TD1 Calcul vectoriel / tensoriel

Opérateurs différentiels

1. $\vec{u} = \cos x \, \vec{e}_x + xyz \, \vec{e}_y$

$\rightarrow \vec{\nabla}.\vec{u} = \partial_x (\cos x) + \partial_y (xyz)$

$= -\sin x + xz$.

$$\rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \cos x & xyz & 0 \end{vmatrix} = -\partial_z (xyz) \vec{e}_x + \partial_z (\cancel{\cos x}) \vec{e}_y + \left(\partial_x (xyz) - \cancel{\partial_y (\cos x)}\right) \vec{e}_z$$

$$= -xy \, \vec{e}_x + yz \, \vec{e}_z$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \partial_x u_x & \frac{1}{2}(\partial_x u_y + \partial_y u_x) & \frac{1}{2}(\partial_x u_z + \partial_z u_x) \\ \times & \partial_y u_y & \frac{1}{2}(\partial_y u_z + \partial_z u_y) \\ \times & \times & \partial_z u_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin x & \frac{1}{2}(yz) & 0 \\ \frac{1}{2}(yz) & xz & \frac{1}{2}(xy) \\ 0 & \frac{1}{2}(xy) & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow (\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u} = (\cos x \, \partial_x + xyz \, \partial_y)(\cos x \, \vec{e}_x + xyz \, \vec{e}_y)$.

$= -\sin x \cos x \, \vec{e}_x + x^2 y z^2 \, \vec{e}_y$

2. $\vec{u} = r\vec{e}_r + zr\sin\theta\,\vec{e}_\theta$

$$\rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \frac{1}{r}\partial_r(r u_r) + \frac{1}{r}\partial_\theta u_\theta + \partial_z u_z$$

$$= \frac{1}{r}\partial_r(r^2) + \frac{1}{r}\partial_\theta(zr\sin\theta)$$

$$= 2 + z\cos\theta$$

$$\rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{u} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_z \\ u_r & r u_\theta & u_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{r}\partial_\theta u_z - \partial_z u_\theta\right)\vec{e}_r + \left(\partial_z u_r - \partial_r u_z\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\partial_r(r u_\theta) - \frac{1}{r}\partial_\theta u_r\right)\vec{e}_z$$

$$= (-r\sin\theta)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\partial_r(zr^2\sin\theta)\,\vec{e}_z$$

$$= (-r\sin\theta)\vec{e}_r + 2z\sin\theta\,\vec{e}_z$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \partial_r(r) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\cancel{\partial_\theta(r)}^{0} - \frac{zr\sin\theta}{r} + \partial_r(zr\sin\theta)\right) & 0 \\ \times & \left(\frac{1}{r}\partial_\theta(zr\sin\theta) + \frac{r}{r}\right) & \frac{1}{2}\left(\partial_z(zr\sin\theta)\right) \\ \times & \times & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z\cos\theta + 1 & \frac{r\sin\theta}{2} \\ 0 & \frac{r\sin\theta}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow (\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u} = \left(u_r \partial_r + u_\theta \frac{1}{r}\partial_\theta + u_z \partial_z\right)\left(u_r \vec{e_r} + u_\theta \vec{e_\theta} + u_z \vec{e_z}\right)$$

$$⚠ \begin{cases} \partial_\theta \vec{e_r} = \vec{e_\theta} \\ \partial_\theta \vec{e_\theta} = -\vec{e_r} \end{cases}$$

$$= (r\partial_r + z\sin\theta\,\partial_\theta)(r\vec{e_r} + zr\sin\theta\,\vec{e_\theta})$$

$$= r\vec{e_r} + z\sin\theta\,\vec{e_\theta} + z\sin\theta\, r\, \underbrace{\partial_\theta \vec{e_r}}_{\vec{e_\theta}}$$

$$+ z\sin\theta\,(\partial_\theta(zr\sin\theta))\,\vec{e_\theta}$$

$$+ z\sin\theta\, zr\sin\theta\, \underbrace{\partial_\theta \vec{e_\theta}}_{-\vec{e_r}}$$

$$= (r - rz^2\sin^2\theta)\,\vec{e_r}$$

$$+ (z\sin\theta + z\sin\theta\, r + z^2 r\sin\theta\cos\theta)\,\vec{e_\theta}$$

Champ de déplacement

Ex :

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \\ cz \end{bmatrix} \quad , \quad \text{CI :} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

↳ solution

$$x = X e^{at}$$
$$y = Y e^{bt}$$
$$z = Z e^{ct}$$

Le champ de déplacement :

$$\vec{r} = X e^{at}\,\vec{e_x} + Y e^{bt}\,\vec{e_y} + Z e^{ct}\,\vec{e_z}$$

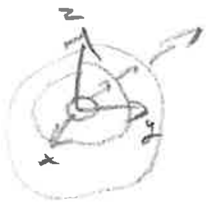
2. $\vec{u}^L(\vec{R},t) = \vec{u}(\vec{r}(\vec{R},t),t)$

$$\Rightarrow \vec{u}^L(X,Y,Z,t) = aXe^{at}\,\vec{e}_x + bYe^{bt}\,\vec{e}_y + cZe^{ct}\,\vec{e}_z$$

On exprime la vitesse avec les coordonnées initiales dans $\vec{u}^L$.

Théorème du transport

Notre volume $V(t)$ = sphère de rayon $R(t) = t$ variable



1. $$F(t) = \iiint_{V(t)} f(r,t)\, dV$$

$$= \int_0^{R(t)}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^2 t \; r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= t \int_0^t r^4\, dr \; \underbrace{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta \, d\theta\, d\phi}_{4\pi}$$

$$= 4\pi \frac{t^6}{5}$$

$$\frac{dF(t)}{dt} = 24\pi \frac{t^5}{5}$$

2. $$\frac{dF}{dt} = \iiint_{V(t)} \partial_t f \; dV + \iint_{\delta V(t)} f \, (\vec{v}.\vec{dS})$$

f sur la surface

$$f|_{\delta V} = R^2(t)\, t = t^3$$

$\vec{v}$ = vitesse des points de la surface de $V(t)$.

$$\vec{V} = \frac{dR(t)}{dt} \vec{e}_r = \vec{e}_r \quad \text{ici}$$

$$\vec{dS} = R^2(t) \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow (\vec{v}.\vec{dS}) = t^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi.$$

3. Donne

$$\frac{dF}{dt} = \int_0^t \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \underbrace{\partial_t (r^2 t)}_{r^2} \; r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$+ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} t^3 \, t^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi.$$

$$= \underbrace{4\pi \frac{t^5}{5}}_{\text{volume}} + \underbrace{4\pi t^5}_{\text{surface}}$$

$$= 24\pi \frac{t^5}{5}$$ en effet le bon résultat

Champ matériel

1. $\partial_t f + \vec{u}\cdot\vec{\nabla} f = 0$

$$\Leftrightarrow \partial_t f + \gamma x \, \partial_x f - \gamma y \, \partial_y f = 0 \qquad (*)$$

les équations pour les caractéristiques

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\gamma x} = \frac{dy}{-\gamma y}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \gamma x \longrightarrow x = C e^{\gamma t} \\ \dfrac{dy}{dt} = -\gamma y \longrightarrow y = D e^{-\gamma t}. \end{cases}$$

Selon la méthode des caractéristiques on peut utiliser

$$C = x e^{-\gamma t}$$

$$D = y e^{\gamma t}$$

Comme nouvelles variables pour écrire la solution générale de $(*)$.

$$f(x,y,t) = \Phi\left(x e^{-\gamma t}, y e^{\gamma t}\right)$$

une fonction arbitraire qui sera fixée par des conditions initiales

Tester vous-même cette solution en l'injectant dans $(*)$

2. Si $f(x,y,0) = A e^{x^2+y^2}$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi(xe^0, ye^0) = A e^{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi(x,y) = A e^{x^2+y^2}$$

arg 1 arg 2

Ainsi on déduit que

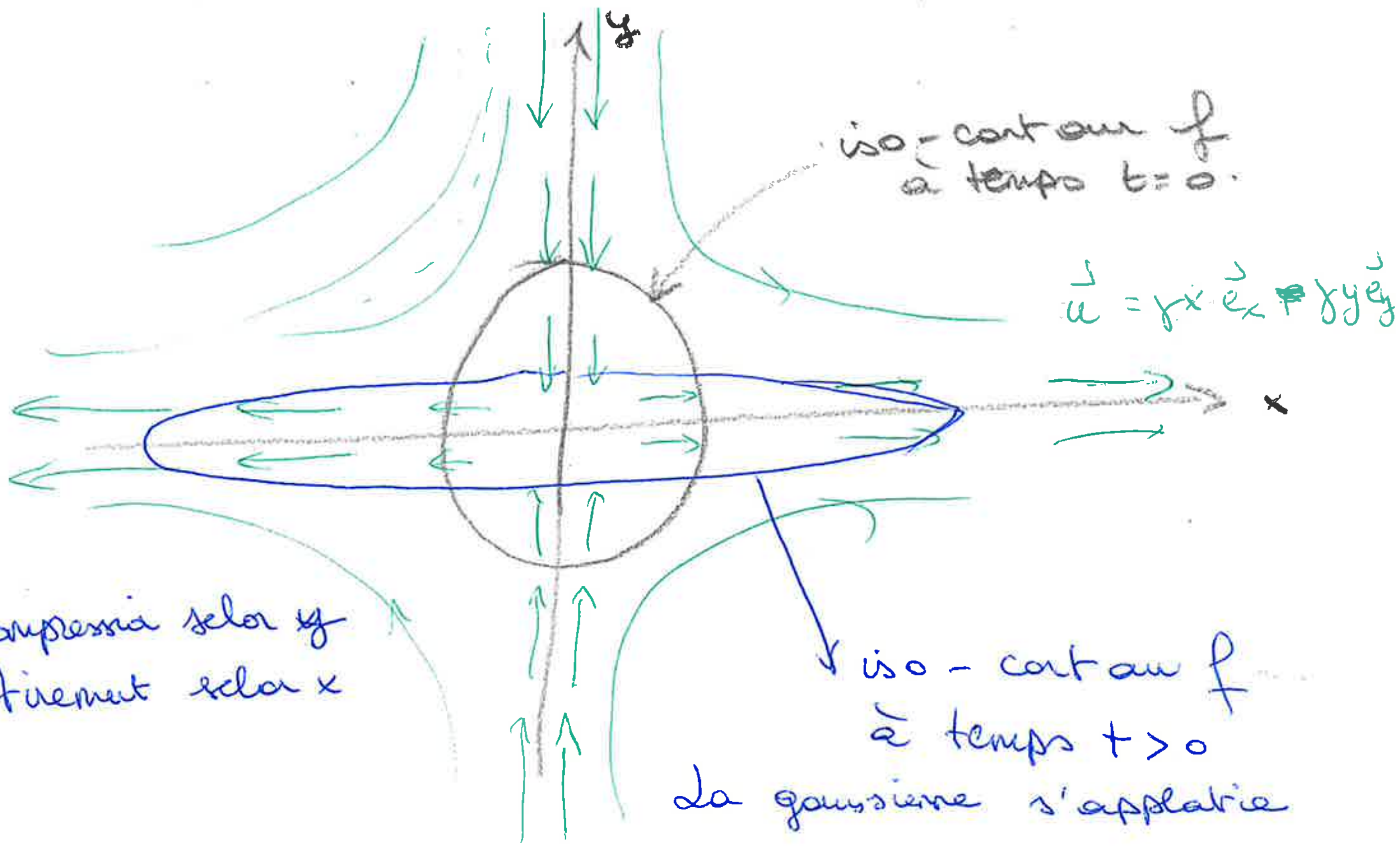
$$\Phi(xe^{-\gamma t}, ye^{\gamma t}) = A e^{x^2 e^{-2\gamma t} + y^2 e^{2\gamma t}}$$

Soit

$$f(x,y,t) = A e^{\underbrace{\frac{x^2}{e^{2\gamma t}}}_{\text{large}} + \underbrace{\frac{y^2}{e^{-2\gamma t}}}_{\text{fin}}}$$

solution du problème.

Interprétation



Compression selon y
étirement selon x

Force de surface.

$$\vec{F}_\Sigma = \oiint_{\partial V} \overline{\overline{\sigma}} \cdot \vec{dS}$$

Option 1 : Théorème de divergence

$$\vec{F}_\Sigma = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\sigma}} \, dV$$

Cartesien

$$\begin{bmatrix} F_{\Sigma x} \\ F_{\Sigma y} \\ F_{\Sigma z} \end{bmatrix} = \iiint_V \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix} dV$$

$$= \iiint_V \begin{bmatrix} 0 + 1 - 1 \\ 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 \end{bmatrix} dV = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_\Sigma = \vec{0}$$

Option 2 : Calcul des intégrales de surface.

$$\vec{dS} = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \vec{e}_r$$

Sur la surface on sait que

$$\vec{e}_r = \frac{x}{R}\vec{e}_x + \frac{y}{R}\vec{e}_y + \frac{z}{R}\vec{e}_z$$

Ainsi on peut calculer $\overline{\overline{T}} \cdot \vec{dS}$ en compos. Cartésiennes

$$\overline{\overline{T}} \cdot \underline{dS} = \begin{bmatrix} 0 & y & -z \\ y & 0 & x \\ -z & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} R \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= \begin{bmatrix} y^2 - z^2 \\ xy + xz \\ -xz + xy \end{bmatrix} R \sin\theta \, d\theta \, d\phi .$$

On doit donc calculer.

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left. \begin{bmatrix} y^2 - z^2 \\ xy + xz \\ -xz + xy \end{bmatrix} \right|_{\text{sur la sphère}} R \sin\theta \, d\theta \, d\phi .$$

Pour ce faire, il faut remplacer

$$x = R \sin\theta \cos\phi$$
$$y = R \sin\theta \sin\phi$$
$$z = R \cos\theta .$$

Alors

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = R^3 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \sin^3\theta \sin^2\phi - \sin\theta \cos^2\theta \\ \sin^3\theta \underbrace{\sin\phi \cos\phi}_{\sin 2\phi / 2} + \sin^2\theta \cos\theta \cos\phi \\ -\sin^2\theta \cos\theta \cos\phi + \sin^3\theta \sin\phi \cos\phi \end{bmatrix} d\theta \, d\phi .$$

$\int_0^{2\pi} (\ldots) \, d\phi = 0$ pour ces termes.

Il reste

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^3\theta \sin^2\phi \, d\theta \, d\phi .$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\phi \, d\phi}_{\pi}$$

$$= \pi \int_0^{\pi} (\cos^2\theta - 1) \, d\cos\theta$$

$$= \pi \left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta \right]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \, d\phi$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (-\cos^2\theta \, d\cos\theta)$$

$$= 2\pi \left[-\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}$$

Ainsi on trouve

$$\begin{bmatrix} F_{\xi,x} \\ F_{\xi,y} \\ F_{\xi,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{aussi}$$

Rq: on peut aller + vite par symétrie $\begin{cases} \iiint yz \, dV = 0 \\ \iiint xy \, dV = 0 \\ \iiint xz \, dV = 0 \end{cases}$

$\left\{ \iiint y^2 \, dV = \iiint z^2 \, dV \right.$ pour une sphère

TD 2 Bilans sur V de contrôle

2.1 Ressort (suite)

Bilan d'énergie

On part de (1. 142) avec

$$\begin{cases} \vec{V} = \vec{0} & \text{(volume immobile)} \\ \vec{f} = -\rho g \vec{e}_z & \text{(gravité.} \\ q = 0 & \\ \vec{\varphi} = 0 & \text{(pas de source ni flux de chaleur)} \\ \bar{\bar{\sigma}} = -p \bar{\bar{1}} & \text{(pression uniquement)} \end{cases}$$

$$\frac{dE}{dt} = -\oiint_\Sigma \rho \left(\frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + e\right)(\vec{u}\cdot\vec{dS}) + \iiint_V (-\rho g \vec{e}_z)\cdot\vec{u}\, dV$$

$$- \oiint_\Sigma p(\vec{u}\cdot\vec{dS})$$

On peut réécrire le terme de gravité comme un terme surfacique

$$\iiint_V (-\rho g \vec{e}_z)\cdot\vec{u}\, dV = \iiint_V (-\vec{\nabla}(\rho g z)\cdot\vec{u})\, dV$$

$$= \iiint (-\vec{\nabla}\cdot(\rho g z \vec{u}))\, dV + \iiint_V \rho g z\, \cancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{u}}^{\,0}\, dV$$

$$= -\oiint_\Sigma \rho g z(\vec{u}\cdot\vec{dS})$$

Ainsi de $\frac{dE}{dt} = 0$ on obtient

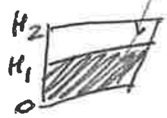
$$0 = - \oiint_{\Sigma} \left(\rho \left(\frac{\|\vec{u}\|^2}{2} + e \right) + p + \rho g z \right) (\vec{u} \cdot d\vec{S})$$

L'entrée et la sortie sont les seules surfaces perméables où $(\vec{u} \cdot d\vec{S}) \neq 0$. On suppose

$e = e_1$ constant en amont.

$e = e_2$ constant en aval.

$S_1 : \vec{u} \cdot d\vec{S} \neq 0$ pour $z \in [0, H_1]$



De ce bilan on obtient

$$\int_0^{H_1} \left(\rho \left(\frac{u_1^2}{2} + e_1 \right) + \underbrace{P_1(z) + \rho g z}_{p_0 + \rho g H_1} \right) (u_1 L \, dz)$$

$$= \int_0^{H_2} \left(\rho \left(\frac{u_2^2}{2} + e_2 \right) + \underbrace{P_2(z) + \rho g z}_{p_0 + \rho g H_2} \right) (u_2 L \, dz)$$

Les intégrales impliquant p_0 disparaissent ensuite à la conservation du débit $u_1 H_1 = u_2 H_2$. Il reste.

$$\left(\cancel{\rho} \frac{u_1^2}{2} + \cancel{\rho} e_1 + \cancel{\rho} g H_1 \right) u_1 H_1 \cancel{L}$$

$$= \left(\cancel{\rho} \frac{u_2^2}{2} + \cancel{\rho} e_2 + \cancel{\rho} g H_2 \right) u_2 H_2 \cancel{L}$$

On doit calculer $(e_2 - e_1)\underbrace{Q_m}_{g U_1 H_1 L \text{ ou } g U_2 H_2 L}$

Ça donne

$$\left[\left(\frac{U_1^2}{2} + gH_1\right) - \left(\frac{U_2^2}{2} + gH_2\right)\right] Q_m$$

$$= (e_2 - e_1)\, Q_m$$

Donc.

$$\Delta \dot{Q} = \left[\underbrace{\left(\frac{U_1^2}{2} + gH_1\right) - \left(\frac{U_2^2}{2} + gH_2\right)}_{\text{écart à la conservation de l'énergie}}\right] Q_m$$

Avec

$$U_1^2 = \frac{g}{2}\frac{H_2}{H_1}(H_1 + H_2)$$

$$U_2^2 = \frac{g}{2}\frac{H_1}{H_2}(H_1 + H_2).$$

$$\Delta \dot{Q} = \left[\frac{g}{4}(H_1 + H_2)\left(\frac{H_2}{H_1} - \frac{H_1}{H_2}\right) + g(H_1 - H_2)\right] Q_m$$

$$= g\left[\frac{(H_1 + H_2)}{4}\frac{(H_2^2 - H_1^2)}{H_1 H_2} + g(H_1 - H_2)\right] Q_M$$

$$= g(H_2 - H_1)\left[\frac{(H_1 + H_2)^2}{4 H_1 H_2} - 1\right] Q_M$$

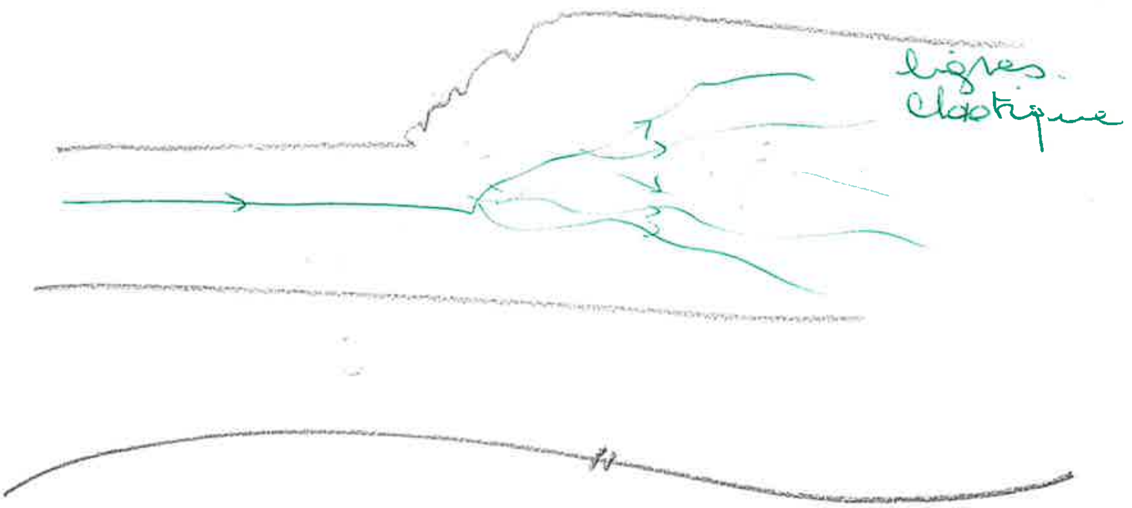
Donc

$$\Delta \dot{Q} = g\,(H_2 - H_1)\left[\frac{H_1^2 + 2H_1H_2 + H_2^2 - 4H_1H_2}{4H_1H_2}\right] Q_M$$

$$= \frac{g}{4}\,\frac{(H_2 - H_1)^3}{H_1H_2}\,Q_M$$

Ainsi $\Delta \dot{Q} > 0$, production de chaleur, si $H_2 > H_1$. En pratique c'est une production de chaleur très faible.

13. La notion de ligne de courant perd son sens, lorsqu'on passe à travers un ressaut



Force hydrodynamique sur plan incliné

1. $\oiint_\Sigma d\vec{S} = \vec{0}$?

On imagine $\vec{A}$ un vecteur constant arbi, alors

$$\oiint_\Sigma \vec{A} \cdot d\vec{S} \underset{div}{\overset{th.}{=}} \iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{A}\, dV$$

Comme le vecteur est constant on a $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ et on peut sortir $\vec{A}$ de l'intégrale. Ainsi

$$\vec{A} \cdot \oiint_\Sigma d\vec{S} = 0 \quad \Rightarrow \quad \oiint_\Sigma d\vec{S} = \vec{0}$$

car $\vec{A}$ est arbitraire.

2. $\vec{e}_1 = ?$

$$\vec{e}_1 = \sin\alpha\, \vec{e}_t - \cos\alpha\, \vec{e}_n$$

3. Euler stationnaire (sans gravité).

$$\rho (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\vec{\nabla} p$$

Si $\vec{u}$ = uniforme alors $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = \vec{0}$

$$\vec{0} = \vec{\nabla} p$$

$\Rightarrow$ la pression y est constante.

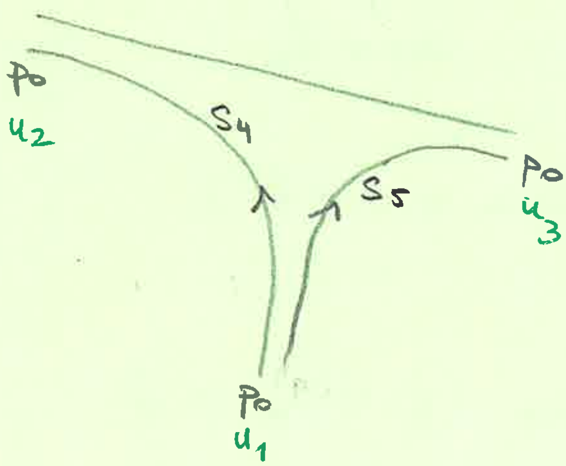
4. En absence de tension de surface, la pression à la surface libre, ici S_4 et S_5 sera celle du gaz.

$$p_4 = p_5 = p_0$$

Comme la pression est constante ds le fluide en S_1, S_2, S_3 (question précédente) on déduit que la pression dans le fluide doit être celle qui existe à la surface libre, p_0 donc.

$$p_1 = p_2 = p_3 = p_0$$

5. Bernoulli sur une ligne de courant de S_4 ou S_5



$\underline{S_4}$: $$\cancel{p_0} + \frac{\rho u_1^2}{2} = \cancel{p_0} + \frac{\rho u_2^2}{2} \Rightarrow u_1 = u_2$$

$\underline{S_5}$: $$\cancel{p_0} + \frac{\rho u_1^2}{2} = \cancel{p_0} + \frac{\rho u_3^2}{2} \Rightarrow u_1 = u_3$$

6. $u_1 H_1 = u_2 H_2 + u_3 H_3$

$\Rightarrow \left[H_1 = H_2 + H_3 \right.$

7. $\displaystyle\oiint_\Sigma \rho \vec{u}(\vec{u}\cdot d\vec{S}) + \oiint_\Sigma p\, d\vec{S} = 0$

$$\iint_{S_1} \rho \vec{u}(\vec{u}\cdot d\vec{S}) = \rho u_1 (-\sin\alpha\, \vec{e}_t + \cos\alpha\, \vec{e}_n)(-u_1 H_1 L)$$
$$= \rho u_1^2 H_1 L (\sin\alpha\, \vec{e}_t - \cos\alpha\, \vec{e}_n)$$

$$\iint_{S_2} \rho \vec{u}(\vec{u}\cdot d\vec{S}) = (-\rho u_2 \vec{e}_t)(u_2 H_2 L)$$
$$= -\rho u_2^2 H_2 L\, \vec{e}_t$$

$$\iint_{S_3} \rho \vec{u}(\vec{u}\cdot d\vec{S}) = (\rho u_3 \vec{e}_t)(u_3 H_3 L)$$
$$= \rho u_3^2 H_3 L\, \vec{e}_t$$

S_4, S_5, S_6 sont imperméables $(\vec{u}\cdot d\vec{S} = 0)$

$$\Rightarrow \oiint_\Sigma \rho \vec{u}(\vec{u}\cdot d\vec{S}) = (\rho u_1^2 H_1 L \sin\alpha - \rho u_2^2 H_2 L + \rho u_3^2 H_3 L)\vec{e}_t - \rho u_1^2 H_1 L \cos\alpha\, \vec{e}_n$$

Pour la pression

$$\oiint p\, d\vec{S} = \iint_{S_1 \cup \dots \cup S_5} p_0\, d\vec{S} + \iint_{S_6} p\, d\vec{S}$$

$$= \underbrace{\cancel{\oiint_\Sigma p_0\, d\vec{S}}}_{=\vec{0}\ \text{ok}} + \underbrace{\iint_{S_6} (p - p_0)\, d\vec{S}}_{\text{force sur plaque.}}$$

Ainsi du Bilan, on déduit

$$\vec{F}_{\to plaque} = \iint_{S_6} (P-P_0)\, d\vec{S}$$

$$= \rho U_1^2 H_1 L \cos\alpha \; \vec{e}_n$$

$$+ \rho U_1^2 L \left(H_2 - H_1 \sin\alpha - H_3 \right) \vec{e}_t$$

8. Comme sur la plaque $d\vec{S} \sim \vec{e}_n$ on doit avoir

$$\vec{F}_{\to plaque} = \rho U_1^2 H_1 L \cos\alpha \; \vec{e}_n$$

Si $\alpha = 0$, on retrouve une formule proche de celle du cours ($\hat{m}$ si le cours = axisym $\neq$ 2D)

9. Cela signifie aussi que

$$H_2 - H_1 \sin\alpha - H_3 = 0$$

car sinon force selon $\vec{e}_t$. Avec $H_1 = H_2 + H_3$ on élimine soit H_2, soit H_3.

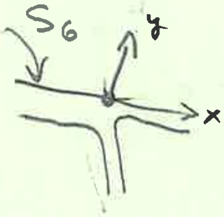
$$H_2 - H_1 \sin\alpha - H_1 + H_2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad H_2 = \frac{H_1}{2}(1 + \sin\alpha) \quad \text{et} \quad H_3 = \frac{H_1}{2}(1 - \sin\alpha)$$

OK : si $\alpha > 0$
$H_2 > H_3$

10. Pour calculer le couple, on doit évaluer

$$\vec{K} = \iint_{S_6} \vec{r} \times p \, \vec{dS}$$



$\vec{r} = x\vec{e}_x$ sur S_6

Peut-on passer par un bilan ?

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} = \frac{d}{dt}\iiint_V \vec{r}\times\rho\vec{u}\,dV$$

$\partial_t \rho u$
$= -\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}\times\vec{u})$
$-\vec{\nabla}p$

$$= \iiint_V \vec{r}\times\rho\,\partial_t\vec{u}\,dV$$

$$= \underbrace{-\iiint_V \vec{r}\times\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}\otimes\vec{u})\,dV}_{-\iint \vec{r}\times p\,\vec{dS}}$$

terme de surface ?

$$\vec{r}\times\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}\otimes\vec{u})$$

$$= \vec{e}_i\varepsilon_{ijk}\,x_j\,\partial_l(\rho u_l u_k)$$

$$= \vec{e}_i\,\partial_l(\varepsilon_{ijk}\,x_j\,\rho u_l u_k)$$

$$\underbrace{-\vec{e}_i\,\varepsilon_{ijk}\,\rho u_l u_k\,\underbrace{\partial_l x_j}_{\delta_{jl}}}_{-\vec{e}_i\,\cancel{\varepsilon_{ijk}\rho u_j u_k}}$$

car $-\cancel{\rho\vec{u}\times\vec{u}}$

$$= \partial_l(\vec{e}_i\,\varepsilon_{ijk}\,x_j\,\rho u_l u_k) \quad \text{(divergence)}$$

Ainsi

$$\iiint_V \vec{r} \times \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u})\, dV$$

$$= \iiint_V \partial_l \left(\vec{e}_i\, \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \rho\, u_k u_l \right) dV$$

$$= \oiint_\Sigma \vec{e}_i\, \varepsilon_{ijk}\, x_j\, \rho\, u_k\, u_l\, dS_l$$

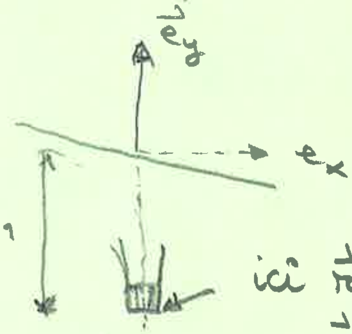
$$= \oiint_\Sigma (\vec{r} \times \rho \vec{u})\, (\vec{u} \cdot \vec{dS})$$

On arrive donc sur

$$\vec{0} = \oiint_\Sigma (\vec{r} \times \rho \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{dS}) + \oiint_\Sigma \vec{r} \times p\, \vec{dS}$$

Avec ce bilan de moment cinétique

(S1) $\displaystyle\iint_{S_1} (\vec{r} \times \rho \vec{u})(-U_1\, dS)$



ici $\vec{r} = x\vec{e}_x - L_1 \vec{e}_y$

$\vec{u} = U_1 \vec{e}_y$

$x \in [-H_1/2, H_1/2]$

$$\cancel{= -L \int_{-H_1/2}^{H_1/2} x \rho U_1^2\, dx\ \vec{e}_z}\ \ 0$$

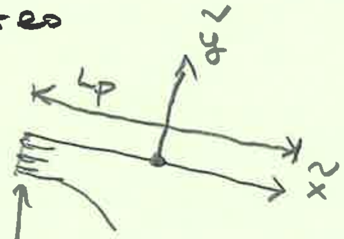
symétrie

pas d'injection de moment orbital en bas.

Sur les côtés 7

L_p = largeur de la plaque.

(S_2)



ici : $\vec{r} = -\frac{L_p}{2}\vec{e}_t + \tilde{y}\,\vec{e}_n \quad , \tilde{y} \in [-H_2, 0]$

$\vec{u} = -U_2\,\vec{e}_t$

et $\vec{e}_t \times \vec{e}_n = \vec{e}_z$

$$\iint_{S_2} (\vec{r} \times \rho\vec{u})(U_2\, dS)$$

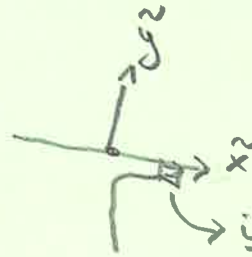
$$= L \int_{-H_2}^{0} \left(\tilde{y}\,\vec{e}_n \times (-\rho U_2 \vec{e}_t)\right) U_2\, d\tilde{y}$$

$$= L \int_{-H_2}^{0} \tilde{y}\rho U_2^2\, d\tilde{y} \;\; \vec{e}_z$$

$$= \rho U_2^2 L \left[\frac{\tilde{y}^2}{2}\right]_{-H_2}^{0} \vec{e}_z$$

$$= -\rho U_2^2 L \frac{H_2^2}{2} \vec{e}_z$$

(S_3)



ici : $\vec{r} = \frac{L_p}{2}\vec{e}_t + \tilde{y}\,\vec{e}_n \quad , \tilde{y} \in [-H_3, 0]$

$\vec{u} = U_3\,\vec{e}_t$

$$\iint_{S_3} (\vec{r} \times \rho\vec{u})(U_3\, dS)$$

$$= L \int_{-H_3}^{0} (\tilde{y}\,\vec{e}_n \times \rho U_3\, \vec{e}_t)\, U_3\, d\tilde{y}$$

$$= -L\rho U_3^2\, \vec{e}_z \left[-\frac{H_3^2}{2}\right] = \rho U_3^2 \frac{L}{2} H_3^2\, \vec{e}_z$$

Les autres parois sont imperméables

$$\oiint_\Sigma (\vec{r} \times \rho \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{dS})$$

$$= \left(-\rho u_2^2 L \frac{H_2^2}{2} + \rho u_2^2 L \frac{H_3^2}{2}\right)\vec{e}_2$$

$$= \frac{\rho u_1^2 L}{2}\left(H_3^2 - H_2^2\right)\vec{e}_2$$

$$= \frac{\rho u_1^2 L}{2}\,\frac{H_1^2}{4}\left(\cancel{1} - 2\sin\alpha + \cancel{\sin^2\alpha} - \cancel{1} - 2\sin\alpha - \cancel{\sin^2\alpha}\right)\vec{e}_2$$

$$= -\frac{\rho u_1^2 L}{2} H_1^2 \sin\alpha\,\vec{e}_2$$

Reste le terme de pression

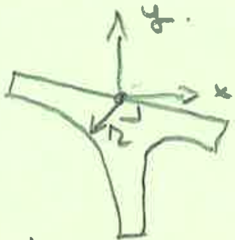
$$\oiint_\Sigma \vec{r} \times p\,\vec{dS} = \underbrace{\iint_{S_6} \vec{r} \times (p - p_0)\,\vec{dS}}_{\text{Couple recherché } \vec{K}_{plaque}} + \underbrace{\oiint_\Sigma \vec{r} \times p_0\,\vec{dS}}_{\vec{0}\,?}$$

Peut on montrer que

$$\oiint_\Sigma \vec{r} \times p_0\,\vec{dS} = \vec{0}$$

?

indiciel



ici $\vec{r}$ décrit toute la surface.

$$p_0\,\vec{e}_i \oiint_\Sigma \underbrace{\varepsilon_{ijk}\, x_j}_{A_{ik}}\, dS_k$$

A_{ik} composantes d'un tenseur antisym.

On peut donc écrire

$$\oiint_\Sigma \vec{r} \times p_0 \vec{dS}$$

$$= p_0 \oiint_\Sigma \underbrace{\vec{e}_i \, A_{ik} \, dS_k}_{\overset{=}{A} \cdot \vec{dS}}$$

$$\overset{\text{div}}{\underset{Th}{=}} p_0 \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \overset{=}{A} \, dV$$

$$\overset{\text{indiciel}}{=} p_0 \iiint_V \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_k} (A_{ik}) \, dV$$

$$= p_0 \iiint_V \vec{e}_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (\varepsilon_{ijk} x_j)}_{\varepsilon_{ijk} \delta_{jk} = \varepsilon_{ijj} = 0} dV$$

$$= \vec{0}$$

Comme prévu $\oiint_\Sigma \vec{r} \times p_0 \vec{dS} = \vec{0}$. La pression p_0 n'exerce pas de couple. Ainsi on trouve du bilan de moment cinétique que

$$\oiint_\Sigma (\vec{r} \times \rho \vec{u})(\vec{u} \cdot \vec{dS}) + \oiint_\Sigma \vec{r} \times p \vec{dS} = \vec{0}$$

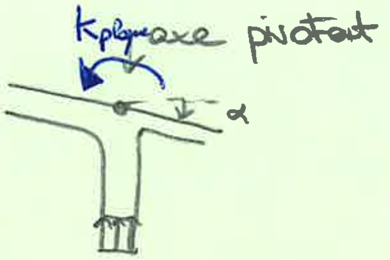
$$\Leftrightarrow \quad - \rho u_1^2 \frac{L}{2} H_1^2 \sin\alpha \, \vec{e}_z + \vec{K}_{plaque} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{K}_{plaque} = \rho u_1^2 \frac{L}{2} H_1 \sin\alpha \, \vec{e}_z$$

je suis un peu étonné du signe mais pourquoi pas.

Ce résultat suggère un couple stabilisant.

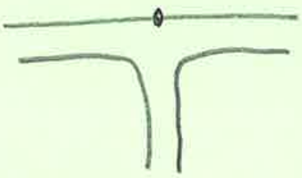
Si on attache la plaque sur un axe pivotant



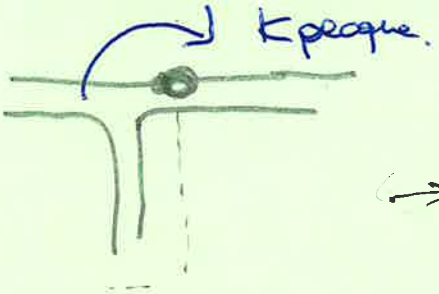
$\alpha > 0$ cause

$\Gamma_{\text{plaque},z} > 0$

Le système va chercher à retourner vers la config $\alpha = 0$.



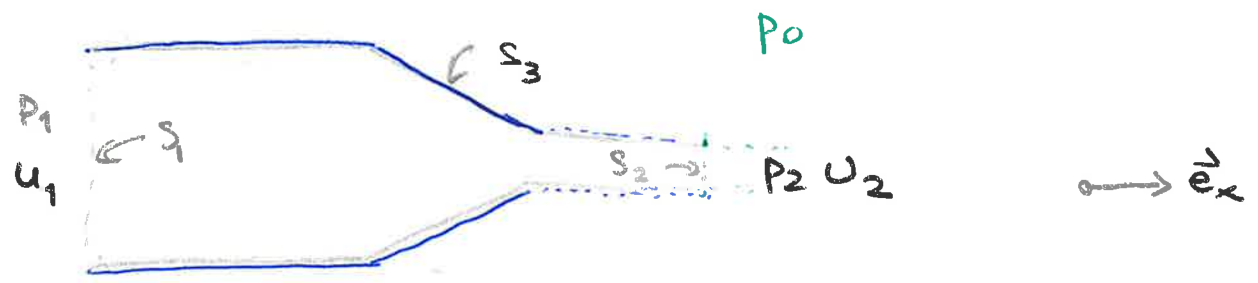
Evidemment, tout change si on envoie le jet hors de l'axe



$\rightarrow$ Terme $\displaystyle\iint_{S_1} (\vec{r} \times \rho \vec{u})(\vec{u} \cdot d\vec{S})$

$\neq 0$

Volumes de contrôle. Force sur un convergent



$$\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

Il manquait une info dans l'énoncé. Le convergent est dans une atmosphère à pression p_0. On peut imaginer que S_2 = surface dans l'air. Alors, à cet endroit

$$p_2 = p_0 \ !$$

Sans cette info p_1 ou p_2 ne disparait pas du problème.

On veut calculer

$$\vec{F} = \iint_{S_3} (p - p_0)\, \vec{dS}$$

j'enlève tout de suite la partie due à p_0.

1. Masse $\frac{dM}{dt} = 0 \iff \oiint_{\Sigma} \rho \vec{u} \cdot \vec{dS} = 0$

$$\iff \left[\rho u_1 S_1 = \rho u_2 S_2 \right.$$

2. Quantité de mvt

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \iff \oiint_{\Sigma} \rho \vec{u} \, (\vec{u} \cdot d\vec{S}) + \oiint p \, d\vec{S} = \vec{0}$$

$$\iff \rho u_1 \vec{e}_x (-u_1 S_1) + \rho u_2 \vec{e}_x (u_2 S_2)$$

$$- p_1 S_1 \vec{e}_x + p_2 S_2 \vec{e}_x + \iint_{S_3} p \, d\vec{S} = 0$$

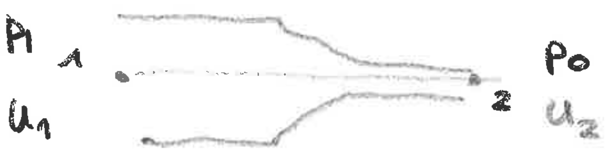
On a vu que $\oiint p_0 \, d\vec{S} = 0$ (TD 2 sup)

Si on enlève $\oiint_{\Sigma} p_0 \, d\vec{S}$ de l'éq. précédente

$$\iff \Big[-\rho u_1^2 S_1 + \rho u_2^2 S_2 - (p_1 - p_0) S_1 + \cancel{(p_2 - p_0) S_2} \Big] \vec{e}_x + \iint_{S_3} (p - p_0) \, d\vec{S} = 0$$

On prend en compte que $p_2 = p_0$ en très bonne approximation

3. Bernoulli nous dit que



$$p_1 + \rho \frac{u_1^2}{2} = p_0 + \rho \frac{u_2^2}{2}$$

$$\Rightarrow p_1 - p_0 = \frac{\rho}{2} (u_2^2 - u_1^2)$$

4. Cette relation permet d'éliminer la pression. On trouve donc

$$\iint_{S_3} (p-p_0)\,\vec{dS} = \vec{F} = \Big[\rho u_1^2 S_1 - \rho u_2^2 S_2 + \frac{\rho}{2}(u_2^2 - u_1^2) S_1 \Big] \vec{e_x}$$

Avec la conservation de masse

$$u_1 S_1 = u_2 S_2 = Q \leftarrow \text{débit volumique}$$

On élimine

$$u_1 = \frac{Q}{S_1}$$

$$u_2 = \frac{Q}{S_2}$$

Ainsi

$$F_x = \rho Q^2 \left[\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right) S_1 \right]$$

$$= \rho Q^2 \left[\frac{S_2 - S_1}{S_1 S_2} + \frac{1}{2} \frac{(S_1 - S_2)(S_1 + S_2)}{S_1^2 S_2^2} S_1 \right]$$

$$= \rho Q^2 \frac{(S_1 - S_2)}{S_1 S_2} \underbrace{\left[-1 + \frac{1}{2} \frac{S_1^2 + S_1 S_2}{S_1 S_2} \right]}_{\frac{1}{2} \frac{S_1^2 - S_1 S_2}{S_1 S_2}}$$

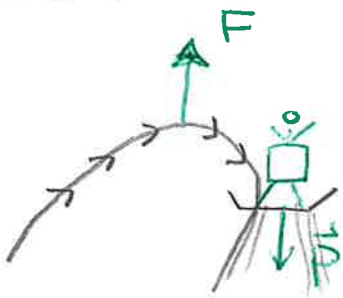
$$= \rho Q^2 \frac{(S_1 - S_2)^2}{S_1 S_2^2} > 0$$

Le liquide exerce donc une force vers l'avant sur la structure. Ce résultat est un peu contra-intuitif car on s'attend à qu'un jet exerce une pression dans le sens opposé.

Pense au hooverboard avec eau

D'où vient donc la force qui garde le bonhomme en équilibre ?

Du coude



TD 3 : 2. Ecoulement parfait autour d'une sphère

1. Coordonnées sphériques

$$\vec{e_r} = \sin\theta\cos\phi\,\vec{e_x} + \sin\theta\sin\phi\,\vec{e_y} + \cos\theta\,\vec{e_z}$$
$$\vec{e_\theta} = \cos\theta\cos\phi\,\vec{e_x} + \cos\theta\sin\phi\,\vec{e_y} - \sin\theta\,\vec{e_z}$$
$$\vec{e_\phi} = -\sin\phi\,\vec{e_x} + \cos\phi\,\vec{e_y}$$

Ainsi

$$\underbrace{\sin\theta\,\vec{e_r} + \cos\theta\,\vec{e_\theta}} = \cos\phi\,\vec{e_x} + \sin\phi\,\vec{e_y}$$

↳ le vecteur unitaire radial des coordonnées cylindriques

Du coup

$$\cos\phi\left(\sin\theta\,\vec{e_r} + \cos\theta\,\vec{e_\theta}\right) - \sin\phi\,\vec{e_\phi}$$

$$= \left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right)\vec{e_x} + \left(\sin\phi\cos\phi - \sin\phi\cos\phi\right)\vec{e_y}$$

Résultat :

$$\boxed{\vec{e_x} = \sin\theta\cos\phi\,\vec{e_r} + \cos\theta\cos\phi\,\vec{e_\theta} - \sin\phi\,\vec{e_\phi}}$$

On peut y arriver avec des schémas mais c'est + difficile.

2. $U\vec{e}_x = \vec{\nabla}\Phi_\infty$

$$\Rightarrow \Phi_\infty = Ux$$
$$= U r \sin\theta \cos\phi$$

Test

$$\vec{\nabla}\Phi_\infty = \frac{\partial \Phi_\infty}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_\infty}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\vec{e}_\phi$$

$$= U\left(\sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_r + \cos\theta\cos\phi\,\vec{e}_\theta - \sin\phi\,\vec{e}_\phi\right)$$

$$= U(\vec{e}_x)$$ en effet ok.

3. On propose

$$\Phi = f(r)\sin\theta\cos\phi.$$

à l'eq. $\nabla^2\Phi = 0$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)\sin\theta\cos\phi$$

$$+ \frac{f}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta)\right)\cos\phi + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(-\sin\theta\cdot\cos\phi\right)\right] = 0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\cos\theta\right) = \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta}$$

soit

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta)\right)$$

$$= \frac{1-2\sin^2\theta}{\sin\theta}$$

Donne pour le terme entre crochets.

$$\dots + \frac{f}{r^2}\left[\cancel{\frac{\cos\phi}{\sin\theta}} - 2\sin\theta\cos\phi - \cancel{\frac{\cos\phi}{\sin\theta}}\right]$$

Soit donc

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) - \frac{2f}{r^2}\right]\sin\theta\cos\phi = 0$$

Rq: on appelle

$$\hat{L}_2 = -\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]$$

opérateur du moment orbital
Son action sur une harmonique sphérique $Y_e^m(\theta,\phi)$ est

$$\hat{L}_2 Y_e^m(\theta,\phi) = \ell(\ell+1)Y_e^m(\theta,\phi)$$

Ici on peut combiner

$$Y_1^{\pm 1}(\theta,\phi) \Rightarrow \sin\theta\cos\phi = \frac{x}{r}$$

aussi

$$\hat{L}_2 \sin\theta\cos\phi = -(1)(1+1)\sin\theta\cos\phi.$$
$$= -2\sin\theta\cos\phi.$$

Parfois on gagne du temps en utilisant les notations Y_ℓ^m et les propriétés des L opérateurs.

On doit donc trouver $f(r)$ solution de

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) - \frac{2f}{r^2} = 0$$

Cette eq. différentielle admet (aussi) des solutions

$f = r^\alpha$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\alpha r^{\alpha+1}\right) - 2r^{\alpha-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\alpha(\alpha+1) - 2\right] r^\alpha = 0.$$

$$\alpha(\alpha+1) - 2 = 0$$

si $\alpha = 1$ ou $\alpha = -2$
$= (\ell)$ $= (-\ell-1)$

On a donc $f(r) = Ar + Br^{-2}$

5. Bernoulli

$$p + \rho \frac{\|\vec{\nabla}\phi\|^2}{2} = C = p_\infty + \rho \frac{U^2}{2}$$

Donne

$$p = p_\infty + \rho\frac{U^2}{2} - \rho\frac{U^2}{2}\Big[\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)^2 \sin^2\theta \cos^2\phi$$
$$+ \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)^2 \cos^2\theta \cos^2\phi$$
$$+ \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)^2 \sin^2\phi\Big]$$

6. Sur la surface $p(R, \theta, \phi)$?

$$p\Big|_{r=R} = p_\infty + \rho\frac{U^2}{2} - \rho\frac{U^2}{2}\Big[0 + \frac{9}{4}\overbrace{\cos^2\theta}^{1-\sin^2\theta}\cos^2\phi$$
$$+ \frac{9}{4}\sin^2\phi\Big]$$
$$= \underbrace{p_\infty + \rho\frac{U^2}{2}\left(-\frac{5}{4}\right)}_{\text{partie constante.}} + \rho\frac{U^2}{2}\sin^2\theta\cos^2\phi$$

Force de pression

$$\vec{F} = \oiint_S p\, d\vec{S} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} p\big|_{r=R}\, R^2 \sin\theta \,(-\vec{e}_r)\, d\theta\, d\phi$$

⚠

$$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\phi\,\vec{e}_x$$
$$+ \sin\theta\sin\phi\,\vec{e}_y$$
$$+ \cos\theta\,\vec{e}_z$$

Le potentiel hydro "candidat"

$$\Phi = \left(Ar + \frac{B}{r^2}\right) \sin\theta \cos\phi$$

A l'∞, on doit avoir $\Phi \rightarrow \Phi_\infty$. Ceci implique $A = U$

4. Sur la surface de la sphère on veut

$$u_r\big|_{r=R} = 0 \iff \partial_r \Phi\big|_{r=R} = 0$$

Ici

$$U - \frac{2B}{R^3} = 0 \iff B = \frac{UR^3}{2}$$

Solution potentiel connue.

$$\Phi = U\left(r + \frac{R^3}{2r^2}\right) \sin\theta \cos\phi$$

On peut calculer l'écoulement.

$$u_r = \partial_r \Phi = U\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \sin\theta \cos\phi$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta \Phi = U\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) \cos\theta \cos\phi$$

$$u_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi \Phi = -U\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) \sin\phi$$

La partie constante de la pression ne peut sûrement pas contribuer. Il reste
(symétrie)

$$\vec{F} = -\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho u^2}{2} R^2 \sin^3\theta \cos^2\phi$$

$$\times \Big[\sin\theta \cos\phi \, \vec{e}_x$$

$$+ \sin\theta \sin\phi \, \vec{e}_y$$

$$+ \cos\theta \, \vec{e}_z \Big] \, d\theta \, d\phi$$

Selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ on rencontre

$$\int_0^{2\pi} \cos^3\phi \, d\phi = 0 \longrightarrow F_x = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\phi \sin\phi \, d\phi = 0 \rightarrow F_y = 0$$

Selon $\vec{e}_z$

$$\int_0^\pi \sin^3\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$= \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\sin\theta$$

$$= \left[\frac{\sin^4\theta}{4} \right]_0^\pi = 0 \quad \rightarrow F_z = 0$$

On retrouve le résultat du paradoxe de d'Alembert.

$$\vec{F} = \vec{0}$$

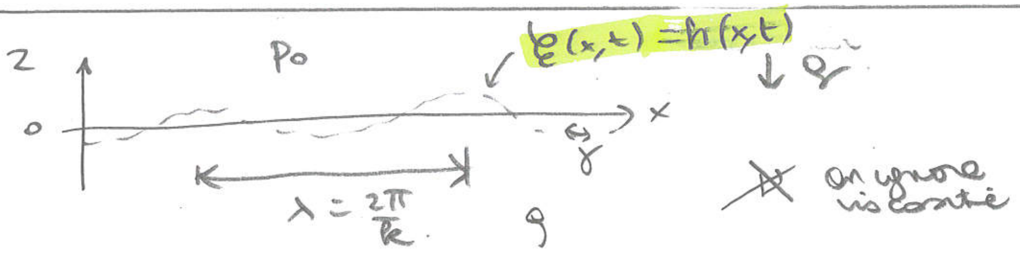
7. Non, on ne peut pas ajouter une circulation ici de la m^t manière. Contrairement au cas du cylindre, l'extérieur de la sphère est un domaine simplement connecté. Le potentiel trouvé ici

$$\Phi = U\left(r + \frac{R^3}{2r^2}\right)\sin\theta\cos\phi$$

est solution <u>unique</u> du problème.

Il est bien plus difficile de retrouver la force de portance dans le cas d'un objet 3D, pas invariant selon une direction de l'espace.

TD 3 : Ondes de surface en eau très profonde



p_0 : pression atm

ρ : densité = constant

γ : tension de surface

$h = \xi$: élévation de la surface → devrait être h. Mentionner que $\xi = h$ dans l'énoncé !

g : gravité

1. (masse) $\nabla \cdot \vec{u} = 0$

   (Euler) $\rho(\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}) = -\nabla p - \rho g \vec{e}_z$

2. Si on ignore ce terme $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$ dans Euler alors

$$\rho \partial_t \vec{u} = -\nabla p - \rho g \vec{e}_z$$

Appliquant le rotationnel, on voit

$$\rho \partial_t \underbrace{\nabla \wedge \vec{u}}_{\text{vorticité}} = 0$$

Si la vorticité = 0 au début elle le restera. On peut chercher

$$\vec{u} = \nabla \Phi$$

Dans Euler

$$\nabla(\rho \partial_t \Phi + p + \rho g z) = \vec{0}$$

Intégration donne

$$\rho \partial_t \Phi + p + \rho g z = C \quad \Rightarrow \quad p = C - \rho \partial_t \Phi - \rho g z$$

avec C une constante (indép. de l'espace, et du temps)

3. Si $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{u} = \nabla \phi$ alors

$$\nabla \cdot \nabla \Phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \Phi = 0$$

pb de Laplace.

4. On propose → [j'aurais pas du mettre A] ! (2)

$$\Phi = A\, g(z) \sin(kx - \omega t).$$

Dans le pb de Laplace

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-k^2 g(z) + \frac{d^2 g}{dz^2}\right) \underbrace{A}_{\text{non-nul}} \underbrace{\sin(kx - \omega t)}_{\text{non-nulle } \forall x, t \text{ quelconque}} = 0$$

On doit avoir

$$\frac{d^2 g}{dz^2} - k^2 g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(z) = C_+ e^{kz} + C_- e^{-kz}.$$

Le potentiel doit rester fini pour $z \to -\infty \Rightarrow C_- = 0$.

$$g(z) = C_+ e^{kz}$$

Solution:

$$\Phi = \underbrace{A C_+}_{A \text{ nouvelle cst arbi}} e^{kz} \sin(kx - \omega t) = A\, e^{kz} \sin(kx - \omega t)$$

5. La pression

$$p = C - \rho\, \partial_t \Phi - \rho g z$$

$$= C + A \rho \omega\, e^{kz} \cos(kx - \omega t) - \rho g z.$$

6. Le champ de vitesse sous l'onde

$$\vec{u} = \nabla \Phi = \partial_x \Phi\, \vec{e}_x + \partial_z \Phi\, \vec{e}_z$$

$$= A k\, e^{kz} \cos(kx - \omega t)\, \vec{e}_x$$

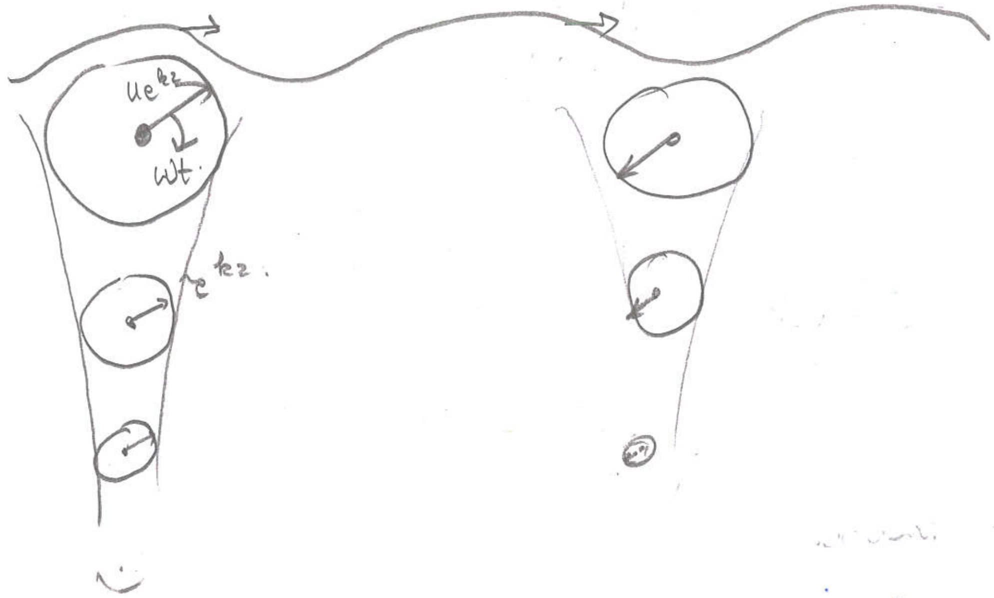
$$+ A k\, e^{kz} \sin(kx - \omega t)\, \vec{e}_z$$

Si on identifie

$Ak = U$ une amplitude de vitesse

$$\vec{u} = U\, e^{kz} \left(\cos(kx - \omega t)\, \vec{e}_x + \sin(kx - \omega t)\, \vec{e}_y\right)$$

La vitesse diminue exponentiellement avec $z \downarrow$. À z fixé le vecteur vitesse décrit un cercle.



→ BONUS : ne pas faire en TD, juste donner l'info

V. En cours, j'ai inversé la rotation, peut être qu'il faut mieux rester fidèle à cette rotation nouvelle

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}(\vec{r},t) \quad / \quad \vec{r}(0) = \vec{R}_0 = X_0\vec{e}_x + Z_0\vec{e}_z .$$

Sous forme intégrale

$$\vec{r}(t) = \vec{R}_0 + \int_0^t \vec{u}(\vec{r}(t'),t')\,dt'$$

Approx : les particules restent proche des points initiaux. $\vec{r}(t) \simeq \vec{R}_0 + \delta\vec{r}$

$$\vec{r}(t) \simeq \vec{R}_0 + \int_0^t \vec{u}(\vec{R}_0,t')\,dt'$$

⇒ ils essayent tout seul.

⇒ tu dis qu'ils doivent trouver des traject circulaires

Sous forme matri

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} X_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \int_0^t u e^{kZ_0}\left(\cos(kX_0-\omega t')\vec{e}_x + \sin(kX_0-\omega t')\vec{e}_z\right)dt'$$

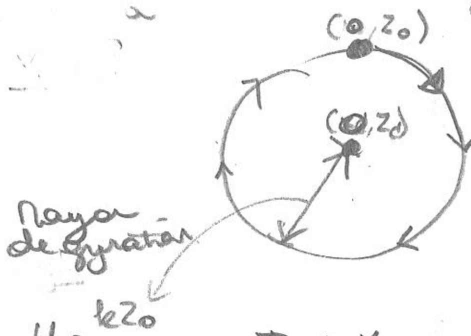
$$= \begin{bmatrix} X_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \frac{u e^{kZ_0}}{\omega}\begin{bmatrix} -\sin(kX_0-\omega t) + \sin(kX_0) \\ +\cos(kX_0-\omega t) - \cos(kX_0) \end{bmatrix}$$

donne

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ z(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + \frac{U e^{kz_0}}{\omega}\sin(kx_0)\\ z_0 - U\frac{e^{kz_0}}{\omega}\cos(kx_0)\end{bmatrix} + \frac{U e^{kz_0}}{\omega}\begin{bmatrix}-\sin(kx_0-\omega t)\\ +\cos(kx_0-\omega t)\end{bmatrix}$$

centre de gyration $\begin{bmatrix}x_c\\ z_c\end{bmatrix}$

4



$\frac{U e^{kz_0}}{\omega}$

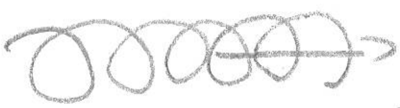
Ici $x_0 = 0$

Mouvement de gyration : Rayon de gyration

$$= \frac{U e^{kz_0}}{\omega}$$

En première approximation les particules tournent sur des cercles de rayon $\frac{U e^{kz_0}}{\omega}$

En réalité :



dérive de Stokes.

~~pendant son mouvement la particule voit l'amplitude de vitesse changer $\Rightarrow$ + déplacé quand en haut, − déplacé en bas.~~

$\Rightarrow$ net dérive vers la droite

8. $\frac{D}{Dt}\left(z - h(x,t)\right) = 0 \Big|_{z=h(x,t)}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\right)\left(z - h(x,t)\right)\Big|_{z=h(x,t)} = 0$$

$$\Leftrightarrow u_z\Big|_{z=h} - \partial_t h - u_x\Big|_{z=h}\partial_x h = 0$$

On ignore les termes NL

$$\partial_t h \approx u_z\big|_{z=h}$$

DL du membre de droite autour de $z=0$

donne

$$\partial_t h \approx u_z|_{z=0} + \underbrace{\cancel{h\,\partial_z u_z|_{z=0}}}_{\text{terme NL}} + \dots$$

La CL linéarisée (SHIT $\mathcal{E} \to h$).

$$\frac{\partial h}{\partial t} = u_z\Big|_{z=0}$$

Ici

ou u

$$u_z|_{z=0} = Ak \sin(kx - \omega t)$$

On doit avoir

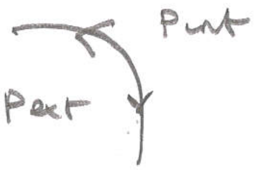
$$\frac{\partial h}{\partial t} = Ak \sin(kx - \omega t)$$

Intégration donne.

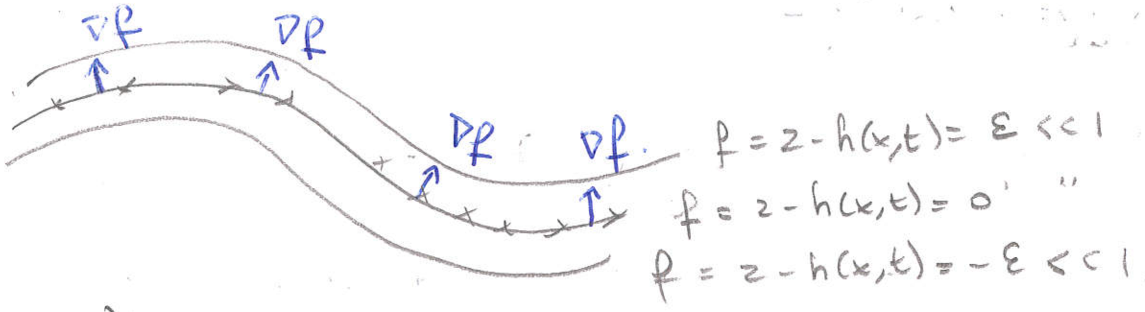
$$h = \frac{Ak}{\omega} \cos(kx - \omega t)$$

9. Loi de Young-Laplace

$$P_{int} - P_{ext} = \gamma\kappa$$



Ici $\kappa = \pm \nabla \cdot \vec{n}$. Le choix $\vec{n} \simeq \nabla f$ convient ici car



Si a tendue.

$$\nabla f = \nabla(z - h(x,t)) = \vec{e}_z - \vec{\nabla h}$$

norme ?

$$\|\nabla f\| = \sqrt{1 + \|\nabla h\|^2} \approx 1 \text{ ds l'approx linéaire}$$

On évalue alors.

$$K = \pm \nabla\cdot \vec{n} = \pm \nabla\cdot(\vec{e}_z - \nabla h) = \mp \nabla^2 h$$

Ici $f(x,t)$ donc.

$$K = \mp \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

Si on exprime la CL du saut de pression alors on a.

pas de ρ.

$$p_{fluide}\Big|_{z=h} - p_0 = \mp \gamma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

soit

$$C - p_0 + \underbrace{A g \omega\, e^{kz} \cos(kx - \omega t)}_{\text{DL autour de } z=0}\Big|_{z=h} - \rho g h = \mp \gamma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

$$\Leftrightarrow C + A g \omega\, \cancel{e^{k0}}^{=1} \cos(kx-\omega t)$$

$$- p_0 - \rho g \frac{Ak}{\omega} \cos(kx - \omega t) = \pm \gamma k^2 \frac{Ak}{\omega} \cos(kx - \omega t)$$

On choisit $C = p_0$ et on obtient alors.

$$A \cos(kx - \omega t) \left[\rho\omega - \frac{\rho g k}{\omega} \mp \frac{\gamma k^3}{\omega} \right] = 0$$

Afin de satisfaire cette relation $\forall x,t$, il faut que

$$\rho \omega - \frac{\rho g k}{\omega} \mp \frac{\gamma k^3}{\omega} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega^2 = g k \pm \frac{\gamma k^3}{\rho}$$

+

Physiquement, on doit avoir un signe + ici car sinon

$\omega^2<0$

est possible $\Rightarrow$ des solutions/ondes instables. Ceci n'est pas normal dans cette configuration. Il fallait donc prendre

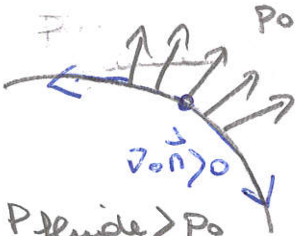
$+$ → choix en haut

au début, c.a.d.

$$p_{fluide}\Big|_{z=h} - p_0 = +\gamma\, \nabla\cdot\vec{n}$$

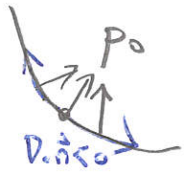
↳ $\vec{n}$ sortant du fluide

<u>Normal</u> cas



$P_{fluide}>p_0$

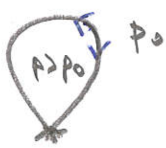
pense à ballon baudruche

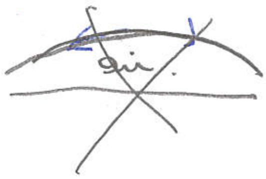


$P_{fluide}<p_0$.

pense à une ventouse.

~~$\vec{n}$ rentrant~~.





10. La vitesse de phase

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{k}\sqrt{gk + \frac{\gamma k^3}{\rho}} = \sqrt{\frac{g}{k} + \gamma\frac{k}{\rho}}$$

Limite $k \to 0$:

$$c \simeq \sqrt{\frac{g}{k}}$$

"grandes longueurs d'onde" sous l'influence de g.

Limite $k \to +\infty$:

$$c \simeq \sqrt{\frac{\gamma k}{\rho}}$$

"petites longueurs d'onde" sous l'influence de γ.

ondes de gravité | ondes capillaires.

Nombre d'onde critique k_c si

$$\frac{g}{k_c} = \frac{\gamma k_c}{\rho}$$

Soit

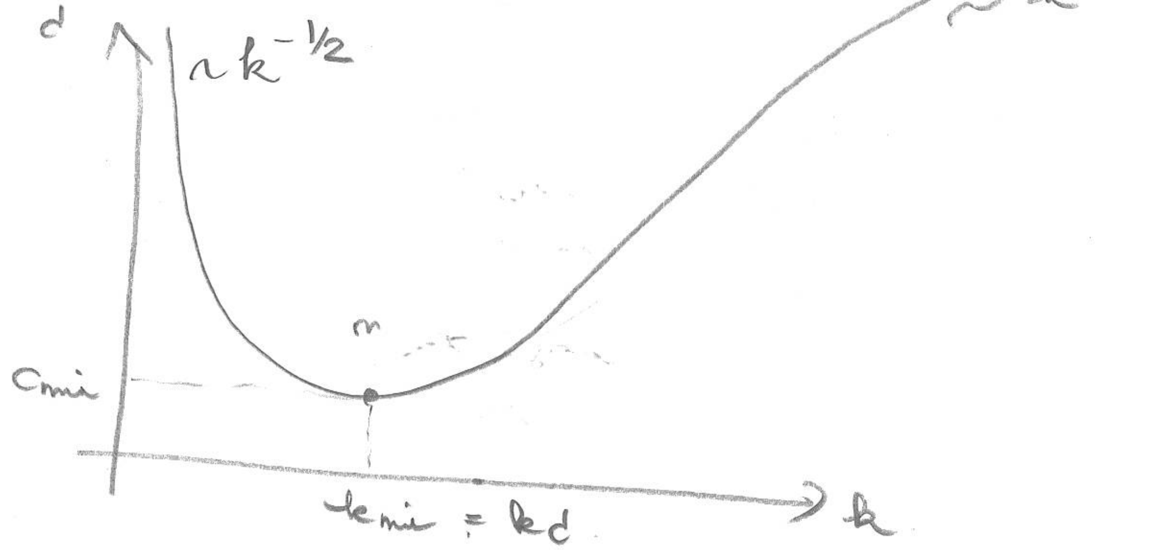
$$k_c^2 = \frac{\rho g}{\gamma} \Rightarrow k_c = \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}}$$

On appelle

$$l_c = k_c^{-1} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \qquad \underline{A.N.}\ l_c = \sqrt{\frac{0.072}{10^3 \times 9.81}}$$

la longueur capillaire. $= 2.7\ mm$

Graphe pour vitesse de phase.



$$\left.\frac{dc}{dk}\right|_{k=k_{min}} = 0 \iff \frac{1}{2\sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\gamma k_{min}}{\rho}}} \cdot \left(-\frac{g}{k_{min}^2} + \frac{\gamma}{\rho}\right) = 0$$

$$\iff k_{min} = \sqrt{\frac{\rho g}{\gamma}} = k_c$$

11. Vitesse de groupe

$c_g = \frac{d\omega}{dk}$ séparément dans les 2 régimes.

$$\omega = \sqrt{gk}$$

$$c_g = \frac{1}{2\sqrt{gk}} \cdot g = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{c}{2}$$

vitesse de groupe < à vitesse de phase

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma k^3}{\rho}}$$

$$c_g = \frac{1}{2\sqrt{\frac{\gamma k^3}{\rho}}} \cdot \frac{3\gamma k^2}{\rho} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\gamma k}{\rho}} = \frac{3}{2}c$$

vitesse de groupe > à vitesse de phase.

Ceci nous indique quelque chose sur la dispersion d'un paquet d'ondes.

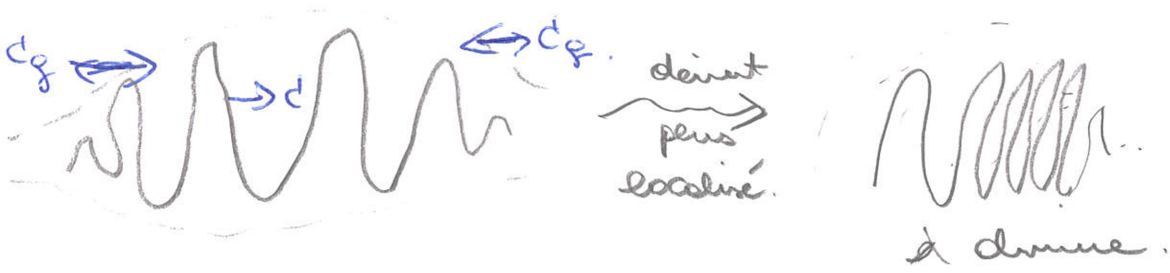
- ondes de gravité :

La longueur d'onde augmente avec le temps
= bien connu des surfeurs.

si houle de vent (proche des côtes)

si houle de fond (qui est générée par des dépressions au large.

- ondes capillaires



explique pourquoi des ondes capillaires ont tendance à disparaître + vite : petites échelles (grand k) tendent à dissiper + vite.