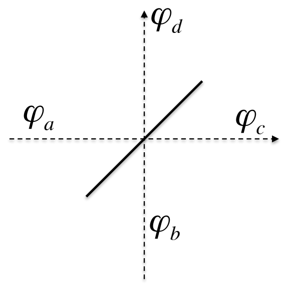
ARTEQ - Quantum Hardware - Cours 9
Pascale SENELLART, pascale.senellart-mardon@c2n.upsaclay.fr

Particules indiscernables traversant une lame séparatrice

On considère une particule préparée à un instant initial t_i dans un paquet d'ondes $\psi(\vec{r}, t_i) = \phi_a(\vec{r})$, arrivant sur une lame séparatrice 50%-50%. A un instant ultérieur t_f, le paquet d'ondes s'est dissocié en deux après traversée de la lame, et l'état de la particule peut s'écrire



$$\psi(\vec{r}, t_f) = (\phi_c(\vec{r}) + \phi_d(\vec{r}))/\sqrt{2}$$

où $\phi_c(\vec{r})$ et $\phi_d(\vec{r})$ désignent des paquets d'ondes normalisés se propageant dans chacune des voies de sortie. On a $\langle\phi_c|\phi_d\rangle = 0$.
Si on prépare la particule dans l'état $|\psi'(t_i)\rangle = |\phi_b\rangle$, symétrique de $|\phi_a\rangle$ par rapport à la lame et tel que $\langle\phi_a|\phi_b\rangle = 0$, alors l'état final $|\psi'(t_f)\rangle$ après la lame vaut :

$$\psi(\vec{r}, t_f) = (\phi_c(\vec{r}) - \phi_d(\vec{r}))/\sqrt{2}$$

1.1. On prépare à l'instant t_i deux fermions identiques dans le même état de spin, l'un dans l'état $|\phi_a\rangle$, l'autre dans l'état $|\phi_b\rangle$. Quels sont l'état initial et l'état final du système ? Peut-on détecter les deux fermions dans la même voie de sortie ?
Notons $|\sigma\sigma\rangle$ l'état de spin des deux fermions. Puisque la partie spin est symétrique par échange des deux particules, cela signifie – d'après le postulat de symétrisation – que l'état spatial doit être antisymétrique, de sorte que l'état total soit antisymétrique. L'état initial s'écrit donc

$$|\Psi(t_i)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle - |\phi_2\rangle \otimes |\phi_1\rangle\right) \otimes |\sigma\sigma\rangle$$

On en déduit l'état final

$$\begin{aligned}
|\Psi(t_f)\rangle &= \hat{U}(t_f, t_i)|\Psi(t_i)\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|\phi_3\rangle + |\phi_4\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|\phi_3\rangle - |\phi_4\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|\phi_3\rangle - |\phi_4\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|\phi_3\rangle + |\phi_4\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes |\sigma\sigma\rangle \\
&= \frac{|\phi_4\rangle \otimes |\phi_3\rangle - |\phi_3\rangle \otimes |\phi_4\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |\sigma\sigma\rangle
\end{aligned}$$

C'est bien un état antisymétrique par échange des deux particules. On remarque que si un fermion sort par la voie 3, l'autre sort obligatoirement par la voie 4.

1.2. On reprend la question précédente avec deux bosons identiques, également préparés dans le même état de spin, l'un étant initialement dans l'état $|\phi_a\rangle$, l'autre dans l'état $|\phi_b\rangle$.
Puisque la partie spin est symétrique par échange des deux particules, cela signifie – d'après le postulat de symétrisation – que l'état spatial doit être symétrique de sorte que l'état total soit symétrique. L'état initial s'écrit donc

$$|\Psi(t_i)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle + |\phi_2\rangle \otimes |\phi_1\rangle\right) \otimes |\sigma\sigma\rangle$$

On en déduit l'état final

$$\begin{aligned}
|\Psi(t_f)\rangle &= \hat{U}(t_f, t_i)|\Psi(t_ti)\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|\phi_3\rangle + |\phi_4\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|\phi_3\rangle - |\phi_4\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|\phi_3\rangle - |\phi_4\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|\phi_3\rangle + |\phi_4\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes |\sigma\sigma\rangle \\
&= \frac{|\phi_3\rangle|\phi_3\rangle - |\phi_4\rangle|\phi_4\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |\sigma\sigma\rangle
\end{aligned}$$

Cela signifie que les deux bosons sortent toujours par la même voie. C'est l'instinct "grégaire" des bosons donnant lieu à leur coalescence d'un côté ou de l'autre de la lame semi-transparente.

1.3. Dans quel état de spin faudrait-il préparer deux fermions de spin $1/2$ identiques pour observer le même effet de “coalescence” qu’avec deux bosons sans spin ?

Deux fermions de spin $1/2$ préparés dans l’état singulet $|0, 0\rangle = (| + -\rangle - | - +\rangle)/\sqrt{2}$ seront dans un état de spin antisymétrique et devront donc être dans un état orbital symétrique, soit $(|\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle + \phi_2\rangle \otimes |\phi_1\rangle)/\sqrt{2}$. On observera donc le même effet de coalescence qu’avec deux bosons sans spin.