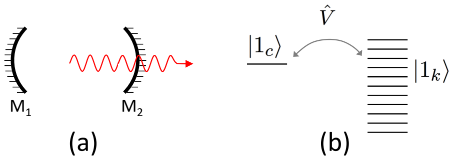
ARTEQ - Pascale SENELLART, pascale.senellart-mardon@c2n.upsaclay.fr

L'effet Purcell

5 janvier 2022

En 1946, Edward Mills Purcell montre que le temps d'émission spontanée d'un émetteur, n'est pas une propriété intrinsèque de l'émetteur, mais dépend de son environnement électromagnétique [Physical Review. 69, 681 (1946)]. Il prédit ainsi qu'il sera possible d'accélérer l'émission spontanée d'un émetteur en cavité.

Exercice 1. Temps de vie d'un photon dans une cavité optique



On considère une cavité optique, constituée de deux miroirs placés face à face. Le miroir M_1 est totalement réfléchissant tandis que le miroir M_2 est partiellement réfléchissant : la lumière peut s'échapper dans l'espace situé à droite de la cavité. On décrit le système sur le base des états suivants :

- l'état vide $|0\rangle$, représentant l'absence de photon dans le système,
- l'état $|1_c\rangle$, correspondant à un photon d'énergie $E_c = \hbar\omega_c$ dans la cavité,
- les états $|1_k\rangle$, correspondant à un photon d'énergie $E_k = \hbar\omega_k = E_c + k\delta$ situé dans l'espace à droite de la cavité, où $k \in \mathbb{Z}$ et $\delta \ll E_c$.

L'hamiltonien complet de la cavité s'écrit $\hat{H}_c = \hat{H}_0 + \hat{V}$ où $\hat{H}_0 = E_c |1_c\rangle \langle 1_c| + \sum_{k\in\mathbb{Z}} E_k |1_k\rangle \langle 1_k|$ est l'hamiltonien pour un miroir M_1 parfait. Le couplage avec les modes extérieurs s'écrit

$$\hat{V} = \sum_k V(\omega_{kc}) |1_c\rangle \langle 1_k| + V^*(\omega_{kc}) |1_k\rangle \langle 1_c|$$

où $V(\omega_{kc}) = \langle 1_c|\hat{V}|1_k\rangle$

On place le système dans l'état $|1_c\rangle$ à l'instant $t = 0$ et on cherche à calculer la probabilité $\mathcal{P}(t)$ de trouver un photon encore présent dans la cavité à l'instant t.

1.1. Pour quelle raison la lumière ne reste qu'un temps fini à l'intérieur de la cavité. Quel paramètre expérimental pourrait-on ajuster pour augmenter ce temps de vie ?

La lumière dans la cavité est réfléchie alternativement sur chaque miroir, avec à chaque réflexion sur M_2 une partie transmise vers l'extérieur. On s'attend donc à un déclin exponentiel de l'énergie contenue dans la cavité. Pour augmenter le temps de vie du photon dans la cavité, il suffit d'augmenter le coefficient de réflexion du miroir M_2 tout en veillant à minimiser toutes les autres sources de pertes.

1.2. Interpréter qualitativement le même phénomène d'un point de vue quantique, puis indiquer la valeur de la densité d'états à prendre en compte lors de l'application de la règle d'or de Fermi.

(On est dans la situation d'un état discret $|1_c\rangle$ couplé à un quasi-continuum d'états finals $|1_k\rangle$ par un couplage $\hat{V}$ supposé petit et indépendant de k (donc lentement variable). On est donc dans les conditions d'application de la règle d'or de Fermi, qui prévoit une décroissance irréversible de l'état initial vers les états du quasi-continuum.

Les niveaux d'énergie du quasi-continuum sont équidistants, comme dans le cas de l'oscillateur harmonique étudié en cours. On peut donc en déduire que la densité d'états est égale à l'inverse de l'écart entre deux niveaux successifs, soit

$$\rho(E) = \frac{1}{\delta}.$$

1.3. Exprimer en fonction de v et δ le taux de déclin Γ_c du photon dans la cavité, puis décrire l'évolution de $\mathcal{P}(t)$.
Une application directe de la règle d'or de Fermi nous donne

$$\Gamma_c = \frac{2\pi}{\hbar} v^2 \rho(E_f = E_0) = \frac{2\pi v^2}{\hbar\delta}.$$

On s'attend donc à une décroissance exponentielle de la probabilité, soit $\mathcal{P}(t) = \exp(-\Gamma_c t)$.

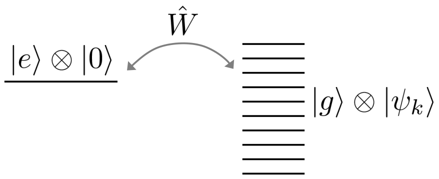
Exercice 2 : Contrôle de l'émission spontanée d'un atome

On place maintenant un atome dans la cavité. Son état fondamental $|g\rangle$ est d'énergie nulle et son état excité $|e\rangle$ (d'énergie E_e). L'hamiltonien de l'atome isolé s'écrit ainsi $\hat{H}_{\mathrm{at}} = E_e |e\rangle \langle e|$. Le mode de cavité couplé au reste des modes optiques extérieurs représente un environnement électromagnétique pour l'atome différent de celui du vide et va modifier son processus d'émission spontanée.
Pour la suite du problème, on admet (exercice 3 - facultatif) qu'on peut décrire cet environnement en diagonalisant $\hat{H}_c$ en faisant l'hypothèse que $V(E_{kc}) = \langle 1_c|\hat{V}|1_k\rangle = v$ est réel et ne dépend pas de k. On montre alors qu'il y a une valeur propre de $\hat{H}_c$ dans chaque intervalle $]E_c + \ell\delta, E_c + (\ell+1)\delta[$ qui sera notée E_ℓ. L'état propre correspondant sera noté $|\psi_\ell\rangle$ et le coefficient $\beta(E_\ell) = \langle 1_c|\psi_\ell\rangle$ s'exprime en fonction de E_ℓ à l'aide de la relation :

$$\beta(E_\ell) = \left(1 + \frac{\pi^2 v^2}{\delta^2} + \frac{(E_\ell - E_c)^2}{v^2}\right)^{-1/2}. \tag{1}$$

2.1. Commenter la dépendance de $\beta(E_\ell)$ en E_ℓ ? Relier Γ_c et v. $\beta(E_\ell)$ est une lorentzienne centrée en E_c. Plus l'énergie E_ℓ de l'état $|\psi_\ell\rangle$ est proche de l'énergie de la cavité, plus sa composante d'un état à un photon dans la cavité grande. On a $\Gamma_c = \frac{2\pi v^2}{\hbar\delta}$ car $V(E_{kc} = 0) = v$ et $\rho = 1/\delta$.

2.2. Que dire de la densité d'état $\rho_c(E)$ des états propres de $\hat{H}_c$? Comme il y a un état propre de $\hat{H}_c$ dans chaque intervalle de largeur δ, un intervalle $dE \gg \delta$ comportera approximativement dE/δ niveaux d'énergie, ce qui nous permet d'en déduire que la densité d'états est égale à $\rho_c(E) = 1/\delta$.
L'hamiltonien total du système s'écrit en fait $\hat{H} = \hat{H}_{\mathrm{at}} + \hat{H}_c + \hat{W}$ où $\hat{W}$ rend compte de la possibilité pour l'atome excité d'émettre un photon dans la cavité : $\hat{W} = \gamma(|e,0\rangle \langle g, 1_c| + |g, 1_c\rangle \langle e, 0|)$ où γ est un nombre réel.



2.3. On place le système dans l'état initial $|i\rangle = |e, 0\rangle$. Expliquer comment le système va évoluer ultérieurement et de quelle manière ce problème peut être traité théoriquement.
$\hat{W}$ couple l'état discret $|i\rangle$ couplé à $|g, 1_c\rangle$ qui lui même s'exprime à partir dans la base des états propres $|\psi_\ell\rangle$ de $\hat{H}_c$: $|g, 1_c\rangle = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \epsilon_\ell |g, \psi_\ell\rangle$ Ce problème peut être traité à l'aide de la règle d'or de Fermi en considérant que les états finaux sont les $|g, \psi_\ell\rangle$.

2.4. Exprimer le taux de désexcitation de l'atome, Γ_e, en fonction de γ, δ et $\beta(E_e)$.
L'énergie de l'état initial est égale à E_e. Une application directe de la règle d'or de Fermi nous donne

$$\Gamma_e = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle e, 0| \hat{W} |g, \psi_\ell\rangle|^2_{E_\ell = E_e} \rho_c(E_\ell = E_e) \tag{2}$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} \gamma^2 \beta(E_e)^2 \rho_c(E_\ell = E_e) \tag{3}$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar\delta} \gamma^2 \beta(E_e)^2. \tag{4}$$

où on a utilisé $\langle e, 0| \hat{W} |g, \psi_\ell\rangle_{E_\ell = E_e} = \gamma \langle g, 1_c|g, \psi_\ell\rangle_{E_\ell = E_e} = \gamma\beta(E_e)$

2.5. Exprimer Γ_e en fonction de v et δ. Puis, en exprimant v à l'aide de la grandeur Γ_c calculée à la partie 1, montrer que, dans la limite d'un continuum d'états finals ($\delta \to 0$), le taux de désexcitation de l'atome devient

$$\Gamma_e = \frac{\gamma^2 \Gamma_c}{(E_e - E_c)^2 + \left(\frac{\hbar\Gamma_c}{2}\right)^2}. \quad (5)$$

En remplaçant $\beta(E_e)$ par l'expression obtenue plus haut, on obtient

$$\Gamma_e = \frac{2\pi}{\hbar\delta}\gamma^2 \left(1 + \frac{\pi^2 v^2}{\delta^2} + \frac{(E_e - E_c)^2}{v^2}\right)^{-1}.$$

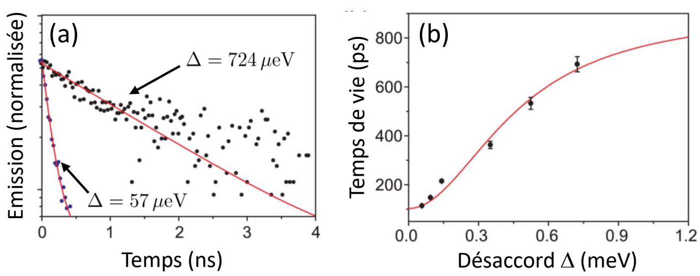
En posant $v^2 = \hbar\delta\Gamma_c/(2\pi)$, on obtient

$$\Gamma_e = \frac{2\pi}{\hbar\delta}\gamma^2 \left(1 + \frac{\pi\hbar\Gamma_c}{2\delta} + \frac{2\pi(E_e - E_c)^2}{\hbar\delta\Gamma_c}\right)^{-1} = \frac{2\pi\gamma^2/\hbar}{\delta + \frac{\pi\hbar\Gamma_c}{2} + \frac{2\pi(E_e-E_c)^2}{\hbar\Gamma_c}}$$

Dans la limite du continuum où δ tend vers zéro, on obtient

$$\Gamma_e = \frac{\gamma^2 \Gamma_c}{\frac{\hbar^2\Gamma_c^2}{4} + (E_e - E_c)^2},$$

ce qui correspond bien au résultat demandé.



2.6. Commenter le résultat précédent et les résultats expérimentaux représentés extraits de Extrait de Y.-M. He *et al.*, Optica **4**, 802 (2017), obtenus en plaçant un atome artificiel (boite quantique semiconductrice) dans une cavité optique de type micropilier. $\Delta = E_e - E_c$.
La Fig. (a) montre une décroissance exponentielle comme attendu (ce qui correspond à une droite en échelle semi-log). La décroissance est plus rapide pour la plus faible valeur du désaccord Δ, en accord avec notre modèle.

2.7. Que dire de l'observation expérimentale à grand désaccord ?
Pour un grand désaccord, notre modèle prédit un temps de vie infini - alors qu'ici on observe un temps qui plafonne vers 800 ps. Ceci s'explique par le fait que la cavité n'est pas un bon miroir dans la direction horizontale, de sorte que l'atome artificiel peut encore émettre dans des modes optiques autres que celui de la cavité.

2.8. Sachant que les données de la Fig. (a) ont été normalisées en $t = 0$, pouvez-vous expliquer pour quelle raison le bruit expérimental est plus important dans le cas du plus grand désaccord ?
L'effet Purcell conduit à un temps d'émission plus court dans la direction du mode de cavité que dans les autres directions. Ainsi, la fraction de lumière émise par l'atome dans la direction de la cavité est plus grande quand la transition atomique est résonante avec le mode de cavité. C'est ce principe qui est exploité pour collecter les photons uniques émis par des atomes artificiels et obtenir des sources de photons uniques efficaces (voir par exemple N. Somaschi *et al.*, Nat. Phot. **10**, 340 (2016)).

Exercice 3 - facultatif : Etats propres de $\hat{H}_c$

3.1. On cherche les vecteurs propres de $\hat{H}_c$ sous la forme $|\psi\rangle = \beta\,|1_c\rangle + \sum_k \alpha_k\,|1_k\rangle$, avec β choisi réel positif. Etablir les équations reliant β, les coefficients α_k, et la valeur propre E.
On obtient

$$\hat{H}_0\,|\psi\rangle = \beta E_c\,|1_c\rangle + \sum_k \alpha_k(E_c + k\delta)\,|1_k\rangle$$

et

$$\hat{V}\,|\psi\rangle = \beta \sum_k v\,|1_k\rangle + \sum_k \alpha_k v\,|1_c\rangle\,.$$

La relation $\hat{H}_c\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle$ s'écrit donc

$$\left(E_c\beta + v\sum_k \alpha_k\right)|1_c\rangle + \sum_k (v\beta + (E_c + k\delta)\alpha_k)\,|1_k\rangle = E\beta\,|1_c\rangle + \sum_k E\alpha_k\,|1_k\rangle\,,$$

ce qui nous donne les équations

$$v\sum_k \alpha_k = (E - E_c)\beta$$
$$v\beta = (E - E_c - k\delta)\alpha_k$$

3.2. En s'aidant de la relation $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{z-k} = \pi\,\mathrm{cotan}(\pi z)$, montrer que $E - E_c = \frac{\pi v^2}{\delta}\,\mathrm{cotan}\,\pi\frac{E-E_c}{\delta}$.
D'après la deuxième équation obtenue à la question précédente, on a

$$\alpha_k = \frac{v\beta}{E - E_c - k\delta}.$$

En remplaçant dans la première équation, on obtient

$$v^2\beta\sum_k \frac{1}{E - E_c - k\delta} = (E - E_c)\beta$$

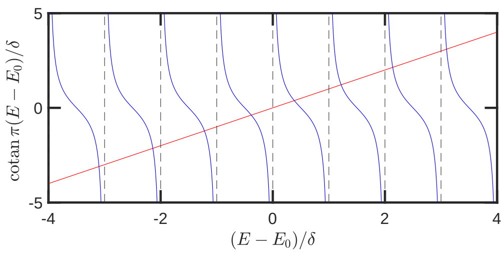
soit

$$E - E_c = \frac{v^2}{\delta}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\frac{E-E_c}{\delta} - k} = \frac{\pi v^2}{\delta}\,\mathrm{cotan}\,\pi\frac{E - E_c}{\delta}.$$

3.3. Proposer une méthode graphique permettant de déterminer les niveaux d'énergie de $\hat{H}_c$ et en déduire qu'il existe exactement un niveau d'énergie dans chaque intervalle $]E_c + \ell\delta, E_c + (\ell+1)\delta[$, pour $\ell \in \mathbb{Z}$.
L'équation à résoudre peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\delta}{\pi v^2}(E - E_c) = \mathrm{cotan}\,\pi\frac{E - E_c}{\delta}$$

Les valeurs propres peuvent donc être obtenues de manière graphique en repérant les points d'intersection entre une droite de pente $\delta/(\pi v^2)$ et la fonction $\mathrm{cotan}\,\pi(E - E_c)/\delta$, comme représenté ci-dessous.



La fonction $z \mapsto \mathrm{cotan}\,\pi z$ étant strictement décroissante de $+\infty$ à $-\infty$ dans chacun des intervalles $]k, k+1[$, on aura exactement un point d'intersection dans chaque intervalle, ce qui nous permet d'en déduire le résultat demandé.