Processus stochastiques et neutronique : TD n°3

11 février 2022

Mouvement Brownien

1 Croissance stochastique (examen 2014)

On considère un modèle très simple de croissance neutronique où $n(t)$ est le nombre de neutrons à l'instant t et r le taux de croissance intrinsèque de la population (r est une constante positive dans tout le problème). L'équation d'évolution du système est

$$\frac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t} = r\,n(t),$$

et sa solution

$$n(t) = n(0)e^{rt}$$

où $n(0)$ est un nombre initial fixé de neutrons. Placé dans un environnement stochastique, le taux de croissance devient

$$\tilde{r} = r \times [1 + \nu(t)]$$

où $\nu(t)$ est bruit blanc gaussien vérifiant

$$\langle \nu(t) \rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle \nu(t)\nu(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t')$$

1. On définit $W(t) = \displaystyle\int_0^t \nu(u)\,\mathrm{d}u$. Montrer que $\langle W^2(t) \rangle = \sigma^2 t$.
2. L'équation de Langevin pour la croissance neutronique est

   $$\frac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t} = r\,[1 + \nu(t)]\,n(t).$$

   Intégrer cette équation et donner sa solution en fonction de r, $n(0)$ et $W(t)$.
3. En admettant que

   $$\langle e^{[rW(t)]} \rangle = e^{\frac{r^2}{2}\langle W^2(t) \rangle}$$

   montr er que

   $$\langle n(t) \rangle = n(0)e^{r^* t}$$

   où r^* est un taux de croissance effectif dont on donnera l'expression en fonction de r et σ.
4. Calcuer la variance $\langle n^2(t) \rangle - \langle n(t) \rangle^2$, examiner son comportement à grands temps.

2 Equation de Langevin (examen 2016)

En 1 dimension, dans un fluide le déplacement d'une particule brownienne de masse m et de vitesse $u(t)$ est décrit par l'équation de LANGEVIN :

$$m\dot{u}(t) = -\gamma u(t) + \nu(t) \tag{1}$$

où γ est un coefficient de friction et $\nu(t)$ est un bruit aléatoire de valeur moyenne nulle.

1. En multipliant l'équation 1 par $x(t)$, montrer que,

$$m\frac{d}{dt}(x(t)\dot{x}(t)) = m\dot{x}(t)^2 - \gamma x(t)\dot{x}(t) + x(t)\nu(t) \tag{2}$$

2. Avant de continuer que vaut $\langle \dot{x}(t)^2 \rangle$ à la température T ?
3. En moyennant l'équation 2 sur les réalisations, montrer que

$$\frac{d}{dt}\langle x(t)\dot{x}(t)\rangle = -\frac{\gamma}{m}\langle x(t)\dot{x}(t)\rangle + \frac{k_BT}{m} \tag{3}$$

   où k_B est la constante de Boltzmann.
4. En remarquant que $\langle x(t)\dot{x}(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x^2(t)\rangle$, et en supposant que la position et la vitesse de la particule sont nulles à l'instant $t = 0$, donner la distance carrée moyenne $\langle x^2(t)\rangle$ parcourue par la particule. Que vaut $\langle x^2(t)\rangle$ à grand temps ?

3 Intégrale du mouvement brownien (examen 2020)

Dans cet exercice on considère un bruit blanc gaussien $\nu(t)$ vérifiant

$$\langle \nu(t)\rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle \nu(t)\nu(t')\rangle = \sigma^2\delta(t-t')$$

1. On définit $B(t) = \displaystyle\int_0^t \nu(u)\,\mathrm{d}u$. Montrer que $\langle B(t)B(s)\rangle = \sigma^2 \min(t,s)$.
2. A partir du processus $B(t)$ on définit un nouveau processus stochastique $X(t)$ (intégrale du mouvement brownien) par $X(t) = \displaystyle\int_0^t B(u)\,\mathrm{d}u$. Calculer la valeur moyenne et la variance du processus $X(t)$. Le processus est-il gaussien ?