit à la relation suivante entre les densités électronique  $n_e$  et ionique  $n_i$  initiales:

$$Zn_i = n_e \quad (1.1)$$

où  $Z$  est le degré d'ionisation des ions. La charge d'un ion est alors  $q = Ze$ , avec  $e$  la charge élémentaire. Supposons que l'on déplace suivant la direction  $(Ox)$  tous les électrons situés dans une tranche de plasma comprise entre  $x_0$  et  $x_0 + \xi(x_0)$ . Les électrons situés initialement en  $x_0$  sont déplacés en  $x_0 + \xi(x_0)$ , ceux situés initialement en  $x < x_0 + \xi(x_0)$  sont déplacés en  $x + \xi(x)$  avec la règle suivante:  $\xi(x_1) < \xi(x_2)$  si  $x_1 < x_2$ . Nous supposons que les ions sont immobiles car beaucoup plus massifs que les électrons. Un déficit de charges négatives apparaît donc dans la tranche de plasma comprise entre  $x_0$  et  $x_0 + \xi(x_0)$ . Etudions le mouvement des électrons situés en  $x_0 + \xi(x_0)$  à l'instant  $t = 0$ . Ces derniers sont soumis au champ électrostatique des charges positives des ions restés dans la tranche.

L'application du théorème de Gauss permet de déterminer le champ sur la surface et à l'intérieur de la tranche ( $\xi \leq \xi_0$ ). Ce dernier est orienté suivant  $(Ox)$  et vaut:  $\mathbf{E}(\xi) = \frac{Zen_i}{\epsilon_0} \xi \mathbf{u}_x = \frac{en_e}{\epsilon_0} \xi \mathbf{u}_x$ .

L'application du principe fondamental de la dynamique, projeté suivant  $(Ox)$  nous conduit alors à l'équation du mouvement de l'électron suivante:

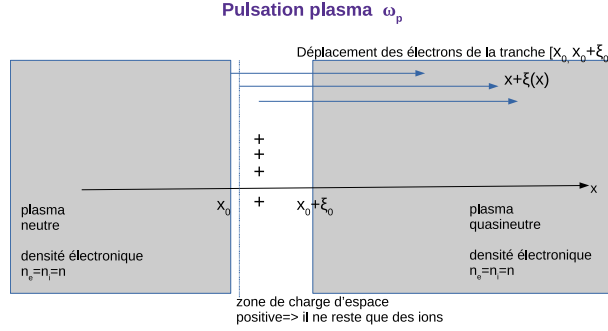


Figure 1.1: Dérivation de la pulsation plasma

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}(\xi) \cdot \mathbf{u}_x = -\frac{e^2 n_e}{m_e \epsilon_0} \xi = -\omega_p^2 \xi \quad (1.2)$$

Les électrons sont soumis à une force de rappel qui tend à les ramener vers la zone de charge d'espace positive. Les électrons oscillent sinusoidalement autour de cette zone avec une pulsation  $\omega_p$  appelée **pulsation plasma**.

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n_e}{m_e \epsilon_0} \quad (1.3)$$

La pulsation plasma permet de dégager une fréquence et donc une période caractéristique du plasma  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$ . Il s'agit de l'ordre de grandeur du temps mis par le plasma pour rétablir sa neutralité si celle-ci est localement perturbée. Si le plasma, initialement neutre, est soumis à une perturbation lente devant  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$ , Il pourra être considéré comme tel tout au long de l'évolution.

### 1.2.2 Eclatement coulombien

Nous avons envisagé un scénario où le retour à la neutralité s'effectue par un rappel des électrons vers la zone de charge d'espace positive. Un autre scénario réside dans l'éclatement de la charge d'espace sous l'effet de la répulsion électrostatique de charges de même signe. Cette situation se retrouve dans les faisceaux de particules chargées (faisceaux d'électrons ou d'ions) ou encore si on considère des agrégats atomiques (poussières, macromolécules...) dont on a brutalement arraché et propulsé les électrons très loin des ions. Dans ce scénario d'éclatement coulombien, la distribution de charge se dilue dans l'espace et tend donc vers zero. Nous verrons en TD (exercices E, F et N) que le temps caractéristique de cet éclatement est proportionnel au temps plasma  $T_p = 2\pi/\omega_p$  mis en évidence précédemment.

### 1.2.3 Temps de relaxation de Maxwell

Le modèle que nous avons présenté suppose que les porteurs de charge ne sont soumis qu'aux forces électrostatiques "macroscopiques", c'est à dire produites par les charges d'espace ou par des champs extérieurs. Les ions et électrons sont également soumis à des processus de collision. Ces collisions peuvent ralentir le mouvement des charges lors du retour à la neutralité. L'effet des collisions sur les électrons peut être grossièrement décrit par une force de friction:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m_e}E - \nu\mathbf{v} \quad (1.4)$$

où  $q = -e$  et où  $\nu$  est la fréquence de collisions. Lorsque le terme de collision est dominant par rapport au terme inertiel  $\frac{dv}{dt}$ , par exemple dans un plasma de grande densité, l'équation précédente donne une équation de mobilité:

$$v = \frac{q}{m_e\nu}E \quad (1.5)$$

La densité de courant  $j_e$  associée à ce mouvement de charge est alors:

$$j_e = qn_ev = \frac{e^2n_e}{m_e\nu}E = \eta E \quad (1.6)$$

où  $\eta$  est la conductivité électronique du plasma. Dans ces conditions, supposons qu'une charge d'espace  $\rho$  soit initialement présente dans le plasma. Cette charge crée un champ électrostatique qui engendre à son tour un courant électronique  $j_e$ . En utilisant la conservation de la charge, la relation de Gauss et l'expression de  $\eta$ , il est possible d'établir une équation différentielle sur  $\rho$ .

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot j_e = 0 \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.8)$$

$$j_e = \frac{e^2n_e}{m_e\nu}E \quad (1.9)$$

$$\rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{e^2n_e}{m_e\epsilon_0\nu}\rho = 0 \quad (1.10)$$

Cette dernière équation décrit une relaxation exponentielle de la charge d'espace excédentaire  $\rho$ . Son temps caractéristique décroissance est obtenu à partir de la pulsation plasma  $\omega_p$  et de la fréquence de collision  $\nu$ .

$$\rho(t) = \rho_0 e^{(-t/\tau_M)} \quad (1.11)$$

$$\tau_M = \frac{\nu}{\omega_p^2} \quad (1.12)$$

où  $\tau_M$  est le temps de Maxwell.

Nous montrons à nouveau qu'un écart à la neutralité tend à être corrigé par le plasma. Ce processus n'est pas instantané mais possède un temps caractéristique.

## 1.3 Longueur de Debye

### 1.3.1 Plasmas idéaux

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des champs issus de distributions de charge macroscopiques. A l'échelle microscopique, chaque particule chargée du plasma est soumise aux champs coulombiens non seulement des particules voisines, mais également de toutes les particules du plasma, la variation en  $1/r^2$  du champ étant compensée par le nombre de particules croissant en  $r^2$ . L'interaction à longue portée du champ coulombien devrait donc rendre la structure du plasma extrêmement sensible à la position de chaque particule et permettre l'émergence d'un ordre à grande distance, à la manière des anions et cations dans les cristaux ioniques (NaCl...). Cette tendance à l'organisation due à l'interaction à longue portée de Coulomb est toutefois contrebalancée par l'agitation thermique du plasma. Les importances respectives de ces deux tendances peuvent être évaluées en comparant l'énergie d'interaction électrostatique entre deux particules à l'énergie cinétique moyenne d'une de ces particules. On introduit ainsi le **paramètre de couplage**  $\Xi$  défini par:

$$\Xi = \frac{e^2 n^{1/3}}{6\pi_0 k_B T} \quad (1.13)$$

où  $T$  est la température du plasma,  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $n$  le nombre de particules par unité de volume du plasma. Nous avons utilisé le fait que la distance entre deux particules est de l'ordre de  $n^{1/3}$ .

- Les plasmas idéaux correspondent à la limite  $\Xi \ll 1$ . L'agitation thermique y est suffisamment importante pour empêcher la formation d'un ordre à longue portée sous l'effet des champs microscopiques.

- Les plasmas couplés correspondent à la limite  $\Xi > 1$ . Leur description est complexe, à la frontière entre la physique des plasmas et la physique de la matière condensée.

Dans toute la suite du cours, nous ne considérerons que des plasmas idéaux.

### 1.3.2 Longueur de Debye

Nous allons examiner plus en détail comment, dans un plasma idéal, l'ordre à grande portée est perdu. Considérons pour cela un plasma initialement neutre et uniforme, composé d'ions et d'électrons. On place une électrode plane en  $x = 0$  maintenue à un potentiel  $\phi(x = 0) = \phi_0$ . Les particules du plasma sont alors soumises à deux phénomènes contradictoires. Le champ créé par cette électrode repousse ou attire les charges selon leur signe. L'agitation thermique tend au contraire à uniformiser leur répartition dans l'espace.

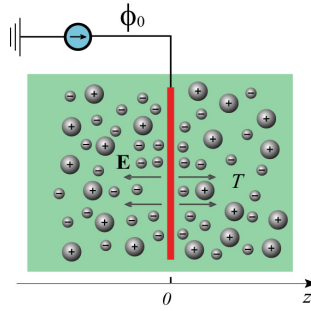


Figure 1.2: Electrode plongée dans un plasma et portée à un potentiel fixe.

A l'équilibre, la distribution de densité adoptée par les particules est régie par la loi de Boltzmann. Cette répartition des charges autour de l'électrode dicte la structure du potentiel électrostatique  $\phi(x)$ ., à travers l'équation de Poisson.

$$n_i(x) = n_0 / Z e^{-\frac{Ze\phi(x)}{k_B T_i}} \quad (1.14)$$

$$n_e(x) = n_0 e^{\frac{e\phi(x)}{k_B T_e}} \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{en_e(x) - Zen_i(x)}{\epsilon_0} \quad (1.16)$$

Dans ce qui suit, nous allons chercher une solution à ce problème dans le cas limite où les ions sont immobiles et où la température des

**électrons est très élevée**  $e\phi/k_B T_e \ll 1$ . Pour une résolution plus générale nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de J-M Rax.

$$n_i(x) \sim n_{e0}/Z \quad (1.17)$$

$$n_e(x) \sim n_{e0} \left(1 + \frac{e\phi(x)}{k_B T_e}\right) \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{n_{e0} e^2}{\epsilon_0} k_B T_e \phi \quad (1.19)$$

La résolution de cette dernière équation donne le potentiel en fonction de la distance à l'électrode:

$$\phi(x) = \phi_0 e^{-x/\lambda_D} \quad (1.20)$$

où  $\lambda_D$  est la longueur de Debye :

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{n_0 e^2}} \quad (1.21)$$

Au delà d'une distance de l'ordre de quelques  $\lambda_D$ , le potentiel tend vers sa valeur initiale. Les particules se réorganisent donc pour écranter le champ électrostatique imposé par l'électrode. Le champ devient négligeable au delà de quelques fois la longueur de Debye.

Le raisonnement que nous avons suivi se généralise à 3 dimensions. Dans le cas d'une charge ponctuelle de charge  $Q$  plongée dans le plasma, on montre de manière similaire que le potentiel électrostatique  $\phi(r)$  est de la forme:

$$\phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_p} \quad (1.22)$$

où  $r$  est la distance à la charge ponctuelle  $Q$ . En conclusion, dans un plasma, le champ coulombien d'un ion ou d'un électron est atténué exponentiellement et devient nul au delà de quelques fois la longueur de Debye. Autour de chaque charge ponctuelle on peut donc définir une sphère de Debye au delà de laquelle cette charge n'a plus d'influence sur le reste du plasma.

Pour terminer, examinons la validité de ces modèles. Pour que nous puissions utiliser l'hypothèse d'équilibre de Boltzmann, il faut un nombre suffisant de particules dans la sphère de Debye. Autrement dit,  $n_0 \lambda_D^3 \gg 1$ . Il est aisé de montrer que ceci correspond bien à l'hypothèse  $\Xi \ll 1$

## 1.4 Pénétration magnétique

### 1.4.1 Introduction

Considérons le problème suivant. Un plasma initialement neutre occupe le demi-espace  $x > 0$ . Dans le demi-espace  $x < 0$  règne un champ magnétique  $\mathbf{B}(x, t) = B_0 \cos(\omega t) \mathbf{e}_x$ . Nous allons examiner comment ce champ se propage dans le plasma dans l'hypothèse basse fréquence, c'est à dire  $\omega < \omega_p$ . Les évolutions étant lentes devant le temps caractéristique du plasma, ce dernier peut être considéré comme neutre. Le champ magnétique dans le plasma est alors  $\mathbf{B}(x, t) = B(x) \cos(\omega t) \mathbf{e}_x$ . La variation du champ magnétique dans le plasma induit un champ électrique suivant  $(Oy)$   $\mathbf{E}(x, t) = E(x) \cos(\omega t) \mathbf{e}_y$ . Ce dernier met en mouvement les électrons et les ions et crée donc un courant électrique. En raison de leur masse élevée, ces derniers seront à nouveau considérés comme immobiles et leur contribution au courant négligeable.

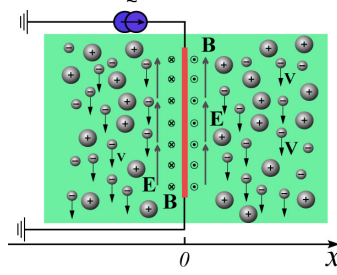


Figure 1.3: Pénétration d'un champ magnétique lentement variable dans un plasma.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1.24)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_e = -en_e \mathbf{v}_e \quad (1.25)$$

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e\mathbf{E} - m_e \nu \mathbf{v}_e \quad (1.26)$$

Dans l'équation de Maxwell Ampère, nous avons négligé les courants de déplacement, compte tenu de l'hypothèse basse fréquence. Par ailleurs, le principe fondamental de la dynamique s'applique ici à un champ de vitesse eulerien. C'est donc bien la dérivée advective qui apparait dans cette équation. Néanmoins, les invariances du problème conduisent à la nullité du terme



$(v_e \cdot \nabla)v_e$ . L'équation de la dynamique va nous permettre de relier le courant au champ électrique. Pour simplifier cette relation, deux régimes peuvent être considérés:

- Le régime inertiel ( $\omega \gg \nu$ ), pour lequel les collisions seront négligées :  $m_e \frac{dv_e}{dt} \approx -e\mathbf{E}$
- Le régime collisionnel ( $\omega \ll \nu$ ), dans lequel le terme inertiel est négligeable et qui conduit à un lien entre courant et champ analogue à la loi d'Ohm locale:  $\mathbf{v}_e \approx -\frac{e}{m_e \nu} \mathbf{E}$  et  $\mathbf{j}_e = \frac{e^2 n_e}{m_e \nu} \mathbf{E} = \eta \mathbf{E}$

### 1.4.2 Longueur de London

Plaçons-nous dans le régime inertiel. Nous pouvons combiner les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell Faraday. L'hypothèse de neutralité du plasma permet de faire intervenir  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . Nous obtenons alors:

$$\frac{\partial \nabla \times \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.27)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \Delta \mathbf{E} \quad (1.28)$$

$$\mu_0 \frac{e^2 n_e}{m_e} \mathbf{E} = \Delta \mathbf{E} \quad (1.29)$$

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{\lambda_p^2} \mathbf{E} = 0 \quad (1.30)$$

où nous avons introduit  $\lambda_p$  la longueur de pénétration de London:

$$\lambda_p = \frac{c}{\omega_p} \quad (1.31)$$

Nous avons établi une équation différentielle sur le champ  $E(x, t)$  dans le plasma. La solution de cette équation est de la forme:

$$E(x, t) = E(x=0) e^{-x/\lambda_p} \cos(\omega t) \quad (1.32)$$

Le champ magnétique  $B$  suit une évolution similaire. Son amplitude est atténuée exponentiellement sur une épaisseur de plasma de l'ordre de  $\lambda_p$ .

Le plasma tend donc à empêcher la pénétration des champs magnétiques basse fréquence. La longueur au delà de laquelle cet écrantage magnétique est effectif est de l'ordre de  $\lambda_p = \frac{c}{\omega_p}$ .

### 1.4.3 Longueur de Kelvin

Plaçons-nous à présent dans le régime collisionnel. Nous pouvons reprendre le raisonnement précédent en changeant l'expression de la densité de courant:  $j_e = \eta E$

$$\frac{\partial \nabla \times \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.33)$$

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \Delta \mathbf{E} \quad (1.34)$$

$$\mu_0 \eta \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \Delta \mathbf{E} \quad (1.35)$$

(1.36)

Nous obtenons une équation aux dérivées partielles sur  $E$  analogue à une équation de diffusion. Par analogie avec l'équation de diffusion de la chaleur, nous aboutissons pour  $E$  comme pour  $B$  à une solution de forme bien connue:

$$B(x, t) = B_0 e^{(-x/\lambda_K)} \cos(\omega t - x/\lambda_K) \quad (1.37)$$

$$(1.38)$$

Nous avons introduit  $\lambda_K$  la longueur de Kelvin ou épaisseur de peau collisionnelle:

$$\lambda_K = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \eta \omega}} \quad (1.39)$$

A nouveau, nous voyons que le plasma est capable d'écranter un champ magnétique lentement variable.

## 1.5 Vitesse de Bohm

La vitesse de Bohm ou vitesse acoustique ionique est la vitesse de propagation d'une perturbation de densité dans un plasma supposé quasi-neutre. Elle présente donc une certaine analogie avec la vitesse du son rencontrée en mécanique des fluides. Dans un fluide "classique" (gaz, liquide...), une perturbation de densité conduit à une variation locale de la pression. Cette dernière va propager la perturbation au reste du fluide, à une vitesse donnée

par la vitesse du son  $c_s$ . Dans ce phénomène, les collisions entre les molécules du fluide jouent un rôle essentiel. Dans ce qui suit, nous supposons que le plasma est faiblement collisionnel. Pourtant, nous allons montrer que le couplage électrostatique fort entre les ions et les électrons via les champs générés par séparation de charge peut servir de médiateur à une telle propagation.

Considérons donc un plasma non collisionnel constitué d'ions et d'électrons. Nous supposons que la température des ions  $T_i$  est faible devant celle des électrons  $T_e$ :  $T_i \ll T_e$ . Cette situation se rencontre couramment dans les plasmas de décharge et en interaction laser-plasma. En effet, la source de puissance permettant de chauffer le plasma utilise souvent un couplage avec les électrons. Du fait de leur grande différence de masse, les ions et les électrons n'auront pas la même réponse dynamique face à une perturbation lente de la densité du plasma. Les ions réagiront avec une certaine inertie tandis que les électrons se réorganiseront quasi-instantanément.

Le plasma a une densité initiale  $n_0$ . Il est soumis une perturbation locale de densité, supposée lente devant  $\omega_p^{-1}$ . Le plasma pourra donc être considéré comme quasi-neutre au cours de son évolution:  $n_e = n_i$ . Cette perturbation de densité sera modélisée de la manière suivante. Tous les ions compris dans une tranche de plasma comprise entre  $x_0$  et  $x_0 + dx_0$  seront déplacés dans une tranche située entre  $x_0 + \xi(x_0, t)$  et  $x_0 + dx_0 + \xi(x_0 + dx_0, t)$ . L'ordre des différentes couches d'ions constituant la tranche initiale est inchangé lors de cette opération. Nous pouvons déterminer le changement de densité induit par cette perturbation en utilisant la conservation du nombre d'ions:

$$n_0(x_0 + dx_0 - x_0) = n_i(x_0 + dx_0 + \xi(x_0 + dx_0, t) - x_0 + \xi(x_0, t)) \quad (1.40)$$

$$n_0 dx_0 = n_i(dx_0 + dx_0 \frac{d\xi(x_0, t)}{dx}) \quad (1.41)$$

$$n_i(x_0, t) = \frac{n_0}{1 + \frac{d\xi(x_0, t)}{dx}} \quad (1.42)$$

$$(1.43)$$

Le mouvement des ions par rapport aux électrons va créer un champ de charge d'espace, dont le potentiel électrostatique est  $\phi(x, t)$ . Le mouvement des ions sous l'effet du champ électrique peut être décrit à l'aide de l'équation de Newton. Les électrons, de faible inertie, vont ajuster quasi-instantanément leur position. Ils sont soumis à la fois au potentiel électrostatique, qui tend à les rassembler dans les zones de fort potentiel, et à l'agitation thermique qui tend à uniformiser leur distribution. Le compromis correspond à une distribution de Boltzmann.

$$m_i \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = -e \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \quad (1.44)$$

$$n_e(x, t) = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) \quad (1.45)$$

$$n_i(x, t) = \frac{n_0}{1 + \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}} \quad (1.46)$$

Comme en acoustique, nous considérons ici des perturbations de faible amplitude, ce qui va nous permettre de linéariser le système d'équations précédent.

$$m_i \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = -e \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \quad (1.47)$$

$$n_e(x, t) \approx n_0 \left(1 + \frac{e\phi}{k_B T_e}\right) \quad (1.48)$$

$$n_i(x, t) \approx n_0 \left(1 - \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x}\right) \quad (1.49)$$

En utilisant l'hypothèse de quasi neutralité ( $n_i = n_e$ ), les deux dernières équations permettent d'aboutir à une relation différentielle entre  $\phi$  et  $\xi$ :

$$\phi = -\frac{k_B T_e}{e} \frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} \quad (1.50)$$

En combinant cette relation à l'équation de Newton, nous obtenons:

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{k_B T_e}{m_i} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{m_i}{k_B T_e} \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1.52)$$

$$(1.53)$$

Nous reconnaissons l'équation d'une onde. La vitesse de propagation  $c_B$ , dite acoustique ionique peut être immédiatement identifiée:

$$c_B = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}} \quad (1.54)$$

La perturbation de densité  $n(x, t) - n_0$  suit une équation tout à fait similaire. Une perturbation lente de densité se propagera à la vitesse  $c_B$  dans

le plasma. Insistons à nouveau sur le fait que nous n'avons fait intervenir aucun phénomène collisionnel entre les ions et les électrons. C'est bien la capacité du plasma à se réorganiser pour assurer la quasi-neutralité qui permet le couplage des différentes tranches de plasma. En conclusion, nous venons de montrer que le plasma peut être un support d'ondes suivant des mécanismes originaux. La vitesse acoustique ionique est aussi appelée vitesse de Bohm. Elle intervient dans la théorie des gaines. Dans cette problématique très riches, on considère un écoulement de plasma depuis le centre d'un réacteur où le plasma se forme, vers les parois du réacteur. On montre que le comportement de ces écoulements présentent des propriétés universelles. En particulier, il existe un point au delà duquel la vitesse d'écoulement du plasma  $V$  devient supersonique, c'est à dire  $V > c_B$ . Au delà de ce point, l'hypothèse de neutralité n'est plus valide. Une structure non-neutre se forme, appelée gaine. Cette structure peut prendre la forme d'un écoulement ionique, dont le courant très élevé est exploité industriellement dans de nombreux procédés.

## 1.6 Pour aller plus loin: Relation de dispersion acoustique ionique

Nous allons reprendre le raisonnement qui nous a permis de trouver la vitesse acoustique ionique et le rendre plus général.

- Nous ne supposons plus a priori la quasi-neutralité. Nous utiliserons l'équation de Poisson pour relier le potentiel à la différence de densité électronique et ionique
- L'évolution de la densité ionique sera mise en relation avec la vitesse à l'aide de l'équation de continuité (conservation des ions).
- Nous supposons toujours de petites perturbations afin de linéariser toutes les équations. En revanche nous chercherons les solutions sous la forme d'ondes planes:

$$\delta n_i = \delta n_{i0} \exp(i(kx - \omega t)) \quad (1.55)$$

Nous pourrions alors utiliser les relations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n_i}{\partial x} &= ik \delta n_i \\ \frac{\partial \delta n_i}{\partial t} &= -i\omega \delta n_i \end{aligned} \quad (1.56)$$

(1.57)

Le système d'équations linéarisées regissant l'évolution de la perturbation ionique est alors:

$$\frac{\partial \delta n_i}{\partial t} + n_0 \frac{\partial \delta v_i}{\partial x} = 0 \quad (1.58)$$

$$\frac{\partial \delta v_i}{\partial t} = -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (1.59)$$

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right) \sim n_0 \left(1 + \frac{e\phi}{kT_e}\right) \quad (1.60)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n_i) \sim \frac{en_0}{\epsilon_0} \left(\frac{e\phi}{kT_e} - \delta n_i\right) \quad (1.61)$$

Cherchons à présent une solution de type onde plane. Le système d'équation linéarisé devient:

$$-i\omega \delta n_i + ikn_0 \delta v_i = 0 \quad (1.62)$$

$$-i\omega \delta v_i = -\frac{e}{m_i} ik\phi \quad (1.63)$$

$$-k^2 \phi = \frac{en_0}{\epsilon_0} \left(\frac{e\phi}{kT_e} - \delta n_i\right) \quad (1.64)$$

En combinant ces relations il est possible d'obtenir une équation ne faisant intervenir que  $\phi$ . En éliminant cette dernière quantité, on trouve finalement une relation entre  $k$  et  $\omega$ , **la relation de dispersion acoustique ionique**:

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{c_B^2}{1 + k^2 \lambda_D^2} \quad (1.65)$$

Lorsque la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$  de la perturbation est grande devant la longueur de Debye  $\lambda_D$ , la relation de dispersion devient:

$$\frac{\omega^2}{k^2} \approx c_B^2 \quad (1.66)$$

La perturbation se propage alors avec une vitesse de phase  $c_B$  indépendante de la fréquence ou de la longueur d'onde. Nous retrouvons donc la signification de la vitesse acoustique ionique. On peut par ailleurs montrer que ce cas limite correspond bien à une différence de charge  $(n_e - n_i)$  proche de zero. Ceci est parfaitement logique puisque l'on considère des échelles d'espaces ( $\lambda$ ) grande devant la longueur de Debye.

## 1.7 Pour aller plus loin (2): Propagation d'une onde plane électromagnétique dans un plasma

Il est possible d'étendre l'étude menée sur les longueurs d'écrantage au cas haute fréquence. Nous allons étudier pour cela la propagation d'une onde plane électromagnétique dans un plasma. En notation complexe, Le champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  de cette onde est de la forme:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}, t) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (1.67)$$

où  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde de l'onde plane et  $\omega$  sa pulsation. A ce champ est associé un champ magnétique  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ .

Cette étude se mène de la même manière que dans la section sur les longueurs de London et Kelvin. Comme nous n'avons fait aucune hypothèse sur  $\omega$ , nous ne négligerons pas le courant de déplacement.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.68)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.69)$$

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_e = -en_e \mathbf{v}_e \quad (1.70)$$

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e\mathbf{E} - m_e \nu \mathbf{v}_e \quad (1.71)$$

En prenant le rotationnel de la première expression il vient:

$$\frac{\partial \nabla \times \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (1.72)$$

$$-\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \Delta \mathbf{E} = \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (1.73)$$

$$(1.74)$$

Dans cette dernière équation, nous ne pouvons pas éliminer simplement le terme en "grad de divergence". En effet, nous n'avons fait aucune hypothèse quant au caractère quasi-neutre du plasma. Nous pouvons cependant passer en notation complexe et utiliser les résultats bien connus des opérateurs différentiels sur les ondes planes. Le système d'équations précédent devient un système d'équations algébriques:

$$-ik(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = -i\omega \mu_0 \mathbf{j} - \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} \quad (1.75)$$

$$-i\omega \mathbf{j} = \frac{e^2 n_e}{m_e} \mathbf{E} - \nu \mathbf{j} \quad (1.76)$$

En notation complexe, on aboutit pour le courant à la loi d'Ohm suivante:

$$\mathbf{j} = \frac{e^2 n_e}{m_e} \frac{1}{\nu - i\omega} \mathbf{E} \quad (1.77)$$

$$(1.78)$$

Plaçons-nous dans le cas limite où les collisions peuvent être négligées ( $\nu \ll \omega$ ). **Nous obtenons finalement une relation de dispersion reliant  $\mathbf{k}$  à  $\omega$ :**

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2 n_e}{i\omega m_e} \mathbf{E} \quad (1.79)$$

$$-ik(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E} = \frac{\omega_p^2}{c^2} \mathbf{j} - \omega^2 \mathbf{E} \quad (1.80)$$

Deux modes propres du fluide électronique peuvent être distingués (deux modes de "vibration").

### 1.7.1 Mode électrostatique longitudinal

On considère tout d'abord un mode longitudinal où le champ électrique  $\mathbf{E}$  est parallèle à la direction de propagation, c'est à dire à  $\mathbf{k}$ . Dans ces conditions  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = kE$  et la partie de gauche de la relation de dispersion s'annule. La relation de dispersion prend alors la forme très simple:

$$\omega_p = \omega \quad (1.81)$$

On retrouve l'oscillation plasma électrostatique introduite au début de ce chapitre.

### 1.7.2 Mode électromagnétique transverse

On considère à présent un mode transverse où le champ électrique  $\mathbf{E}$  est orthogonal à la direction de propagation, c'est à dire orthogonal à  $\mathbf{k}$ . Dans ces conditions  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$  et la relation de dispersion prend la forme suivante:

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \quad (1.82)$$

- Pour une onde haute fréquence ( $\omega > \omega_p$ ), on obtient une valeur de  $k$  réelle. Une onde électromagnétique transverse peut alors se propager librement dans le plasma



### 1.7. POUR ALLER PLUS LOIN (2): PROPAGATION D'UNE ONDE PLANE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

- Pour une onde basse fréquence ( $\omega < \omega_p$ ), on obtient une valeur de  $k$  imaginaire. L'onde électromagnétique est évanescente, elle ne peut se propager dans le plasma. Le champ est atténué exponentiellement sur une distance caractéristique  $\frac{1}{|k|} = \frac{c}{\omega_p} = \lambda_p$ .

Nous retrouvons l'idée qu'un plasma peut écranter une perturbation électromagnétique si celle-ci a un temps caractéristique plus grand que la période plasma.

## Chapitre 2

---

### *Structures neutres et non neutres*

---

*Références:*

- *Polycopié: chapitre 3.9, 3.8 et 5.1,*
- *Livre: chapitre 6 p205-218*
- F. Chen, Introduction to plasma physics and controlled fusion, chapitre 5 et 8

Dans le chapitre précédent nous avons montré que sous l'effet d'une perturbation lente devant la période plasma, un plasma tend à rétablir sa neutralité. Par ailleurs une perturbation localisée spatialement aura un effet sur le plasma qui sera restreinte à une distance de l'ordre de la longueur de Debye. Nous allons étudier quelques conséquences de cette tendance à la neutralité, ainsi que les limites de ce comportement.

### 2.1 Diffusion ambipolaire

Dans l'ensemble de ce chapitre, nous allons considérer un plasma faiblement ionisé ( $\alpha \ll 1$ ). Il se compose d'une fraction dominante d'atomes neutres de densité  $n_0$ , et d'une faible fraction d'ions et d'électrons. Ce plasma est contenu dans une enceinte dont les parois imposent des conditions aux limites: il peut s'agir de conditions sur le potentiel électrique (électrodes reliées à un générateur de courant ou de tension), ou de conditions sur les densités d'ions et d'électrons  $n_i$  et  $n_e$  dues aux processus de recombinaison sur la surface des matériaux. Par exemple  $n_i = n_e = 0$  au niveau de la paroi. Sous l'effet de ces conditions aux limites, des gradients de potentiel électrique et de densité

vont faire migrer les ions et les électrons du coeur du plasma vers la paroi de l'enceinte expérimentale. Notons  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_i$  les densités de flux ioniques et électroniques.

Pour maintenir un état stationnaire, les charges perdues sur les parois doivent être renouvelées par un processus d'ionisation dans le coeur du plasma. Une source de puissance (courant électrique, ondes radiofréquences ou micro-ondes...) est donc nécessaire pour générer par divers processus (chauffage des électrons puis collision de ceux-ci avec les neutres)  $S_e$  et  $S_i$  électrons et ions par unité de volume et de temps.

Nous pouvons écrire deux relations de conservation, pour les ions et pour les électrons:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_i = S_i \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_e = S_e \quad (2.2)$$

(2.3)

Pour étudier ce problème, outre les conditions aux limites, nous devons préciser l'origine physique des flux  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_i$ .

Les électrons et les ions sont soumis au champ électrique  $\mathbf{E}$  produit par les électrodes et par les charges d'espaces. Par ailleurs, si la densité de neutres est importante, les ions et électrons subiront l'effet des collisions avec ceux-ci. Nous noterons  $\nu_e$  et  $\nu_i$  la fréquence de collision des électrons et des ions avec les neutres. On négligera les collisions électron-ion. Les échelles de temps et d'espace du problème étant grandes devant  $1/\nu$  et devant le libre parcours moyen, nous pouvons ramener notre étude à celle de fluides électronique et ionique, dont les équations d'Euler sont:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = e\mathbf{E} - \frac{\nabla P_i}{n_i} - m_i \nu_i \mathbf{v}_i \quad (2.4)$$

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{\nabla P_e}{n_e} - m_e \nu_e \mathbf{v}_e \quad (2.5)$$

La vitesse  $\mathbf{v}_i$  (ou  $\mathbf{v}_e$ ) est la vitesse moyenne des particules dans une petite zone de fluide. La dérivée  $\frac{d}{dt}$  est la dérivée advective de la mécanique des fluides,  $P_e$  et  $P_i$  sont les pressions des fluides électronique et ioniques. Le dernier terme de ces équations, assez inhabituel en mécanique des fluides, exprime la

force de friction que le fluide neutre, supposé immobile et homogène, exerce sur le fluide ionique ou électronique.

Nous assimilerons ces fluides à des gaz parfaits de telle sorte que:  $P_e = n_e k_B T_e$  et  $P_i = n_i k_B T_i$ . Si la dynamique du fluide considéré est lente, le terme inertiel en  $\frac{d}{dt}$  peut être négligé.

Les vitesses  $v_i$  et  $v_e$  sont alors données par:

$$\mathbf{v}_i = \frac{e}{m_i \nu_i} \mathbf{E} - \frac{k_B T_i}{m_i \nu_i} \frac{\nabla n_i}{n_i} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{v}_e = -\frac{e}{m_e \nu_e} \mathbf{E} - \frac{k_B T_e}{m_e \nu_e} \frac{\nabla n_e}{n_e} \quad (2.7)$$

Introduisons la mobilité  $\mu = \frac{|q|}{m\nu}$  et le coefficient de diffusion  $D = \frac{k_B T}{m\nu}$ . Les équations précédentes deviennent:

$$\mathbf{v}_i = \mu_i \mathbf{E} - D_i \frac{\nabla n_i}{n_i} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{v}_e = -\mu_e \mathbf{E} - D_e \frac{\nabla n_e}{n_e} \quad (2.9)$$

On en déduit les densités de flux  $\mathbf{\Gamma}_i = n_i \mathbf{v}_i$  et  $\mathbf{\Gamma}_e = n_e \mathbf{v}_e$ :

$$\mathbf{\Gamma}_i = n_i \mu_i \mathbf{E} - D_i \nabla n_i \quad (2.10)$$

$$\mathbf{\Gamma}_e = -n_e \mu_e \mathbf{E} - D_e \nabla n_e \quad (2.11)$$

En conclusion, le transport des ions et des électrons sera conditionné par les gradients de potentiel électrique (transport convectif sous l'effet d'un champ  $\mathbf{E}$ ) et de densité (transport diffusif) présents dans le plasma. Comme nous l'avons déjà évoqué, le champ  $\mathbf{E}$  résulte en toute rigueur des sources extérieures au plasma ainsi que des zones non neutres du plasma. Il faut donc ajouter l'équation de Poisson à notre système d'équations pour déterminer les profils de densité électronique et ionique.

Ce problème se simplifie grandement si nous supposons que le plasma peut être considéré comme quasineutre:  $n_e = n_i = n$ .

Examinons l'évolution d'un plasma en l'absence de champ extérieur. La densité  $n$  est supposée importante au centre de l'enceinte et quasi-nulle sur les parois. Ce gradient de densité crée donc un flux diffusif du centre du plasma vers les parois. Comme  $m_e \ll m_i$  et très souvent  $T_e \gg T_i$ , le coefficient de diffusion est plus élevé pour les électrons que pour les ions. On s'attend donc à ce que les électrons diffusent plus vite vers les parois

que les ions, brisant ainsi la neutralité. Toutefois, la différence de flux entre les électrons et ions crée une séparation de charge qui génère un champ de charge d'espace  $\mathbf{E}_a$  appelé *champ ambipolaire*. Ce dernier couple fortement les ions aux électrons. Ce champ ambipolaire ramène l'égalité entre les flux ionique et électronique et assure la quasi-neutralité. Les électrons "tirent" en quelque sorte les ions au cours de leur diffusion.

Le champ ambipolaire peut être déterminé à partir de l'hypothèse de quasi-neutralité. La valeur de ce champ est donc telle que  $\Gamma_i = \Gamma_e$ .

$$\Gamma_i = \Gamma_e = \Gamma_a \quad (2.12)$$

$$n\mu_i \mathbf{E}_a - D_i \nabla n = -n\mu_e \mathbf{E}_a - D_e \nabla n \quad (2.13)$$

$$\mathbf{E}_a = \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{\nabla n}{n} \quad (2.14)$$

On en déduit le flux ambipolaire  $\Gamma_a$  qui apparaît comme un flux purement diffusif.

$$\Gamma_a = n\mu_i \mathbf{E}_a - D_i \nabla n \quad (2.15)$$

$$\Gamma_a = \mu_i \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \nabla n - D_i \nabla n \quad (2.16)$$

$$\Gamma_a = -\frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e}{\mu_i + \mu_e} \nabla n \quad (2.17)$$

$$\Gamma_a = -D_a \nabla n \quad (2.18)$$

où  $D_a$  est le **coefficient de diffusion ambipolaire**.

Cette hypothèse de diffusion ambipolaire est valide dans la zone centrale du plasma. Comme nous allons le voir, cette hypothèse n'est plus valable dans une zone située près de la paroi de l'enceinte. Il se forme alors une structure non neutre appelée gaine.

## 2.2 Transition plasma-gaine

Afin de comprendre l'origine de cette rupture de la neutralité, examinons plus précisément l'évolution des flux électronique et ionique vers la paroi dans le cadre d'un modèle encore plus simple que celui présenté plus haut. Considérons une situation stationnaire ( $\partial/\partial t = 0$ ). Sans perte de généralité, nous pouvons considérer une situation unidimensionnelle. Le centre du plasma est situé en  $x = 0$  et la paroi en  $x = L$ . Nous continuons à supposer que le plasma est neutre :  $n_e = n_i = n(x)$ . Nous supposons que la

densité s'annule au niveau de la paroi :  $n(D) = 0$ . En régime stationnaire, le déséquilibre permettant l'entretien d'un flux vers la paroi est assuré par un processus d'ionisation produisant des ions et des électrons:  $S = S_i = S_e$ . Nous supposons que  $S$  est proportionnelle à la densité électronique.

$$S_i = \nu_I n_e \quad (2.19)$$

Ce modèle simple est toutefois assez général. Comme nous le verrons dans le chapitre suivant, une source extérieure de puissance peut maintenir la température électronique à un niveau suffisant pour que les électrons puissent ioniser les atomes neutres par collision.

Une fois créés les électrons diffusent vers la paroi. Ils entraînent les ions dans leur déplacement par diffusion ambipolaire. Ce comportement complexe peut être décrit plus simplement en tenant compte du fait que les électrons ont une faible masse par rapport aux ions. Leur mobilité et leur coefficient de diffusion sont très élevés.

$$|\mathbf{\Gamma}_e| \ll n_e \mu_e \mathbf{E} \quad (2.20)$$

$$|\mathbf{\Gamma}_e| \ll |D_e \nabla n_e| \quad (2.21)$$

$$n_e \mu_e \mathbf{E} \approx -D_e \nabla n_e \quad (2.22)$$

$$-n_e \mu_e \nabla(\phi) \approx -D_e \nabla n_e \quad (2.23)$$

$$(2.24)$$

En utilisant la relation d'Einstein  $D/\mu = k_b T/e$ , on trouve que la densité électronique suit une loi Boltzmannienne:

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) \quad (2.25)$$

où  $n_0$  est la densité au centre du plasma. Ces hypothèses nous conduisent à simplifier le système d'équation établi dans la section précédente:

$$\nabla \cdot (n_i v_i) = \nu_i n_e \quad (2.26)$$

$$v_i = \mu_i E - D_i \nabla n_i / n_i \quad (2.27)$$

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) \quad (2.28)$$

$$n = n_e = n_i$$

$$(2.29)$$

Dans le cas monodimensionnel, ce système se simplifie:

$$\frac{d(nv_i)}{dx} = \nu_I n \quad (2.30)$$

$$nv_i = -\mu_i n \frac{d\phi}{dx} - D_i \frac{dn}{dx} \quad (2.31)$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{k_B T_e}{en} \frac{dn}{dx} \quad (2.32)$$

$$(2.33)$$

Les deux dernières équations peuvent être combinées.

$$nv_i = -\mu_i n \frac{k_B T_e}{en} \frac{dn}{dx} - D_i \frac{dn}{dx} \quad (2.34)$$

$$nv_i = -\frac{e}{m_i \nu} n \frac{k_B T_e}{en} \frac{dn}{dx} - \frac{k_B T_i}{m_i \nu} \frac{dn}{dx} \quad (2.35)$$

$$nv_i \approx -\frac{k_B T_e}{m_i \nu} \frac{dn}{dx} \quad (2.36)$$

compte tenu du fait que  $T_e \gg T_i$

On aboutit finalement au système suivant:

$$\frac{d(nv_i)}{dx} = \nu_I n \quad (2.37)$$

$$nv_i \approx -\frac{k_B T_e}{m_i \nu} \frac{dn}{dx} \quad (2.38)$$

En combinant ces deux équations différentielles, on obtient finalement:

$$\frac{d^2 n}{dx^2} + \frac{m_i}{k_B T_e} (\nu \nu_I) n = 0 \quad (2.39)$$

Avant de résoudre cette équation, remarquons que le terme  $\frac{m_i}{k_B T_e} (\nu \nu_I) = \frac{1}{\lambda^2}$ , est l'inverse d'une longueur au carré. La quantité  $\sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}}$  est donc homogène à une vitesse.

Nous retrouvons la **vitesse de Bohm (ou vitesse acoustique ionique)**:

$$c_B = \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}} \quad (2.40)$$

Cette vitesse va jouer un rôle structurant dans ce problème.

Pour résoudre cette l'équation différentielle, nous devons nous interroger sur les conditions aux limites. Pour la densité, nous avons  $n = n_0$  au centre du plasma et  $n = 0$  sur la paroi. Par ailleurs, la densité étant maximale au centre de l'enceinte,  $dn/dx = 0$  au centre du plasma. En utilisant ces hypothèses, nous aboutissons à la solution suivante:

$$n(x) = n_0 \cos(x/\lambda) \quad (2.41)$$

Nous voyons dès à présent que pour satisfaire la condition aux limites sur la paroi, il faut que  $L = \pi/2\lambda$ . La longueur  $\lambda$  dépend uniquement de grandeurs liées à la température. En conclusion, une telle décharge plasma ne sera stable que pour une température électronique  $T_e$  précise.

Examinons à présent la vitesse  $v_i$  des ions. En utilisant la solution que venons d'établir et la relation  $nv_i = -\frac{k_B T_e}{m_i \nu} \frac{dn}{dx}$ , on trouve:

$$v(x) = c_B \sqrt{\frac{\nu_i}{\nu}} \tan(x/\lambda) \quad (2.42)$$

**Au niveau de la paroi, pour  $x = L = \pi/2\lambda$ , la vitesse tend vers l'infini.** Ce résultat montre que ce modèle n'est plus satisfaisant au voisinage de la paroi. Une analyse plus fine montre que la faille se situe au niveau de l'hypothèse centrale de quasi-neutralité: elle n'est plus valable au delà d'un certain point de l'écoulement de plasma. En ce point, la vitesse de l'écoulement devient supérieure à la vitesse de Bohm  $c_B$ . **Au delà de ce point, un écoulement non neutre se forme, appelé "gaine".**

Ce comportement est très générale. D'autres modèles décrivant des décharges à plus basses pression (Modèle de Schottky en champ fort, modèle inertiel...) conduisent à une singularité similaire, tant que la quasi-neutralité est supposée valide. Dans tous les cas, une zone non-neutre se forme dans la partie supersonique de l'écoulement.

Une analogie avec l'hydrodynamique peut nous aider à appréhender le rôle de la vitesse de Bohm dans cette transition plasma-gaine (zone neutre - non-neutre). En régime subsonique, un écoulement d'air peut être considéré comme incompressible. Les perturbations de densité induites par un obstacle dans cet écoulement sont évacuées au loin à la vitesse du son  $c_s$ . En revanche, en régime transsonique puis supersonique, l'hypothèse d'incompressibilité n'est plus valide. De nouvelles structures (chocs...) peuvent se former.

De manière analogue, un écoulement ionique s'effectuant a sein d'un fluide électronique conduira à l'apparition de structures électrostatiques si sa vitesse est supérieure à  $c_B$ . Le potentiel de cette structure est décrit par le potentiel de Sagdeev. Elle est qualifiée de choc électrostatique. Dans cette région, la neutralité n'est plus assurée. Voir *F. Chen, "introduction to plasma physics and controlled fusion"*.



## 2.3 Modèles d'écoulement ionique

Au voisinage d'une paroi, la neutralité du plasma n'est plus garantie. De part leur grande mobilité, les électrons ont atteint la paroi en premier et s'y sont recombinaés. Le potentiel de la paroi devient alors négatif, attirant les ions et repoussant les électrons. Dans cette région, la densité électronique est alors très faible par rapport à celle des ions. On a donc un écoulement purement ionique qui arrive sur la paroi. **Cette région particulière s'appelle une gaine ionique.**

Différents modèles peuvent être utilisés pour décrire ce courant d'ions. Tous ont en commun de décrire le mouvement des ions dans la chute de potentiel qui existe entre le plasma neutre et la paroi. Par ailleurs tous font l'hypothèse que cet écoulement est régulé par l'existence d'une charge d'espace (écoulement non neutre) et font donc intervenir l'équation de Poisson. Les modèles diffèrent suivant la densité du milieu considérés (régimes inertiel ou collisionnel). Ils permettent de relier le courant ionique  $J$  à la différence de potentiel  $U$  entre le plasma et la paroi.

- Modèle de Child-Langmuir inertiel (cf TD):  $J \propto U^{3/2}$
- Modèle de Child-Langmuir collisionnel:  $J \propto U^2$
- Modèle de Child-Langmuir collisionnel en champ fort:  $J \propto U^{3/2}$

## Chapitre 3

---

### Collisions

---

#### 3.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons introduit différentes forces agissant sur le mouvement des particules du plasma. Nous avons commencé par étudier l'effet des champs électrique et magnétique générés par des sources externes ou résultant de processus collectifs (oscillation plasma...). Nous avons également considéré l'effet des collisions en introduisant de manière phénoménologique des processus de friction et de diffusion. Nous avons introduit pour cela une fréquence de collision  $\nu$ . Après avoir passé en revue quelques processus de collision entrant en jeu dans un plasma, nous aborderons plus en détail l'ionisation collisionnelle et les collisions élastiques coulombiennes.

Les processus collisionnels envisagés seront essentiellement des processus binaires, c'est à dire ne faisant intervenir avant la collision que deux particules. Cette hypothèse est totalement légitime si le plasma est dilué. La probabilité de rencontre simultanée entre trois particules est alors extrêmement faible. Dans les plasmas denses cette hypothèse devra être nuancée.

**Au cours d'une collision binaire la quantité de mouvement est conservée.**

- **Collisions élastiques: l'énergie cinétique totale des particules est conservée.** Nous aborderons plus loin le cas de particules en interaction coulombienne. Ces collisions contribuent à:
  - l'isotropisation des distributions de vitesse des particules.
  - la thermalisation des distributions de vitesse.

- **Collisions inélastiques: l'énergie cinétique totale n'est pas conservée:** une partie de cette énergie est transférée aux degrés de liberté internes aux particules. Nous listons ci-dessous quelques exemples de collisions inélastiques:
  - Excitation collisionnelle: la collision porte l'une des particules dans un état excité: excitation d'un électron lié d'un atome ou d'un ion, excitation rotationnelle et/ou vibrationnelle d'une molécule.  
 $A + e^- \rightarrow A^* + e^-$
  - ionisation collisionnelle:  $A + e^- \rightarrow A^+ + e^- + e^-$
  - dissociation collisionnelle:  $AB + e^- \rightarrow A^- + B$
  - Recombinaison radiative:  $A^+ + e^- \rightarrow A + h\nu$

Dans le cas des plasmas de décharge faiblement ionisés, la proportion d'espèces neutres sera très élevée. Les processus de collision pourront alors générer des radicaux libres, de nouvelles molécules...qui à leur tour pourront entrer en collision avec les espèces déjà présentes ou avec les parois contenant le plasma. Une description des cinétiques chimiques de ces espèces est alors requise. La possibilité de générer des espèces très réactives chimiquement à des températures moyennes modérées constitue un axe central de cette physique des plasmas de décharge. Le champ applicatif est extrêmement vaste.

Pour obtenir une vision cohérente des processus microscopiques ayant lieu dans un plasma, ce tableau des processus collisionnels doit être complété par des processus de relaxation "spontanés", qui suivent la collision.

- Désexcitation spontanée. L'électron excité d'un atome, d'une molécule ou d'un ion du plasma se désexcite vers un niveau d'énergie inférieur en émettant un photon.  $A^* \rightarrow A + h\nu$
- Autoionisation. Si deux électrons d'un atome ou d'un ion du plasma ont été portés dans des états excités, l'énergie totale d'excitation peut être supérieure à l'énergie d'ionisation. Il existe une probabilité non-nulle que le système se désexcite en libérant un électron.  $A^{**} \rightarrow A^+ + e^-$
- Ionisation Auger. Lors d'une collision avec une particule très énergétique, un atome ou un ion du plasma peut perdre un électron appartenant à une couche interne du cortège électronique. Ce dernier se réorganise pour combler la lacune électronique ainsi formée. Cette réorganisation peut se faire par désexcitation spontanée avec émission de photons X, mais peut aussi faire intervenir l'éjection d'un électron: c'est l'ionisation Auger.  $A^* \rightarrow A^+ + e^-$

Dans le cas d'un plasma optiquement épais, il faudra finalement prendre en compte les "collisions" des photons avec les différentes espèces présentes.

- Diffusions élastiques des photons par les atomes, les ions mais aussi par les électrons (diffusion Thomson).
- Processus inélastiques comme la photoionisation ou la photodissociation.
- Les processus inélastiques résonants: absorption mais aussi émission stimulée.

L'étude du rayonnement des plasmas constitue un puissant diagnostic, permettant d'identifier les espèces chimiques et ioniques présentes, mais permettant aussi d'accéder à la température (populations des niveaux excités) et à la densité du plasma (largeurs des raies d'émission). Dans les plasmas chauds thermonucléaires ou astrophysiques, le rayonnement est un mode de transport de la chaleur qui peut devenir prépondérant sur la conduction et la convection. Enfin, les plasmas étant souvent générés et maintenus très loin de l'équilibre thermodynamique, des inversions de population peuvent être obtenues, conduisant à des effets lasers.

- Lasers à décharge électrique: Helium-Néon (632nm),  $CO_2$  (10600nm), Argon ionisé (effet laser sur  $Ar^+$ ) à 432nm...
- Lasers à plasma par excitation collisionnelle: inversions de population entre niveaux excités d'un ion multichargé à sous-couche électronique fermée (exemple:  $Ag^{20+}$  à 13.9nm)
- Lasers à plasmas par recombinaison rapide: inversions de population entre niveaux excités d'un ion multichargé hydrogénoïde (exemple:  $N^{6+}$  à 13.5nm et 2.4nm).
- Lasers X "inner shell": le milieu laser est un gaz photoionisé massivement en couche interne par un flash de rayons X:  $Ne^+$  0.1 nm.

## 3.2 Production de décharges électriques

### 3.2.1 Ionisation collisionnelle

L'ionisation collisionnelle est à la base du processus conduisant à la formation d'une décharge plasma. Rappelons le mécanisme de l'ionisation collisionnelle:

$A + e^- \rightarrow A^+ + e^- + e^-$ . Cette collision inélastique suppose que l'électron incident possède une énergie cinétique supérieure à l'énergie d'ionisation  $E_I$  de l'atome cible  $A$ .

Considérons un gaz initialement neutre, de pression  $P$  placé entre deux électrodes entre lesquelles on applique une différence de potentiel  $V$ . En permanence, des processus génèrent une très faible ionisation du gaz: rayons cosmiques, tribo-électricité... Considérons un électron ainsi produit. Ce dernier sera accéléré par le champ électrique local  $E$  dérivant du potentiel  $V$ . Pour une pression suffisamment élevée, la probabilité que l'électron entre collision avec un atome neutre du gaz avant d'atteindre l'anode sera proche de 1. Si les collisions sont nombreuses, le mouvement de l'électron pourra être décrit comme dans le chapitre précédent en faisant intervenir un coefficient de friction et une mobilité  $\mu$ . Pour un champ  $E$  suffisamment élevé, l'électron peut acquérir entre deux collisions une énergie cinétique suffisante pour provoquer une ionisation collisionnelle. Après cet événement, ce sont deux électrons que nous devons considérer. A leur tour, ces derniers pourront générer 4 électrons, et ainsi de suite.

$$1e^- \rightarrow 2e^- \rightarrow 4e^- \rightarrow 8e^- \rightarrow \dots \quad (3.1)$$

### 3.2.2 Premier coefficient de Townsend

Ce phénomène d'intensification de l'ionisation est caractérisé par le premier coefficient de Townsend noté  $\alpha$ .

$\alpha(E, P)$  est un nombre d'ionisations par unité de longueur divisé par le nombre d'électrons incidents:

$$\frac{dN_e}{dx} = \alpha(E, P)N_e \quad (3.2)$$

Le premier coefficient de Townsend dépend du champ électrique  $E$  et de la pression  $P$  de la manière suivante:

$$\alpha(E, P) = AP \exp\left(-\frac{BP}{E}\right) \quad (3.3)$$

Où  $A$  et  $B$  sont des coefficients dépendant du gaz. Le coefficient  $\alpha$  croît avec le champ  $E$ . En effet, entre deux collisions, les électrons suivent un mouvement balistique et gagnent de l'énergie cinétique. Plus le champ  $E$  est élevé, plus la probabilité que les électrons acquièrent une énergie cinétique  $E_c$  supérieure à l'énergie d'ionisation  $E_I$  est élevée. Par ailleurs, le coefficient  $\alpha$  converge asymptotiquement vers  $\alpha = AP$  pour un champ  $E$  très élevé. En effet, la section efficace d'ionisation varie peu avec  $E_c$  lorsque  $E_c > E_I$ .

La pression  $P$  a deux effets contradictoires. Le libre parcours moyen d'un électron diminue avec  $P$ . La probabilité pour un électron d'ioniser un atome neutre sur la distance  $dx$  augmente donc avec  $P$ . Cependant, plus le libre parcours moyen est faible, moins l'énergie cinétique  $E_c$  acquise entre deux collisions sera importante.

Le premier coefficient de Townsend rend compte de l'intensification de l'ionisation avec le champ électrique, intensification due au processus d'avalanche électronique. Ce processus ne permet toutefois pas de comprendre l'existence de décharges électriques stationnaires et autonomes. En effet, toutes les charges produites finissent par être intégralement collectées par l'anode. La densité de flux  $J_e$  d'électrons sur l'anode est régénérée par les électrons produits en permanence par l'environnement. Notons  $N_p$  le nombre de ces électrons apportés par unité de temps et de volume. La densité de flux électronique  $J_e$  est gouverné par l'équation suivante:

$$\frac{dJ_e}{dx} = \alpha J_e + N_p \quad (3.4)$$

$$J_e(x) = \frac{N_p}{\alpha} (\exp(\alpha x) - 1) \quad (3.5)$$

Malgré l'intensification exponentielle,  $J_e$  est complètement régulé par  $N_p$  qui, en pratique, est très faible.

### 3.2.3 Second coefficient de Townsend

Il existe cependant un processus de régénération supplémentaire qui va conduire à une divergence du nombre d'ionisations dans la décharge. Les ions formés par l'avalanche sont entraînés vers la cathode où ils peuvent être neutralisés. Toutefois, si leur énergie cinétique est suffisante, ils peuvent arracher des électrons secondaires à la cathode. **Le second coefficient de Townsend  $\gamma$  quantifie le nombre d'électrons secondaires produits par ion incident.**

Ce coefficient est uniquement fonction de la nature de la cathode. Sa valeur est typiquement de l'ordre de 0.1 à 0.3 pour des énergies cinétiques de quelques eV.

### 3.2.4 Condition de Townsend

Nous allons établir la condition sur  $\alpha$  et  $\gamma$  pour obtenir un autoentretien de la décharge.

Considérons un électron produit au voisinage de la cathode. Cet électron induit un phénomène d'avalanche qui produit  $N(x)$  électrons à la distance  $x$  de la cathode. La définition du premier coefficient de Townsend conduit à:  $N(x) = 1 \times \exp(\alpha x)$ . Finalement ce premier électron donnera au niveau de l'anode  $N_1 = \exp(\alpha L)$  électrons. Cet électrons aura engendré  $\exp(\alpha L) - 1$  électrons *supplémentaires* et autant d'ions. Après impact sur la cathode, ces ions engendreront  $\gamma(\exp(\alpha L) - 1)$  électrons. Cette seconde génération d'électrons produira  $N_2 = \gamma(\exp(\alpha L) - 1)\exp(\alpha L)$  électrons au niveau de l'anode... et ainsi de suite

Finalement, le tout premier électron donnera  $N_{tot}$  électrons au niveau de l'anode:

$$N_{tot} = N_1 + N_2 + N_3 \dots \quad (3.6)$$

$$N_1 = \exp(\alpha L) \quad (3.7)$$

$$N_2 = \gamma(\exp(\alpha L) - 1)\exp(\alpha L) \quad (3.8)$$

$$N_3 = \gamma^2(\exp(\alpha L) - 1)^2 \exp(\alpha L) \quad (3.9)$$

$$\dots \quad (3.10)$$

Cette somme peut être mise sous la forme d'une somme de termes d'une suite géométrique de raison  $\gamma(\exp(\alpha L) - 1)$ .

$$N_{tot} = \exp(\alpha L)(1 + \gamma(\exp(\alpha L) - 1) + \gamma^2(\exp(\alpha L) - 1)^2 + \dots) \quad (3.11)$$

Si cette suite converge, un électron émis initialement au niveau de la cathode donnera:

$$N_{tot} = \frac{\exp(\alpha L)}{1 - \gamma(\exp(\alpha L) - 1)} \quad (3.12)$$

La condition d'auto-entretien de la décharge ou de "claquage" s'obtient en cherchant la condition de divergence de cette suite:

$$\gamma(\exp(\alpha L) - 1) > 1 \quad (3.13)$$

$$\alpha(E, P)L > \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \quad (3.14)$$

Cette condition est appelée **critère de Townsend**.

### 3.2.5 Loi de Paschen

Ce critère permet de trouver la tension minimale  $V$  pour obtenir un claquage dans un gaz à la pression  $P$  et pour une distance inter-électrode  $d$ . Introduisons  $V = Ed$ . En partant de la dépendance en pression et champ électrique de  $\alpha$ , on obtient

$$\alpha = AP \exp\left(-\frac{BPd}{V}\right) \quad (3.15)$$

Le critère de Townsend conduit alors à la formule de Paschen qui permet d'estimer la tension  $V$  minimale pour obtenir le claquage:

$$\frac{V}{V^*} = \frac{Pd/(Pd)^*}{1 + \ln(Pd/(Pd)^*)} \quad (3.16)$$

avec  $V^* = B/A \exp(1) \ln(1 + 1/\gamma)$  et  $(Pd)^* = \exp(1) \log(1 + 1/\gamma)/A$ .

Pour un gaz donné,  $Pd^*$  est la valeur du produit  $Pd$  qui minimise la tension  $V$  à appliquer pour obtenir le claquage.



## Chapitre 5

---

# *Dérives, invariants adiabatiques et confinement*

---

### 5.1 Introduction

Un plasma est constitué d'un très grand nombre de particules chargées. Ces particules sont sensibles aux champs magnétiques et électriques extérieurs, mais également aux champs des particules voisines (collisions coulombiennes) ainsi qu'aux champs autogénérés par les courants et séparations de charges résultant du mouvement de ces mêmes particules.

La compréhension de l'évolution d'un plasma nécessite donc une description autocohérente couplant les champs aux particules. Pour qu'une telle approche soit praticable, différents niveaux de réduction sont utilisés. Pour chacun d'eux, on accepte de perdre de l'information afin de pouvoir décrire "en bloc" le comportement d'un très grand nombre de particules.

- **Echelle précinétique:** Le plasma est un système à  $N$  particules. La position et la vitesse d'une particule dépend de la position et de la vitesse de toutes les autres. Une première réduction consiste à décrire l'évolution du plasma à l'aide de la densité de probabilité  $f(t, r_1, p_1, r_2, p_2, \dots, r_N, p_N)$  donnant la probabilité que la particule 1 soit au voisinage du point d'espace des phases  $(r_1, p_1)$ , la particule 2 autour de  $(r_2, p_2)$ ... Une réduction supplémentaire consiste à ne considérer que les corrélations entre la position d'une particule quelconque et celle d'une autre particule. La probabilité de trouver une particule à une certaine distance  $r$  d'une autre suit une loi de probabilité non-triviale  $g(r = r_2 - r_1)$  qui est une fonction de corrélation à deux particules. Cette dernière peut être obtenue à l'aide de simulations numériques de dynamique moléculaire.

laire. Cette description est employée pour comprendre les propriétés des plasmas denses et/ou corrélés.

- **Echelle cinétique.** Sur une échelle de temps suffisamment longue, les corrélations entre particules sont perdues. L'état du plasma est décrit par la fonction  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  qui donne le nombre de particules ayant une position et une vitesse situées dans le volume  $d^3r d^3v$  autour de  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ . L'évolution de la fonction  $f$  est régie par les équations de Fokker-Planck (collisions coulombiennes), de Boltzmann (collisions à grands angles de déflexion) ou de Vlasov (pas de collision). Ce niveau de description est très utilisé en physique des plasmas.
- **Echelle hydrodynamique.** Si l'évolution du système est suffisamment lente, la distribution de vitesses a en permanence le temps de converger vers une maxwellienne. En intégrant sur l'ensemble des vitesses on peut calculer les différents moments de la fonction  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ :  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ ,  $\mathbf{v}f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ ,  $v^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ ...on obtient alors les équations de continuité, d'Euler (ou Navier-Stokes), de conservation de l'énergie... Ces équations font systématiquement apparaître des moments d'ordre supérieur. Si l'on se cantonne aux trois premières équations, une équation supplémentaire est requise pour lier les moments entre eux. Ce sera souvent l'équation d'état du fluide.

Cependant, la description du mouvement d'une seule particule dans une configuration de champ n'est pas dénuée d'intérêt. Elle permet de mettre en évidence un certain nombre de comportements qui résisteront aux réductions successives. Bien que très imparfaite, cette approche a le mérite de développer notre intuition et de donner du sens aux termes apparaissant dans les équations fluides ou cinétiques.

### 5.1.1 Mouvement cyclotron

Analysons le mouvement d'une particule chargée de masse  $m$  et de charge  $q$  dans un **champ magnétique uniforme et constant**,  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ . La vitesse initiale de la particule est  $\mathbf{v}_0 = v_{0\parallel}\mathbf{e}_z + \mathbf{v}_{0\perp}$ , où nous avons décomposé la vitesse en une composante parallèle au champ magnétique et une composante orthogonale à celui-ci.

le principe fondamental de la dynamique nous donne:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.1)$$

ou encore,

$$\frac{dv_z}{dt} = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m}v_y \quad (5.3)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m}v_x \quad (5.4)$$

$$(5.5)$$

Le mouvement suivant  $z$  est donc un mouvement uniforme :  $v_z = v_{0\parallel}$ .

Le mouvement dans le plan ( $xOy$ ) peut être étudié en posant  $Z = v_x + iv_y$ .

$$\frac{dZ}{dt} = -i\omega_c Z \quad (5.6)$$

Nous avons introduit  $\omega_c = \frac{qB}{m}$  **la pulsation cyclotron**. Attention, avec cette définition, cette quantité peut être positive ou négative, selon le signe de  $q$ .

Les solutions de cette équation sont de la forme:

$$Z = Z_0 \exp(-i\omega_c t) \quad (5.7)$$

où  $Z_0$  est obtenue à partir des conditions initiales. Sa partie réelle est la composante suivant  $x$  de  $\mathbf{v}_{0\perp}$  tandis que sa partie imaginaire est la composante suivant  $y$  de cette vitesse initiale. Son module est la norme de la composante perpendiculaire de la vitesse initiale:  $|Z_0| = v_{0\perp}$ .

Intégrons une fois cette solution par rapport au temps pour obtenir l'évolution de  $r(t) = x(t) + iy(t)$ .

$$r = R_0 + i \frac{Z_0}{\omega_c} \exp(-i\omega_c t) \quad (5.8)$$

$$r = R_0 + i\rho_L \exp(-i\omega_c t + i\Phi_0) \quad (5.9)$$

Les parties réelle et imaginaire de  $r$  donneront  $x(t)$  et  $y(t)$ . La particule effectue donc un mouvement circulaire uniforme, dont l'orbite est un cercle de centre  $(X_0 = \text{Re}(R_0), Y_0 = \text{Im}(R_0))$  et de rayon  $\rho_L = \frac{V_{0\perp}}{\omega_c}$ , appelé **rayon de Larmor**. L'orbite est décrite avec une pulsation  $\omega_c$  ou une période  $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$ .

Remarquons que le sens de rotation dépend du signe de  $\omega_c$  et donc de  $q$ .  
**Le sens de rotation de la particule est tel que la spire de courant**

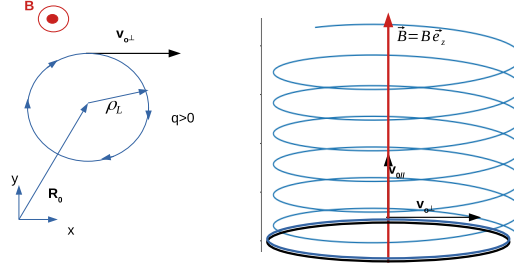


Figure 5.1: Mouvement cyclotron d'une particule chargée dans un champ magnétique constant et uniforme orienté suivant  $z$ .

**correspondant à ce mouvement crée un champ magnétique opposé au champ  $B$ .** Ce comportement permet d'expliquer le caractère diamagnétique des plasmas.

En conclusion, le mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme est un mouvement hélicoïdal dont l'axe est parallèle au champ magnétique.

## 5.2 Dérives

### 5.2.1 Dérives dues au champ électrique

Supposons à présent que la particule chargée soit non seulement soumise au champ magnétique  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ , mais également à un champ électrique dépendant du temps  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$ .

En utilisant les même notations que pour le mouvement cyclotron, l'équation du mouvement devient alors:

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m} E_{\parallel}(t) \quad (5.10)$$

$$\frac{dZ}{dt} = -i\omega_c Z + \frac{q}{m} E(t) \quad (5.11)$$

Par analogie avec  $Z$ , nous avons introduit la grandeur complexe  $E(t) = E_x(t) + iE_y(t)$ .

Le mouvement dans la direction parallèle au champ magnétique (direction  $z$ ) est un mouvement accéléré. Il s'obtient par une simple intégration de  $E_{\parallel}(t)$ .

Analysons le mouvement dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{B}$ . Nous devons résoudre une équation différentielle du premier ordre, avec un second membre dépendant du temps. Employons pour cela la méthode de variation de la constante. La solution est de la forme:

$$Z(t) = Z_0 \exp(-i\omega_c t) + \frac{q}{m} \exp(-i\omega_c t) \int_0^t \exp(i\omega_c u) E(u) du \quad (5.12)$$

Pour analyser plus avant le mouvement de la particule, nous allons faire une hypothèse d'adiabaticité (voir plus loin). Nous allons supposer que le champ électrique varie lentement. Plus précisément, nous supposons que le champ  $E$  varie très peu sur une période cyclotron. Autrement dit  $\frac{1}{\omega_c} \frac{dE}{dt} \ll E$ .

Nous allons donc expliciter les solutions sous la forme d'un développement en puissances croissantes de  $\frac{1}{\omega_c}$ . Pour ce faire, intégrons par partie l'intégrale apparaissant dans la solution. Posons  $Z_c(t) = Z_0 \exp(-i\omega_c t)$

$$Z(t) = Z_c(t) + \frac{q}{m} \exp(-i\omega_c t) \left( \left[ \frac{\exp(i\omega_c u)}{i\omega_c} E(u) \right]_0^t - \int_0^t \frac{\exp(i\omega_c u)}{i\omega_c} E'(u) du \right) \quad (5.13)$$

Supposons que  $E(t=0) = 0$  (i.e t=0 est un instant se situant bien avant l'allumage du champ).

$$Z(t) = Z_c(t) + \frac{q}{m} \frac{E(t)}{i\omega_c} - \frac{q}{m} \exp(-i\omega_c t) \int_0^t \frac{\exp(i\omega_c u)}{i\omega_c} E'(u) du \quad (5.14)$$

Le deuxième terme du second membre se met sous la forme  $V_D = -i \frac{E}{B}$ .

- Il est homogène à une vitesse.
- L'examen de ses composantes (partie réelle et imaginaire de  $V_D$ ...) permet de conclure que le vecteur associé  $\mathbf{v}_D$  est orthogonal à  $\mathbf{E}_\perp$  et à  $\mathbf{B}$ .
- Il ne dépend pas de la nature de la particule (q et m).

Ce terme correspond à la **vitesse de dérive "E cross B"**.

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (5.15)$$

Ce mouvement à la vitesse  $\mathbf{v}_D$  s'ajoute au mouvement rapide cyclotronique. Pour un champ électrique constant, Cette dérive s'effectue à vitesse constante, perpendiculairement au plan formé par les vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .

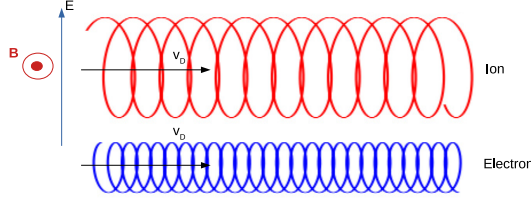


Figure 5.2: Mouvement de dérive d'une particule chargée dans une configuration "E X B". Les champs électriques et magnétiques sont constants et uniformes. Le champ magnétique est suivant z, le champ électrique suivant x.

Continuons notre examen de la solution à l'équation du mouvement. Nous pouvons à nouveau intégrer par partie le dernier membre:

$$Z(t) = Z_c(t) + V_D - \frac{q}{m} \exp(-i\omega_c t) \left( -\left[ \frac{\exp(i\omega_c u)}{\omega_c^2} E'(u) \right]_0^t + \int_0^t \frac{\exp(i\omega_c u)}{\omega_c^2} E''(u) du \right) \quad (5.16)$$

Supposons que  $E'(t=0) = 0$  (i.e t=0 est un instant se situant bien avant l'allumage du champ).

$$Z(t) = Z_c(t) + V_D + \frac{q}{m} \frac{1}{\omega_c^2} E'(t) - \frac{q}{m} \exp(-i\omega_c t) \int_0^t \frac{\exp(i\omega_c u)}{\omega_c^2} E''(u) du \quad (5.17)$$

Nous pouvons ainsi poursuivre ce développement en continuant à intégrer par partie. Nous obtiendrons une succession de termes en  $\frac{E^{(n)}(t)}{\omega_c^n}$ , termes perturbatifs de plus en plus petits. Intéressons nous au terme en  $\frac{E''(t)}{\omega_c^2}$ .

- Ce terme est homogène à une vitesse
- il est proportionnel à la dérivée par rapport au temps du champ.
- son signe et son importance dépendent de la charge q et de la masse m de la particule.
- il correspond à une contribution au vecteur vitesse parallèle au champ  $E_{\perp}$ .

En conclusion: la variation du champ électrique ajoute au mouvement de la particule une **vitesse de dérive dite de polarisation** de la forme:

$$\mathbf{v}_P = \frac{q}{m\omega_c^2} \frac{d\mathbf{E}_\perp}{dt} \quad (5.18)$$

Dressons un bilan de cette étude. Un présence d'un champ magnétique constant et uniforme et d'un champ lentement variable, le mouvement de la particule perpendiculairement au ligne de champ est la composition d'un mouvement cyclotronique, d'une vitesse de dérive "E cross B" et d'une vitesse de dérive de polarisation.

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{V}_c + \mathbf{V}_D + \mathbf{V}_P \quad (5.19)$$

## 5.2.2 Dérives magnétiques

### Champ magnétique non-uniforme

Interessons-nous au mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique constant mais inhomogène. Nous supposons toutefois que les longueurs caractéristiques d'évolution de ce champ sont grandes devant celles du mouvement cyclotron. Autrement dit, localement, le champ ressemble à un champ quasi-uniforme. Sur une échelle de temps de quelques  $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$ , le mouvement est proche du mouvement cyclotron vu plus haut. Au cours de ce mouvement, la particule explore des régions où le champ est légèrement différent. Ceci induit une petite perturbation au mouvement cyclotron qui, cumulée sur un grand nombre de périodes  $T_c$  produit un effet de dérive.

Pour faciliter l'analyse, mettons le champ magnétique sous la forme suivante:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B(\mathbf{r}_0)\mathbf{e}_z + \delta\mathbf{B}(\mathbf{r}) \quad (5.20)$$

avec:

$$\delta B_x = \frac{\partial B_x}{\partial x} dx + \frac{\partial B_x}{\partial y} dy + \frac{\partial B_x}{\partial z} dz + \dots \quad (5.21)$$

$$\delta B_y = \frac{\partial B_y}{\partial x} dx + \frac{\partial B_y}{\partial y} dy + \frac{\partial B_y}{\partial z} dz + \dots \quad (5.22)$$

$$\delta B_z = \frac{\partial B_z}{\partial x} dx + \frac{\partial B_z}{\partial y} dy + \frac{\partial B_z}{\partial z} dz + \dots \quad (5.23)$$

et  $\delta x = x - x_0$ ,  $\delta y = y - y_0$ ,  $\delta z = z - z_0$ . Les dérivées partielles ci-dessus sont prises en  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  (nous effectuons un développement de Taylor au premier ordre).

Nous supposons que les variations du champ dans les directions transverses (x et y) sont faibles sur une échelle d'espace de l'ordre du rayon de Larmor:  $\frac{\partial B_j}{\partial x} \rho_L \ll B(\mathbf{r}_0)$ , et  $\frac{\partial B_j}{\partial y} \rho_L \ll B(\mathbf{r}_0)$ .

Nous supposons également que la variation de champ est faible lorsque la particule se déplace suivant z. En première approximation (mouvement cyclotron), le mouvement suivant z est uniforme, sa vitesse est  $v_{\parallel}$ . Sur une période cyclotron, la particule s'est donc déplacée suivant z de  $V_{\parallel} T_c$ . Ce qui se traduit par l'hypothèse suivante sur le gradient:  $\frac{\partial B_j}{\partial z} \frac{V_{\parallel}}{\omega_c} \ll B(\mathbf{r}_0)$ .

### Gradient, courbure, divergence et cisaillement

Donnons une signification à ces différentes dérivées partielles.

- Le champ est globalement orienté suivant z. Les termes  $\frac{\partial B_z}{\partial x}$  et  $\frac{\partial B_z}{\partial y}$  représentent la variation de l'intensité du champ dans les directions transverses. Ce sont les termes de **gradient**
- Le champ présente également de faibles composantes transverses suivant x et y. La variation de ces composantes avec z induit une courbure de la ligne de champ.  $\frac{\partial B_x}{\partial z}$  et  $\frac{\partial B_y}{\partial z}$  sont appelés termes de **courbure**.
- Les éléments "diagonaux"  $\frac{\partial B_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial B_y}{\partial y}$  indiquent comment les composantes transverses évoluent suivant x et y. Ils rendent compte de la **convergence ou de la divergence de lignes de champ** voisines. Cette convergence ne se fait pas forcément au même rythme suivant x et y. Le troisième terme diagonal  $\frac{\partial B_z}{\partial z}$  est lié aux deux autres termes par  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .
- Les deux termes  $\frac{\partial B_x}{\partial y}$  et  $\frac{\partial B_y}{\partial x}$  rendent compte du **cisaillement** des lignes de champ.

### Dérive de gradient

Examinons la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique inhomogène présentant un gradient dans la direction transverse x:  $\frac{\partial B_z}{\partial x} \neq 0$ .

Un tel champ prend localement la forme suivante:

$$\mathbf{B} = B_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \mathbf{e}_z \quad (5.24)$$



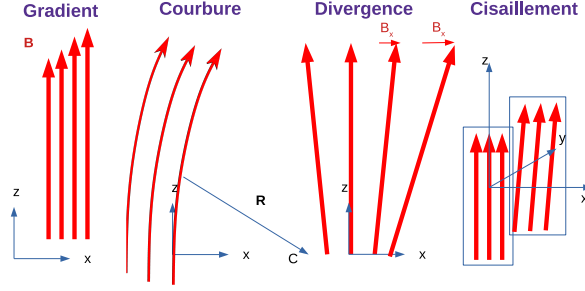


Figure 5.3: Illustration des différentes non-uniformités d'un champ magnétique globalement orienté suivant  $z$ .

et l'équation du mouvement:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \omega_c(\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z) + \omega_c \frac{x}{L} \mathbf{v} \times \mathbf{e}_z \quad (5.25)$$

Avec  $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$ . Les forces n'ayant pas de composante suivant  $z$ , le mouvement suivant cet axe est uniforme. Supposons que la particule soit initialement à l'origine, et que son vecteur vitesse soit initialement suivant  $x$ . Introduisons à nouveau  $Z = v_x + iv_y$ . L'équation du mouvement transverse devient:

$$\frac{dZ}{dt} = -i\omega_c Z - i\omega_c \frac{x}{L} Z \quad (5.26)$$

L'hypothèse de faible gradient s'écrit ici  $L \gg \rho_L$ . Dans ces conditions, le second terme du second membre est un terme perturbatif. En son absence ( $L$  est infini), le mouvement est un mouvement cyclotron. Pour  $L$  fini, effectuons un développement perturbatif. À l'ordre zéro, le mouvement est un mouvement cyclotron dont la vitesse est  $\mathbf{V}_c(t)$ , la vitesse "complexe"  $Z_c(t) = v_{0\perp} \exp(-i\omega_c t)$  et les coordonnées  $x_c(t) = \rho_L \sin(\omega_c t)$  et  $y_c(t) = \rho_L \cos(\omega_c t)$ . À l'ordre 1,  $Z = Z_c + Z_1$  avec  $Z_1$  un terme en  $\rho_L/L$ .

$$\frac{dZ}{dt} = -i\omega_c Z - i\omega_c \frac{x_c}{L} Z_c \quad (5.27)$$

Connaissant  $Z_c(t)$  et  $x_c(t)$ , nous sommes ramenés à la résolution d'une équation du premier ordre avec second membre dépendant du temps. On utilise la méthode de variation de la constante pour trouver  $Z$  à l'ordre 1.

$$Z = Z_c(t) + Z_1(t) \quad (5.28)$$

$$Z = Z_c(t) - i \frac{\omega_c}{L} \exp(-i\omega_c t) \int_0^t \exp(i\omega_c u) x_c(u) Z_c(u) du \quad (5.29)$$

$$Z_1 = -i \frac{\omega_c Z_0 \rho_L}{L} \exp(-i\omega_c t) \int_0^t \sin(\omega_c t) du \quad (5.30)$$

$$Z_1 = -i \frac{Z_0 \rho_L}{L} \exp(-i\omega_c t) (1 - \cos(\omega_c t)) \quad (5.31)$$

$$Z_1 = +i \frac{Z_0 \rho_L}{L} \exp(-i\omega_c t) (\cos(\omega_c t) - 1) \quad (5.32)$$

Le terme  $Z_1$  de cette solution est donc bien une correction  $\rho_L/L$  plus petite que le mouvement cyclotronique. Ce terme dépend du temps. Toutefois, il peut être décomposé en la somme de contributions oscillant aux pulsations  $\omega_c$  et  $2\omega_c$  et d'une contribution constante. Sur une période cyclotronique, les contributions oscillantes ont une moyenne nulle.

$$Z_1 \propto \exp(-i\omega_c t) (\cos(\omega_c t) - 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp(-i2\omega_c t) + \exp(-i\omega_c t) \quad (5.33)$$

$$\langle Z_1 \rangle \propto \frac{1}{2} \quad (5.34)$$

On obtient finalement la **vitesse de dérive de gradient**:

$$\langle Z_1 \rangle = +i \frac{Z_0 \rho_L}{2L} \quad (5.35)$$

L'analyse des composantes du vecteur vitesse associé à  $\langle Z_1 \rangle$  (partie réelle et imaginaire) montre que ce vecteur est suivant  $y$ .

$$v_\perp = v_c(t) + \frac{v_{0\perp} \rho_L}{2L} \mathbf{e}_y \quad (5.36)$$

**Cette vitesse de dérive est orthogonale au champ magnétique et à son gradient.** Ce resultat se généralise. La vitesse de dérive de gradient est donnée par:

$$\mathbf{v}_{\text{DG}} = \frac{V_c^2}{2\omega_c} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^2} \quad (5.37)$$

### Dérive de courbure

Examinons la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique inhomogène présentant une courbure dans la direction transverse  $x$ :  $\frac{\partial B_x}{\partial z} \neq 0$ .

$$\mathbf{B} = B_0(\mathbf{e}_z + \frac{z}{R}\mathbf{e}_x) \quad (5.38)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \omega_c(\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{e}_z) + \omega_c v_z \frac{z}{R} \quad (5.39)$$

Nou pouvons procéder de manière analogue à celle employée pour un gradient de champ (section précédente). A l'ordre zéro ( $R$  tendant vers l'infini), Le mouvement est un mouvement cyclotron. Son mouvement suivant  $z$  est uniforme, sa vitesse est  $V_\parallel$ . On a alors, au premier ordre,  $z = z_c = V_\parallel t$

En prenant les notations complexes introduites plus haut, l'équation du mouvement transverse s'écrit alors au premier ordre en  $\frac{V_\parallel}{\omega_c R}$  :

$$\frac{dZ}{dt} = -i\omega_c Z + i\omega_c \frac{z_c}{R} V_\parallel \quad (5.40)$$

La solution  $Z$  à l'ordre 1 est obtenue par une procédure analogue :

$$Z = Z_c + Z_1 \quad (5.41)$$

$$Z = Z_c + i\frac{\omega_c V_\parallel}{R} \exp(-i\omega_c t) \int_0^t \exp(i\omega_c u) z_c(u) du \quad (5.42)$$

$$Z_1 = i\frac{\omega_c V_\parallel}{R} \exp(-i\omega_c t) \int_0^t \exp(i\omega_c u) V_\parallel u du \quad (5.43)$$

$$Z_1 = i\frac{\omega_c V_\parallel^2}{R} \exp(-i\omega_c t) \left( \left[ \frac{\exp(i\omega_c u)}{i\omega_c} u \right]_0^t - \int_0^t \frac{\exp(i\omega_c u)}{i\omega_c} du \right) \quad (5.44)$$

$$Z_1 = i\frac{V_\parallel^2}{iR} \left( t - \frac{1}{i\omega_c} + \frac{\exp(-i\omega_c t)}{i\omega_c} \right) \quad (5.45)$$

Le mouvement de dérive est obtenu en moyennant  $Z_1$  sur une période cyclotron:

$$\langle Z_1 \rangle = \frac{V_\parallel^2}{\omega_c R} (\omega_c t + i) \quad (5.46)$$

En analysant les composantes de cette vitesse de dérive (partie réelle et imaginaire), nous obtenons le terme de vitesse qui doit être ajouté au mouvement cyclotron:

$$\mathbf{V}_1 = \frac{V_\parallel z}{R} \mathbf{e}_x + \frac{V_\parallel^2}{\omega_c R} \mathbf{e}_y \quad (5.47)$$

Nous avons fait intervenir le fait que  $V_\parallel t = z$  au premier ordre.

La vitesse totale est alors:

$$\mathbf{V} = V_{\parallel} \mathbf{e}_z + V_c(t) + \frac{V_{\parallel} z}{R} \mathbf{e}_x + \frac{V_{\parallel}^2}{\omega_c R} \mathbf{e}_y \quad (5.48)$$

Au premier ordre la courbure du champ introduit des modifications au mouvement parallèle et cyclotronique.

- Le premier terme correctif est proportionnel à  $z$ . Ce n'est donc pas un terme de dérive. On constate que  $V_{\parallel} \mathbf{e}_z + \frac{V_{\parallel} z}{R} \mathbf{e}_x = V_{\parallel} (\mathbf{e}_z + \frac{z}{R} \mathbf{e}_x)$ . Autrement dit, la somme de ces deux vecteurs forme un nouveau vecteur vitesse qui est parallèle à la ligne de champ magnétique. **Le centre du mouvement cyclotron suit la ligne de champ magnétique.**
- Le second terme est un **mouvement de dérive perpendiculaire au plan de courbure.**

De manière plus générale la **vitesse de dérive de courbure** est donnée par:

$$\mathbf{v}_{\text{DC}} = \frac{V_{\parallel}^2}{\omega_c} \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{n}}{R} \quad (5.49)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire du repère de Frenet perpendiculaire à la ligne de champ et pointant vers le centre de courbure.

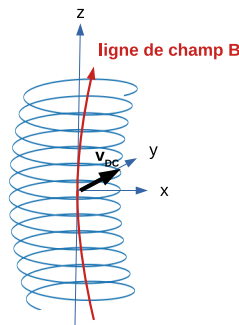


Figure 5.4: Mouvement d'une particule chargée le long d'une ligne de champ courbée.

## 5.3 Exemple d'invariant adiabatique: le moment magnétique

### 5.3.1 Définition du moment magnétique

Revenons quelques instants au mouvement cyclotron d'une particule chargée dans un champ uniforme. Le sens de rotation de la particule dépend de la direction du champ magnétique et du signe de la charge  $q$  de la particule. **Le sens de rotation cyclotron de la particule est tel que la spire de courant ainsi obtenue génère un champ magnétique opposé au champ initial.** Cette propriété donne au plasma des propriétés **diamagnétiques**. Nous pouvons associer au mouvement cyclotron un moment magnétique  $\mu$ .

$$\mu = \frac{\rho_L \times qV_c}{2} \quad (5.50)$$

Le vecteur  $\mu$  est parallèle au champ magnétique mais de sens opposé. Nous pouvons dériver de cette expression différentes formes utiles:

$$\mu = \frac{q\rho_L V_c}{2} = \frac{qV_c^2}{2\omega_c} \quad (5.51)$$

$$\mu = \frac{mV_c^2}{2B} = \frac{W_c}{B} \quad (5.52)$$

où  $W_c$  est l'énergie cinétique associée au mouvement transverse de la particule. A une constante  $q/m$  près, le moment magnétique est le rapport d'une énergie sur la pulsation caractéristique du mouvement (i.e la pulsation cyclotron).

### 5.3.2 Invariance adiabatique du moment magnétique

Dans les sections précédentes nous avons étudié le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique non uniforme. Dans toutes les situations envisagées, la force de Laplace ne travaillait pas, l'énergie cinétique restait donc constante.

Cet état de fait change si l'on considère un champ magnétique dépendant du temps. La particule est alors soumise à la force de Laplace, mais également à la force due champ électrique  $\mathbf{E}(t)$  *induit*.

Analysons le mouvement transverse d'une particule dans un champ uniforme mais variable  $\mathbf{B}(\mathbf{t}) = B(t)\mathbf{e}_z$ . Nous supposons que le champ magnétique varie "lentement". Plus précisément, nous supposons que sa variation relative est très petite sur un intervalle de temps de l'ordre de la période cyclotron  $T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}$ :

$$\frac{1}{\omega_c} \frac{\partial B}{\partial t} \ll B \quad (5.53)$$

Dans ces conditions nous pourrions supposer que la trajectoire de la particule change peu sur une période cyclotronique et reste donc très proche du mouvement cyclotron (mouvement circulaire uniforme). Calculons  $\delta W_c$  la variation d'énergie cinétique sur une période cyclotron. Cette quantité est égale au travail de la force du champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{t})$  induit par la variation de champ magnétique. Le travail élémentaire est intégré sur un circuit fermé correspondant à la trajectoire cyclotron:

$$\delta W_c = \oint q\mathbf{E}(\mathbf{t}) \cdot d\mathbf{l} = - \oint q\mathbf{E}(\mathbf{t}) \cdot \mathbf{V}_c dt \quad (5.54)$$

Remarque: si  $\mathbf{B}$  est suivant  $z$ , et que  $q > 0$ , alors la particule tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Si l'élément  $dl$  est orienté pour parcourir la trajectoire dans le sens direct, alors  $d\mathbf{l} = -\mathbf{V}_c dt$ .

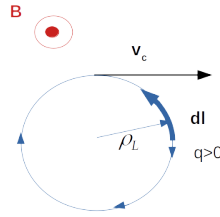


Figure 5.5: Calcul de la variation d'énergie cinétique induite par un champ  $B$  lentement variable.

En utilisant la relation de Maxwell-Faraday et le théorème de Stokes, nous pouvons transformer cette intégrale sur le contour fermé de la trajectoire cyclotronique en une intégrale sur la surface délimitée par celle-ci:

$$\delta W_c = q \int \int \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{t})}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = q \frac{\partial B(t)}{\partial t} \int \int \mathbf{e}_z \cdot d\mathbf{S} \quad (5.55)$$

$$(5.56)$$

La variation lente du champ permet d'assimiler la dérivée au taux d'accroissement de B. Par ailleurs la trajectoire restant très proche du mouvement cyclotron, la surface entourée est celle d'un cercle dont le rayon est celui de Larmor.

$$\delta W_c \approx q \delta B \frac{\omega_c}{2\pi} \pi \rho_L^2 \quad (5.57)$$

$$\delta W_c \approx q \delta B \frac{V_c^2}{2\omega_c} \quad (5.58)$$

$$\delta W_c \approx \frac{\delta B}{B} W_c \quad (5.59)$$

Nous aboutissons finalement à une relation ressemblant à la dérivée logarithmique d'un rapport:

$$\frac{\delta W_c}{W_c} - \frac{\delta B}{B} \approx 0 \quad (5.60)$$

$$\delta\left(\frac{W_c}{B}\right) = \delta\mu \approx 0 \quad (5.61)$$

En conclusion, si le champ magnétique varie lentement au cours du temps, le moment magnétique ne varie pratiquement pas. **Le moment magnétique est un invariant adiabatique.**

## 5.4 Force diamagnétique ou force "mu grad B"

La notion de moment magnétique associé au mouvement cyclotron et son invariance adiabatique vont nous aider à comprendre le mouvement d'une particule dans un champ magnétique constant mais présentant une non-uniformité de type "convergence/divergence".

La particule chargée est plongée dans un champ magnétique globalement orienté suivant z, et présentant un gradient suivant cette direction:  $\frac{\partial B_z}{\partial z} \neq 0$ . Initialement la particule à une vitesse suivant z  $V_{\parallel} = V_{\parallel 0}$  et une vitesse cyclotronique  $V_{\perp} = V_c = V_{c0}$ .

On supposera que le champ est lentement variable suivant z:

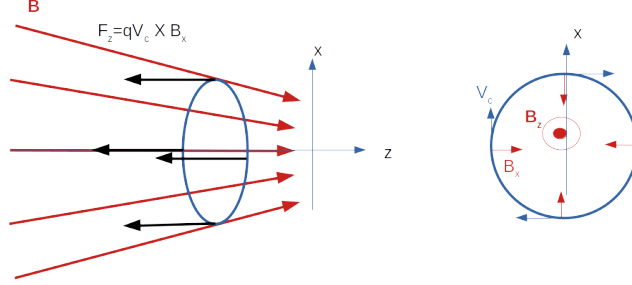


Figure 5.6: Origine de la force diamagnétique.

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{V_{\parallel}}{\omega_c} \ll B_z \quad (5.62)$$

La conservation du flux magnétique ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ), impose l'existence de composantes du champ suivant  $x$  et  $y$  présentant également des gradients. Ces composantes et leurs gradients seront également faibles.

En première approximation, le mouvement de la particule est un mouvement de rotation cyclotron combiné à un mouvement de translation suivant  $z$ . Toutefois, les composantes transverses du champ magnétique vont créer une force de Laplace orientée suivant  $z$ . Celle-ci, cumulée sur un grand nombre d'orbites cyclotron, va modifier le mouvement moyen de la particule suivant  $z$ . Cette force est appelée **force diamagnétique**. Nous donnons ci-dessous une dérivation simple de son expression.

Supposons que le champ présente une symétrie radiale autour de  $z$ . Soit  $L$  la longueur caractéristique du gradient suivant  $z$ . Cette longueur est telle que  $L \gg \frac{V_{\parallel}}{\omega_c}$ . Le champ magnétique est de la forme:

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z + B_0 \left( \frac{z}{L} \mathbf{e}_z - \frac{x}{2L} \mathbf{e}_x - \frac{y}{2L} \mathbf{e}_y \right) \quad (5.63)$$

Cette forme vérifie bien  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Projetons le principe fondamental de la dynamique sur l'axe  $z$ .

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\omega_c}{2L} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \quad (5.64)$$

avec  $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$ . Le mouvement suivant  $z$  est supposé lent devant le mouvement cyclotronique. De plus, ce dernier change peu d'une orbite à une autre.



Nous pouvons donc remplacer dans l'équation précédentes les coordonnées  $x, y$  et leurs dérivées par celles d'un mouvement cyclotron. Nous regarderons l'effet moyen de ces termes sur une période  $T_c$ .

Compte tenu des résultats obtenus dans les sections précédentes:

$$\frac{dx}{dt} = V_c \cos(\omega_c t) \quad (5.65)$$

$$\frac{dy}{dt} = -V_c \sin(\omega_c t) \quad (5.66)$$

$$x(t) = \frac{V_c}{\omega_c} \sin(\omega_c t) \quad (5.67)$$

$$y(t) = \frac{V_c}{\omega_c} \cos(\omega_c t) \quad (5.68)$$

$$(5.69)$$

Si bien que:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = -\frac{V_c^2}{\omega_c} (\sin^2(\omega_c t) + \cos^2(\omega_c t)) = -\frac{V_c^2}{\omega_c} \quad (5.70)$$

Finalement, l'équation du mouvement suivant  $z$  se met sous la forme:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -m \omega_c \frac{V_c^2}{2L \omega_c} \quad (5.71)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{W_c}{B} \frac{B}{L} \quad (5.72)$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -\mu \frac{\partial B}{\partial z} \quad (5.73)$$

Nous mettons ainsi en évidence l'expression de la force diamagnétique, proportionnelle et opposée au gradient du champ, mais proportionnel au moment magnétique. Cette force est parfois appelée force "mu grad B". Le mouvement de la particule est donc la superposition d'un mouvement transverse cyclotron et d'un mouvement du centre guide suivant la direction  $z$  sous l'effet de la force diamagnétique.

Voyons à présent comment utiliser en pratique la force diamagnétique. L'invariance adiabatique du moment magnétique se généralise au cas d'un déplacement du centre guide le long des lignes de champ. Autrement dit, dans l'expression de la force,  $\mu$  est une constante. Nous avons donc deux invariants du mouvement:  $\mu$  et l'énergie cinétique totale.

$$\frac{V_c^2}{B(z)} = \frac{V_{c0}^2}{B(z_0)} \quad (5.74)$$

$$V_{\parallel}^2 + V_c^2 = V_{\parallel 0}^2 + V_{c0}^2 \quad (5.75)$$

Si nous connaissons les conditions initiales, il nous est alors possible de prévoir la vitesse  $V_{\parallel}$  en fonction de  $B(z)$  et donc, de la position  $z$ .

$$V_{\parallel}^2 = V_{\parallel 0}^2 + V_{c0}^2 \left(1 - \frac{B(z)}{B(z_0)}\right) \quad (5.76)$$

- Au cours de son déplacement dans le gradient de champ, l'énergie cinétique de la particule se conserve. Toutefois la proportion de cette énergie contenue dans le mouvement cyclotron évolue.
- Il existe une valeur de  $B$  pour laquelle  $V_{\parallel}$  s'annule. Dans le gradient de champ magnétique, cette valeur est atteinte en  $z$ . En ce point toute l'énergie cinétique est contenue dans le mouvement de rotation cyclotron. La particule ne peut progresser vers des zones de champ plus intense ( $V_{\parallel}^2$  ne pouvant devenir négatif). Elle rebrousse chemin. Cette configuration est appelée un **miroir magnétique**. Un tel miroir peut être obtenu au voisinage d'une bobine magnétique.

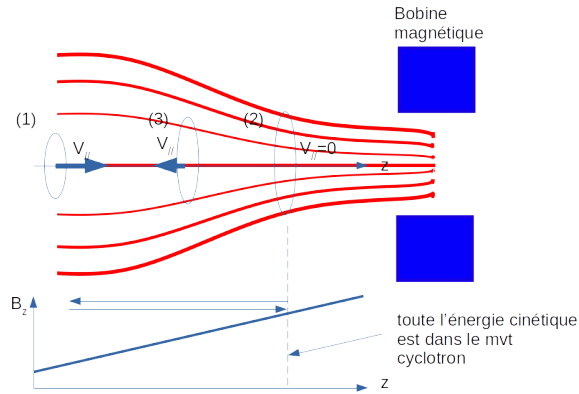


Figure 5.7: Principe du miroir magnétique.

- En mettant face à face deux miroirs magnétiques, on peut confiner les particules dans la direction  $z$ . On obtient alors une "bouteille magnétique". Il s'agit de l'une des premières configurations étudiées pour confiner un plasma de fusion nucléaire.

- En pratique, le champ  $B(z)$  ne peut dépasser une valeur limite  $B_{max}$ . Dans le cas d'un miroir formé d'une bobine magnétique, cette valeur maximale est atteinte au milieu de la bobine. Une particule ayant une énergie cinétique suffisante peut donc "traverser le miroir", ou s'échapper d'une bouteille magnétique. Il suffit pour cela que:

$$V_{\parallel 0}^2 + V_{c0}^2 \left(1 - \frac{B_{max}}{B(z_0)}\right) > 0 \quad (5.77)$$

ou encore:

$$\frac{V_{\parallel 0}^2 + V_{c0}^2}{V_{c0}^2} > \frac{B_{max}}{B(z_0)} \quad (5.78)$$

$$\frac{B(z_0)}{B_{max}} < \sin^2(\theta_0) \quad (5.79)$$

Autrement dit, la particule peut traverser le miroir magnétique si l'angle que forme le vecteur vitesse avec l'axe  $z$  en  $z_0$  est plus grand qu'une valeur appelée *angle de fuite*.

Cette perte peut constituer un problème pour le confinement magnétique de plasmas de fusion (perte des particules chaudes). Il peut également présenter un intérêt dans d'autres domaines comme dans certains propulseurs à plasma (concept VASIMR proposé par F. Chang-Diaz).

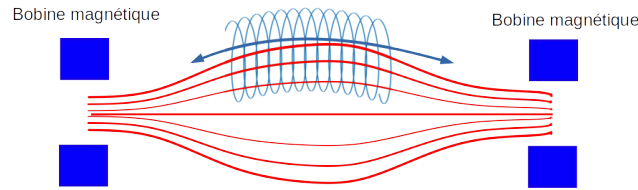


Figure 5.8: Principe du confinement par deux miroirs.