Technologies Quantiques - Cours 4 - Lundi 24 octobre 2022 - Exercices

1. Mesure QND d'une composante de spin.

On veut mesurer l'état d'un qubit "a" sans effectuer de mesure directe sur ce qubit (mesure Quantique Non-Destructive, ou "QND"). Par exemple, si le qubit est une particule de spin 1/2, on ne va pas utiliser un appareil de Stern et Gerlach, mais faire interagir ce qubit "a" pendant un temps τ avec une autre particule de spin 1/2, désignée comme qubit "b".

On note $\vec{\sigma}_{a,b} = \vec{S}_{a,b}/(\hbar/2)$ les observables de spin des deux qubits, et $|az : \pm 1\rangle$, $|bz : \pm 1\rangle$ les états propres des observables σ_{az} et σ_{bz}. Après l'interaction, on mesure l'état du qubit b, et on souhaite en déduire (avec certitude) l'état de spin du qubit a.

1. On note $|ax : \pm 1\rangle$ et $|ay : \pm 1\rangle$ les états propres de σ_{ax} et σ_{ay}. Rappeler les expressions de ces états dans la base $\{|az : \pm 1\rangle\}$. Exprimer $|ax : \pm 1\rangle$ en fonction de $|ay : \pm 1\rangle$.

2. On suppose que les qubits sont immobiles, et on modélise leur interaction par un hamiltonien $H_m = \hbar g \; \sigma_{az} \; \sigma_{bx}/2$, agissant pendant un créneau temporel de durée τ. On négligera l'action de tout champ extérieur pendant la durée de l'interaction. Montrer que H_m, σ_{az} et σ_{bx} commutent. En déduire leurs vecteurs propres communs et donner les valeurs propres correspondantes.

3. On suppose qu'à l'instant initial l'état du système de deux qubits est

$$|\psi_+(0)\rangle = |az : +\rangle \otimes |by : +\rangle$$

et on ajuste la durée de l'interaction pour avoir $g\tau = \pi/2$. Calculer l'état final $|\psi(\tau)\rangle$ du système. Même question si l'état initial est $|\psi_-(0)\rangle = |az : -\rangle \otimes |by : +\rangle$. Donner une interprétation de ces résultats en considérant l'expression de H_m et la sphère de Bloch du qubit b, dans le cas où le qubit a est dans l'un des deux états $\{|az : \pm 1\rangle\}$.

4. On suppose que l'état initial est $|\psi(0)\rangle = (\alpha|az : +\rangle + \beta|az : -\rangle) \otimes |by : +\rangle$. Après l'interaction on mesure la composante suivant z du spin du qubit b. Que trouve-t-on et avec quelles probabilités ? Après cette mesure, que peut-on prédire sur la valeur de la composante suivant Oz du spin du qubit a ? Justifier le nom de "mesure QND" attribué à ce type d'interaction.

2. Groupe Stabilisateur du code de Shor.

On définit les opérateurs (qui sont à la fois unitaires et hermitiens) :

$$\sigma_x = X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On note le produit tensoriel d'opérateurs agissant sur les neuf qubits du code de Shor par simple juxtaposition (attention, l'ordre est important !) :

$$A_1 \otimes B_2 \otimes C_3 \otimes D_4 \otimes E_5 \otimes F_6 \otimes G_7 \otimes H_8 \otimes J_9 = ABC\ DEF\ GHJ$$

1. Montrer que les 2 états du code de Shor sont états propres des 8 opérateurs :

$$ZZI\ III\ III, III\ ZZI\ III,\ III\ III\ ZZI,$$
$$IZZ\ III\ III,\ III\ IZZ\ III,\ III\ III\ IZZ,$$
$$XXX\ XXX\ III,\ III\ XXX\ XXX$$

et déterminer les valeurs propres associées. Ces opérateurs sont les générateurs d'un groupe, appelé le "stabilisateur" du code de Shor. Les groupes stabilisateurs fournissent une méthode très puissante pour décrire et étudier les codes correcteurs quantiques.

2. On suppose qu'on a une erreur de bit ("bit flip") sur le 2e bit. Qu'obtient-on si on mesure les 8 opérateurs précédents ? Que peut-on en conclure sur les rôle des 6 opérateurs faisant intervenir un produit ZZ ?

3. Montrer que les deux derniers opérateurs (faisant intervenir $XXX\ XXX$) "détectent" les erreurs de phase.

4. Montrer que l'opérateur $ZZZ\ III\ III$ corrige une erreur de phase sur un quelconque des 3 premiers bits du code de Shor, c'est à dire que

$$ZZZ\ III\ III \otimes E = III\ III\ III$$

où E est cette erreur de phase. Quel est l' opérateur qui corrige par exemple une erreur de bit ("bit flip") sur le 2e bit ?