Processus stochastiques et neutronique, correction rapide de certains exercices : TD n°2

28 janvier - 4 février 2022

1 Marches aléatoires en 1 dimension (examen 2014)

1. Le processus est markovien, la position à l'instant $(s+1)\tau$ ne pendant que de la position à $s\tau$.
2. Normalisation : $2p + q = 1$.
3. $P(m, s|n) = pP(m+1, s-1|n) + pP(m-1, s-1|n) + qP(m, s-1|n)$

$$\begin{aligned} P(m, s|n) - P(m, s-1|n) &= p\left[P(m+1, s-1|n) + pP(m-1, s-1|n) - 2pP(m, s-1|n)\right] \\ &\quad + \cancel{q[P(m, s-1|n) - P(m, s-1|n)]} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\tau}\left[P(m, s|n) - P(m, s-1|n)\right] = \left(\frac{\Delta^2}{2\tau}\right) 2p \left[\frac{P(m+1, s-1|n) + pP(m-1, s-1|n) - 2pP(m, s-1|n)}{\Delta^2}\right]$$

4. Le passage à la limite conduit à,

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = D2p\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} \tag{1}$$

d'où $D^* = 2Dp \leq D$. La particule ayant une probabilité q de ne pas bouger elle diffuse moins que dans le cas de la marche symétrique. Quand $p = 1/2$, alors $q = 0$ et $D^* = D$, on est dans le cas de marche symétrique vue en TD vendredi 12 février.

2 Marches aléatoires en 1 dimension (examen 2016)

1. Le processus n'est pas markovien, la position à l'instant $t + \tau$ dépend de la position à l'instant τ et de la manière dont la particule est arrivée en ce point (suivant la gauche ou la droite).
2.

$$\begin{aligned} \alpha(x, t+\tau) &= (1 - \lambda\tau)\alpha(x-\delta, t) + \lambda\tau\beta(x-\delta, t) \\ \beta(x, t+\tau) &= \lambda\tau\alpha(x+\delta, t) + (1 - \lambda\tau)\beta(x+\delta, t) \end{aligned}$$

3. Un développement au premier ordre en séries de Taylor des deux équations donne immédiatement le résultat :
$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = -v\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \lambda(\beta - \alpha) \tag{2}$$
$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = v\frac{\partial \beta}{\partial x} - \lambda(\beta - \alpha) \tag{3}$$
4. En additionnant les deux équations précédentes puis en différenciant par rapport à t on obtient,
$$\frac{\partial^2(\alpha+\beta)}{\partial t^2} = v\frac{\partial^2(\beta-\alpha)}{\partial x \partial t} \tag{4}$$
De même en soustrayant Eq.2 et Eq.3 puis en différenciant par rapport à x on obtient,
$$\frac{\partial^2(\beta-\alpha)}{\partial x \partial t} = v\frac{\partial^2(\alpha+\beta)}{\partial x^2} - 2\lambda\frac{\partial(\beta-\alpha)}{\partial x} \tag{5}$$
En injectant Eq.5 dans Eq.4 et en utilisant Eq.2 et Eq.3 ainsi que le fait que $p = \alpha + \beta$, on trouve,
$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2\lambda\frac{\partial p}{\partial t} = v^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{6}$$
qui n'est pas une équation de type FOKKER-PLANCK à cause de la dérivée seconde en temps.

3 Diffusion aléatoire anisotropique (question bonus, examen 2018)

La méthode des images consiste à trouver une combinaison linéaire adéquate de $c_{x_0}(x,t)$ et de $c_{-x_0}(x,t)$ qui satisfaite la condition aux limites $c(0,t) = 0$ à tous les temps. On cherche donc $c(x,t) = c_{x_0}(x,t) + Kc_{-x_0}(x,t)$ où K est une constante permettant d'avoir $c(0,t) = 0$. Cette hypothèse permet d'obtenir immédiatement K et au final :

$$c(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\left[\exp\left(-\frac{(x-x_0+\nu t)^2}{4Dt}\right) - \exp\left(\frac{\nu x_0}{D}\right)\exp\left(-\frac{(x+x_0+\nu t)^2}{4Dt}\right)\right].$$

4 Quelques intégrales, en complément de l'exercice n°1

Rappel, pour la marche aléatoire asymétrique, la densité de probabilité vaut :
$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{(x+4\beta Dt)^2}{4Dt}} \tag{7}$$

et taux de transistion $W(x) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(x,\Delta t)}{\Delta t}$.
On obtient (enfin mathematica nous donne) :

$$a_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} rW(r)dr = \lim_{\Delta t \to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{r}{\Delta t}\frac{1}{\sqrt{4\pi D\Delta t}}e^{-\frac{(x+4\beta\Delta Dt)^2}{4D\Delta t}}dr = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{-4\beta D\Delta t}{\Delta t} = -4\beta D \tag{8}$$

$$a_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} r^2 W(r) dr = \lim_{\Delta t \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^2}{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi D \Delta t}} e^{-\frac{(x+4\beta\Delta D t)^2}{4D\Delta t}} dr = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2D\Delta t(1+8D\beta^2\Delta t)}{\Delta t} = 2D \tag{9}$$

$$\begin{aligned} a_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} r^3 W(r) dr &= \lim_{\Delta t \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^3}{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi D \Delta t}} e^{-\frac{(x+4\beta\Delta D t)^2}{4D\Delta t}} dr \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-8D^2\beta(\Delta t)^2(3+8D\beta^2\Delta t))}{\Delta t} = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} a_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} r^4 W(r) dr &= \lim_{\Delta t \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^4}{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{4\pi D \Delta t}} e^{-\frac{(x+4\beta\Delta D t)^2}{4D\Delta t}} dr \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4D^2(\Delta t)^2(3+16D\beta^2\Delta t(3+4D\beta^2\Delta t))}{\Delta t} = 0 \ etc... \end{aligned} \tag{11}$$

En fait, $a_p = 0$ pour $p \geq 3$ ce qui justifie le développement de Kramer-Moyal dans le cas de la marche aléatoire avec dérive (drift).