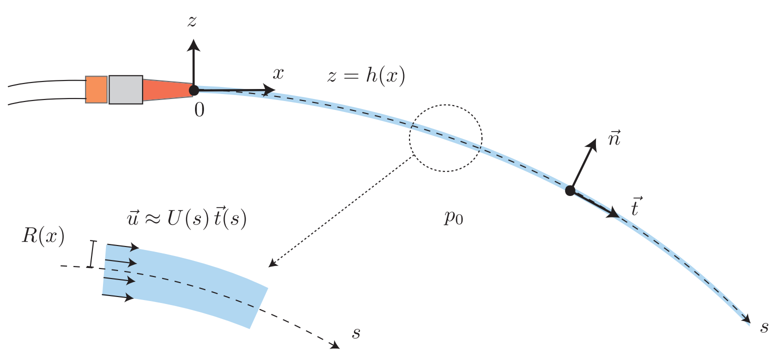
Examen de mécanique des fluides

Vendredi 29 mai 2020, durée 2h (4h de temps de composition)

Utiliser de préférence des feuilles blanches, sans lignes ou carrés et quelques couleurs afin de faciliter la lecture à l'écran. Envoyer un seul document pdf.

I. Le jet d'eau

Dans cet exercice on étudie un jet d'eau supposé inviscide, qui se déplace dans de l'air à pression p_0. On suppose que le jet part horizontalement de l'origine du système de coordonnées et qu'il chute sous son propre poids.



Le centre du jet est repéré par la courbe $z = h(x)$ et on note $h' = dh/dx, h'' = d^2h/dx^2$ les premières et deuxièmes dérivées selon x. On introduit un système de coordonnées curviligne où

$$\vec{t} = \frac{\vec{e}_x + h'\vec{e}_z}{\sqrt{1+h'^2}}, \quad \vec{n} = \frac{-h'\vec{e}_x + \vec{e}_z}{\sqrt{1+h'^2}} \tag{1}$$

sont les vecteur tangent et normale unitaires, le long de la courbe. On utilise la courbure locale de l'arc κ qui relie $\vec{t}$ et $\vec{n}$:

$$\kappa = \frac{-h''}{(1+h'^2)^{3/2}}, \quad \frac{d\vec{t}}{ds} = -\kappa\vec{n} \tag{2}$$

Ici $s(x) = \int_0^x \sqrt{1+h'^2}\, dx$ est l'abscisse curviligne. On retiendra que

$$\frac{d}{ds} = \frac{dx}{ds}\frac{d}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+h'^2}}\frac{d}{dx} \tag{3}$$

car il est important de distinguer dérivation selon s de dérivation selon x. Par définition, nous avons

$$\vec{t}\cdot\vec{\nabla} = \frac{d}{ds} \tag{4}$$

On suppose que la section transverse du jet reste parfaitement circulaire et on note $R(x)$ le rayon local du jet. La vitesse est supposée constante dans la section transverse du jet, c'est à dire on admet que

$$\vec{u} \approx U(s)\,\vec{t}(s) \tag{5}$$

Au point de départ, le jet est de rayon R_0 et sa vitesse vaut U_0. On ignore la tension de surface.

1. Le jet étant fin, on peut supposer que la pression p ne varie pas le long de la section, $p = p(s)$. Montrer que la condition limite dynamique sur la surface libre du jet impose que la pression doit être constante dans tout le jet.
2. Ecrire l'équation d'Euler pour l'écoulement dans le jet.
3. Introduire $\vec{u} = U(s)\vec{t}(s)$ comme solution et simplifier l'expression pour trouver les projections selon $\vec{t}$ et $\vec{n}$:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2}\right) = -g(\vec{e}_z \cdot \vec{t}) \tag{6}$$

$$-U^2\kappa = -g(\vec{e}_z \cdot \vec{n}) \tag{7}$$

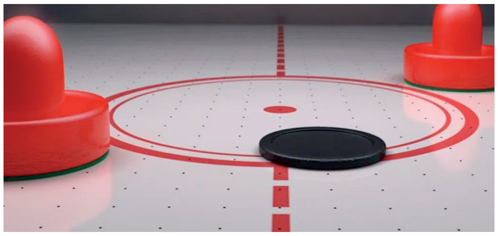
4. Utiliser (7) et la définition de κ et $\vec{n}$, pour écrire U^2 en fonction de g et h' et h''.
5. Remplacer U^2 par l'expression trouvée dans (6). Avec (3), vous devez obtenir

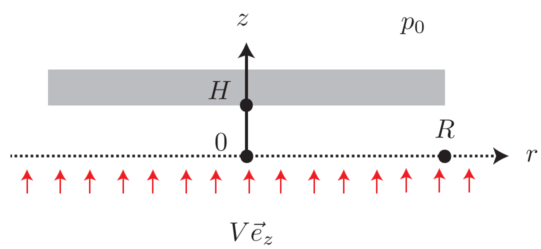
$$\left(\frac{1+h'^2}{2h''}\right)' = h' \tag{8}$$

6. Même si on peut directement intégrer cette équation différentielle, on vous conseille d'évaluer explicitement le membre de gauche en calculant la dérivée. Sous l'hypothèse que $h'' \neq 0$, montrer que h satisfait une équation différentielle du troisième ordre étonnamment simple. Le jet est de quelle forme ?
7. Intégrer cette équation différentielle simple et fixer deux constantes d'intégration avec les conditions aux limites sur h et h' en $x = 0$.
8. Calculer κ et utiliser (7) pour trouver U^2 en fonction de x.
9. Fixer la constante d'intégration qui reste, par la conditions aux limites sur la vitesse. Ecrire la solution pour $h(x)$ et $U(x)$ de manière propre.
10. La loi de Bernoulli, est elle valable ici ?
11. Calculer la variation du rayon du jet $R(x)$ utilisant la conservation du débit.
12. Cet exercice est l'un des rares en mécanique des fluides où l'utilisation de variables Lagrangiennes rend plus simple la description du mouvement. Expliquer pourquoi.
13. Certaines fontaines lancent une nappe d'eau de manière horizontale et à partir d'une fente annulaire dans un tube cylindrique. La nappe tombe ensuite sous l'effet de la gravité et forme une bulle comme dans la figure de ci-dessous. Donner la forme de la nappe d'eau qui part horizontalement de $(r, z) = (R_0, 0)$, à vitesse radiale $U_0\vec{e}_r$.

II. Air hockey

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'écoulement en dessous du puck dans un jeu de Air Hockey.





Dans une table d'Air Hockey, de l'air est soufflé en permanence par de petites trous dans la table. Le puck (le disque) lévite sur un coussin d'air et se déplace avec très peu de friction. Comme le montre le schéma, on modélise la table soufflante par une paroi poreuse à travers laquelle de l'air s'écoule à la vitesse verticale $V\vec{e}_z$. On note η la viscosité dynamique de l'air, p_0 sa pression, R le rayon du puck et m sa masse. La gravité g n'influence pas l'écoulement, mais détermine le poids du puck.

A. Puck à l'équilibre

On s'intéresse dans un premier temps aux conditions d'équilibre. On place la table en $z = 0$, le puck est au repos et lévite horizontalement à la hauteur $z = H$ au dessus de la table. Le système de coordonnées cylindriques et centré sur l'axe du puck et l'écoulement sous le puck est alors axisymétrique.

1. On admet que l'intensité de la force de pression F_p exercée par l'air sur le puck est une fonction de η, V, R, H. Montrer par analyse dimensionnelle que l'on doit avoir

$$\frac{F_p}{\eta V R} = \Phi\left(\frac{H}{R}\right) \tag{9}$$

   avec Φ une fonction arbitraire.

2. Enumérer les hypothèses nécessaires (sans le démontrer) pour pouvoir utiliser le modèle de lubrification suivant.

$$\frac{\partial p}{\partial r} \approx \eta \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \tag{10}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} \approx 0 \tag{11}$$

3. Déterminer le profil de la vitesse radiale à l'aide des conditions aux limites adéquates en $z = 0$ et H.

4. Grace à la loi de l'incompressibilité du fluide exprimée en coordonnées cylindriques (*Rq : formulaire à la fin du poly, p.136*), on peut calculer la vitesse verticale u_z. Fixer la constante d'intégration avec la condition aux limites pour u_z en $z = 0$.

5. Ecrire la condition aux limites sur u_z en $z = H$ et en déduire l'équation résultante afin de trouver une équation différentielle pour la pression $p(r)$ de la forme

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dp}{dr}\right) = f(\eta, V, H) \tag{12}$$

   où $f(\eta, V, H)$ est à identifier.

6. Intégrer cette équation différentielle pour trouver $p(r)$. Déterminer les constantes d'intégration en imposant la régularité à l'axe et la condition limite sur la pression en en $r = R$.
7. Déduire de la question précédente les composantes de vitesse u_r et u_z, sous le puck. Faire un schéma qui montre la pression et quelques lignes de courant.
8. Calculer la force de pression $\vec{F}_p$ résultante. Vérifier que le résultat est compatible avec l'analyse dimensionnelle effectuée en début d'exercice.
9. Pourquoi les contraintes visqueuses (non-nulles) n'exercent-elles pas de force sur le puck ? (*Rq : une réponse courte est souhaitée*)

B. Puck en mouvement

On suppose que le puck se déplace horizontalement à la vitesse $U\vec{e}_x$ en restant parfaitement horizontal en $z = H$. On se place dans le référentiel du puck afin de retrouver une situation d'écoulement stationnaire.

10. Seules les conditions limites en $z = 0$ sont modifiées. Précisez-les.
11. L'écoulement d'air sous le puck correspond à la superposition de l'écoulement d'équilibre et d'un écoulement de Couette plan. Donner sans trop de calculs, ce nouveau écoulement. Vous avez le droit de mélanger coordonnées cylindriques et Cartésiennes afin de simplifier l'écriture.
12. Montrer que la pression sous le puck n'est pas affectée par le mouvement horizontal de celui-ci.
13. Donner la force de frottement, exercée par les contraintes visqueuses sur le puck. *(Ne pas vous lancer dans un calcul long et compliqué, il suffit de bien raisonner).*
14. Selon vous, qu'est-ce qui se passe lorsque le puck se déplace avec un petit angle α par rapport à l'horizontale.