Université & ENS de Paris-Saclay

Processus stochastiques et neutronique
Examen du 26 mars 2021.
Document autorisé : une page manuscrite
Durée : 3h00
Correction

1 Méthode de Monte-Carlo (3 points)

L'anisotropie d'une diffusion inélastique est donnée par la densité de probabilité (suivant $\mu = \cos(\theta) \in [-1; 1]$) :

$$f(\mu) = \frac{a}{2\sinh(a)}\left[\cosh(a\mu) + r\sinh(a\mu)\right]$$

où $a \in R^+$ et r un est nombre compris entre 0 et 1.

On ne peut pas décomposer froidement la loi en une somme des deux lois, $\propto \cosh(a\mu)$ et $\propto \sinh(a\mu)$ du fait que le sinus hyperbolique a une partie négative. On procède donc légèrement différemment :

$$\begin{aligned}
f(\mu) &= \frac{a}{2\sinh(a)}\left[\frac{e^{a\mu}+e^{-a\mu}}{2} + r\,\frac{e^{a\mu}-e^{-a\mu}}{2}\right] \\
&= \frac{a}{2\sinh(a)}\left[\left(\frac{1+r}{2}\right)e^{a\mu} + \left(\frac{1-r}{2}\right)e^{-a\mu}\right] \\
&= \left(\frac{1+r}{2}\right)\underbrace{\frac{a}{2\sinh(a)}e^{a\mu}}_{\text{1ere loi:f}_1(\mu)} + \underbrace{\left(\frac{1-r}{2}\right)\frac{a}{2\sinh(a)}e^{-a\mu}}_{\text{2e loi:f}_2(\mu)}
\end{aligned}$$

La première loi, $f_1(\mu)$ a un poids de $(1+r)/2$ et la seconde de $(1-r)/2$. tous deux positifs car $r \in [0; 1]$. Un algorithme possible : On tire deux nombres aléatoires indépendants $(\xi_1, \xi_2) \in [0; 1]^2$ puis,
si $\xi_1 < \frac{1+r}{2}$ alors on tire μ suivant $f_1(\mu)$
si $\xi_1 > \frac{1+r}{2}$ alors on tire μ suivant $f_2(\mu)$.

Regardons le premier cas :

$$\xi_2 = \int_0^{\xi_2} du = \int_{-1}^{\mu} f_1(v)dv = \frac{a}{2\sinh(a)}\int_{-1}^{\mu} e^{av}dv = \frac{1}{2\sinh(a)}\left[e^{a\mu} - e^{-a}\right]$$

d'où $\mu = \frac{1}{a}\log\left[2\sinh(a\xi_2) + e^{-a}\right]$. Le tirage dans le second cas s'obtient de la même manière, au final :
On tire deux nombres aléatoires indépendants $(\xi_1, \xi_2) \in [0; 1]^2$ puis,
si $\xi_1 < \frac{1+r}{2}$ alors $\mu = \frac{1}{a}\log\left[2\xi_2\sinh(a) + e^{-a}\right]$
si $\xi_1 > \frac{1+r}{2}$ alors $\mu = -\frac{1}{a}\log\left[e^{a} - 2\xi_2\sinh(a)\right]$.

2 Méthode de Monte-Carlo (1.5 points)

Soit ξ un nombre aléatoire tiré uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$. A quelle densité de probabilité correspond la variable aléatoire X tirée suivant $X = \log\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)$? précisez son domaine de définition.
Tout d'abord on remarque quand $\xi \to 0$ alors $x \to -\infty$ et quand $\xi \to 1$ alors $x \to \infty$, le domaine de définition de x est donc R.
Soit $f(x)$ la densité de probabilité recherchée et $F(x)$ une primitive de $f(x)$. On a

$$\int_0^\xi du = \int_{-\infty}^x f(y)dy \qquad \Rightarrow \xi = F(x) - F(-\infty) = F(x) \text{ car } \mathrm{F}(-\infty) = 0.$$

De plus, de la relation $x = \log\left(\frac{\xi}{1-\xi}\right)$ on en déduit que $\xi = \frac{e^x}{1+e^x}$ et par identification :

$$F(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

En dérivant l'équation précédente on obtient alors :

$$F'(x) = f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} .$$

3 Processus de croissance et de mort (5.5 points)

On considère que les "particules" d'un système peuvent être dans deux états X et Y. Par exemple et pour coller à l'actualité, on peut penser à une personne qui est soit saine soit malade. Le taux de transition pour aller de X à Y est ω_1 tandis que le taux de Y à X est ω_2. Ces deux taux sont indépendants l'un de l'autre. Le processus est indiqué schématiquement sur la figure suivante :

$$X \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\rightleftarrows}} Y$$

Soit n_1 le nombre de particules dans l'état X et n_2 celui dans l'état Y. Le nombre total de particule $N = n_1 + n_2$ est constant. Le but est de déterminer la probabilité $P(n, t)$ d'avoir n particules dans l'état X à l'instant t (et par conséquent d'en avoir $N - n$ dans l'état Y).

1. Écrire l'équation maîtresse vérifiée par $P(n, t)$.
   Un état à n particules dans l'état X correspond à $N - n$ particules dans l'état Y.
   Un état à n-1 particules dans l'état X correspond à $N - n + 1$ particules dans l'état Y.

$$\begin{aligned}\frac{\partial P(n,t)}{\partial t} &= \omega_1(n+1)P(n+1,t) - \omega_1 n P(n,t) \\ &+ \omega_2(N-n+1)P(n-1,t) - \omega_2(N-n)P(n,t)\end{aligned} \tag{1}$$

2. On introduit la fonction génératrice définie par $G(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(n,t)$. Montrer que $G(s,t)$ satisfait à :

$$\frac{\partial G(s,t)}{\partial t} = (1-s)\left[(\omega_1 + \omega_2 s)\frac{\partial G(s,t)}{\partial s} - \omega_2 N G(s,t)\right]$$

On part de l'équation maîtresse (au passage $G(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n P(n,t) = \sum_{n=0}^{N} s^n P(n,t)$ car $P(n,t) = 0$ pour $n > N$).

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} s^n \frac{\partial P(n,t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \Big[& \omega_1 (n+1) P(n+1,t) - \omega_1 n P(n,t) \\ & + \omega_2 (N-n+1) P(n-1,t) - \omega_2 (N-n) P(n,t) \Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n P(n,t)\right)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[& \omega_1 n s^{n-1} P(n,t) - \omega_1 n s^n P(n,t) \\ & + \omega_2 (N-n) s^{n+1} P(n,t) - \omega_2 (N-n) s^n P(n,t) \Big]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(s,t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big[& \omega_1 n s^{n-1} P(n,t) - \omega_1 n s^n P(n,t) \\ & + \omega_2 (N-n) s^{n+1} P(n,t) - \omega_2 (N-n) s^n P(n,t) \Big]\end{aligned} \tag{2}$$

De plus,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n s^{n-1} P(n,t) = \frac{\partial \left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n P(n,t)\right)}{\partial s} = \frac{\partial G(s,t)}{\partial s}, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n s^{n} P(n,t) = s\frac{\partial \left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n P(n,t)\right)}{\partial s} = s\frac{\partial G(s,t)}{\partial s}, \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n s^{n+1} P(n,t) = s^2\frac{\partial \left(\sum_{n=0}^{\infty} s^n P(n,t)\right)}{\partial s} = s^2\frac{\partial G(s,t)}{\partial s}. \end{cases}$$

En reportant ces expressions dans l'Eq.(2), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial G(s,t)}{\partial t} &= \omega_1 \frac{\partial G(s,t)}{\partial s} - \omega_1 s \frac{\partial G(s,t)}{\partial s} \\ &\quad + \omega_2 N s G(s,t) - \omega_2 N G(s,t) - \omega_2 s^2 \frac{\partial G(s,t)}{\partial s} + \omega_2 s \frac{\partial G(s,t)}{\partial s} \\ &= (1-s) \left[(\omega_1 + \omega_2 s) \frac{\partial G(s,t)}{\partial s} - \omega_2 N G(s,t) \right]\end{aligned}$$

3. Lorsqu'il n'y a pas de particule initialement, on admettra que la solution de l'équation précédente est donnée par (remarque : la solution s'obtient par la méthode des caractéristiques) :

$$\begin{aligned}G(s,t) &= \left[\frac{\omega_1 + \omega_2 s + \omega_2 (1-s) e^{-(\omega_1+\omega_2)t}}{\omega_1 + \omega_2} \right]^N \\ &= \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2 e^{-(\omega_1+\omega_2)t}}{\omega_1 + \omega_2} \right) + \left(s\,\frac{\omega_2 (1 - e^{-(\omega_1+\omega_2)t})}{\omega_1 + \omega_2} \right) \right]^N \\ &= \sum_{n=0}^{N} \underbrace{\binom{N}{n} \left(\frac{\omega_1 + \omega_2 e^{-(\omega_1+\omega_2)t}}{\omega_1 + \omega_2} \right)^{N-n} \left(\frac{\omega_2 (1 - e^{-(\omega_1+\omega_2)t})}{\omega_1 + \omega_2} \right)^{n}}_{P(n,t)} s^n\,,\end{aligned}$$

que l'on peut réécrire :

$$P(n,t) = \binom{N}{n} p(t)^n (1-p(t))^{N-n} \qquad \text{avec} \qquad p(t) = \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} (1 - e^{-(\omega_1+\omega_2)t})\,.$$

4 Intégrale du mouvement brownien (3 points)

Dans cet exercice on considère un bruit blanc gaussien $\nu(t)$ vérifiant

$$\langle \nu(t) \rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle \nu(t)\nu(t') \rangle = \sigma^2 \delta(t - t')$$

1. On définit $B(t) = \displaystyle\int_0^t \nu(u)\,\mathrm{d}u$. Montrer que $\langle B(t)B(s) \rangle = \sigma^2 \min(t, s)$.

$$\begin{aligned}\langle B(t)B(s) \rangle &= \langle \int_0^t \nu(u)\,\mathrm{d}u \int_0^s \nu(v)\,\mathrm{d}v \rangle = \int_0^t \mathrm{d}u \int_0^s \mathrm{d}v \langle \nu(u)\nu(v) \rangle \\ &= \sigma^2 \int_0^t \mathrm{d}u \int_0^s \mathrm{d}v\, \delta(u - v)\end{aligned}$$

regardons les deux cas : $t > s$ et $t < s$:
Si $t > s$ alors :

$$\langle B(t)B(s) \rangle = \sigma^2 \int_0^s \mathrm{d}v \underbrace{\int_0^t \mathrm{d}u\, \delta(u - v)}_{=1} = \sigma^2 \int_0^s \mathrm{d}v = \sigma^2 s$$

Si $t < s$ alors :

$$\langle B(t)B(s) \rangle = \sigma^2 \int_0^t \mathrm{d}u \underbrace{\int_0^s \mathrm{d}v\, \delta(u - v)}_{=1} = \sigma^2 \int_0^t \mathrm{d}u = \sigma^2 t$$

D'où le résultat : $\langle B(t)B(s) \rangle = \sigma^2 \min(t, s)$.

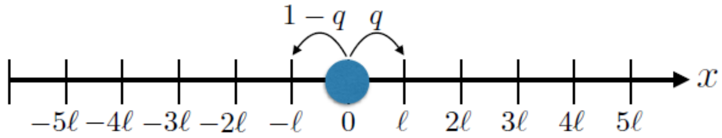
2. A partir du processus $B(t)$ on définit un nouveau processus stochastique $X(t)$ (intégrale du mouvement brownien) par $X(t) = \displaystyle\int_0^t B(u)\,\mathrm{d}u$. Calculer la valeur moyenne et la variance du processus $X(t)$. Le processus est-il gaussien ?

$$\begin{aligned}\langle X^2(t) \rangle &= \langle \int_0^t B(u)\,\mathrm{d}u \int_0^t B(v)\,\mathrm{d}v \rangle \\ &= \int_0^t \mathrm{d}u \int_0^s \mathrm{d}v \underbrace{\langle B(u)B(v) \rangle}_{\sigma^2 \min(u,v)} \\ &= \sigma^2 \int_0^t \mathrm{d}u \left[\int_0^u v\,\mathrm{d}v + \int_u^t u\,\mathrm{d}v \right] \\ &= \sigma^2 \left[\int_0^t \mathrm{d}u u^2 + \int_u^t u(t - u) \right] \\ &= \sigma^2 \frac{t^3}{3}\end{aligned}$$

La variance du processus $X(t)$ n'est pas proportionnelle à t, par conséquent le processus n'est pas gaussien.

5 Marches aléatoires en 1 dimension (4 points)

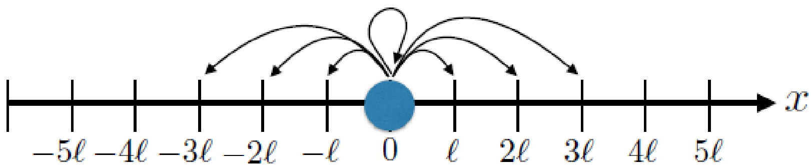
On étudie un modèle de marche aléatoire sur un réseau en 1 dimension. Plus précisément, on étudie le mouvement d'une particule se déplaçant par sauts le long de l'axe Ox sur un réseau de maille l. La particule se déplace à droite avec la probabilité q et à gauche avec la probabilité $1-q$. La durée de chaque saut est égale à Δt.



1. Écrire l'équation maîtresse pour $P(x, t + \Delta t)$.
$$P(x, t + \Delta t) = qP(x - l, t) + (1 - q)P(x + l, t)$$

2. Un développement en série de Taylor donne :
$$\begin{aligned} P(x,t) + \Delta t \frac{\partial P(x,t)}{\partial t} &= q\left[P(x,t) - l\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \frac{l^2}{2}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}\right] \\ &+ (1-q)\left[P(x,t) + l\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \frac{l^2}{2}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}\right] \\ &= P(x,t) + (1-2q)l\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + \frac{l^2}{2}\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2} \end{aligned}$$
Soit
$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -v\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + D\frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}.$$
Avec $v = (2q-1)l/\Delta t$ et $D = l^2/2\Delta t$.

On généralise la marche aléatoire précédente en considérant que la probabilité de sauts $\Pi(s|x)$ de longueur s (arbitraire) dépend de la position x de la particule.



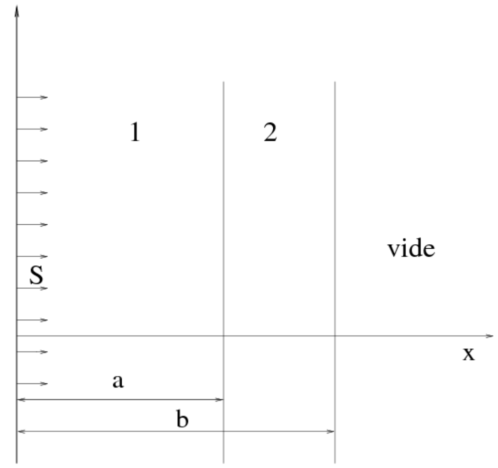
3. Écrire l'équation maîtresse généralisée pour $P(x, t + \Delta t)$.
$$P(x, t + \Delta t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \Pi(s|x - s)P(x - s, t)$$

4. Un développement en série de Taylor donne :
$$\begin{aligned} P(x,t) + \Delta t\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} &= \underbrace{\sum_{s=-\infty}^{\infty} \Pi(s|x)}_{=1} P(x,t) - \sum_{s=-\infty}^{\infty} s\frac{\partial(\Pi(s|x)P(x,t))}{\partial x} \\ &+ \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{s^2}{2}\frac{\partial^2(\Pi(s|x)P(x,t))}{\partial x^2} \\ &= P(x,t) - \frac{\partial(\sum_{s=-\infty}^{\infty} s\Pi(s|x)P(x,t))}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial^2(\sum_{s=-\infty}^{\infty}\frac{s^2}{2}\Pi(s|x)P(x,t))}{\partial x^2} \end{aligned}$$

On a donc
$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[v(x)P(x,t)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D(x)P(x,t)\right] .$$
avec
$$\begin{cases} v(x) = \displaystyle\sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{s}{\Delta t}\Pi(s|x) = \frac{\langle s(x)\rangle}{\Delta t} \\ D(x) = \displaystyle\sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{s^2}{2\Delta t}\Pi(s|x) = \frac{\langle s(x)^2\rangle}{2\Delta t} \end{cases}$$

6 Source plane avec 2 plaques d'épaisseur finie (3 points)

On considère une source plane émettant S neutrons par unité de surface et dirigée vers la droite ($x > 0$) diffusant à travers deux plaques infinies dans le plan (y, z) de matériaux différents. Les deux plaques adjacentes homogènes d'épaisseur a et b-a (voir figure) sont caractérisées par leur coefficient $k_1^2 = \frac{\Sigma_{a1}}{D_1}$ et $k_2^2 = \frac{\Sigma_{a2}}{D_2}$.



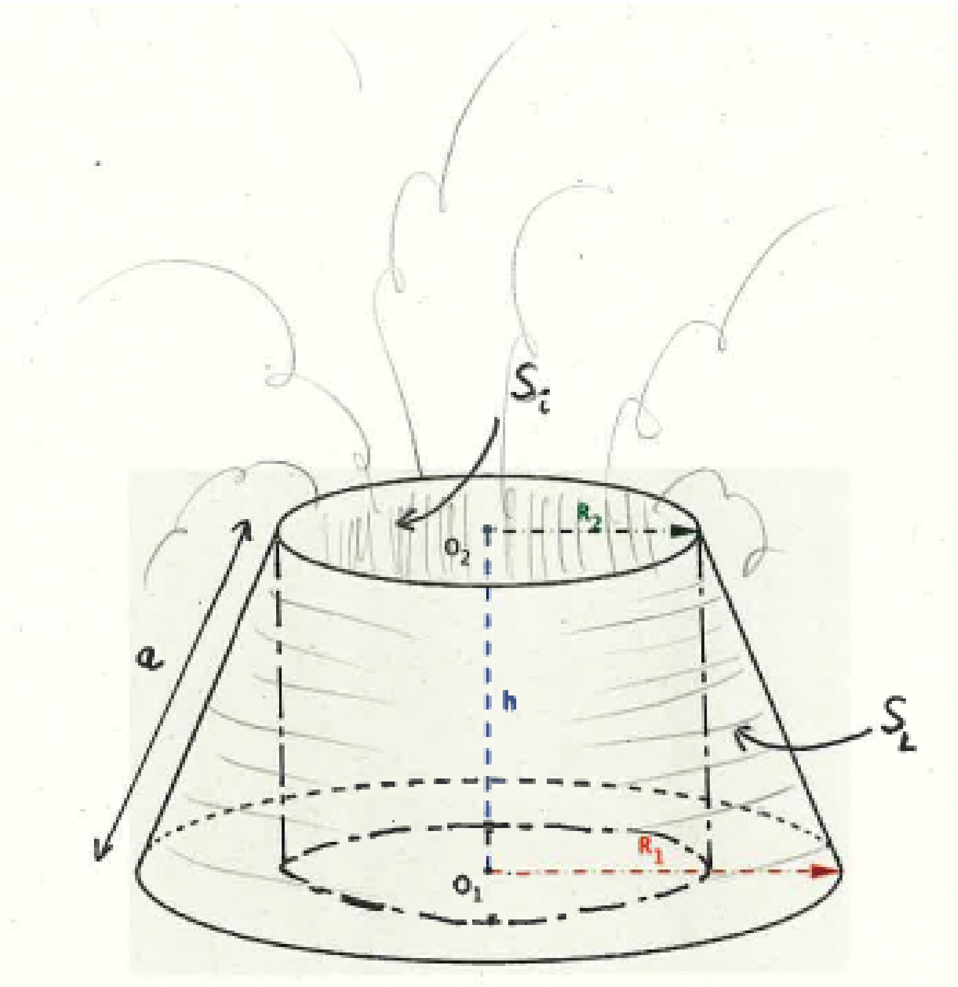
1. Écrire les équations satisfaites par les flux Φ_1 et Φ_2 dans la zone 1 et la zone 2 ainsi que leur solution en fonction des constantes d'intégration.

   Dans les deux milieux, l'équation pour le flux s'écrit :
$$\begin{cases} \dfrac{d^2\Phi_1(x)}{dx^2} - k_1^2\Phi_1(x) = 0 \Rightarrow \Phi_1(x) = A_1 e^{-k_1 x} + B_1 e^{k_1 x} \\ \dfrac{d^2\Phi_2(x)}{dx^2} - k_2^2\Phi_2(x) = 0 \Rightarrow \Phi_2(x) = A_2 e^{-k_2 x} + B_2 e^{k_2 x} \end{cases}$$

2. Donner toutes les conditions aux limites permettant de déterminer ces constantes d'intégration (on ne demande pas le calcul explicite des constantes d'intégration !)
$$\begin{cases} \Phi_2(b) = 0 \quad \text{interface entre un mileu diffusif et le vide} \\ \Phi_1(a) = \Phi_2(a) \quad \text{continuité du flux à l'interface} \\ J_1(a) = J_2(a) \quad \text{continuité du courant à l'interface} \\ \lim\limits_{x\to 0} J_1(x) = S \end{cases}$$
avec
$$\begin{cases} J_1(x) = -D_1\dfrac{d\Phi_1(x)}{dx} \\ J_2(x) = -D_2\dfrac{d\Phi_2(x)}{dx} \end{cases}$$

7 Question supplémentaire liée à l'actualité (+2 points)

Après son compère Eyjafjallajökull et un sommeil de 800 ans, le volcan islandais Fagradalsfjall vient récemment de se réveiller. On le modélise par un cône évidé et on considère sa surface. Celle-ci est la somme de sa surface intérieure S_i (cylindre de rayon R_2 et de hauteur h) et de la surface latérale S_L d'un tronc de cône (voir la figure, $S = S_i + S_L$). On rappelle que la surface latérale du tronc de cône est donnée par $S_L = \pi(R_1 + R_2)a$. Donnez un algorithme générant uniformément des points sur la surface S du volcan.



Remarque : 1/2 point de bonus pour une prononciation correcte des volcans islandais et le nom exact de la longueur a !

A une hauteur z correspond un rayon $r = \dfrac{R_1 h - z(R_1 - R_2)}{h}$.

1. Tout d'abord on sélectionne la surface que l'on va échantillonner (soit S_i soit S_L). Pour cela on tire un premier nombre aléatoire $\xi_1 \in [0, 1]$ et si :

$$\begin{cases} \xi_1 < \dfrac{S_i}{S_i + S_L} = \dfrac{2R_2 h}{2R_2 h + (R_1 + R_2)a} & \text{on échantillonne sur le cylindre : cas 1} \\ \xi_1 > \dfrac{S_i}{S_i + S_L} & \text{on échantillonne sur la surface du tronc de cône : cas 2} \end{cases}$$

2. Cas 1 : Échantillonner sur le cylindre de rayon R_2 et de hauteur h ne pose pas de problème. Par exemple, on prend deux nouveaux nombres aléatoires indépendants $(\xi_2, \xi_3) \in [0, 1]^2$,

puis

$$\begin{cases} z = h\xi_2 \\ \theta = 2\pi\xi_3 \end{cases}$$

3. Cas 2 : En revanche, l'échantillonnage de z sur la surface du tronc de cône n'est plus uniforme (le rayon R_1 a un poids plus important que le rayon R_2). Pour trouver la loi suivant z, on part de la mesure uniforme :

$$\begin{aligned} \frac{dS_l}{S_L} &= \frac{2\pi r da}{\pi(R_1+R_2)a} = \frac{2}{(R_1+R_2)a}\left(\frac{R_1h - z(R_1-R_2)}{h}\right)da \\ &= \frac{2}{(R_1+R_2)a}\left(\frac{R_1h - z(R_1-R_2)}{h}\right)\frac{a}{h}dz \\ &= \frac{2}{(R_1+R_2)h^2}\left[R_1h - z(R_1-R_2)\right]dz \end{aligned}$$

Ensuite on inverse la fonction de répartition :

$$\xi_2 = \int_0^{\xi_2} du = \frac{2}{(R_1+R_2)h^2}\int_0^z \left[R_1h - x(R_1-R_2)\right]dx$$

On trouve,

$$z = \frac{h}{(R_1-R_2)}\left[R_1 - \sqrt{R_1^2 - \xi_2(R_1^2 - R_2^2)}\right].$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} z = \dfrac{h}{(R_1-R_2)}\left[R_1 - \sqrt{R_1^2 - \xi_2(R_1^2 - R_2^2)}\right] \\ \theta = 2\pi\xi_3 \end{cases}$$

On termine sur ce joli mot, l'apothème.