Processus stochastiques et neutronique : TD n°4

18 février 2022

Introduction à la neutronique : Marches aléatoires, équation de la diffusion

1 Libre parcours moyen d'absorption

Des neutrons supposés monocinétiques évoluent dans un milieu infini et homogène caractérisé par les sections efficaces macroscopiques Σ_t, Σ_s et Σ_a (avec $\Sigma_t = \Sigma_s + \Sigma_a$). On note $p_a = \Sigma_a/\Sigma_t$ la probabilité d'absorption d'un neutron lors d'un choc et $p_s = \Sigma_s/\Sigma_t$ celle de diffusion. Calculer :

1. la probabilité p_n d'avoir un parcours avec exactement n chocs.
2. le nombre moyen $< n >$ de parcours entre l'émission et absorption.
3. le libre parcours moyen d'absorption (parcours développé moyen entre l'émission et l'absorption).

2 Longueur de diffusion

Sous les mêmes hypothèses, on désigne par R la distance séparant le point d'absorption du point d'émission, c'est à dire la distance parcourue à vol d'oiseau. Calculer la valeur moyenne de $< R^2 >$. On supposera que les diffusions sont isotropes, ce qui entraîne que les cosinus des angles formés par les directions de deux parcours élémentaires consécutifs sont nuls en moyenne.

3 Longueur de diffusion

Dans un milieu homogène et infini, reprendre le calcul de la longueur de diffusion L proposé à l'exercice précédent sans faire d'hypothèse sur la loi angulaire de diffusion. Démarche proposée :

1. Considérer pour commencer les neutrons effectuant exactement n parcours $\vec{\rho}_i$ et écrire :

$$\vec{R}_n = \vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_2 + \ldots + \vec{\rho}_n, \tag{1}$$

d'où en prenant la moyenne :

$$< \vec{R}_n^{\,2} > = < \vec{\rho}_1^{\,2} > + < \vec{\rho}_2^{\,2} > + \ldots + < \vec{\rho}_n^{\,2} > + 2 < \rho_1 \rho_2 \cos\theta_{12} > + \ldots, \tag{2}$$

où θ_{ij} désigne l'angle entre les vecteurs $\vec{\rho}_i$ et $\vec{\rho}_j$. Expliciter complètement cette somme et la simplifier (les variables ρ et θ sont indépendantes).

2. On désigne par $\bar{\mu}$ la valeur moyenne du cosinus de l'angle de déviation au cours d'une diffusion $\theta_{i,i+1}$ (indépendante de i). Montrer par récurrence que $< \cos\theta_{i,i+k} >= \bar{\mu}^k$. On pourra pour cela utiliser la formule de la trigonométrie sphérique :

$$\cos c = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b . \cos \phi \tag{3}$$

où a, b et c sont les côtés d'un triangle sphérique (mesurés par les angles sous lesquels on les voit du centre de la sphère) et ϕ l'angle dièdre indiqué sur la figure donnée dans l'annexe en page 2.

3. En déduire $< \vec{R}_n^{\,2} >$.

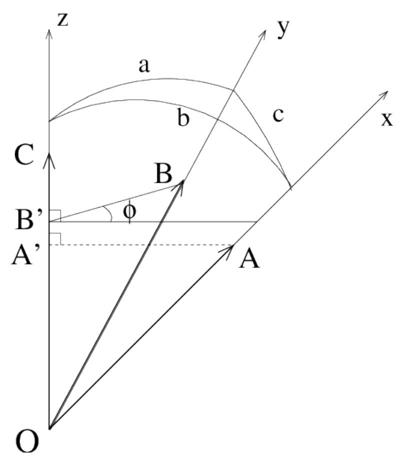
4. En pondérant les $< \vec{R}_n^{\,2} >$ par les probabilités p_n (rappel $p_n = p_a p_s^{n-1}$ voir TD précédent) que le neutron effectue exactement n parcours, en déduire $< \vec{R}^{\,2} >$.

5. Montrer que l'air de diffusion définie par $L^2 =< \vec{R}^{\,2} > /6$ s'écrit sous la forme $L^2 = D/\Sigma_a$ avec $D = 1/(3\,\Sigma_{tr})$ où $\Sigma_{tr} = \Sigma_t - \bar{\mu}\Sigma_s$.

Annexe : formule de trigonométrie sphérique

Soit dans un espace normé, un trièdre quelconque Oxyz dont les vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ont pour extrémités A, B et C. On appelle ϕ l'angle dièdre des demi-plans xOz et yOz et a, b, et c les angles $\widehat{yOz}$, $\widehat{zOx}$ et $\widehat{xOy}$.
A se projette en A' sur OC et B en B' sur OC. En formant le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ démontrer que

$$\cos c = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b . \cos \phi \tag{4}$$



4 Diffusion à l'interface entre deux zones homogènes

On considère un plan formant l'interface entre deux zones homogènes caractérisées par leur pouvoir réflecteur (α pouvoir réflecteur du milieu 1, β pouvoir réflecteur du milieu 2).
α : probabilité pour qu'un neutron arrivant du milieu 2 soit réfléchit par le milieu 1.
β : probabilité pour qu'un neutron arrivant du milieu 1 soit réfléchit par le milieu 2.

On considère un neutron émis par le milieu 1. Le but de cet exercice est de calculer le nombre moyen de traversées du plan qu'effectuera ce neutron avant de disparaître.

1. Donner la probabilité $p(1)$ d'une traversée (un aller).
2. Donner la probabilité $p(2)$ de deux traversées (un aller-retour).
3. Généraliser et donner les probabilités $p(2n+1)$ de $2n+1$ traversées, et $p(2n)$ de $2n$ traversées.
4. En déduire le nombre moyen de traversées du plan qu'effectuera le neutron avant de disparaître est donné par
$$< n >= \frac{1+\beta}{1-\alpha\beta}. \tag{5}$$

5 source ponctuelle dans une sphère

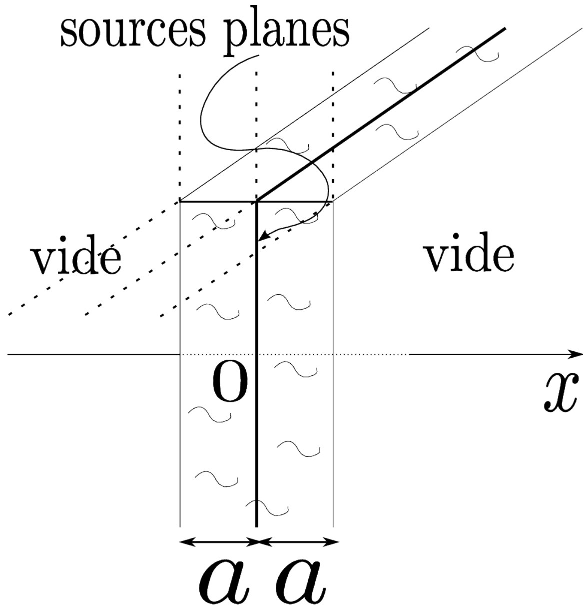
On considère une sphère homogène de rayon R constituée d'un milieu diffusif caractérisé par le coefficient $k^2 = \frac{\Sigma_a}{D}$ où Σ_a est la section efficace macroscopique d'absorption et D la constante de diffusion, cette sphère est placée dans le vide.
Calculer le flux dans la sphère résultant d'une source ponctuelle placée en son centre émettant S neutrons par unité de temps.

6 Source plane dans un milieu fini (5 pts)

On considère une plaque homogène infinie d'épaisseur $2a$ constituée d'un milieu diffusif caractérisé par le coefficient $k^2 = \frac{\Sigma_a}{D}$ où Σ_a est la section efficace macroscopique d'absorption et D la constante de diffusion. Cette plaque est placée dans le vide. On placera -comme indiquée sur la figure- le plan median de la plaque en $x = 0$.

1. Rappeler en la justifiant brièvement la condition aux limites sur le flux à l'interface entre un milieu diffusif et le vide.
2. Calculer le flux ϕ dans la plaque résultant d'une source placée dans son plan median émettant S neutrons par unité de surface et par unité de temps. On se limitera au cas $x \in [0; a]$.
3. Dans la plaque calculer le facteur de forme F, défini par :
$$F = \frac{\Phi_{maximum}}{\Phi_{moyen}}.$$

rappel : en coordonnées cartésiennes le laplacien Δ s'écrit $\Delta\phi = \dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$.



7 Sources "coquilles"

Dans un milieu infini et homogène constituée d'un milieu diffusif caractérisé par le coefficient $k^2 = \frac{\Sigma_a}{D}$ où Σ_a est la section efficace macroscopique d'absorption et D la constante de diffusion, calculer le flux résultant d'une source placée sur la surface d'une sphère de rayon R émettant S neutrons par unité de surface et par unité de temps.