Dinámica Lagrangiana

Cálculo de Torque y Perfiles de movimiento

En la siguiente memoria de cálculo se realiza un análisis energético (Euler-Lagrange) con el objetivo de poder calcular el torque necesario y la velocidad máxima para llevar a cabo ciertas rutinas

Este análisis consiste en evaluar el Lagrangiano de cada una de los eslabones a través de la energía cinética y potencial.

$$L = K - U$$

En donde, la energía cinética se divide en energía cinética de tralación (V) y energía cinética de rotación (ω); y la energia potencial en energía gravitacional y energía elástica (se tendrá en cuenta solo la gravitacional).

$$K_{\text{traslación}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

$$k_{\text{rotacional}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2$$

$$U_{\text{gravitacional}} = m \cdot g \cdot h$$

Una vez obtenido el Lagrangiano, es posible calcular el torque que requiere cada eslabón según su movimiento, esto se calcula de la siguiente manera:

$$\tau = \frac{d}{\text{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

Con desarrollos algebráicos, se obtiene que la energía potencial no depende del valor de la velocidad angular por lo tanto, la expresión anterior se reduce a lo siguiente.

$$\tau = \frac{d}{\text{dt}}\left(\frac{\partial K_{\text{total}}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial K_{\text{total}}}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta}$$

Se realizó un análisis previo al resultado de lo anterior, y se obtiene que del primer término se desglosa en aceleraciones ángulares, en producto de velocidades de eslabones (Coriolis), y en velocidades angulares cuadradas (Aceleraciones Centrípetas).

Cálculos.

Parámetros

Para llevar a cabo el desarrollo del Lagrangiano y con ello del Torque, es necesario conocer algunos parámetros del mecanismo a trabajar.

Longitud de eslabones:

```
l1 = 0.22;   %[m]
l2 = 0.19;   %[m]
```

Masas e inercia de eslabones: en este apartado se está utilizando la masa y la inercia que experimenta el motor por su carga.

```
%Eslabón Superior
m1 = 1.4741;  %[kg]
I1 = 0.0264;  %[kg*m^2]

%Eslabón Inferior
m2 = 0.8580;  %[kg]
I2 = 0.0257;  %[kg*m2]
```

Otro parámetro necesario para llevar a cabo este cálculo es el centro de masa, sin embargo, por efectos de practicidad se tomará el centro de masa como la mitad de cada uno de los eslabones.

```
l1c= l1/2;    %[m]
l2c = l2/2;   %[m]
```

Rutina de movimiento

El proyecto realizado maneja tres diferentes rutinas: caminado, trote y galope. En esta memoria de cálculo se realiza el desarrollo con la rutina Caminado, sin embargo, para las demás se hizo el mismo proceso.

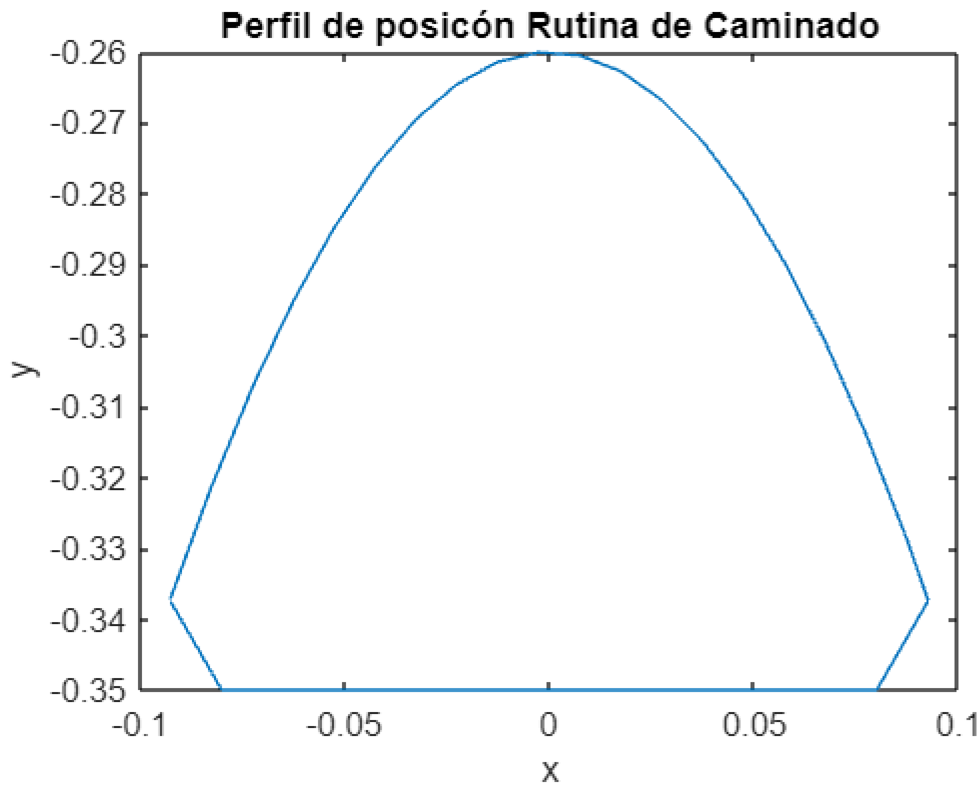
El código siguiente hace referencia a la rutina en el plano x,y que realizará la articulación robótica. Se muestran diferentes funciones, debido a que el movimiento se divide en diferentes trayectorías que van en diferentes sentidos.

```
x1 = -9.26:1:9.26;
y1 = -26 - 0.09.*x1.^2;

x2 = 9.26:-0.05:8;
y2 = x2-43;

x3= 8:-1:-8;
y3 = -35;

x4 = -8:-0.05:-9.26;
y4 = -43-x4;
for i = 1:17
    y3(i) = -35;
end
%Vectores de posición (x,y)
x = [x1 x2 x3 x4]./100;         %[m]
y = [y1 y2 y3 y4]./100;         %[m]
```

A continuación se muestra la rutina de movimiento que seguirá la articulación robótica para emualr un paso.

```
plot(x,y)
title('Perfil de posicón Rutina de Caminado');
```

```
xlabel('x');
ylabel('y');
```



Cinemática Inversa

Para hallar el lagrangiano, es necesario conocer el valor de desplazamiento de cada uno de los eslabones, al ser juntas rotacionales, se hablaría de un desplazamiento angular (θ) . En la sección anterior, se pudo visualizar que se conocen los puntos de coordenadas (x,y) que debe seguir la articulación robótica, por lo tanto, se realiza la cinemática inversa al mecanismo.

Se obtiene que:

$$q_2 = \text{atan2}\left(\left(\sqrt{1 - \cos(q_2)^2}\right), \cos(q_2)\right)$$

$$q_1 = \text{atan2}(x, y) - \text{atan2}(l_2 \cdot \sin(q_2), l_2 \cdot \cos(q_2) + l_1)$$

$$\cos(q_2) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 \cdot l_1 \cdot l_2}$$

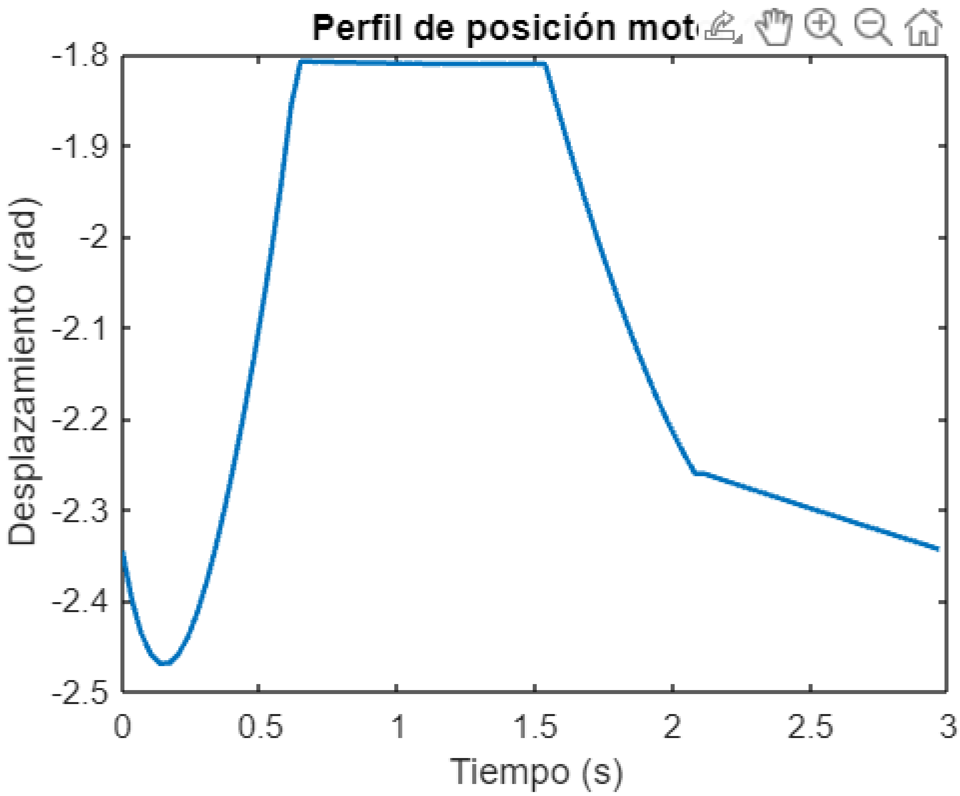
```
%Variables para facilitar programación
r = sqrt(x.^2+y.^2);
cosq2 = (r.^2-l1^2-l2^2)/(2*l1*l2);

%Ángulo q2: eslabón inferior
q2 = atan2((sqrt(abs(1-cosq2.^2))), cosq2);            %[rad]
```

```
%Ángulo q2: eslabón superior
q1 = atan2(y,x) - atan2(l2.*sin(q2), l2.* cos(q2)+l1); %[rad]

%Vector de desplazamiento angular de mecanismo
posiciones = [q1 ; q2]'
```

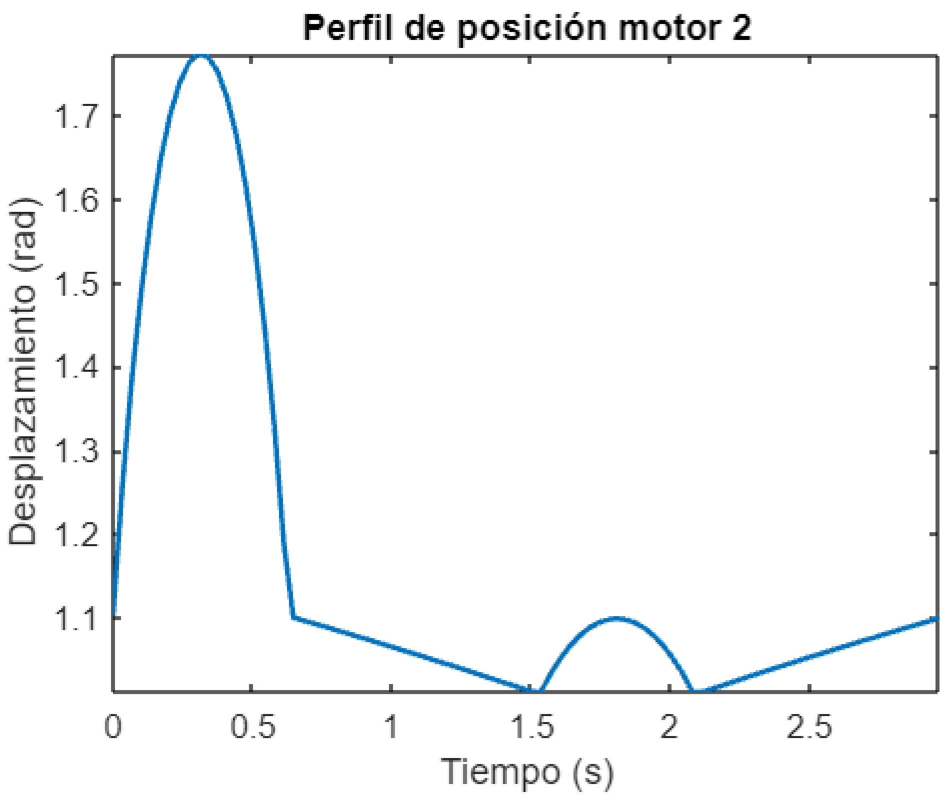
```
posiciones = 88×2
   -2.3450    1.1022
   -2.3987    1.2593
   -2.4354    1.3869
   -2.4581    1.4917
   -2.4686    1.5776
   -2.4682    1.6465
   -2.4580    1.7000
   -2.4390    1.7388
   -2.4120    1.7633
   -2.3782    1.7739
      ⋮
```

Gráficas

```
%Tiempo para caminado:
h=0.0341;
tiempo=0:h:3;

%Tiempo para trote:
%h=0.0385;
%tiempo=0:h:3;

%tiempo para galope:
%h=0.059;
%tiempo=0:h:5;

%Perfil de posición motor 2
plot(tiempo,q1, 'LineWidth', 1.5)
title('Perfil de posición motor 1');
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Desplazamiento (rad)');
```




```
%Perfil de posición motor 2
plot(tiempo,q2,'LineWidth', 1.5)
title('Perfil de posición motor 2');
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Desplazamiento (rad)');
```



Rutinas suavizadas

Un requerimiento de diseño es que los perfiles de movimiento sean lo más suaves posibles, esto debido a que de esta forma se facilita el control y también se prolonga la vida útil del mecanismo.

```
%Galope
%q1s = -2.5389 -1.6053.*tiempo + 2.0270.*tiempo.^2-0.6540.*tiempo.^3+0.0628.*tiempo.^4;
%q2s = 0.8551 + 1.2445.*tiempo+2.3663.*tiempo.^2-3.6010.*tiempo.^3+1.6147.*tiempo.^4-0.3023.*ti

%Trote
%q1s = -2.2639 - 0.5620.*tiempo + 0.8024.*tiempo.^2 -0.2067.*tiempo.^3;
%q2s = 1.1389 + 3.088.*tiempo -3.3393.*tiempo.^2 + 1.1763.*tiempo.^3-0.1359.*tiempo.^4;

%Caminado
q1s = -2.3616 -1.5118.*tiempo + 7.3561.*tiempo.^2 -8.4374.*tiempo.^3 +4.1128.*tiempo.^4-0.9246*
```

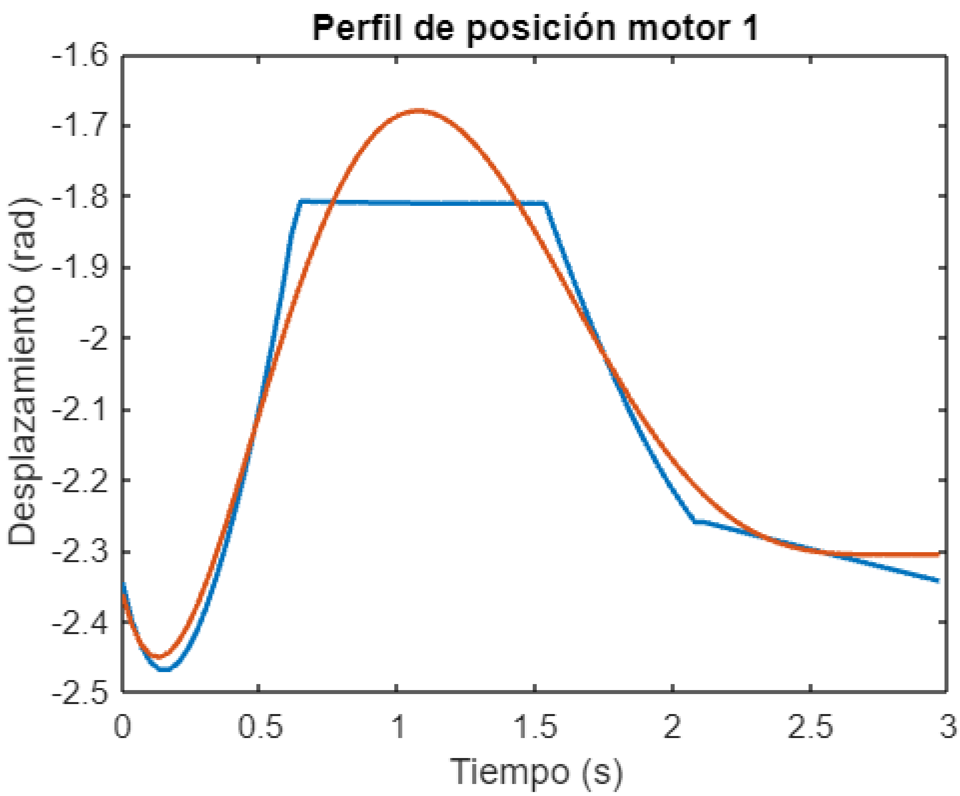
```
q1s = 1×88
   -2.3616   -2.4049   -2.4331   -2.4479   -2.4510   -2.4440   -2.4284   -2.4054 ···
```

```
q2s = 1.0641 + 6.3252.*tiempo -19.4607.*tiempo.^2 +22.3997.*tiempo.^3-12.2191.*tiempo.^4+3.1867
```

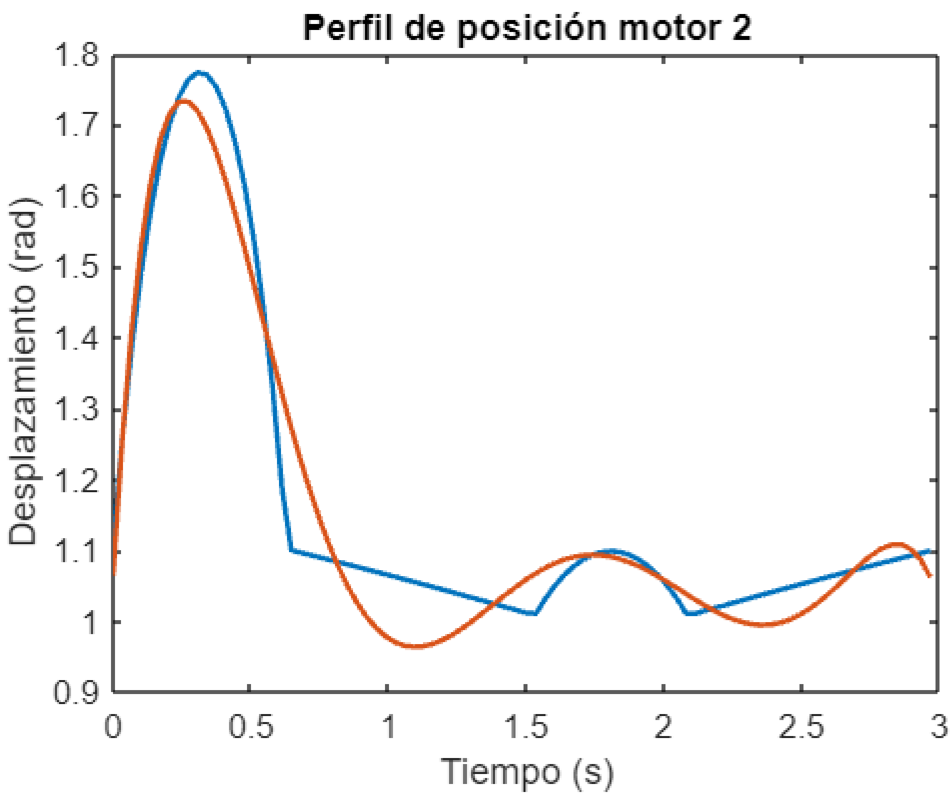
```
q2s = 1×88
    1.0641    1.2580    1.4118    1.5302    1.6176    1.6780    1.7151    1.7325 ···
```

```
%Perfil de posición motor 1
plot(tiempo,q1, 'LineWidth', 1.5)
title('Perfil de posición motor 1');
```

```
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Desplazamiento (rad)');
hold on
plot(tiempo, q1s, 'LineWidth', 1.5)
hold off
```




```
%Perfil de posición motor 2
plot(tiempo,q2,'LineWidth', 1.5)
title('Perfil de posición motor 2');
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Desplazamiento (rad)');
hold on
plot(tiempo, q2s, 'LineWidth', 1.5)
hold off
```



Posición angular, velocidad angular y aceleración angular.

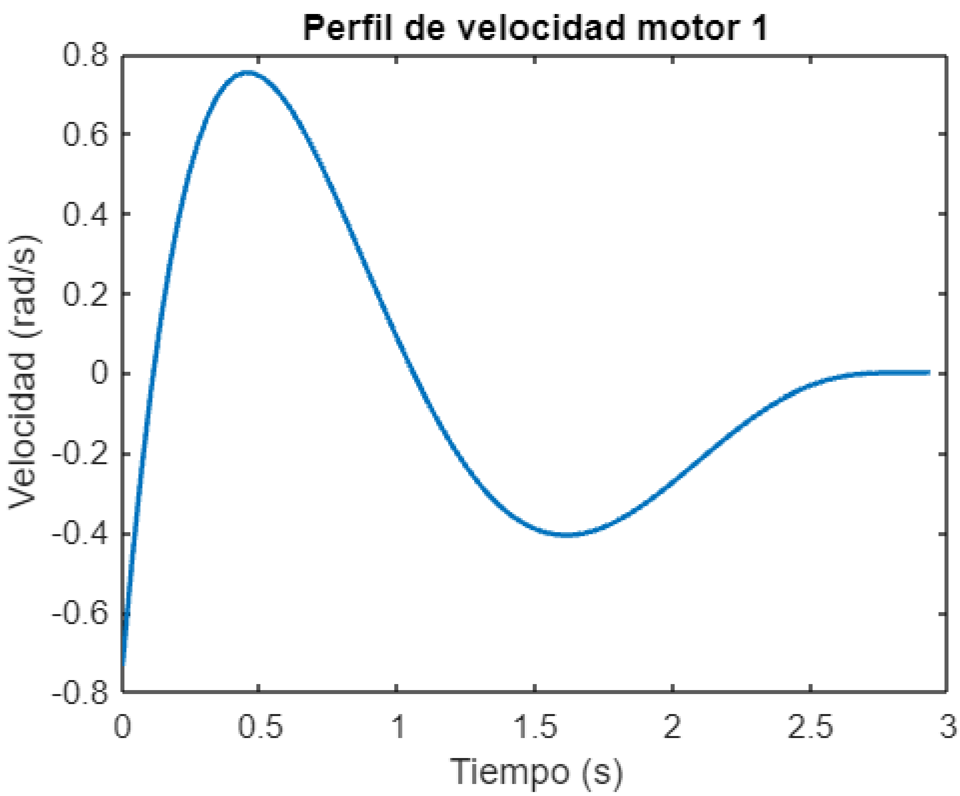
Una vez calculada la expresión correspondiente al desplazamiento angular (q_1, q_2), se procede a hallar la velocidad angular y aceleración angular, puesto a que son datos necesarios para calcular el torque del mecanismo.

```
h=0.059;
t=0:h:5;              %[s]
```

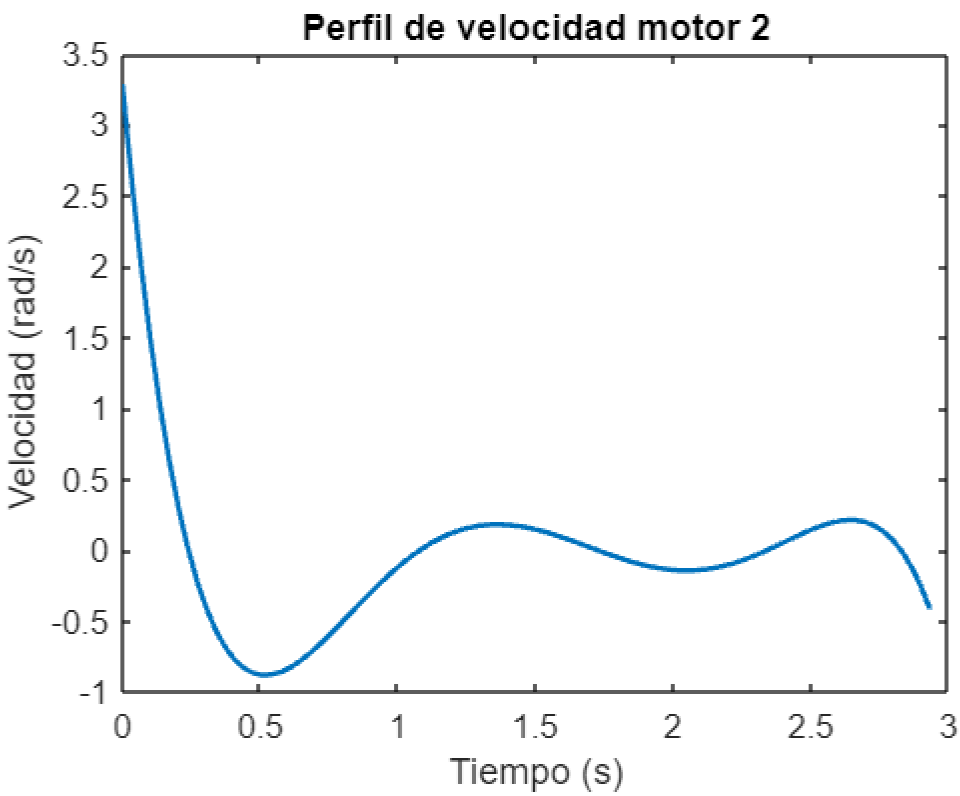
Para esta rutina, se propone un tiempo de 5 segundos de ejecución, este tiempo es el resultado final de diferentes iteraciones que se realizaron para evitar que el torque superara el máximo de la referencia seleccionada.

Velocidad Angular

```
%Velocidad angular
w1 = diff(q1s)/h;    %[rad/s]
w2 = diff(q2s)/h;   %[rad/s]
%Perfil de velocidad motor 1
plot(tiempo(1:end-1),w1,'LineWidth', 1.5)
title('Perfil de velocidad motor 1');
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Velocidad (rad/s)');
```

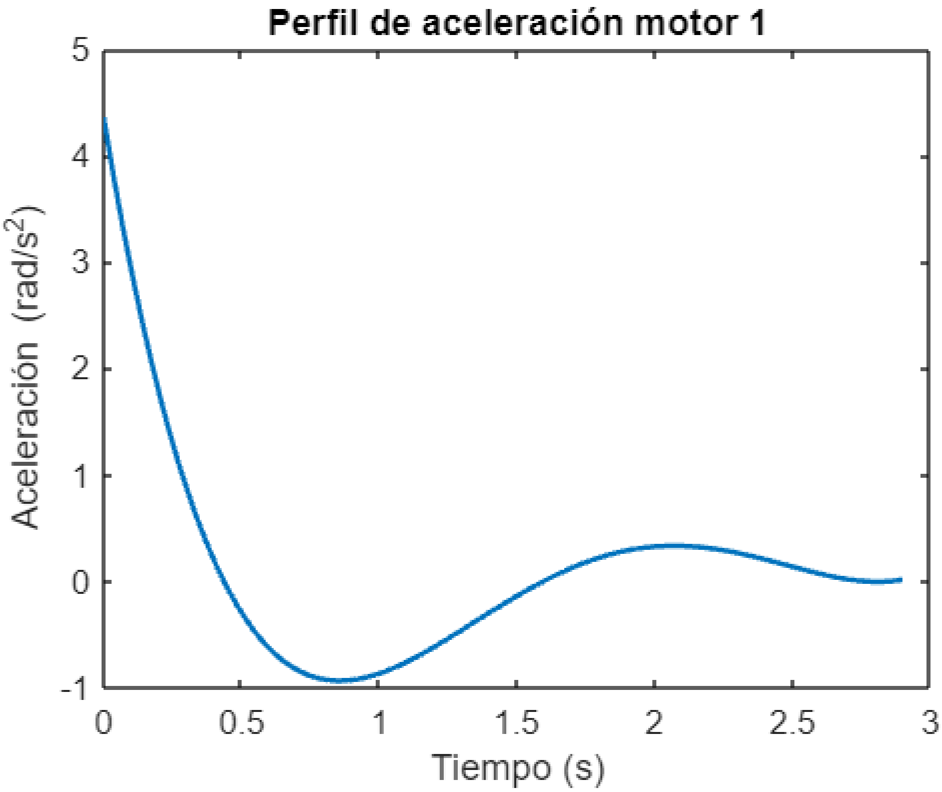



```
%Perfil de velocidad motor 2
plot(tiempo(1:end-1),w2,'LineWidth', 1.5)
title('Perfil de velocidad motor 2');
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Velocidad (rad/s)');
```

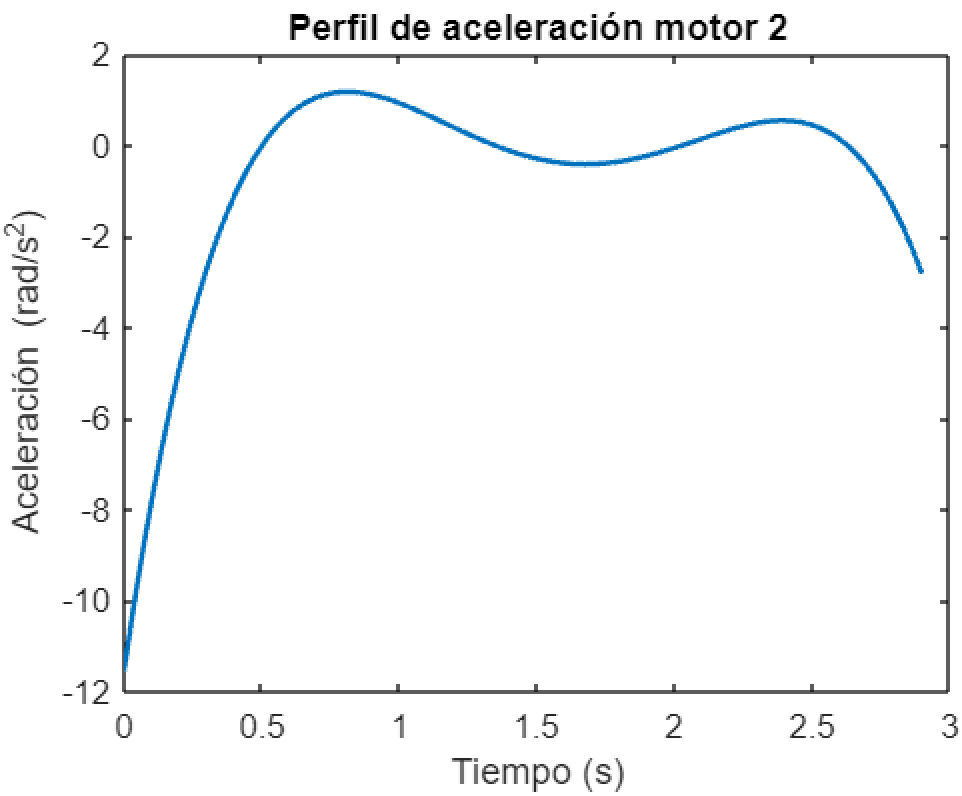


Aceleración Angular

```
%Aceleración Angular
a1 = diff(w1)/h;   %[rad/s^2]
a2 = diff(w2)/h;   %[rad/s^2]

%Perfil de aceleración motor 1
plot(tiempo(1:end-2),a1,'LineWidth', 1.5);
title('Perfil de aceleración motor 1');
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Aceleración (rad/s^2)');
```




```
%Perfil de aceleración motor 2
plot(tiempo(1:end-2),a2,'LineWidth', 1.5)
title('Perfil de aceleración motor 2');
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Aceleración (rad/s^2)');
```



Torque:

Como se analizó en un principio el torque depende tanto de la masa, inercia, desplazamiento angular, velocidad angular y aceleración angular de cada uno de los eslabones.

$$\tau = \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta}$$

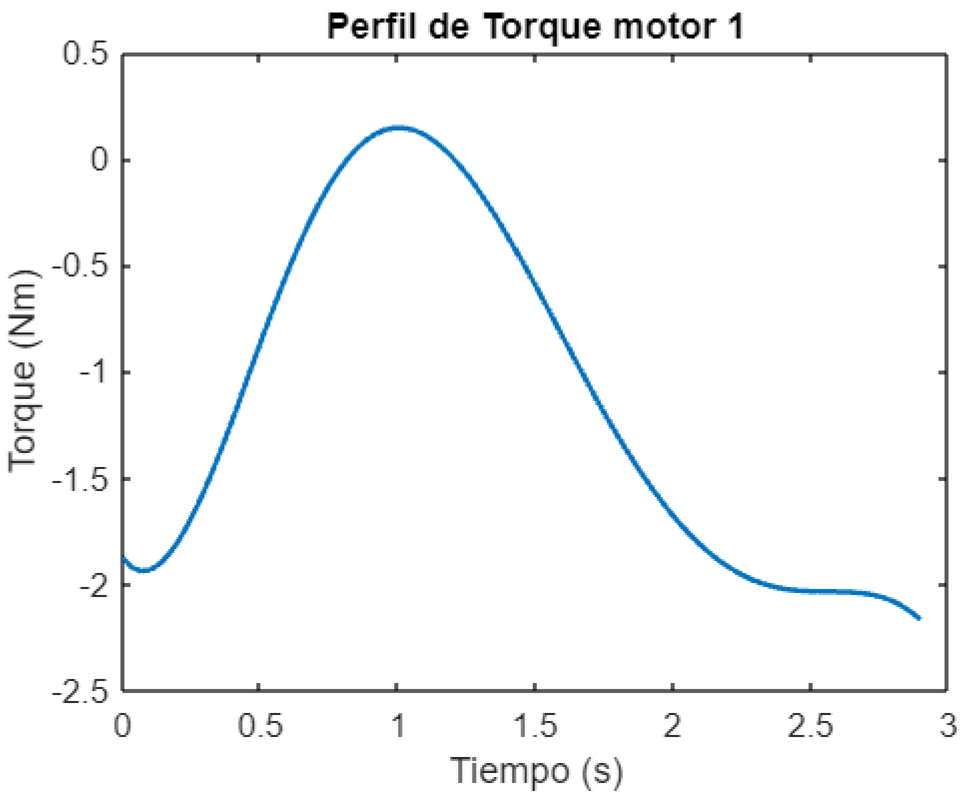
Después de procedimientos algebraicos de la expresión de torque, se encuentran diferentes expresiones que fueron simplificadas en A,B,C,D,E,F,H,M. Estas clasificadas por ser matrices de inercia, matriz de coriolis o matriz de términos gravitacionales.

```
%Ecuación torque eslabón superior.

A = m1*l1c^2+I1+m2*l1^2+m2*l2c^2+I2+2*m2*l1*l2c.*cos(q2s(3:end));
B = m2*l2c^2+I2+m2*l1*l2c.*cos(q2s(3:end));
D = 2*m2*l1*l2c.*sin(q2s(3:end));
E = 2*m2*l1*l2c.*sin(q2s(3:end));

tau1 = A.*a1 + B.*a2 + D.*w1(2:end).*w2(2:end) + E.*w2(2:end).*w2(2:end)+9.81 * ((m1*l1c+m2*l1)

%Ecuación torque eslabón inferior.

F = m2*l2c^2+m2*l1*l2c.*cos(q2s(3:end))+I2;
```

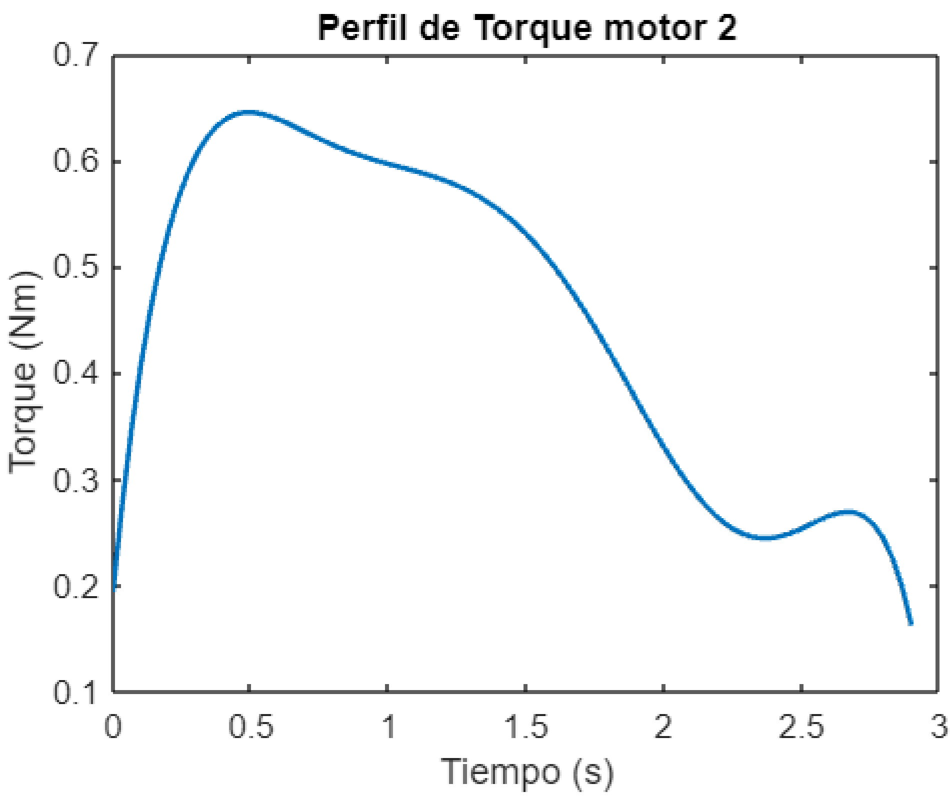
```
H = m2*l2c^2+I2;
M = -m2*l1*l2c.*sin(q2s(3:end));

tau2 = F.*a1+H*a2+M.*w1(2:end).*w2(2:end)-((-m2*l1*l2c.*sin(q2s(3:end)).*w1(2:end)).*(w1(2:end)
```

Gráficas:

```
%Perfil de torque motor 1
plot(tiempo(1:end-2),tau1,'LineWidth', 1.5)
title('Perfil de Torque motor 1');
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Torque (Nm)');
```




```
%Perfil de torque motor 2
plot(tiempo(1:end-2),tau2,'LineWidth', 1.5)
title('Perfil de Torque motor 2');
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Torque (Nm)');
```



Valores para dimensionar

Se halla el valor máximo tanto del torque como de la velocidad para dimensionar el motor a utilizar en este mecanismo.

Se crearon vectores para una mejor visualización:

$$\text{valores} = [\tau_{\min}\ \tau_{\max}\ \omega_{\min}\ \omega_{\max}]$$

```
%Eslabón superior
valores1 = [min(tau1) max(tau1) min(w1)*60/(2*pi) max(w1)*60/(2*pi)]
```

```
valores1 = 1×4
   -2.1646    0.1456   -7.0127    7.1922
```

```
%Eslabón inferior
valores2 = [min(tau2) max(tau2) min(w2)*60/(2*pi) max(w2)*60/(2*pi)]
```

```
valores2 = 1×4
    0.1626    0.6449   -8.4167   31.3884
```