ARTeQ – Formation interdisciplinaire en technologies quantiques

Bases de mécanique quantique pour les technologies quantiques

Lundi après-midi 14h-17h - Alain Aspect, Philippe Grangier et Jean-François Roch

Cours 2. Matrice densité, lien avec l'intrication, applications .

1. La matrice (ou opérateur) densité.
2. Description d'un sous-système.
3. Clonage optimal d'un qubit.
4. Un outil utile : la décomposition de Schmidt

5. De la polarisation du photon aux bits quantiques.

1.
L'opérateur densité

Pourquoi généraliser la notion de vecteur d'état ?

(1) On considère une assemblée d'atomes d'argent (spins 1/2) sortant du four dans une expérience de Stern et Gerlach. Ces atomes sont non-polarisés : même probabilité de trouver $+\hbar/2$ et $-\hbar/2$ dans une mesure de $\hat{\vec{S}} \cdot \vec{u}$.

Comment décrire l'état d'un atome d'argent ?

On pourrait essayer : $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+_z\rangle + e^{i\phi}\,|-_z\rangle\right)$

Ceci marche pour décrire les mesure selon l'axe z, mais correspond en fait à un spin polarisé selon : $\vec{u} = \cos\phi\,\vec{e}_x + \sin\phi\,\vec{e}_y \;\; \longrightarrow$ prédictions erronées !

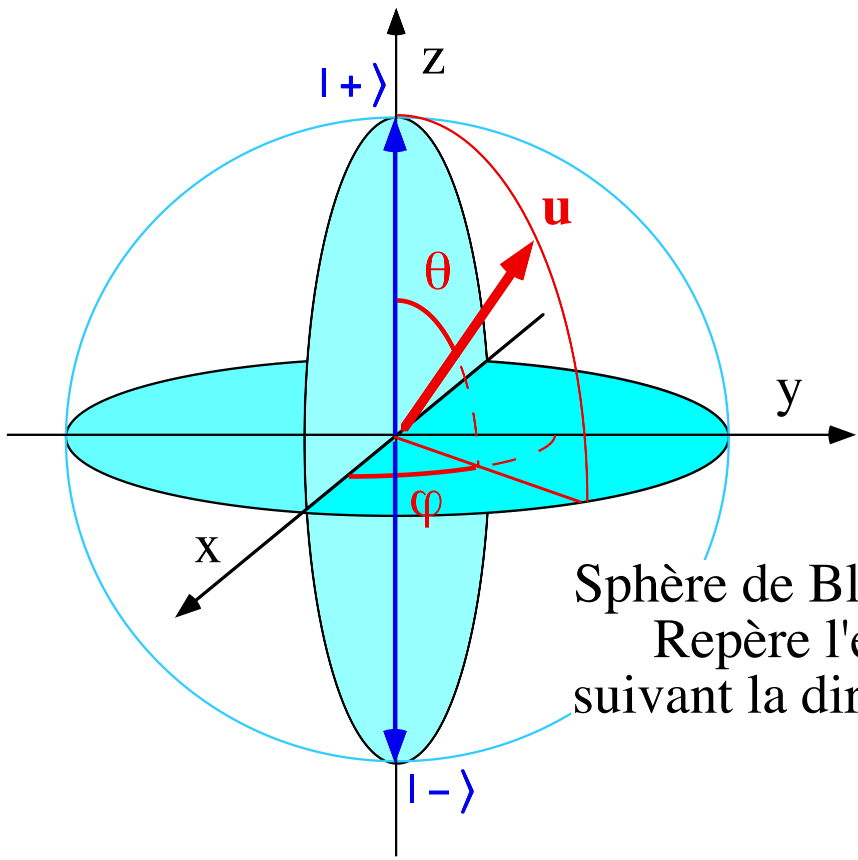
(2) Considérons un état singulet et isolons un seul spin : on ne peut pas lui attribuer un état $|\psi\rangle$ défini !

Comment décrire un sous-système d'un état intriqué ?

Il faut remplacer la notion de vecteur d'état par une notion plus générale :

l'opérateur (ou matrice) densité

Sphère de Bloch



Sphère de Bloch (spin 1/2)
Repère l'état propre
suivant la direction **u**(θ, φ)

Vecteur unitaire $\vec{u}$

$u_x = \cos(\phi)\sin(\theta)$,

$u_y = \sin(\phi)\sin(\theta)$,

$u_z = \cos(\theta)$.

$$\vec{S}.\vec{u} = \frac{\hbar}{2}\,\vec{\sigma}.\vec{u}$$

$$\vec{\sigma}.\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\phi} \\ \sin(\theta)e^{i\phi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Valeurs propres de $\vec{\sigma}.\vec{u}$: ± 1, états propres de $\vec{S}.\vec{u}$ = états propres de $\vec{\sigma}.\vec{u}$:

$$|+\rangle_{\vec{u}} = \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2}\,|+\rangle_z + \sin(\theta/2)e^{i\phi/2}\,|-\rangle_z$$

$$|-\rangle_{\vec{u}} = -\sin(\theta/2)e^{-i\phi/2}\,|+\rangle_z + \cos(\theta/2)e^{i\phi/2}\,|-\rangle_z$$

L'opérateur densité pour des cas purs

On considère un système quantique décrit par $|\psi(t)\rangle$ et on pose :

$$\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$$

On peut reformuler la mécanique quantique en termes de $\hat{\rho}$ plutôt que $|\psi\rangle$:

- L'opérateur $\hat{\rho}$ est hermitien et de trace 1 ($\hat{\rho}$ est le projecteur sur l'état $|\psi\rangle$: toutes ses valeurs propres sont nulles, sauf une qui vaut 1).

- Dans une mesure d'une quantité physique A décrite par l'observable $\hat{A}$, la probabilité de trouver a_α associé à l'état propre $|\phi_\alpha\rangle$ est :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(a_\alpha) = |\langle\phi_\alpha|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|\hat{P}_\alpha|\psi\rangle &= \langle\psi|\ \hat{P}_\alpha \left(\Sigma_\beta|\phi_\beta\rangle\langle\phi_\beta|\right)|\psi\rangle \\ &= \Sigma_\beta\ \langle\phi_\beta|\ \psi\rangle\langle\psi|\ \hat{P}_\alpha\ |\phi_\beta\rangle \\ &= \Sigma_\beta\ \langle\phi_\beta|\ \hat{\rho}\ \ \hat{P}_\alpha\ |\phi_\beta\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\ \hat{P}_\alpha)\end{aligned}$$

où $\hat{P}_\alpha = |\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\alpha|$ est le projecteur sur l'état propre $|\phi_\alpha\rangle$. On a donc :

$$\mathcal{P}(a_\alpha) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\ \hat{P}_\alpha)$$

.

Valeur moyennes et évolution au cours du temps.

• La valeur moyenne de l'opérateur $\hat{A}$ s'écrit alors :

$$\langle \hat{A} \rangle = \Sigma_\alpha \, a_\alpha \, \mathcal{P}(a_\alpha) = \Sigma_\alpha a_\alpha \mathrm{Tr}(\hat{\rho} \hat{P}_\alpha) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho} \, \Sigma_\alpha a_\alpha \hat{P}_\alpha)$$

et en utilisant $\hat{A} = \Sigma_\alpha \hat{a}_\alpha \hat{P}_\alpha$ (décomposition spectrale) on obtient :

$$\langle \hat{A} \rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}).$$

• L'évolution de $\hat{\rho}$ se déduit de l'équation de Schrödinger :

$$\begin{aligned} i\hbar \, \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} &= i\hbar \, \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} \langle \psi(t)| + i\hbar \, |\psi(t)\rangle \frac{d\langle \psi(t)|}{dt} \\ &= H(t)|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| - |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|H(t) \end{aligned}$$

et on a donc :

$$i\hbar \, \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \left[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t) \right].$$

L'opérateur densité pour des cas purs

On considère un système quantique décrit par $|\psi(t)\rangle$ et on pose :

$$\hat{\rho}(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$$

On peut reformuler la mécanique quantique en termes de $\hat{\rho}$ plutôt que $|\psi\rangle$:

- L'opérateur $\hat{\rho}$ est hermitien et de trace 1 ($\hat{\rho}$ est le projecteur sur l'état $|\psi\rangle$: toutes ses valeurs propres sont nulles, sauf une qui vaut 1).

- Dans une mesure d'une quantité physique A décrite par l'observable $\hat{A}$, la probabilité de trouver la valeur propre a_α associé à l'état propre $|\phi_\alpha\rangle$ est :

$$\mathcal{P}(a_\alpha) = |\langle\phi_\alpha|\psi\rangle|^2 = \langle\phi_\alpha|\psi\rangle\langle\psi|\phi_\alpha\rangle = \Sigma_\beta\langle\phi_\beta|\ \hat{\rho}\ \hat{P}_\alpha\ |\phi_\beta\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\ \hat{P}_\alpha)$$

  où $\hat{P}_\alpha = |\phi_\alpha\rangle\langle\phi_\alpha|$ (projecteur). On a donc : $\mathcal{P}(a_\alpha) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{P}_\alpha)$.

- De même en utilisant $\hat{A} = \sum_\alpha \hat{a}_\alpha \hat{P}_\alpha$ on obtient : $\langle A\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{A})$.

- L'évolution de $\hat{\rho}$ se déduit de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\,\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \left[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)\right].$$

Mélanges statistiques (1)

Supposons maintenant que le système soit dans l'état $|\psi_i\rangle$ avec une probabilité Π_i **(statistique classique)**. On a envie d'écrire (*probabilités classiques*) :

$$\langle A \rangle_{stat} = \sum_i \Pi_i \, \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle \ .$$

Si on définit l'opérateur :

$$\hat{\rho} = \sum_i \Pi_i \, |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

associé aux probabilités $0 \leq \Pi_i \leq 1$, on remarque que :

$$\mathsf{Tr}(\hat{\rho} \, \hat{A}) = \sum_i \Pi_i \, \mathsf{Tr}(|\psi_i\rangle \, \langle\psi_i| \, \hat{A}) = \sum_i \Pi_i \, \langle \psi_i | \hat{A} | \psi_i \rangle \ .$$

Peut-on formaliser cela ?

.

Mélanges statistiques (2)

On postule que l'état de tout système quantique peut se décrire par un **opérateur densité** $\hat{\rho}$ tel que :

- $\hat{\rho}$ est hermitien et de trace 1 (mais $\hat{\rho}$ n'est pas forcément un projecteur)
- Toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles.
- L'évolution hamiltonienne et les probabilités de mesure restent les mêmes que pour un cas pur :

$$\mathcal{P}(a_\alpha) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{P}_\alpha) \qquad \langle A \rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{A}).$$

$$i\hbar\,\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \left[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)\right].$$

Remarque : On peut toujours diagonaliser $\hat{\rho}$ et l'écrire : $\hat{\rho} = \sum_i \Pi_i\,|\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

On retrouve un cas pur si on a un seul Π_i non nul ($\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ et $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$)

Exemple

Spin 1/2 dépolarisé :

Décrit une atome d'argent sortant du four.

$$\hat{\rho}_{\text{non polarisé}} = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| \; + \; \frac{1}{2}|-\rangle\langle-| \; = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,\hat{1}.$$

à comparer à l'état pur $(|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$:

$$\hat{\rho}_{\text{polarisé selon } x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

On a bien $\hat{\rho}^2_{\text{non pol.}} = \frac{1}{4}\,\hat{1} \neq \hat{\rho}_{\text{non pol.}}$, alors que $\hat{\rho}^2_{\text{pol.}} = \hat{\rho}_{\text{pol.}}$ (projecteur).

On a résolu le problème posé !

Exemples

Spin 1/2 dépolarisé :

$$\hat{\rho}_{\text{nonpol.}} = \frac{1}{2}|+\rangle\langle+| \; + \; \frac{1}{2}|-\rangle\langle-| \; = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\,\hat{1}.$$

à comparer à l'état pur $(|+\rangle + |-\rangle)/\sqrt{2}$: $\hat{\rho}_{\text{pol.selon } x} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Qubit : système à deux états $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ ou $\{|+\rangle, |-\rangle\}$:

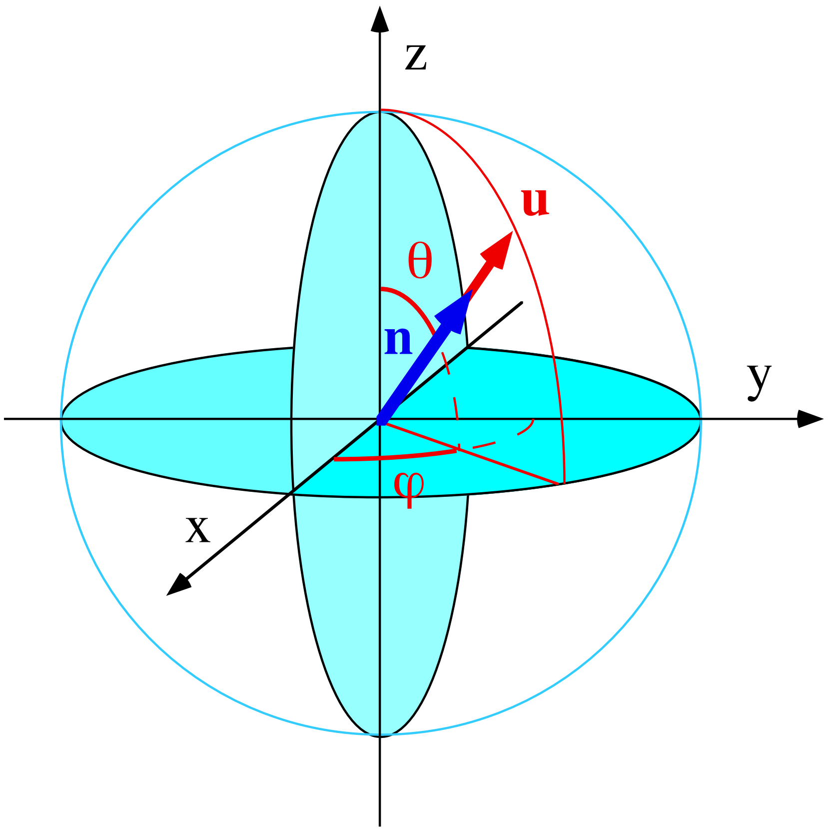
$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{ee} & \rho_{eg} \\ \rho_{ge} & \rho_{gg} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+n_z)/2 & (n_x - in_y)/2 \\ (n_x + in_y)/2 & (1-n_z)/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\hat{1} + \vec{n}.\vec{\sigma}\right)$$

en posant $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ avec n_i réels, et en utilisant les matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(\hat{1} + \vec{n}.\vec{\sigma}\right)$ sont égales à $\frac{1}{2}(1 \pm |\vec{n}|)$

Généralisation de la sphère de Bloch ("Boule de Bloch")



$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} (1+n_z)/2 & (n_x - in_y)/2 \\ (n_x + in_y)/2 & (1-n_z)/2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\hat{1} + \vec{n}.\vec{\sigma}\right)$$

de valeurs propres $\frac{1}{2}(1 \pm |\vec{n}|)$.

En utilisant $\mathrm{Tr}(\sigma_i) = 0$, et $\sigma_i^2 = \hat{1}_2$ $(i = x, y, z)$, on obtient :

$$\langle\vec{\sigma}\rangle = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\,\vec{\sigma}) = \vec{n}$$

- si $|\vec{n}| = 1$ on peut poser $\vec{n} = \vec{u}$ et on retrouve le "cas pur" traité précédemment. L'opérateur $\hat{\rho}$ est alors le projecteur sur l'état $|+_{\vec{u}}\rangle$, et on a $\langle\vec{\sigma}\rangle = \vec{u}$
- si $|\vec{n}| < 1$ alors $\vec{n}$ est "dans" la boule de Bloch, et on a toujours $\langle\vec{\sigma}\rangle = \vec{n}$
- si $|\vec{n}| = 0$ alors le spin est dépolarisé : valeur moyenne nulle

2.
Description d'un sous-système
Intrication quantique

Description d'un sous-système

Considérons un système $\mathcal{S}$ formé de deux sous-systèmes $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$.

atome + champ électromagnétique

deux particules de spin 1/2

On mesure une grandeur physique A portant sur le système $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ uniquement :

$$\mathcal{P}(a_\alpha) = \mathsf{Tr}\left((P_\alpha \otimes \hat{1}_B)\,\hat{\rho}\right) = \mathsf{Tr}\left(P_\alpha\,\hat{\rho}_A\right)$$

où la **matrice densité réduite** $\hat{\rho}_A$ est définie par :

$$\langle \psi_n | \hat{\rho}_A | \psi_{n'} \rangle = \sum_{m,\mathcal{S}_{\mathcal{B}}} \langle \psi_n ; \phi_m | \hat{\rho} | \psi_{n'} ; \phi_m \rangle$$

On peut définir de même :

$$\langle \phi_m | \hat{\rho}_B | \phi_{m'} \rangle = \sum_{n,\mathcal{S}_{\mathcal{A}}} \langle \psi_n ; \phi_m | \hat{\rho} | \psi_n ; \phi_{m'} \rangle \; .$$

Trace partielle $\rightarrow$ opérateurs densités réduits

* Valeurs moyennes de A (dans $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$) et B (dans $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$) :

$$\langle A \rangle = \mathsf{Tr}(\hat{A}\,\hat{\rho}_A) \qquad \langle B \rangle = \mathsf{Tr}(\hat{B}\,\hat{\rho}_B)$$

Evolution des sous-systèmes

Evolution en l'absence d'interactions entre $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$:

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_B \ ,$$

on trouve :

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}_A}{dt} = [\hat{H}_A, \hat{\rho}_A] \qquad i\hbar \frac{d\hat{\rho}_B}{dt} = [\hat{H}_B, \hat{\rho}_B]$$

Toute l'information pour calculer les mesures portant sur $\mathcal{A}$ est disponible à partir de ρ_A. Il est inutile de connaître le vecteur d'état $|\Psi\rangle$ ou l'opérateur densité $\hat{\rho}$ de l'ensemble.

... mais il y a quelques subtilités importantes :

- En général l'opérateur densité ne factorise pas : $\hat{\rho} \neq \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B$.
- La différence entre $\hat{\rho}$ et $\rho_A \otimes \hat{\rho}_B$ correspond aux corrélations contenues dans $\hat{\rho}$, qui ont été perdues lorsqu'on est passé à $\hat{\rho}_A$ et $\hat{\rho}_B$ $\longrightarrow$ il est nécessaire de connaître $\hat{\rho}$ si on s'intéresse aux **corrélations** entre $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{B}}$.

Example 6.2. For matrices A and B given by

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix},$$

the direct product $C = A \otimes B$ is

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} & a_{12}b_{13} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{11}b_{23} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} & a_{12}b_{23} \\ a_{11}b_{31} & a_{11}b_{32} & a_{11}b_{33} & a_{12}b_{31} & a_{12}b_{32} & a_{12}b_{33} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} & a_{22}b_{13} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{21}b_{23} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} & a_{22}b_{23} \\ a_{21}b_{31} & a_{21}b_{32} & a_{21}b_{33} & a_{22}b_{31} & a_{22}b_{32} & a_{22}b_{33} \end{pmatrix}.$$

Systèmes intriqués

Exemple simple : "état singulet" pour 2 spins 1/2 :

$$|\psi_{ss}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,\ -\rangle - |-,\ +\rangle\right) \qquad \hat{\rho}_{ss} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en rangeant les vecteurs de base dans l'ordre: $\{|+,\ +\rangle,\ |+,\ -\rangle,\ |-,\ +\rangle,\ |-,\ -\rangle\}$

- Justifier l'expression de $\hat{\rho}_{ss}$ donnée ci-dessus.
- Montrer que les opérateurs densité réduits sont donnés par :

$$\hat{\rho}_A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{\rho}_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{\rho}_A \otimes \hat{\rho}_B = \frac{1}{4}\ \hat{1}_4$$

  En déduire que les deux sous-systèmes sont totalement dépolarisés.
- Montrer en utilisant les matrices densités partielles que la "réduction du paquet d'onde" ne permet aucun transfert d'information entre Alice et Bob dans une expérience de corrélations EPR.

FLASH[1]—A Superluminal Communicator Based Upon a New Kind of Quantum Measurement

Nick Herbert[2]

Foundations of Physics, Vol. 12, No. 12, 1982

FLASH exploits the peculiar properties of "measurements of the Third Kind."

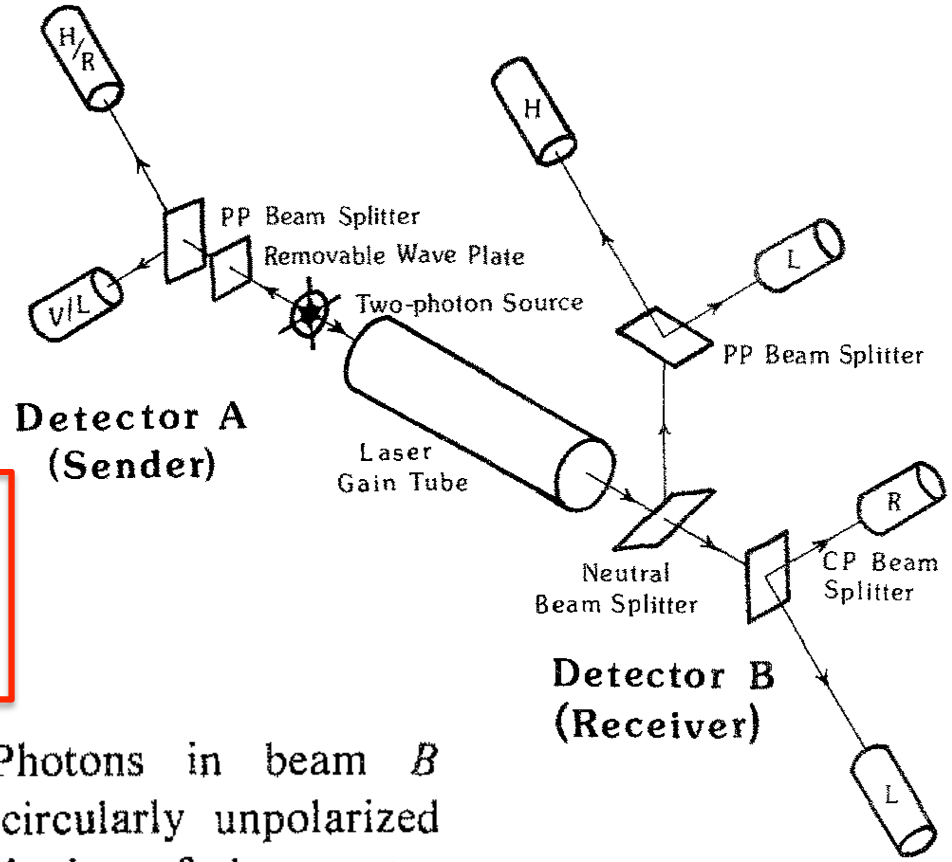
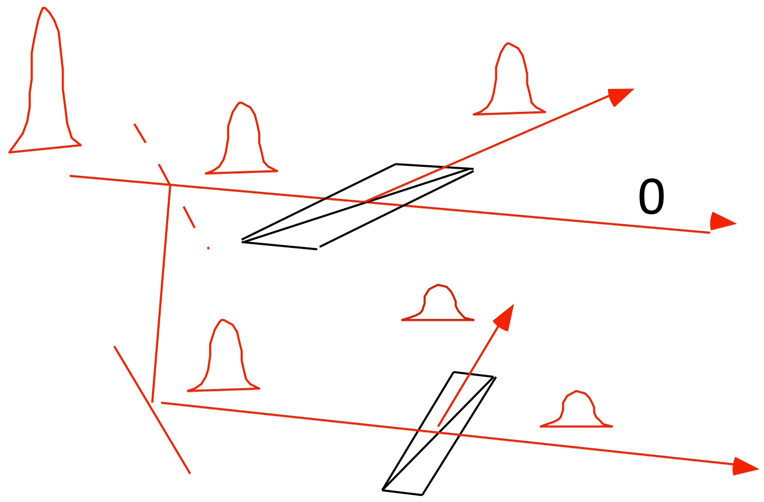


Fig. 1. The FLASH detection process. Photons in beam *B* (traveling to the right) are rendered either circularly unpolarized (CUP) or plane unpolarized (PUP) by positioning of the quarter wave plate in beam *A* (traveling to the left). Each *B* photon is amplified by a nonselective laser gain tube and the resulting isopolarized burst of light is examined for counting asymmetry in either the CP or PP channel.

IMPULSIONS LUMINEUSES ET PHOTONS INDIVIDUELS

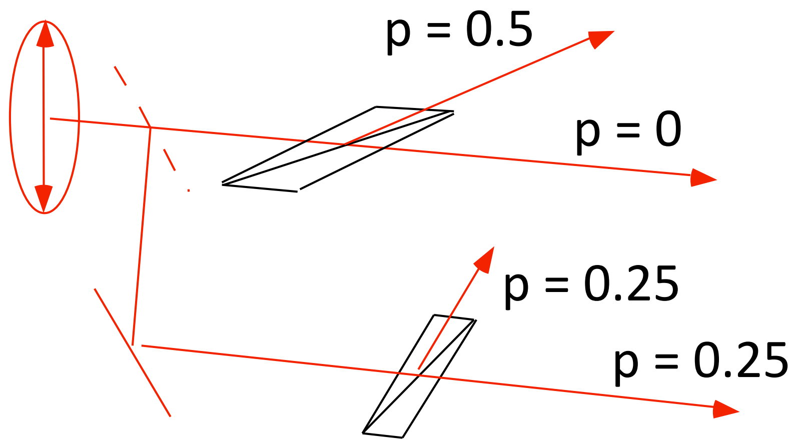
Impulsion lumineuse
- la polarisation d’une impulsion peut être mesurée facilement (avec une lame séparatrice R = T = 50%)

p(bon résultat) = 1



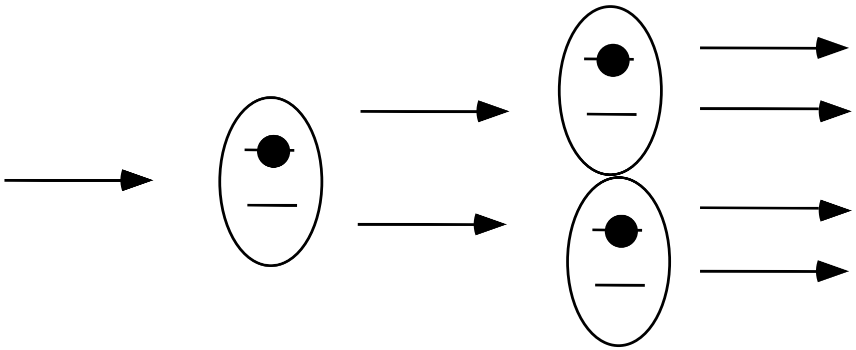
Photon unique
- un seul photon est détecté une seule fois, et la polarisation initiale n’est pas mesurable avec certitude

p(bon résultat) = 0.5



PHOTON UNIQUE ET IMPULSION

Question : Peut-on dupliquer ou "cloner" l'état de polarisation du photon ?



etc...

Réponse : Non !

Deux arguments : - démonstration formelle...

- conséquences physiquement inacceptables

5.

De la polarisation du photon

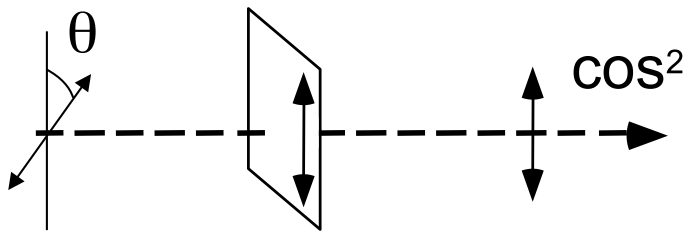
aux bits quantiques

Polarisation de la lumière

Equations de Maxwell :

* vibration transverse, linéaire ou circulaire
* si on met un polariseur, direction de polarisation imposée
* 2e polariseur (analyseur) faisant un angle θ avec l'analyseur :

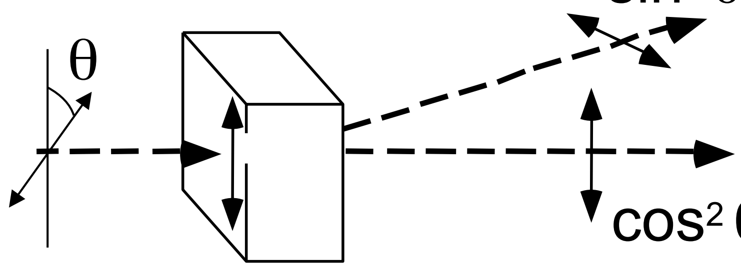
Polariseur à une voie ("polaroïd") :
une polarisation est absorbée



$$\Phi_{transmis} = \Phi_{incident} \quad \cos^2\theta \qquad \textbf{(Loi de Malus)}$$

(transmission nulle si le polariseur et l'analyseur sont orthogonaux)

Polariseur à 2 voies :
pas d'absorption,
toute la lumière ressort



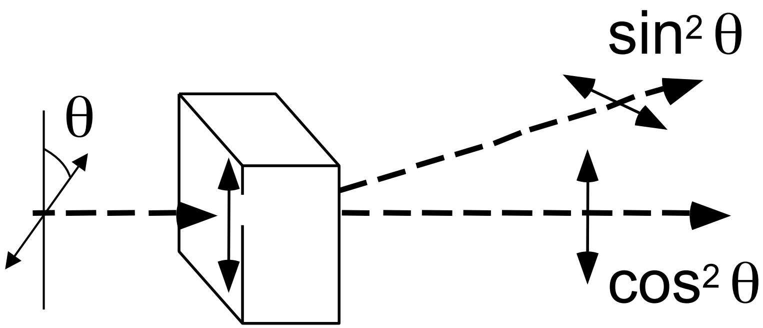
Toujours 2 sorties dont les intensités varient en $\cos^2\theta$ et $\sin^2\theta$

Polarisation d'un photon

Photon : "grain" d'énergie lumineuse, $E = h\nu \approx 2\ 10^{-19}$ J

Flux lumineux émis par une lampe 200 W : 10^{21} photons/seconde

Comment définir l'état de polarisation d'un seul photon ?



• Si on détecte un photon unique après le polariseur, on ne peut obtenir qu'un des deux résultats (mutuellement exclusifs) "transmis" ou "dévié"

• On dira alors que la polarisation du photon est "horizontale" ou "verticale"

• Si la polarisation initiale du photon est orientée suivant un angle θ, les **probabilités** pour que le photon soit transmis ou dévié seront $\cos^2\theta$ et $\sin^2\theta$

• Pour un grand nombre de photons, on retrouve bien la loi de Malus !

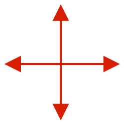
Polarisation d'un photon

Photon : "grain" d'énergie lumineuse, $E = h\,\nu \approx 2\ 10^{-19}$ J

Flux lumineux émis par une lampe 200 W : 10^{21} photons/seconde

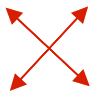
Expérience de "tri" par la polarisation :

* orientations 0° ou 90° : 2 sortes de photons (mutuellement exclusifs)



"vertical" : v et "horizontal" : h

* mais on a aussi 45° et 135° : 2 sortes de photons (mutuellement exclusifs)



"oblique droit" : d et "oblique gauche" : g

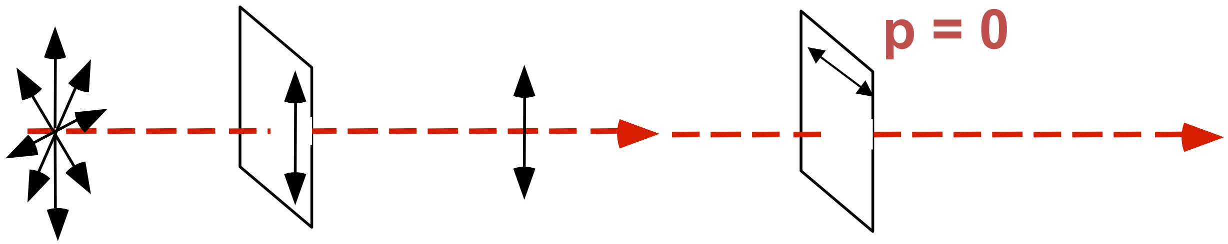
Raisonnement "classique" : 2 propriétés différentes, par exemple :

* chien : h ou chat : v
* noir : d ou blanc : g

Test expérimental ?

Raisonnement classique : « mélange statistique »

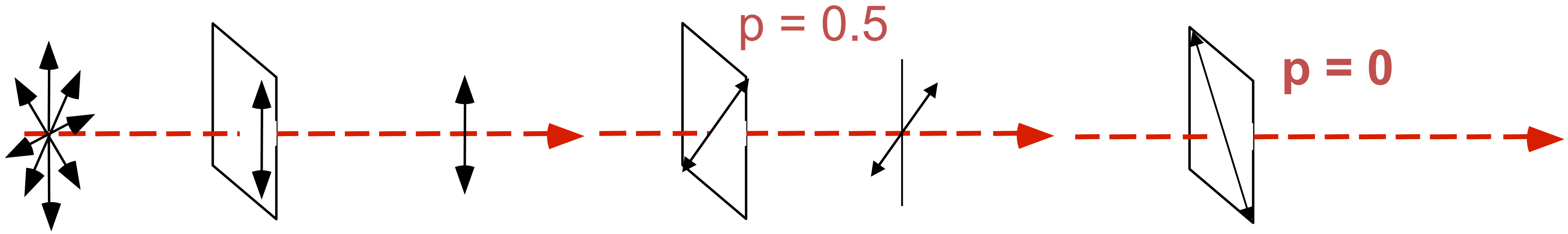
* chien : h ou chat : v
* noir : d ou blanc : g



les chats ne sont pas des chiens !

Raisonnement classique : « mélange statistique »

* chien : h ou chat : v
* noir : d ou blanc : g



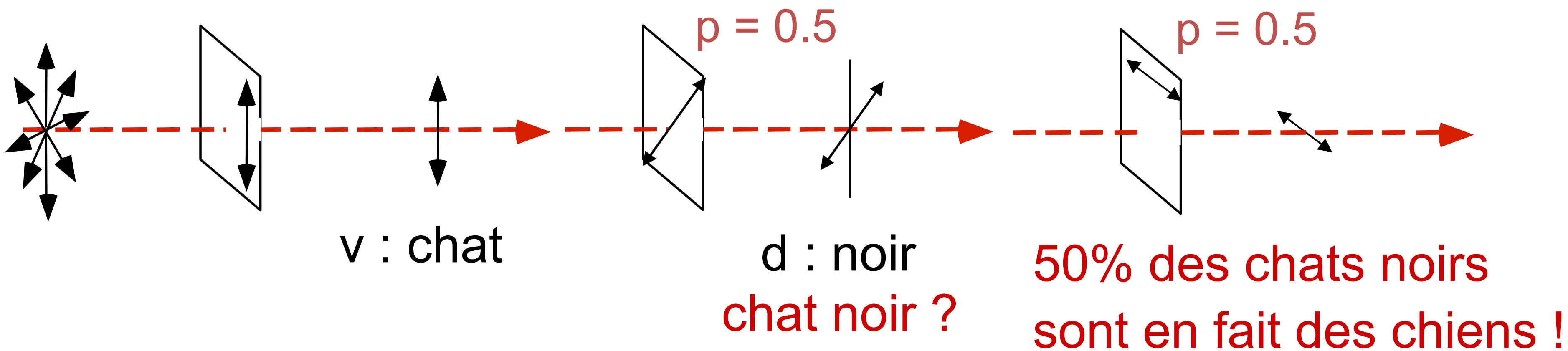
v : chat

d : noir
chat noir ?

les chats noirs ne sont pas blancs !

Raisonnement classique : « mélange statistique »

* chien : h ou chat : v
* noir : d ou blanc : g



Raisonnement classique ("mélange statistique") :
On trie en 4 catégories v&d, v&g, h&d, h&g

Test : on prépare v, puis d => tri des photons v&d ?
Mesure de h : la moitié des photons v&d sont devenus h !
La préparation de d a fait "oublier" celle de v !

Le "mélange statistique" est en conflit avec l'expérience !

Modèle quantique de la polarisation du photon

Mesures de polarisation :

on prépare **h** (ou v) et on mesure **h** (ou v) : tous les photons passent
on prépare **h** (ou v) et on mesure **v** (ou h) : aucun photon ne passe

=> états propres orthogonaux $|h\rangle$ ou $|v\rangle$

même raisonnement avec g et d

=> états propres orthogonaux $|g\rangle$ ou $|d\rangle$

on prépare **h** (ou v) et on mesure **g** : la moitié passe => état $|g\rangle$
on prépare **h** (ou v) et on mesure **d** : la moitié passe => état $|d\rangle$
on prépare **g** (ou d) et on mesure **v** : la moitié passe => état $|v\rangle$
on prépare **g** (ou d) et on mesure **h** : la moitié passe => état $|h\rangle$

Comment relier les états $|h\rangle$, $|v\rangle$ et les états $|g\rangle$, $|d\rangle$?

Mélange statistique et superposition linéaire

Raisonnement quantique ("superposition linéaire") :

$|d\rangle = (|v\rangle + |h\rangle) / \sqrt{2}$, $\quad |v\rangle = (|d\rangle + |g\rangle) / \sqrt{2}$

$|g\rangle = (|v\rangle - |h\rangle) / \sqrt{2}$, $\quad |h\rangle = (|d\rangle - |g\rangle) / \sqrt{2}$

Test :

on prépare $\quad |v\rangle = (|d\rangle + |g\rangle) / \sqrt{2}$,

projection sur l'état propre !

puis $\quad |d\rangle = (|v\rangle + |h\rangle) / \sqrt{2}$

Pour l'état d : P(d) = 1 $\quad$ P(g) = 0 $\quad |d\rangle$ et $|g\rangle$ orthogonaux

Mesure : P(h) = 1/2 $\quad$ P(v) = 1/2 $\quad$ **ça marche !**

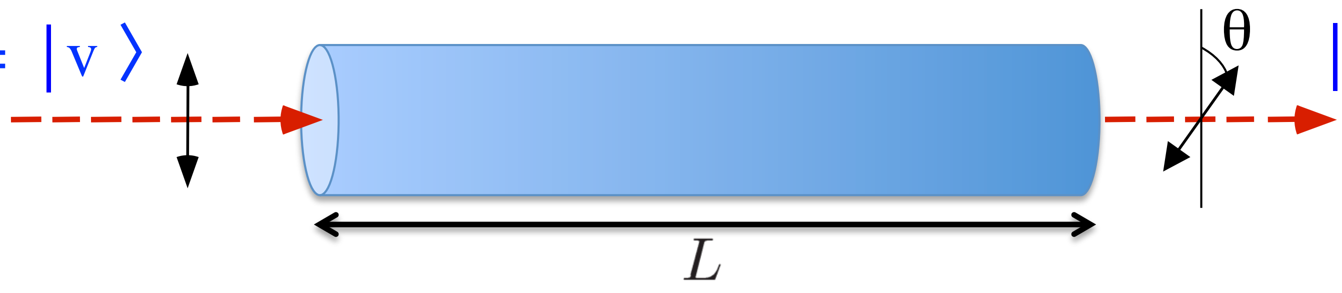
IL FAUT UNE SUPERPOSITION LINEAIRE D 'ETATS !

Pouvoir rotatoire

Dans certains milieux, l'indice de réfraction est différent pour des polarisations circulaires gauche et droite (biréfringence circulaire).

Vecteur d'onde $\mathbf{k_\pm = n_\pm\, \omega/c}$ associé à $\boxed{|\sigma_\pm\rangle = (\,|v\rangle \pm i\,|h\rangle\,)/\sqrt{2}}$

$|\psi_{in}\rangle = |v\rangle$



$|\psi_{out}\rangle = \;?$

$$|\psi_{in}\rangle = (\,|\sigma_+\rangle + |\sigma_-\rangle\,)/\sqrt{2}$$

et en posant $k_\pm = k \pm \delta k$

$$\begin{aligned}|\psi_{out}\rangle &= (\,e^{i(k_+ L - \omega t)}|\sigma_+\rangle + e^{i(k_- L - \omega t)}|\sigma_-\rangle\,)/\sqrt{2}\\ &= e^{i(kL-\omega t)}\,(\,\cos(\delta k\, L)\;|v\rangle - \sin(\delta k\, L)\;|h\rangle\,)\\ &= e^{i(kL-\omega t)}\boxed{(\,\cos(\theta)\;|v\rangle + \sin(\theta)\;|h\rangle\,)}\end{aligned}$$

avec $\theta = -\,\delta k\, L$

➡ La polarisation du faisceau tourne de θ : pouvoir rotatoire.

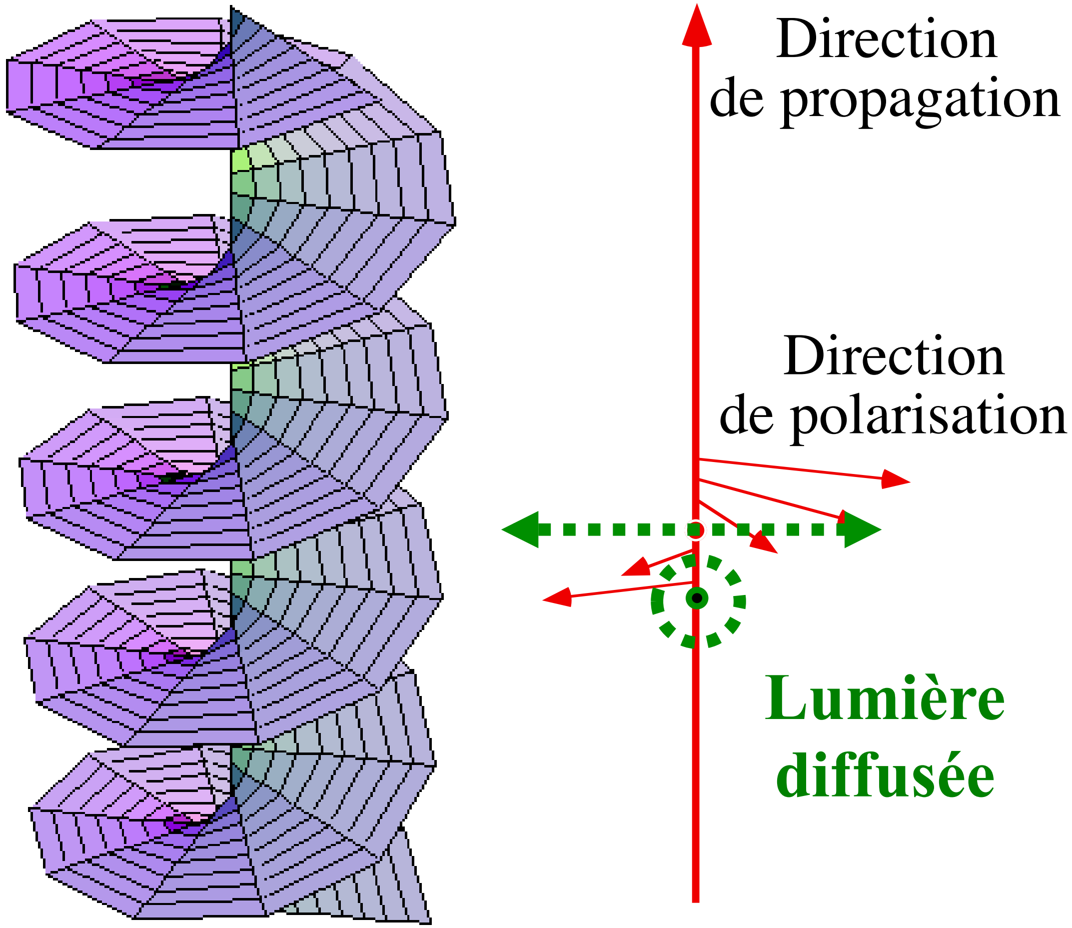
➡ Analogie avec le calcul de $|\psi\,(T)\rangle$, en remplaçant $i\omega_\pm T$ par $ik_\pm L$

Pouvoir rotatoire de l'eau sucrée : une hélice de lumière

Dans de l'eau sucrée, la polarisation de la lumière tourne en hélice.

Une très faible fraction des photons sont diffusés par le liquide, avec la même polarisation que le laser à l'endroit où la lumière est diffusée.

On ne voit pas la lumière quand la direction de polarisation pointe dans la direction d'observation.



Que peut-on en conclure ?

* L'état de polarisation du photon
se décrit dans un espace de Hilbert de dimension 2 :

$$|\psi\rangle = \alpha\,|\mathrm{v}\rangle + \beta\,|\mathrm{h}\rangle \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

α, β réels : polarisations linéaires

α, β complexes : polarisations circulaires ou elliptiques

* Si la polarisation est bien définie dans la base $\{\,|\mathrm{v}\rangle, |\mathrm{h}\rangle\,\}$,
elle est totalement aléatoire dans la base $\{\,|\mathrm{d}\rangle, |\mathrm{g}\rangle\,\}$

On dit que ces deux bases sont « incompatibles »

Les observables associées ne commutent pas.

Un photon polarisé, ou un système quantique à 2 états, est un « bit quantique » ou « qubit »

Ceci a des conséquences très importantes si on veut utiliser un tel système pour transmettre ou traiter une information.