Notations de Dirac : un quizz

Soit un ket $|\psi\rangle$ normé. Indiquez la ou les bonnes réponses:

A. $|\psi\rangle\langle\psi|$ est un nombre
B. $|\psi\rangle\langle\psi|$ est un opérateur
C. $|\psi\rangle\langle\psi|$ est une observable
D. $|\psi\rangle\langle\psi|$ est un projecteur
E. $|\psi\rangle\langle\psi|$ n'a aucun sens

$\Pi = |\psi\rangle\langle\psi|$ est visiblement un opérateur hermitien, et

$\Pi^2 = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \Pi$

c'est donc bien un projecteur.

Dimension de l'espace produit tensoriel

Pour deux espaces de Hilbert $\mathcal{E}_a$ et $\mathcal{E}_b$ de dimensions finies, quelle est la dimension de l'espace $\mathcal{E}_a \otimes \mathcal{E}_b$?

A. $\dim \mathcal{E}_a + \dim \mathcal{E}_b$
B. $\dim \mathcal{E}_a \dim \mathcal{E}_b$

$$|\psi\rangle = \sum_{m,n} c_{m,n} |\alpha_m\rangle \underset{\text{tensoriel}}{\otimes} |\beta_n\rangle$$

$$\boxed{\dim \mathcal{E}_a \otimes \mathcal{E}_b = \dim \mathcal{E}_a \dim \mathcal{E}_b}$$

Inégalités de Bell : Corrigé

2. En inversant les relations de l'énoncé pour $\phi = 0$ on obtient :

$$|+_z\rangle = \cos(\theta/2)|+_{\vec{u}}\rangle - \sin(\theta/2)|-_{\vec{u}}\rangle$$
$$|-_z\rangle = \sin(\theta/2)|+_{\vec{u}}\rangle + \cos(\theta/2)|-_{\vec{u}}\rangle$$

d'où (en omettant les vecteurs) :

$$\begin{aligned}|+_z, -_z\rangle &= \cos(\theta_1/2)\sin(\theta_2/2)|+_a, +_b\rangle + \cos(\theta_1/2)\cos(\theta_2/2)|+_a, -_b\rangle \\ &- \sin(\theta_1/2)\sin(\theta_2/2)|-_a, +_b\rangle - \sin(\theta_1/2)\cos(\theta_2/2)|-_a, -_b\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|-_z, +_z\rangle &= \sin(\theta_1/2)\cos(\theta_2/2)|+_a, +_b\rangle - \sin(\theta_1/2)\sin(\theta_2/2)|+_a, -_b\rangle \\ &+ \cos(\theta_1/2)\cos(\theta_2/2)|-_a, +_b\rangle - \cos(\theta_1/2)\sin(\theta_2/2)|-_a, -_b\rangle\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= (\sin((\theta_2-\theta_1)/2)|+_a, +_b\rangle + \cos((\theta_2-\theta_1)/2)|+_a, -_b\rangle \\ &- \cos((\theta_2-\theta_1)/2)|-_a, +_b\rangle + \sin((\theta_2-\theta_1)/2)|-_a, -_b\rangle)/\sqrt{2}\end{aligned}$$

3. a. Chaque mesure est normalisée pour donner une résultat ± 1, donc on obtient les 4 possibilités $(+_a, +_b)$, $(+_a, -_b)$, $(-_a, +_b)$, et $(-_a, -_b)$ avec les probabilités :

$$P_{++} = P_{--} = \frac{1}{2}\sin^2(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}), \quad P_{+-} = P_{-+} = \frac{1}{2}\cos^2(\frac{\theta_2-\theta_1}{2})$$

3.b Pour une particule on somme sur les résultats possibles pour l'autre, d'où

$$P_+ = P_{++} + P_{+-} = 1/2 \quad \text{et} \quad P_- = P_{-+} + P_{--} = 1/2$$

3.c $P_{cond} = P_{+-}/P_- = \cos^2((\theta_2-\theta_1)/2)$

3.d Si $\theta_2 = \theta_1$ alors $P_{cond} = 1$: corrélation totale entre les mesures.

3.e. $E_Q = P_{++} - P_{+-} - P_{-+} + P_{--}$: fonction de corrélation.

$$E_Q = -\cos^2((\theta_2-\theta_1)/2) + \sin^2((\theta_2-\theta_1)/2) = -\cos(\theta_2-\theta_1) = -\vec{a}.\vec{b}$$

Si $|E_Q| = 1$ corrélation (ou anticorrélation) totale entre les mesures.

4. Inégalité de Bell (1964) :

L'argument avancé par Einstein, Podolsky et Rosen en 1935 est que lorsque les deux particules sont suffisamment éloignées, la valeur du spin de chaque particule doit avoir une valeur déterminée, indépendante de toute mesure effectuée sur l'autre particule.

Suivant cette idée, John Bell a cherché à modéliser toutes les théories dans lesquelles il existerait une "variable cachée" λ qui prédéterminerait le résultat ± 1 des mesures de σ_{1a} et de σ_{1b} par l'intermédiaire de deux fonctions "signe" :

$$A(\lambda, \vec{a}) = \pm 1, \quad B(\lambda, \vec{b}) = \pm 1$$

Ce modèle est "local", car $A(\lambda, \vec{a})$ ne dépend pas de $\vec{b}$, ni $B(\lambda, \vec{b})$ de $\vec{a}$.

En notant $P(\lambda)$ la distribution de probabilité des variables cachées λ, qui vérifie $\int d\lambda P(\lambda) = 1$, la fonction de corrélation des mesures s'écrit :

$$E_C(\vec{a}, \vec{b}) = \int d\lambda P(\lambda) A(\lambda, \vec{a}) B(\lambda, \vec{b})$$

4. $A(\lambda, \vec{a})$ et $A(\lambda, \vec{a}')$ sont soit égaux soit opposés.
- si égaux $A(\lambda, \vec{a}) + A(\lambda, \vec{a}') = \pm 2$ et $A(\lambda, \vec{a}) - A(\lambda, \vec{a}') = 0$ donc $s(\lambda) = \pm 2$
- si égaux $A(\lambda, \vec{a}) + A(\lambda, \vec{a}') = 0$ et $A(\lambda, \vec{a}) - A(\lambda, \vec{a}') = \pm 2$ donc $s(\lambda) = \pm 2$

cqfd. De plus, la moyenne sur une distribution de probabilité (positive et normalisée) d'une quantité égale à ± 2 est comprise entre $+2$ et -2, cqfd.

5. Pour les angles indiqués on a

$$S_Q = -3\cos(\theta) + \cos(3\theta) \text{ donc } dS_Q/d\theta = 3(sin(\theta) - sin(3\theta)).$$

La dérivée s'annulle pour $3\theta = \theta + 2n\pi$, i.e. $\theta = n\pi$ (minimum), ou $3\theta = \pi - \theta + 2n\pi$, i.e. $\theta = \pi/4 + n\pi/2$ (maximum).

On a donc $\theta = \pi/4$ ou $3\pi/4$, et

$$S_Q = -3\cos(\pi/4) + \cos(9\pi/4) = -4\cos(\pi/4) = -2\sqrt{2}.$$

Finalement a donc $|S_{Q,max}| = 2\sqrt{2} > 2$: conflit

INEGALITES DE BELL

"Variables cachées" ou "paramètres supplémentaires" notés λ,

avec une distribution statistique $\rho(\lambda)$ normée : $\int d\lambda\, \rho(\lambda) = 1$

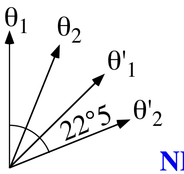
$\varepsilon_1(\lambda, \theta_1) = \pm 1$, $\varepsilon_2(\lambda, \theta_2) = \pm 1$, $\quad E(\theta_1, \theta_2) = \int d\lambda\, \rho(\lambda)\, \varepsilon_1(\lambda, \theta_1)\, \varepsilon_2(\lambda, \theta_2)$

alors : $\quad -2 \leq S \leq 2 \quad$ avec :

$$\boxed{S = E(\theta_1, \theta_2) + E(\theta'_1, \theta_2) + E(\theta_1, \theta'_2) - E(\theta'_1, \theta'_2)}$$

Démonstration : $\varepsilon_1(\lambda, \theta_1)\, \varepsilon_2(\lambda, \theta_2) + \varepsilon_1(\lambda, \theta'_1)\, \varepsilon_2(\lambda, \theta_2) + \varepsilon_1(\lambda, \theta_1)\, \varepsilon_2(\lambda, \theta'_2) - \varepsilon_1(\lambda, \theta'_1)\, \varepsilon_2(\lambda, \theta'_2) = \pm 2$

Angles pour des photons ! (facteur 2)

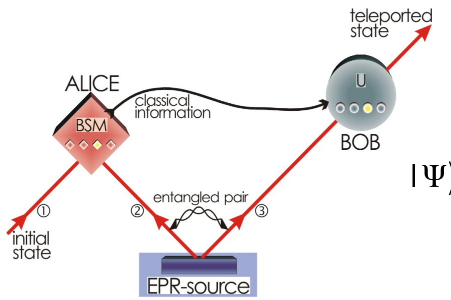


Pour les angles indiqués on obtient $S_{QM} = 2\sqrt{2}$

Conflit ! **Verdict expérimental ?**

NB : vérifier que $\varepsilon_1(\lambda, \theta_1, \cancel{\theta_2})$, $\varepsilon_2(\lambda, \cancel{\theta_1}, \theta_2)$, $\rho(\lambda, \cancel{\theta_1}, \cancel{\theta_2})$!

Quantum Teleportation



Initial state

$$|\phi\rangle_a = \alpha|+\rangle_a + \beta|-\rangle_a$$

The shared entangled pair

$$|\Psi\rangle_{b,c} = \frac{|+\rangle_b|+\rangle_c + |-\rangle_b|-\rangle_c}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{abc} &= |\phi\rangle_a \otimes |\Psi\rangle_{bc} \\ &= |1\rangle_{ab} \otimes (\alpha|+\rangle_c + \beta|-\rangle_c) + \\ &\quad |2\rangle_{ab} \otimes (\alpha|+\rangle_c - \beta|-\rangle_c) + \\ &\quad |3\rangle_{ab} \otimes (\alpha|-\rangle_c + \beta|+\rangle_c) + \\ &\quad |4\rangle_{ab} \otimes (\alpha|-\rangle_c - \beta|+\rangle_c) \end{aligned}$$

Bennett, Brassard, Crepeau, Josza, Peres, Wooters 1993