

## Quantification de Landau et oscillateur harmonique

### 1 Niveaux de Landau

Afin de décrire les électrons dans un système bidimensionnel comme une hétérostructure à base de GaAs ou dans le graphène en présence d'un champ magnétique, nous utilisons la substitution de Peierls qui consiste à lever le vecteur d'onde au niveau d'un opérateur quantique comme l'impulsion. Le champ magnétique  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  est alors pris en compte par le *potentiel vecteur*  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  qui dépend de la position et qui s'additionne à l'impulsion (couplage minimal),

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Pi} = (\mathbf{p} + e\mathbf{A}). \quad (1)$$

Contrairement à l'opérateur impulsion  $\mathbf{p}$ , l'opérateur  $\mathbf{\Pi}$ , qui joue le rôle de la vitesse des électrons dans un champ magnétique, ne dépend pas de la jauge qu'on choisit pour le potentiel vecteur – il est *invariant de jauge*, comme nous le montrerons en bas.

1. Montrer les relations de commutation

$$[\Pi_x, \Pi_y] = -i\hbar e(\nabla \times \mathbf{A})_z = -i \operatorname{sgn}(B) \frac{\hbar^2}{l_B^2} \quad (2)$$

en termes de longueur magnétique  $l_B = \sqrt{\hbar/e|B|}$ .

2. Montrer que les opérateurs d'échelle

$$a = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar}(\Pi_x - i\Pi_y) \quad \text{et} \quad a^\dagger = \frac{l_B}{\sqrt{2}\hbar}(\Pi_x + i\Pi_y) \quad (3)$$

obéissent aux règles de commutations  $[a, a^\dagger] = \operatorname{sgn}(B)$ . Comment faut-il redéfinir les opérateurs d'échelle pour avoir  $[a, a^\dagger] = 1$ . On se servira de (et on démontrera éventuellement) la formule  $[p_\mu, f(x_\nu)] = [p_\mu, x_\nu] \partial f / \partial x_\nu = -i\hbar \delta_{\mu,\nu} \partial f / \partial x_\mu$  où  $f(x_\nu)$  est une fonction des composantes de l'opérateur position  $\mathbf{r}$  et  $\mu$  et  $\nu$  sont des indices indiquant les deux composantes de l'espace.

3. À l'aide de la substitution (1), écrire le hamiltonien pour des électrons dans un cristal avec une bande parabolique (masse de bande  $m$ ) en termes d'opérateurs d'échelle et montrer qu'on retrouve le spectre d'un oscillateur harmonique unidimensionnel. On appellera les niveaux d'énergie « niveaux de Landau ».
4. Pour  $B > 0$ , exprimer le hamiltonien pour des électrons dans le graphène avec un gap (ou le nitrure de bore) à l'aide de  $a$  et  $a^\dagger$ . Calculer le spectre ainsi que les états propres qui sont des spineurs à deux composantes. Que peut-on dire du niveau  $n = 0$  ?
5. En choisissant la jauge de Landau  $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$  pour le potentiel vecteur, montrer que le hamiltonien pour un électron dans une bande parabolique peut s'écrire sous la forme

$$H = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_C^2(y - y_0)^2, \quad (4)$$

comme un oscillateur harmonique unidimensionnel centré autour de  $y_0$ . En restreignant  $0 \leq y_0 \leq L_y$ , où  $L_y$  est l'extension du système dans la direction  $y$  et en adoptant les conditions aux bords périodiques dans la direction  $x$ , montrer que le nombre d'états par niveau de Landau est donné par le flux total  $N_B = \Phi/\phi_0$  à travers la surface, en unités de quantum de flux  $\phi_0 = h/e$ .

## 2 Dégénérescence des niveaux de Landau

Afin de compléter la description quantique, il faut prendre en compte la dégénérescence des niveaux de Landau. Celle-ci est due à la présence d'un opérateur  $\mathbf{R}$  qui décrit le centre du mouvement cyclotron (classique) et qui commute avec le hamiltonien. Il s'écrit comme

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \boldsymbol{\eta}, \quad (5)$$

où la *variable cyclotron*  $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\Pi} \times \mathbf{e}_z)/eB$ , associée à l'impulsion  $\boldsymbol{\Pi}$ , désigne classiquement la position de l'électron sur une trajectoire cyclotron.

1. Pourquoi est-ce que  $\mathbf{R}$  est elle-même invariante de jauge ? Montrer que les composantes  $X$  et  $Y$  de  $\mathbf{R} = (X, Y)$  satisfont

$$[X, \eta_x] = [X, \eta_y] = [Y, \eta_x] = [Y, \eta_y] = 0 \quad \text{et} \quad [X, Y] = i \operatorname{sgn}(B) l_B^2 \quad (6)$$

En déduire qu'elles sont de constantes du mouvement.

2. Montrer qu'un potentiel électrostatique  $V(\mathbf{r})$  qu'on rajoute au hamiltonien lève la dégénérescence des niveaux de Landau. Pour quelle raison est-ce le cas ? Dans l'approximation  $V(\mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\eta}) \simeq V(\mathbf{R})$ , qui consiste à négliger l'effet du potentiel sur le mouvement cyclotron supposé rapide, calculer les équations du mouvement (de Heisenberg) pour les composantes du centre du mouvement cyclotron et montrer que ce dernier suit les lignes équipotentiel de  $V(\mathbf{r})$  (*dérive de Hall*). Que se passe-t-il lorsqu'on inverse le sens du champ magnétique ?

## 3 Quantification de la conductance

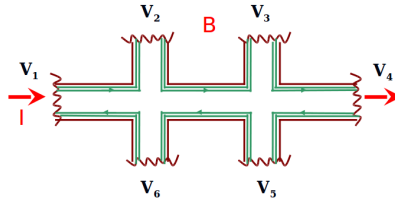


FIGURE 1 – Barre de Hall. On fait passer le courant par les contacts 1 et 4.

On place le niveau de Fermi entre les deux niveaux de Landau  $n - 1$  et  $n$ , de sorte que le facteur de remplissage est  $\nu = 2n = M$ , en raison de la double dégénérescence de spin. Le courant est alors transporté par les canaux de bord *chiraux*.

1. Calculer la matrice de conductance

$$G_{ij}(B) = \frac{e^2}{h} [(M_i - R_{ii})\delta_{ij} - T_{ij}(1 - \delta_{ij})] \quad (7)$$

qui gouverne le transport  $I_i = G_{ij}(B)V_j$  dans le formalisme « multiterminaux » de Landauer-Büttiker pour ce système.

2. Calculer les potentiels  $V_2$ ,  $V_3$ ,  $V_5$  et  $V_6$ , en fonction des potentiels  $V_1 = V$  et  $V_4 = V'$ . Que peut-on dire sur les chutes de potentiels ?
3. Calculer les résistances à quatre terminaux, longitudinales  $\mathcal{R}_{14,23}$  et  $\mathcal{R}_{14,56}$  et de Hall (transverses)  $\mathcal{R}_{14,35}$  et  $\mathcal{R}_{14,26}$ .
4. Calculer la résistance à deux contacts  $\mathcal{R}_{14,14}$  et comparer aux résistances à quatre contacts.
5. Que se passe-t-il avec la matrice de conductance  $G_{ij}(B)$  lorsqu'on change le sens du champ magnétique,  $G_{ij}(-B)$  ? Interpréter physiquement le résultat.