1 Thematisch sortierte Aufgaben

Mechanik	Auftrieb/Archimedisches Prinzip
	Erzwungene Präzession/Kollergang
	Myonen
	Rakentenstart
	Relativitätstheorie
	Reise nach Australien
	Rotierende Raumstation
	Segelboot
	Strahlungsdruck
	Thermische Bewegung von Neutronen
	Walze auf schiefer Ebene
	Arbeit und Leistung am Wassertank
	Wurf in beschleunigtem Zug
	Zeppelin
Elektrodynamik	Belasteter Spannungsteiler
	Spule mit Eisenkern
	Elektronen im E- und B-Feld
	e/m-Bestimmung
	Energie im Kondensator
	Geschwindigkeitsfilter für Protonen
	Kondensator mit Dielektrika
	Intensität einer Lampe
	Kirchhoff
Thermodynamik	Eis im Kühlschrank
	Schwarzer Strahler
	(*) Thermische Bewegung von Neutronen
	Wärmekapazität
	Wärmeleitung
	Wärmekraftmaschine
	(*) Zeppelin
Optik + Quanten	Gitterspektralapparat
	Lichtleitfaser
	Michelson-Interferometer
	Newtonsche Ringe
	Punktförmige Lichtquelle
	Reflexion an dünner Schicht
	(*) Strahlungsdruck
	Totalreflexion am Wassertank
	Strahlengänge
Atomphysik	(*) Elektronen im E- und B-Feld
	Gravitationsatom

	Isotopie
	Lamorfrequenz
	Millikan-Versuch
	Wasserstoffspektrum
	Zyklotron
Kernphysik	(*) Isotopie
	(*) Myonen
	Neutronen in Wasser
	(*) Thermische Bewegung von Neutronen
Wellen	Dopplereffekt
	Harmonischer Oszillator
	Schwinger in Wasser/Gas
	Stehende Welle

2 Aufgaben

2.1 Auftrieb/Archimedisches Prinzip

In ein Wasserbecken (Grundfläche $A = 5\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m}$, Füllhöhe $h_0 = 1.5\,\mathrm{m}$) wird ein Boot gelassen ($m_\mathrm{B} = 40\,\mathrm{kg}$), in dem ein Stein liegt ($m_\mathrm{St} = 10\,\mathrm{kg}$, $\varrho_\mathrm{St} = 3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}$).

a) Wie ändert sich die Höhe des Wasserspiegels?
b) Wie ändert sich die Höhe des Wasserspiegels, wenn der Stein ins Wasser geworfen wird?

zur Lösung

2.2 Erzwungene Präzession/Kollergang

Ein Rad ($r = 0.5\,\mathrm{m}$, $m = 1500\,\mathrm{kg}$) ist an einer $R = 2\,\mathrm{m}$ langen Achse so gelagert, dass es beim Abrollen eine Kreisbahn beschreibt. Die Frequenz dieses Umlaufes beträgt $f_\mathrm{P} = 0.5\,\mathrm{Hz}$. Mit welcher Kraft drückt die Scheibe auf die Unterlage? Vektorielle Skizze!
zur Lösung

2.3 Myonen

Durch Höhenstrahlung entstehen in 10 km Höhe über der Erdoberfläche Myonen (Elementarteilchen, negativ geladen, etwa 200mal schwerer als ein Elektron). Sie bewegen sich mit der Geschwindigkeit $v = 0.9995c$ und zerfallen mit einer mittleren Lebensdauer $T_{1/2} = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$.

a) Wie groß ist die mittlere Lebensdauer im Bezugssystem Erde, welche Reichweite ergibt sich daraus?
b) Wie groß ist die Reichweite im Bezugssystem des Myons?
c) Wie lang ist die Strecke zwischen Entstehungsort und Erdoberfläche im Bezugssystem des Myons?

d) Erreichen die Myonen die Erde?

zur Lösung

2.4 Raketenstart

Eine Rakete mit Startmasse $m_0 = 100\,\mathrm{t}$ startet von der Erdoberfläche senkrecht nach oben. Die Verbrennungsgase treten mit $v = 4000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ relativ zur Rakete aus.

Die Erdbeschleunigung kann über die gesamte Höhe als konstant angesehen werden, Luftreibung vernachlässigen.

a) Welcher Gasausstoß $n_1 = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ ist nötig, damit die Rakete gerade eben schweben kann?
b) Nach welcher Zeit t_e hat die Rakete noch die halbe Startmasse, wenn der Gasausstoß $n_2 = 500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$ beträgt?
c) Wie groß ist die Beschleunigung zum Zeitpunkt t_e?
d) Welche Geschwindigkeit hat die Rakete zum Zeitpunkt t_e?
e) Wie hoch ist die Rakete gestiegen?
f) Welche Masse hat die Rakete, wenn sie die erste kosmische Geschwindigkeit $v_1 = 7.91\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$, die zweite kosmische Geschwindigkeit $v_2 = 11.18\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$? Wie lange dauert es? (Hinweis: hier muss die Erdanziehungskraft ignoriert werden.)

zur Lösung

2.5 Relativitätstheorie

Auf einen Körper der Masse $m = 1\,\mathrm{g}$ wirke eine konstante Kraft von $10\,\mathrm{N}$.

a) Wie groß ist die Beschleunigung?
b) Wie groß ist die Beschleunigung, wenn der Körper drei Viertel der Lichtgeschwindigkeit erreicht hat?

zur Lösung

2.6 Reise nach Australien (Weg durch Erdmittelpunkt)

Man betrachte einen durch die Erde gebohrten Tunnel und ein sich darin Reibungsfrei bewegendes Objekt. Gesucht sind

a) „Reisedauer“ für eine Durchquerung
b) Erreichte Höchstgeschwindigkeit
c) Zeit und Ort, wenn man seinen zu Beginn des Falls ausgestoßenen Angstschrei einholt.

Benötigte Konstanten: Gravitationskonstante $\gamma = 6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$, Erdradius $R \approx 6365\,\mathrm{km}$, mittlere Dichte der Erde $\varrho = 5515\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, Schallgeschwindigkeit $v_\mathrm{S} = 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
zur Lösung

2.7 Rotierende Raumstation

Eine zylinderförmige Raumstation mit dem Trägheitsmoment $J = 0.4{\cdot}10^9\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$ entlang der Zylinderachse rotiert um diese mit einer Umlaufzeit von $T_1 = 1\,\mathrm{min}$. Der Radius beträgt 50 m. Dort befinden sich vier tangential angebrachte Triebwerke.

a) Wie lange dauert es, bis am Rand der Raumstation die Zentrifugalkraft der Erdanziehungskraft entspricht, wenn jedes Triebwerk konstant 100 N Schub erzeugt?
b) Wie groß ist dabei die Winkelbeschleunigung α und wie viele Umdrehungen n macht die Raumstation dabei?
c) Wie groß ist die Enddrehfrequenz f_e, wenn (ausgehend von $1\,\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{min}}$) die Schubkraft sich wie folgt ändert: linearer Anstieg über 30 min von 0 N auf 100 N, 90 min konstant, dann linearer Abfall auf 0 N innerhalb von 15 min?

zur Lösung

2.8 Segelboot

Wie muss ein Segel im Wind stehen, wenn Zielkurs und Windrichtung voneinander abweichen?

(So ist die Aufgabenstellung einigermaßen sinnlos. Etwas sinnvoller wird sie, wenn man einen Kiel annimmt.)

zur Lösung

2.9 Strahlungsdruck

Ein Laserstrahl der Leistung $P = 19\,\mathrm{mW}$ wird auf eine Kreisfläche vom Radius $r = 6.2\,\mu\mathrm{m}$ fokussiert und trifft dort auf Plastikkugeln der Durchmesser $d = (0.59, 1.34, 2.68)\,\mu\mathrm{m}$, die in Wasser mit der Viskosität $\eta = 1.05 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\cdot s}}$ schwimmen.

a) Welche Geschwindigkeiten erreichen die Kugeln, wenn man von vollständiger Absorption und Parallelität der Laserstrahlen ausgeht?
b) Experimentell ergibt sich für die mittlere Kugel eine Geschwindigkeit von $26\,\frac{\mu\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Begründe die Abweichung von der Rechnung in a)

zur Lösung

2.10 Thermische Bewegung von Neutronen

Neutronen ($m_\mathrm{n} = 1.675{\cdot}10^{-27}\,\mathrm{kg}$) der Temperatur $T = 4.2\,\mathrm{K}$ treten aus einem Hohlraum aus und bilden hinter Blenden einen horizontalen Strahl, der ein 200 m langes Rohr durchquert. Freie Neutronen zerfallen mit einer Halbwertszeit von $t_{1/2} = 10.1\,\mathrm{min}$.

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit der Neutronen?
b) Wie lange und wie tief fallen die Neutronen während der Durchquerung des Rohrs?
c) Wie viel Prozent der Neutronen zerfallen währenddessen?

zur Lösung

2.11 Rollbewegungen

2.11.1 Walze auf schiefer Ebene („aus Altklausuren“)

Gegeben sind ein dünnwandiger und ein Vollzylinder mit ansonsten gleichen Eigenschaften ($r = 3\,\mathrm{cm}$, $m = 2\,\mathrm{kg}$), die eine schiefe Ebene mit Anstellwinkel $\alpha = 30°$ herunterrollen.

a) Trägheitsmomente bezüglich Rollachse?
b) Beschleunigung der Schwerpunkte?
c) (?) Rollzeiten bis zur Ruhe?

zur Lösung

2.11.2 Rollen auf Ebene

Zwei Walzen (eine hohl, andere voll, $m = 20\,\mathrm{kg}$, $r = 20\,\mathrm{cm}$) liegen auf einer Ebene.

a) Welche Beschleunigung erfahren die Zylinderschwerpunkte, wenn die Kraft $F = 40\,\mathrm{N}$ senkrecht zum Boden an der Zylinderachse angreift? Wie groß ist die Haftreibungskraft F_R? Die Zylinder sollen nur rollen.
b) Wie groß darf die Kraft F höchstens sein, damit die Zylinder nicht anfangen zu gleiten? (Haftreibungskoeffizient $\mu_0 = 0.3$)?
c) Wie groß ist die gesamte kinetische Energie, der Impuls des Schwerpunktes und der Drehimpuls bei einer Schwerpunktsgeschwindigkeit $v_\mathrm{S} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$?

zur Lösung

2.12 Arbeit und Leistung am Wassertank

Betrachte einen zylindrischen Tank mit $r = 2\,\mathrm{m}$ und $h = 3\,\mathrm{m}$.

a) Wie sind Arbeit und Leistung definiert?
b) Welche Arbeit ist nötig, um den Tank durch eine 10 m lange Leitung, die die 3 m Höhendifferenz überwindet und oben in den Tank mündet, zu füllen?
c) Welche Arbeit ist nötig, um den Tank durch eine 10 m lange horizontale Leitung, die am Tankboden einmündet, zu befüllen?
d) Der Tank soll in 60 s befüllt werden. Die Pumpe habe einen Wirkungsgrad von 0.95, der sie antreibende Elektromotor von 0.75. Berechne die elektrische Arbeit und Leistung des Motors.

Reibungskräfte sind zu vernachlässigen.
zur Lösung

2.13 Wurf in beschleunigtem Zug

In einem gleichförmig beschleunigtem ($a = 2.23\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$), genügend hohem(!) Zug wird ein Ball unter dem Winkel α zur Horizontalen abgeworfen. Wie groß ist α, wenn der Ball an seinem Abwurfort auftreffen soll?
zur Lösung

2.14 Zeppelin/Heißluftballon

2.14.1 Variante 1

Wie hoch kann ein Zeppelin mit festem Volumen $V = 25000\,\mathrm{m}^3$ und Heliumfüllung ($\varrho_{\mathrm{He}} = 0.179\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$) und weiteren festen Bestandteilen (im Inneren des Volumens) der Masse $m = 16400\,\mathrm{kg}$ bei konstanter Lufttemperatur ($\frac{p_{\mathrm{L}}}{\varrho_{\mathrm{L}}} = \mathrm{const.}$) aufsteigen? Für Luft gilt am Boden $p_0 = 100\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m}^2}$ und $\varrho_0 = 1.29\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

zur Lösung

2.14.2 Variante 2

Wie 1, bis auf: kugelförmiger Ballon mit (konstantem) Durchmesser d, Masse m. Gesucht sind Kräfte bei Start und maximale Steighöhe für Wasserstoff und Heliumfüllung.

zur Lösung

2.14.3 Variante 3

Wie 2, nur hat der Ballon unten eine kleine Öffnung. $d = 3\,\mathrm{m}$, $m = 2\,\mathrm{kg}$. Füllgas Wasserstoff mit $\varrho_{\mathrm{H},\,0} = 0.009\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ oder Helium mit $\varrho_{\mathrm{He},\,0} = 0.18\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

zur Lösung

2.15 Belasteter Spannungsteiler

Ein Gerät™mit Innenwiderstand R_{i} wird parallel zu R_2, der zusammen mit R_1 einen Spannungsteiler der Spannungsquelle U_0 bildet, angeschlossen.

a) Bestimmen Sie $U_2(R_{\mathrm{i}})$, diskutieren und skizzieren Sie diese.
b) Wie groß ist U_2 bei gegebenem $R_1 = 150\,\Omega$, $R_2 = 70\,\Omega$, $R_{\mathrm{i}} = 100\,\Omega$, $U_0 = 220\,\mathrm{V}$? Wie groß wäre U_2, wenn $R_{\mathrm{i}} \gg R_1$?
c) Wie groß ist R_{Ges}? Wie groß sind die Stromstärken durch die einzelnen Widerstände? Welche Leistung steht dem Gerät™zur Verfügung?
d) Welchen Innenwiderstand muss das Gerät™haben, damit die Leistung maximal wird? Wie groß sind dann R_{Ges}, U_2, P_{Ges}?
e) Vergleichen Sie das U_2 mit dem unbelasteten Spannungsteiler. Wie kann das Ergebnis mit dem Schaltbild erklärt werden?

zur Lösung

2.16 Spulen

2.16.1 Ringspule ohne Eisenkern

Eine Ringspule ohne Eisenkern mit dem Ringdurchmesser $D = 30\,\mathrm{cm}$ und dem Wicklungsdurchmesser $d = 3\,\mathrm{cm}$ ist mit $n = 1200$ Windungen Kupferdraht ($\varrho = 1.75 \cdot 10^{-6}\,\Omega\cdot\mathrm{cm}$) vom Querschnitt $A_{\mathrm{D}} = 0.75\,\mathrm{mm}^2$ bewickelt. Seine Enden liegen an $U = 40\,\mathrm{V}$.

a) Wie groß ist die magnetische Feldstärke im Inneren der Spule, in Abhängigkeit vom Abstand zur Spulenmitte? Wie groß ist die Feldstärke für den kleinsten, mittleren, größten Abstand? Wie groß ist der prozentuale Unterschied zwischen größter und kleinster Feldstärke?
b) Wie groß ist die Flussdichte auf der Spulenmitte? Wie groß ist der Fluss, wenn überall diese Flussdichte herrschen würde?
c) Welcher Spannungsstoß wird in einer Sekundärwicklung mit $n_2 = 5$ Windungen induziert, wenn die Spannung an der Primärwicklung ausgeschaltet wird? (Hinweis: Spannungsstoß ist analog zum Kraftstoß ein Ding der Dimension Vs.)

zur Lösung

2.16.2 Ringspule mit Eisenkern und Lücke

Die selbe Situation wie in Ringspule ohne Eisenkern, nur diesmal mit Eisen gefüllter Ring ($\mu_r = 70$).

a) Wie groß sind H, B, Φ, L?
b) Der Eisenkern wird radial $l_0 = 1\,\text{mm}$ breit aufgesägt. Wie hängen Stromstärke I, Flussdichte B und Spaltbreite l_0 voneinander ab? Wie groß muss I sein, um dieselbe Flussdichte wie in a) zu erzielen? Wie groß sind die Feldstärken im Eisen und im Spalt?
c) Mit welcher Kraft ziehen sich die Spaltflächen an?

zur Lösung

2.17 Elektronen im elektrischen/magnetischen Feld

a) Welche Kraft erfährt ein Elektron im elektrischen Feld?
b) Welche Geschwindigkeit hat ein Elektron, das durch die Spannung U beschleunigt wurde?
c) Wie bewegt sich ein Elektron, wenn es mit der Geschwindigkeit v senkrecht zu den Feldlinien auf ein homogenes elektrisches Feld trifft?
d) Welche Kraft erfährt ein Elektron im magnetischen Feld?
e) Wie bewegt sich ein Elektron im magnetischen Feld?
f) Ein Elektron wird durch U_B beschleunigt und fliegt dann parallel zu den Platten in einen Kondensator mit Länge l und Plattenabstand d, an dessen Ende sich ein Schirm befindet. Unter welchem Winkel wird es durch die Spanung U_A abgelenkt? Wie muss ein Magnetfeld beschaffen sein, dass diese Ablenkung aufhebt?
g) Rechnung mit Zahlen: gegeben eine Ablenkung von $\alpha = 10°$, $l = 5\,\text{cm}$, $d = 2\,\text{cm}$, $U_\text{A} = 600\,\text{V}$: wie schnell waren die Elektronen vor dem Kondensator? Wie groß muss B sein, um die Ablenkung zu kompensieren?
h) Protonenfilter

zur Lösung

2.18 Energie im Kondensator

a) Bestimmen Sie die Energie in einem Kondensator
b) Zu einem geladenen (ansonsten nirgends angeschlossenen) Kondensator wird ein baugleicher parallelgeschaltet. Wie sind nach genügend langer Zeit Ladungen und Energie verteilt?
c) Vergleichen Sie die Energien und erklären Sie den Unterschied!

zur Lösung

2.19 Kondensator mit Dielektrika

Ein Kondensator mit quadratischen Platten (Länge l) und Pattenabstand d ist mit verschiedenen Dielektrika gefüllt ($\varepsilon_1 = 6$, $\varepsilon_2 = 12$).

a) Die Dielektrika liegen nebeneinander zwischen den Platten (je zur Hälfte). Berechnen Sie die Ladungen Q_1 und Q_2 bei gegebener Gesamtladung Q.
b) Die Dielektrika liegen übereinander (Dicke jeweils $d/2$). Berechnen Sie Teilladungen, Teilspannungen und Teilkapazitäten bei gegebener Gesamtspannung U.

zur Lösung

2.20 Widerstände (Stern/Ring)

a) Berechnen Sie den Gesamtwiderstand zwischen je zwei Punkten in einer Dreiecksschaltung.
b) Bestimmen Sie die drei Widerstände einer Sternschaltung, so dass zwischen den Eckpunkten die selben Gesamtwiderstände herrschen wie in der Dreiecksschaltung aus a)

zur Lösung

2.21 Eis im Kühlschrank

Welche Masse eines Kältemittels (Wirkungsgrad 0.8, spezifische Verdampfungswärme Ammoniak 1300 $\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$) muss verdampfen, um 150 g Wasser von 16 °C zu Eis bei 0 °C umzuwandeln? Die spezifische Wärmekapazität von Wasser ist $c_\mathrm{W} = 4.182\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\cdot K}}$, die spezifische Schmelzwärme von Eis $s_\mathrm{E} = 333.5\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g}}$.
zur Lösung

2.22 Schwarzer Strahler/Sonnenscheibe

Eine dünne schwarze Scheibe (Radius r) steht in der Brennebene eines Parabolspiegels ($R = 10\,\mathrm{cm}$, $f = 1\,\mathrm{m}$) so, dass die Sonne genau auf die Scheibe abgebildet wird. Die Sonne sei ein Schwarzer Strahler bei $T_\mathrm{S} = 6000\,\mathrm{K}$. Berechnen Sie die Temperatur der Scheibe im Gleichgewicht.

Hinweise: Eliminieren Sie den Sonnenradius R_S und den Abstand R_{SE} zwischen Erde und Sonne durch die Abbildungsgleichung. Der Strahlungsfluss der Scheibe und der Sonne seien proportional zur Fläche (≈ betrachte die Sonne als Scheibe). Die Wärmeleitung durch die Luft wird vernachlässigt.

zur Lösung

2.23 Wärmekapazität

Ein Alublock ($l \times b \times h = 5 \times 4 \times 2\,\mathrm{cm}^3$, $\varrho = 2.72\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$, $T_{\mathrm{Al}} = 100\,°\mathrm{C}$) wird in ein Kalorimeter gegeben, in dem sich Wasser bei $T_{\mathrm{W}} = 17\,°\mathrm{C}$ befindet. Wie groß ist die spezifische Wärmekapazität c_{al}, wenn sich eine Gleichgewichtstemperatur $T_{\mathrm{GG}} = 24.1\,°\mathrm{C}$ einstellt?

Es ist $c_{\mathrm{W}} = 4.19\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg \cdot K}}$ und $C_{\mathrm{Kal}} = 209\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$.

zur Lösung

2.24 Wärmeleitung

Um wie viel Prozent sinken die Heizkosten, wenn eine $d = 20\,\mathrm{cm}$ dicke Betonwand mit $s = 2\,\mathrm{cm}$ Styropor isoliert wird? Die Wärmeleitkoeffizienten sind $\lambda_{\mathrm{B}} = 2.1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot K}}$ und $\lambda_{\mathrm{S}} = 0.3\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m \cdot K}}$.

zur Lösung

2.25 Dopplereffekt

Eine Lok fährt mit $10\,\frac{\mathrm{km/h}}{}$ von einer Wand weg und auf einen Beobachter zu. Ein Laserstrahl wird auf der Lok strahlgeteilt und trifft einmal direkt auf den Beobachter und einmal über einen an der Wand befestigten Spiegel. Welche Schwebungsfrequenz wird gemessen?

zur Lösung

3 Lösungen

3.1 zu Auftrieb/Archimedisches Prinzip

a) Durch Boot und Stein wird Wasser entsprechend der Gesamtmasse verdrängt:

$$\Delta V = \frac{m_\mathrm{B} + m_\mathrm{St}}{\varrho_\mathrm{Wasser}} = \frac{50\,\mathrm{kg}}{1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} = 0.05\,\mathrm{m}^3.$$

Bei der gegebenen Grundfläche A entspricht dies einem Anstieg des Wasserspiegels von

$$\Delta V = \Delta h \cdot A \Rightarrow \Delta h = \frac{\Delta V}{A} = \frac{0.05\,\mathrm{m}^3}{25\,\mathrm{m}^2} = 0.002\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{mm}.$$

b) Wenn der Stein ins Wasser geworfen wird, verdrängt er nur noch sein Volumen und nicht mehr seine Masse:

$$V_\mathrm{St} = \frac{m_\mathrm{St}}{\varrho_\mathrm{St}} = \frac{10\,\mathrm{kg}}{3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{dm}^3}} = \frac{10}{3 \cdot 1000}\,\mathrm{m}^3.$$

Das Boot verdrängt weiterhin so viel Wasser, wie seinem Gewicht entspricht. Der Wasserspiegel ändert sich gegenüber der Situation „ohne Boot und Stein“ um

$$\Delta h = \frac{V_\mathrm{B} + V_\mathrm{St}}{A} = \frac{0.04\,\mathrm{m}^3 + \frac{1}{300}\,\mathrm{m}^3}{25\,\mathrm{m}^2} = 0.0017\overline{3}\,\mathrm{m} \approx 1.73\,\mathrm{mm}$$

3.2 zu Erzwungene Präzession/Kollergang

Neben der Gewichtskraft wirkt durch die (erzwungene) Präzession (Aufgabentitel!) eine weitere, senkrecht nach unten gerichtete Kraft.

Die Präzession hängt von der Kreisfrequenz des Rades um seine Hauptträgheitsachse ab. Der Umfang des von dem Rad abgefahrenen Kreises beträgt $U_R = 2\pi R$ und ist wegen $R = 4r$ viermal so groß wie der Umfang des Rades. Daher muss das Rad pro Umdrehung um die senkrechte mittlere Achse vier Umdrehungen um die eigene Achse machen:

$$\omega_\mathrm{p} = 2\pi f_\mathrm{P}$$
$$\omega_r = 4\omega_\mathrm{p}$$

Für eine Präzessionsbewegung gilt allgemein

$$\omega_\mathrm{P} = \frac{M}{L} = \frac{RF_\mathrm{P}}{L} = \frac{RF_\mathrm{P}}{J\omega_r}$$
$$\Rightarrow F_\mathrm{P} = \frac{\omega_\mathrm{P}\omega_r m r^2}{2R}$$

wobei M das Drehmoment auf den Kreisel und L sein Drehimpuls ist. Für einen Zylinder ergibt sich das Trägheitsmoment zu $J = \frac{1}{2}mr^2$

Mit dem Zusammenhang der Kreisfrequenzen ω_P und ω_r ergibt sich schließlich

$$F_\mathrm{P} = \frac{16\pi^2 f_\mathrm{P}^2 m r^2}{2R} = 8\pi^2 \frac{(0.5\,\mathrm{Hz})^2 \cdot 1500\,\mathrm{kg} \cdot (0.5\,\mathrm{m})^2}{2\,\mathrm{m}} = 3701\,\mathrm{N}$$

für die Kraft durch die Präzession. Dazu kommt die Gewichtskraft gemäß $F_\mathrm{G} = mg$:

$$F_\mathrm{Ges} = F_\mathrm{P} + F_\mathrm{G} = 3701\,\mathrm{N} + 1500\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 3701\,\mathrm{N} + 14715\,\mathrm{N} = 18416\,\mathrm{N}$$

3.3 zu Myonen

Das gestrichene System (s', $T'_{1/2}$) ist das erdfeste System, in dem sich die Myonen bewegen.

a) Aufgrund der hohen Geschwindigkeit muss die relativistische Zeitdilatation berücksichtigt werden.

$$T'_{1/2} = \frac{T_{1/2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}}{\sqrt{1-0.9995^2}} = 6.325 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s} \quad (\approx 30 \cdot T_{1/2})$$

Die Reichweite ergibt sich aus Geschwindigkeit und durch die Bewegung verlängerte Lebensdauer (die „innere Uhr" des Myons ist bewegt, dadurch langsamer):

$$s' = vT'_{1/2} = 0.9995c \cdot 6.325 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} = 1.896 \cdot 10^4\,\mathrm{m}$$

b) Die Reichweite im eigenen Bezugssystem ergibt sich aus der „tatsächlichen" mittleren Lebensdauer.

$$s = vT_{1/2} = 0.9995c \cdot 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s} = 599.29\,\mathrm{m}$$

c) Die Strecke zwischen Entstehungsort und Erdoberfläche scheint für die Myonen wegen der Längenkontraktion verkürzt.

$$l' = l\sqrt{1-0.9995^2} = 10 \cdot 10^3\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{1-0.9995^2} = 316.19\,\mathrm{m}$$

d) Sowohl a) als auch b) und c) zeigen, dass die Myonen die Erde erreichen können, da die während der mittleren Lebensdauer zurückgelegten Strecken länger als der Abstand Entstehungsort-Erdoberfläche im jeweiligen Bezugssystem ist.

3.4 zu Raketenstart

a) Der Impuls des Gasausstoßes muss die Gewichtskraft der Rakete aufbringen:

$$F = \dot{p} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} \overset{v=\mathrm{const}}{=} v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \overset{!}{=} m_0 g$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{mg}{v} = \frac{100 \cdot 10^4\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{4000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 245.25\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

b) Die Masse zu einem beliebigen Zeitpunkt beträgt $m(t) = m_0 - n_2 t$. Also

$$\frac{1}{2} m_0 = m_0 - n_2 t_\mathrm{e} \Rightarrow t_\mathrm{e} = \frac{m_0}{2 n_2} = \frac{100 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}}{2 \cdot 500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}} = 100\,\mathrm{s}$$

c)

$$F = m_{1/2} a = v \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \Longrightarrow a = \frac{v}{m_{1/2}} \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{4000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{50000\,\mathrm{kg}} \cdot 500\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} = 40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Zusätzlich muss die Erdanziehungskraft berücksichtigt werden, so dass sich insgesamt die Beschleunigung

$$a_\mathrm{Ges} = a - a_G = 40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} - 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 30.19\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

ergibt.

d) Mit der Raketengrundgleichung

$$v(t) = v_\mathrm{a} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \dot{m} t}\right)$$

ergibt sich zur Zeit, bei der die Rakete ihre halbe Masse verloren hat

$$v(t_\mathrm{e}) = v_\mathrm{a} \ln 2 = 2773\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Auch hier muss mit der Erdbeschleunigung korrigiert werden, die die ganze Zeit über konstant wirkt:

$$v_\mathrm{G}(t_\mathrm{e}) = v(t_\mathrm{e}) - g t_\mathrm{e} = 2773\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} - 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 100\,\mathrm{s} = 1792\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

e) Wegen $x(t) = \int_0^t v(t')\mathrm{d}t'$ muss die Raketengrundgleichung integriert werden. Analog zur Herleitung der Stammfunktion des Logarithmus ($\int \ln x \mathrm{d}x = x \ln x - x$) kann dazu partielle Integration ($\int f'(x) g(x) \mathrm{d}x = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) \mathrm{d}x$) mit $f' = 1$ angewendet werden, alternativ kann auch

$$\int \ln \frac{a}{a - bt} \mathrm{d}t = \int \ln a \mathrm{d}t - \int \ln(a - bt) \mathrm{d}t$$

gefolgt von Integration durch Substitution angesetzt werden.

$$
\begin{aligned}
\int \ln \frac{a}{a-bt}\mathrm{d}t &= \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\ln \frac{a}{a-bt}}_{g} \mathrm{d}t \\
&= t \cdot \ln \frac{a}{a-bt} - \int t \left(\ln \frac{a}{a-bt} \right)' \mathrm{d}t \\
&= t \cdot \ln \frac{a}{a-bt} - \int t \frac{a-bt}{a} \cdot \frac{ab}{(a-bt)^2} \mathrm{d}t \\
&= t \cdot \ln \frac{a}{a-bt} - \int \frac{bt}{a-bt} \mathrm{d}t && | + a - a \\
&= t \cdot \ln \frac{a}{a-bt} + \int \frac{a-bt-a}{a-bt} \mathrm{d}t \\
&= t \cdot \ln \frac{a}{a-bt} + t - a \int \frac{1}{a-bt} \mathrm{d}t && | \text{ Subst.}, u(t) = bt \\
&= t \cdot \ln \frac{a}{a-bt} + t - \frac{a}{b} \ln \frac{1}{a-bt} + C && | \text{ ab hier optional} \\
&= t \cdot \ln \frac{a}{a-bt} + t - \frac{a}{b} \ln \frac{a}{a-bt} + C' \\
&= \left(t - \frac{a}{b} \right) \cdot \ln \frac{a}{a-bt} + t + C' \\
&= \left(\frac{a-bt}{b} \right) \cdot \ln \frac{a-bt}{a} + t + C'
\end{aligned}
$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
x(t) = \int_0^t v(t')\mathrm{d}t' &= v_\mathrm{a} \left[\frac{m_0 - \dot{m}t'}{\dot{m}} \cdot \ln \frac{m_0 - \dot{m}t'}{m_0} + t' \right]_0^t - \left[\frac{1}{2} g t'^2 \right]_0^t \\
&= v_\mathrm{a} \left(\frac{m_0 - \dot{m}t'}{\dot{m}} \cdot \ln \frac{m_0 - \dot{m}t'}{m_0} + t' \right) - \frac{1}{2} g t^2
\end{aligned}
$$

Was sich für $t = t_\mathrm{e}$ mit $m_0 - \dot{m}t_\mathrm{e} = m_0/2$ weiter vereinfacht zu

$$
\begin{aligned}
x(t_\mathrm{e}) &= v_\mathrm{a} \left(\frac{m_0}{2\dot{m}} \cdot \ln \frac{1}{2} + t_\mathrm{e} \right) - \frac{1}{2} g t_\mathrm{e}^2 \\
&= 4000 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \left(\frac{100 \cdot 10^3 \, \mathrm{kg}}{2 \cdot 500 \, \mathrm{kg}} \cdot \ln \frac{1}{2} + 100 \, \mathrm{s} \right) - \frac{1}{2} \cdot 9.81 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (100 \, \mathrm{s})^2 \\
&= 73.69 \, \mathrm{km}
\end{aligned}
$$

f) Aus der Raketengrundgleichung ergibt sich

$$v(t) = v_\mathrm{a} \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t}\right) \Rightarrow e^{\frac{v}{v_\mathrm{a}}} = \frac{m_0}{m_0 - \dot{m}t}$$
$$\Rightarrow e^{-\frac{v}{v_\mathrm{a}}} = 1 - \frac{\dot{m}t}{m_0}$$
$$\Rightarrow t = \frac{m_0}{\dot{m}}\left(1 - e^{-\frac{v}{v_\mathrm{a}}}\right)$$

also für $v_1 = 7.91\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ die Zeit $t_1 = 172.3\,\mathrm{s}$ und für $v_2 = 11.18\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ die Zeit $t_2 = 187.8\,\mathrm{s}$. Die Massen ergeben sich mit $m(t) = m_0 - \dot{m}t$ zu $m_1 = 13.84\,\mathrm{t}$ und $m_2 = 6.11\,\mathrm{t}$.

3.5 zur Relativitätstheorie

a)

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{10\,\mathrm{N}}{1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}} = 10 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

b) Bei hohen Geschwindigkeiten bewirkt eine Kraft sowohl eine Geschwindigkeits- als auch eine Massenänderung, daher gilt nicht länger $F = ma$, sondern folgendes:

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},$$

wobei

$$m = m_0\gamma \text{ mit } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Also

$$
\begin{aligned}
F &= vm_0\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} + m_0\gamma\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\
&= m_0\left(v\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{v^2(t)}{c^2}\right)^{-1/2}\right) + \left(1-\frac{v^2(t)}{c^2}\right)^{-1/2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= m_0\left(v\cdot -\frac{1}{c^2}\cdot a\cdot 2v\cdot -\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} + \left(1-\frac{v^2(t)}{c^2}\right)^{-1/2} a\right) \\
&= m_0 a\gamma\left(\frac{v^2}{c^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} + 1\right) \\
&= m_0 a\gamma\left(\frac{v^2}{c^2-v^2} + 1\right) \\
&= m_0 a\gamma\left(\frac{c^2}{c^2-v^2}\right) \\
&= m_0 a\gamma\left(\frac{1}{\frac{c^2}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}}\right) \\
&= m_0 a\gamma\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \\
&= m_0 a\gamma^3,
\end{aligned}
$$

für die Beschleunigung also

$$
a = \frac{F}{m_0\gamma^3} = \frac{10\,\mathrm{N}\cdot\sqrt{1-\frac{9}{16}}^{\,3}}{0.001\,\mathrm{kg}} = 2894\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}
$$

3.6 zu Reise nach Australien (Weg durch Erdmittelpunkt)

Zentral ist die Tatsache, dass nur die Masse innerhalb der Kugel mit Radius Erdmittelpunkt-momentaner Ort des fallenden Körpers relevant ist.

Für die Gravitationskraft gilt allgemein

$$
F_{\mathrm{G}}(r) = -\frac{\gamma m M}{r^2}.
$$

Die anziehende Masse M ist ebenfalls von r abhängig:

$$
M = \varrho V = \varrho\frac{4}{3}\pi r^3,
$$

so dass die wirkende Gravitationskraft

$$
F_{\mathrm{G}}(r) = -\frac{4}{3}\pi\gamma\varrho r\cdot m
$$

ist. Mit dem zweiten Newtonschen Gesetz $F = ma = m\ddot{r}$ ergibt sich die Differentialgleichung

$$-\frac{4}{3}\pi\gamma\varrho r = \ddot{x},$$

die Bewegung ist also von der Masse des fallenden Körpers unabhängig. Gelöst wird die Gleichung mit dem Ansatz $r(t) = R\cos(\omega t)$ mit $\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\pi\gamma\varrho}$. Der Kosinus ergibt sich aus der Anfangsbedingung $\dot{r}(0) = 0$, die Skalierung mit R wegen $r(0) = R$.

a) Die „Reisedauer“ ergibt sich aus ω wie folgt:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi \cdot 6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2} \cdot 5515\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}} = 5060\,\mathrm{s}$$

für eine „Rundreise“, also für einen Weg $T_{1/2} = 2530\,\mathrm{s} = 42\,\mathrm{min}10\,\mathrm{s}$.

b) Die Höchstgeschwindigkeit wird im Erdmittelpunkt erreicht. Sie ergibt sich aus der Ableitung $\dot{r}(t) = -R\omega\sin(\omega t)$ mit dem Maximalbetrag $\dot{r}_{\max} = R\omega$.

$$\dot{r}_{\max} = 6365 \cdot 10^3\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}\pi \cdot 6.674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2} \cdot 5515\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}} = 7903\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

c) Die Gleichung $R\cos(\omega t) = R - v_{\mathrm{S}}t$ ist nur numerisch zu lösen. Ein TI-83 liefert $t = 69.34\,\mathrm{s}$ und $r = 6341\,\mathrm{km}$.

Wenn man die Maximalgeschwindigkeit mit der Schallgeschwindigkeit vergleich, so kann man zu dem Schluss kommen, dass der gesuchte Zeitpunkt kurz nach dem Start liegt und eine Taylorentwicklung um $t = 0$ der Bewegungsgleichung ansetzen:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(t)_{t\approx 0} &= R\left(\frac{r(0)}{0!}t^0 + \frac{\dot{r}(0)}{1!}t^1 + \frac{\ddot{r}(t)}{2!}t^2\right)\\ &= R\left(1 + 0 + \frac{-\omega^2}{2}t^2\right)\\ &= R\left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{2}\right)\end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich die lösbare quadratische Gleichung

einfach durch t teilen!

$$\begin{aligned}R\left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{2}\right) &= R - v_{\mathrm{S}}t\\ \Leftrightarrow R\frac{\omega^2 t^2}{2} &= v_{\mathrm{S}}t\\ \Leftrightarrow t^2 - \frac{2v_{\mathrm{S}}}{R\omega^2}t &= 0\\ \Rightarrow t &= -\frac{v_{\mathrm{S}}}{R\omega^2} \pm \sqrt{\left(\frac{v_{\mathrm{S}}}{R\omega^2}\right)^2}\\ \Rightarrow t = 0 \vee t &= \frac{2v_{\mathrm{S}}}{R\omega^2} = \frac{2 \cdot 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{6365 \cdot 10^3\,\mathrm{m} \cdot \left(1.242 \cdot 10^{-3}\,\frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2} = 69.26\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

in sehr guter Übereinstimmung mit dem numerisch gefundenem Wert. Fallstrecke!

3.7 zu Rotierende Raumstation

a) Gesucht ist $F_Z = F_G$, also

$$m\omega r^2 = mg \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{r}} = \sqrt{\frac{9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{50\,\mathrm{m}}} = 0.443\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Die Dauer bis zu dieser Winkelgeschwindigkeit ergibt sich aus $\omega = \alpha t + \omega_0$, also mit α aus b):

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0.443\,\frac{1}{\mathrm{s}} - \frac{2\pi}{60\,\mathrm{s}}}{5 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}} = 6766\,\mathrm{s}$$

b) Die Winkelbeschleunigung hängt von Drehmoment und Trägheitsmoment ab, $M = J\alpha$ (analog $F = ma$). Mit $\vec{M} = 4\vec{r} \times \vec{F} = 4rF = 20\,\mathrm{kN}$ ergibt sich

$$\alpha = \frac{M}{J} = \frac{20 \cdot 10^3\,\mathrm{N}}{0.4 \cdot 10^9\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2} = 5 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}$$

Die Anzahl der Umdrehungen ergibt sich aus dem Drehwinkel $\varphi = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t$ (vgl. $s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t (+s_0)$ zu

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-5}\,\frac{1}{\mathrm{s}^2} \cdot (6766\,\mathrm{s})^2 + \frac{2\pi}{60}\,\frac{1}{\mathrm{s}} \cdot 6766\,\mathrm{s} = 1853$$

und daraus die Anzahl der Umdrehungen $n = \varphi/2\pi = 294.9$.

c) Der Kraftstoß durch jedes Triebwerk ergibt sich durch Integration $\int F\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot 30\,\mathrm{min} \cdot 60\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{min}} \cdot 100\,\mathrm{N} + 90 \cdot 60 \cdot 100\,\mathrm{Ns} + \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 60 \cdot 100\,\mathrm{Ns} = 675 \cdot 10^3\,\mathrm{Ns}$. Daraus ergibt sich eine Änderung des Drehimpulses $\Delta L = 4r \int F\mathrm{d}t = 135 \cdot 10^6\,\mathrm{Nms}$, was einer Winkelgeschwindigkeitsänderung gemäß $\Delta L = J\Delta\omega$ von

$$\Delta\omega = \frac{135 \cdot 10^6\,\mathrm{Nms}}{0.4 \cdot 10^9\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2} = 0.3375\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

entspricht. Ausgehend von ω_0 also $n_2 = (\omega_0 + \Delta\omega)/2\pi = 4.223\,\frac{1}{\mathrm{min}}$

3.8 zu Segelboot

Das Segel kann nur Impuls senkrecht zur Segelfläche aufnehmen, daher muss das Segel in Kursrichtung stehen.

3.9 zu Strahlungsdruck

Die Bestrahlungsstärke im Fokus ergibt sich zu

$$E_{\mathrm{e,\,F}} = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi r^2} = \frac{19 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W}}{\pi \cdot (6.2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m})^2} = 1.573 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Für den Strahlungsdruck gilt $p = \frac{E_{\mathrm{e,\,F}}}{c} = 0.5247\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$. Dieser Druck wird von der Querschnittsfläche der Kugeln aufgenommen und führt so zu einer Kraft. Durch die geschwindigkeitsabhängige Stokessche Reibung erreichen die Kugeln so eine konstante Endgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{S}} = p \cdot A_{\mathrm{K}}\ , \quad F_{\mathrm{R}} &= 6\pi\eta r v \\ \Rightarrow p \cdot A_{\mathrm{K}} &= 6\pi\eta r v \\ \Rightarrow v &= \frac{p \cdot \pi r^2}{6\pi r \eta} \\ \Rightarrow v &= \frac{p \cdot d}{12\eta} \end{aligned}$$

und damit $v = (24.57, 55.80, 111.6)\,\frac{\mu\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
Die Abweichung des experimentellen Wertes kann verschiedene Ursachen haben:

- Die Querschnittsfläche der Kugel steht nicht senkrecht zur Strahlrichtung
- Vollständige Absorption ist nicht möglich
- Verlust im Wasser

3.10 zu Thermische Bewegung von Neutronen

a) Die Neutronen sind als ideale Gasteilchen zu betrachten. Gemäß der kinetischen Gastheorie gilt $pV = k_{\mathrm{B}}T = \frac{1}{3}m_{\mathrm{n}}\overline{v}^2$, damit

$$\overline{v} = \sqrt{3k_{\mathrm{B}}T \cdot \frac{1}{m_{\mathrm{n}}}} = \sqrt{3 \cdot 1.381 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \cdot 4.2\,\mathrm{K} \cdot \frac{1}{1.675 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}} = 322.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Für die Durchquerung des Rohrs benötigen die Neutronen also $t = s/v = 200\,\mathrm{m}/322.3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 0.6205\,\mathrm{s}$. Währenddessen fallen sie $h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (0.6205\,\mathrm{s})^2 = 1.889\,\mathrm{m}$ tief.

b) Die Neutronen zerfallen gemäß

$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/T_{1/2}} = N_0 \cdot 2^{-0.6205\,\mathrm{s}/606\,\mathrm{s}} = N_0 \cdot 0.99929$$

Es zerfallen also nur 0.071% der Neutronen beim Durchqueren des Rohres.

3.11 Rollbewegungen

3.11.1 zu Walze auf schiefer Ebene („aus Altklausuren“)

a) Das Trägheitsmoment eines Hohlzylinders ist $J_{\mathrm{H}} = mr^2$, das eines Vollzylinders nur halb so groß, $J_{\mathrm{V}} = \frac{1}{2}mr^2$. Herleitung: für Körper homogener Dichte gilt allgemein $J = \varrho \int r_\perp^2 \mathrm{d}V$. ($r_\perp$ ist Abstand des Volumenelements zur Rotationsachse.)

In Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
J_{\mathrm{V}} &= \varrho \int_V r_\perp^2 \,\mathrm{d}V \\
&= \varrho \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^r r'^2 r' \mathrm{d}r' \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}h \\
&= \varrho \cdot h \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} r^4 = \frac{1}{2} \varrho \pi r^2 h \cdot r^2 = \frac{1}{2} m r^2
\end{aligned}$$

Für den Hohlzylinder gilt wie für die Punktmasse $J_{\mathrm{H}} = mr^2$, alternativ mit derselben Integration wie oben, wobei allerdings nicht von 0, sondern von $r - a$ bis r Integriert wird, mit der (kleinen) Wanddicke a:

$$\begin{aligned}
J_{\mathrm{H}} &= \varrho \cdot h \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} \left[r^4 - (r-a)^4 \right] \\
&= \varrho \cdot h \cdot \frac{\pi}{2} \left[r^4 - r^4 + 4r^3 a \underbrace{- 6r^2 a^2 + 4ra^3 - a^4}_{\approx 0,\ \text{weil } a \approx 0} \right] = 2\pi \varrho h a r^3
\end{aligned}$$

Für die Masse des dünnen Zylindermantels ergibt sich $m = 2\pi \varrho h a r$, daher $J_{\mathrm{H}} = mr^2$.

3.12 zu Rollen auf Ebene

a) An die Rolle greifen zwei Kräfte an: die beschleunigende Kraft F an der Zylinderachse und die Reibungskraft F_{R} (entgegengesetzt) am Auflagepunkt. Zu der Reibungskraft werden im Schwerpunkt $F'_{\mathrm{R}} = F_{\mathrm{R}}$ und $-F'_{\mathrm{R}} = -F_{\mathrm{R}}$ hinzugefügt, die sich gegenseitig aufheben. Das Kräftepaar $(F_{\mathrm{R}}, -F'_{\mathrm{R}})$ bewirkt ausschließlich ein Drehmoment $M = rF_{\mathrm{R}}$, während F'_{R} die beschleunigende Kraft vermindert. Es gilt $F - F_{\mathrm{R}} = ma$ und $M = rF_{\mathrm{R}} = J\alpha$ und mit der Rollbedingung $a = \alpha r$ ($v = \omega r$, $s = \varphi r$):

$$F - \frac{Ja}{r^2} = ma \Rightarrow F = \left(m + \frac{J}{r^2} \right) a \Rightarrow a = \frac{F}{m + \frac{J}{r^2}}$$

$$F - F_{\mathrm{R}} = m \frac{F}{m + \frac{J}{r^2}} \Rightarrow F_{\mathrm{R}} = F \left(1 - \frac{m}{m + \frac{J}{r^2}} \right)$$

Für den Hohlzylinder mit $J = mr^2$ ergibt sich also

$$a = \frac{F}{2m} = \frac{40\,\mathrm{N}}{2 \cdot 20\,\mathrm{kg}} = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad F_{\mathrm{R}} = F \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 20\,\mathrm{N}$$

und für den Vollzylinder mit halbem Trägheitsmoment, $J = \frac{1}{2} mr^2$:

$$a = \frac{F}{\frac{3}{2} m} = \frac{2 \cdot 40\,\mathrm{N}}{3 \cdot 20\,\mathrm{kg}} = 1.333\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad F_{\mathrm{R}} = F \left(1 - \frac{2}{3} \right) = 13.33\,\mathrm{N}$$

b) Die (maximale) Haftreibung beträgt $F_{\text{R, max}} = \mu_0 F_\text{N} = \mu_0 mg = 0.3 \cdot 20\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 58.86\,\text{N}$. Für den Hohlzylinder mit $F = 2F_\text{R}$ ist also $F_\text{max} = 2F_{\text{R, max}} = 117.7\,\text{N}$, für den Vollzylinder $F_\text{max} = 3F_{\text{R, max}} = 176.6\,\text{N}$.

c) Der Impuls ist für beide Zylinder gleich, da die Rotation unberücksichtigt bleibt, $p = mv = 20\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 200\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$. Die kinetische Energie setzt sich aus Rotation und Translation zusammen. Mit $\omega = \frac{v}{r}$ ergibt sich

$$E_\text{kin} = E_\text{t} + E_\text{r} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}v^2\left(m + \frac{J}{r^2}\right)$$

also

$$E_{\text{kin, VZ}} = \frac{1}{2}\left(10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 20\,\text{kg} = 1.5\,\text{kJ}, \quad E_{\text{kin, HZ}} = \frac{1}{2}\left(10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 2 \cdot 20\,\text{kg} = 2\,\text{kJ}$$

Die Drehimpulse ergeben sich mit $L = J\omega = J\frac{v}{r}$ zu

$$L_\text{VZ} = \frac{1}{2}rmv = \frac{1}{2} \cdot 0.2\,\text{m} \cdot 20\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 20\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}, \quad L_\text{HZ} = 2L_\text{VZ} = 40\,\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$$

3.13 zu Arbeit und Leistung am Wassertank

a) $W = Fs$, $P = fracWt$.

b) Da das gesamte Wasser um $\Delta h = 3\,\text{m}$ angehoben werden muss, ergibt sich die Hubarbeit gemäß $W_\text{o} = Fs = mgh = V\varrho gh = \pi r^2 h^2 \varrho g = \pi \cdot (2\,\text{m})^2 \cdot (3\,\text{m})^2 \cdot 1000\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9.81\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1.109\,\text{MJ}$.

c) Um eine bereits im Tank befindliche Wassermenge um dh anzuheben, ist die Arbeit $\text{d}W = mgh\text{d}h$ aufzubringen. Aufintegriert also

$$\begin{aligned} W_\text{u} &= \int_0^3 \varrho g \pi r^2 h \text{d}h \\ &= \left[\frac{1}{2}\varrho g \pi r^2 h^2\right]_0^3 = \frac{1}{2}W_\text{o} = 554.7\,\text{kJ} \end{aligned}$$

d) Die mechanische Leistung ist $P = \frac{W}{t} = \frac{554.7\cdot 10^3\,\text{J}}{60\,\text{s}} = 9.246\,\text{kW}$. Durch die Wirkungsgrade erhöht sich die nötige elektrische Leistung auf $P_\text{el} = \frac{1}{0.95\cdot 0.75}P = 12.98\,\text{kW}$. Die elektrische Arbeit ist dann $W_\text{el} = P_\text{el} \cdot t = 12.98\,\text{kW} \cdot 60\,\text{s} = 778.6\,\text{kJ}$ (jeweils für die effiziente Befüllmethode, für die Befüllung über den oberen Anschluss ergeben sich doppelt so hohe Werte).

3.14 zu Wurf in beschleunigtem Zug

Im beschleunigtem Bezugssystem Zug wirken neben der Schwerkraft noch die Trägheitskraft aufgrund der Beschleunigung des Bezugssystems. Die Bewegungsgleichungen lauten daher

$$
\begin{aligned}
x(t) &= v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t - \frac{1}{2}at^2 \\
y(t) &= v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2
\end{aligned}
$$

Der Zeitpunkt, an dem der Ball seine Abfwurfhöhe erreicht ergibt sich aus $y(t) = 0$:

$$
0 = v_0 \cdot \sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = 0 \vee t = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha
$$

Die x-Koordinate zu diesem Zeitpunkt muss ebenfalls 0 werden (Rückkehr zum Abwurfort):

$$
\begin{aligned}
v_0 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{2v_0}{g}\sin\alpha - \frac{1}{2}a\frac{4v^2}{g^2}\sin^2\alpha &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\left(\cos\alpha - \frac{a}{g}\sin\alpha\right) &= 0 \\
\Rightarrow \cos\alpha &= \frac{a}{g}\sin\alpha \\
\Rightarrow \arctan\alpha &= \frac{g}{a}
\end{aligned}
$$

Mit den Zahlenwerten $g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, $a = 2.23\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ergibt sich $\alpha = 77.19°$.

3.15 Zeppelin

3.15.1 zu Variante 1

Der Luftdruck nimmt gemäß der barometrischen Höhenformel mit zunehmender Höhe ab:

$$
p_\mathrm{L}(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{\varrho_0 hg}{p_0}}
$$

und da Druck und Dichte in konstantem Verhältnis stehen, gilt die Gleichung auch für die Dichte:

$$
\frac{p_\mathrm{L}(h)}{\varrho_\mathrm{L}(h)} = \frac{p_0}{\varrho_0} \Rightarrow \varrho_\mathrm{L}(h) = \frac{\varrho_0}{p_0}p_\mathrm{L}(h) = \varrho_0 \cdot e^{-\frac{\varrho_0 hg}{p_0}}
$$

Die Gesamtkraft auf den Zeppelin setzt sich aus Gewichtskraft und Auftrieb zusammen. Damit der Zeppelin nicht (weiter) aufsteigt, muss sie gleich Null sein.

$$
\begin{aligned}
F = \varrho_{\mathrm{L}}(h)gV - (mg + \varrho_{\mathrm{He}}gV) &\stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow (\varrho_{\mathrm{L}}(h) - \varrho_{\mathrm{He}})V &= m \\
\Rightarrow \left(\varrho_0 \cdot e^{-\frac{\varrho_0 gh}{p_0}} - \varrho_{\mathrm{He}}\right) V &= m \\
\Rightarrow -\frac{\varrho_0 gh}{p_0} &= \ln\left(\frac{\frac{m}{V} + \varrho_{\mathrm{He}}}{\varrho_0}\right) \\
\Rightarrow h &= \frac{p_0}{\varrho_0 g} \ln\left(\frac{V\varrho_0}{m + V\varrho_{\mathrm{He}}}\right) = 3.437\,\mathrm{km}
\end{aligned}
$$

3.15.2 zu Variante 2

Identisch zu Variante 1, bis auf $V = \frac{4}{3}\pi(d/2)^3$.

3.15.3 zu Variante 3

Durch die Öffnung passt sich der Druck im Ballon stets dem Außendruck an, dadurch verliert der Ballon Gewicht. Diffusion soll wahrscheinlich ausgeschlossen werden.

$$
\begin{aligned}
\varrho_{\mathrm{L}}(h)gV - (mg + \varrho_{\mathrm{H}}(h)gV) &\stackrel{!}{=} 0 \\
\Rightarrow (\varrho_{\mathrm{L}}(h) - \varrho_{\mathrm{H}}(h))V &= m \\
\Rightarrow (\varrho_0 \cdot e^{-\frac{\varrho_0 gh}{p_0}} - \varrho_{\mathrm{H,\,0}} \cdot e^{-\frac{\varrho_0 gh}{p_0}})V &= m \\
\Rightarrow V(\varrho_0 - \varrho_{\mathrm{H,\,0}})e^{-\frac{\varrho_0 gh}{p_0}} &= m \\
\Rightarrow h = \frac{p_0}{\varrho_0 g} \ln\left(\frac{V(\varrho_0 - \varrho_{\mathrm{H,\,0}})}{m}\right) &= 16.89\,\mathrm{km}
\end{aligned}
$$

Für Helium ergibt sich $h = 16.27\,\mathrm{km}$.

3.16 zu Belasteter Spannungsteiler

Die Schaltung besteht aus einer Reihenschaltung von R_1 und (einer Parallelschaltung von R_2 und R_{i}). $R_\parallel$ bezeichne den Gesamtwiderstand der Parallelschaltung, dann gilt

$$
U_0 = U_1 + U_2 = R_1 I + R_\parallel I \Rightarrow I = \frac{U_0}{R_1 + R_\parallel}
$$

a) Für die Spannung U_2 über der Parallelschaltung ergibt sich damit

$$
U_2(R_{\mathrm{i}}) = R_\parallel I = \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{\mathrm{i}}}} \cdot \frac{U_0}{R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{\mathrm{i}}}}} = \cdots = \frac{U_0 R_2 R_{\mathrm{i}}}{R_1 R_{\mathrm{i}} + R_1 R_2 + R_2 R_{\mathrm{i}}}
$$

Kurvendiskussion: Für $R_\mathrm{i} = 0$ ist $U_2 = 0$. Für $R_\mathrm{i} \to \infty$ ergibt sich

$$\lim_{R_\mathrm{i}\to\infty} U_2 = \lim_{R_\mathrm{i}\to\infty} U_0 R_2 \cdot \frac{R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_\mathrm{i}}} = \frac{U_0 R_2}{R_1 + R_2}$$

Die Kurve beginnt also im Koordinatenursprung und nähert sich asymptotisch einer Horizontalen. Die Steigung im Ursprung kann bestimmt werden:

$$\frac{\mathrm{d}U_2}{\mathrm{d}R_\mathrm{i}} = U_0 R_2 \frac{R_1 R_\mathrm{i} + R_1 R_2 + R_2 R_\mathrm{i} - R_i (R_1 + R_2)}{(R_1 R_\mathrm{i} + R_1 R_2 + R_2 R_\mathrm{i})^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}U_2}{\mathrm{d}R_\mathrm{i}}(R_\mathrm{i} = 0) = \frac{U_0}{R_1}$$

b) Durch Einsetzen in die Formel in a) ergibt sich $U_2 = 47.38\,\mathrm{V}$. Wenn $R_\mathrm{i} \gg R_1$ gilt, so befindet man sich in der Situation $R_\mathrm{i} \to \infty$, daher $U_2 = 70\,\mathrm{V}$.

c) Der Gesamtwiderstand ergibt sich aus der Reihen- und Parallelschaltung zu

$$R_\mathrm{Ges} = R_1 + R_\| = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_\mathrm{i}}} = R_1 + \frac{R_2 R_\mathrm{i}}{R_2 + R_\mathrm{i}} = 191.2\,\Omega$$

Die Stromstärken ergeben sich mit dem Ohmschen Gesetz:

$$I_1 = \frac{U_0}{R_\mathrm{Ges}(!)} = 1.151\,\mathrm{A}, \quad I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 0.6769\,\mathrm{A}, \quad I_\mathrm{i} = \frac{U_2}{R_\mathrm{i}} = 0.4738\,\mathrm{A} = I_1 - I_2$$

Die Leistung am Gerät™ergibt sich mit $P = I_\mathrm{i}^2 R_\mathrm{i} = 22.45\,\mathrm{W}$.

d) Um P_i nach R_i abzuleiten muss man beachten, dass I_i ebenfalls von R_i abhängig ist (siehe c)).

$$P_\mathrm{i} = I_\mathrm{i}^2 R_\mathrm{i} = \frac{U_2^2}{R_i} = \frac{(U_0 R_2 R_\mathrm{i})^2}{R_\mathrm{i} \underbrace{(R_1 R_2 + R_1 R_\mathrm{i} + R_2 R_\mathrm{i})}_{=:(\dots)}{}^2} = U_0^2 R_2^2 \frac{R_\mathrm{i}}{(\dots)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}P_\mathrm{i}}{\mathrm{d}R_\mathrm{i}} = U_0^2 R_2^2 \frac{(\dots)^2 - R_\mathrm{i}(R_1 + R_2) \cdot 2(\dots)}{(\dots)^4} = U_0^2 R_2^2 \frac{R_1 R_2 - R_1 R_\mathrm{i} - R_2 R_\mathrm{i}}{(\dots)^3}$$

Aus der Extremalbedingung $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}R} = 0$ ergibt sich, da der Zähler Null werden muss:

$$R_\mathrm{i,\,max} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 47.73\,\Omega$$

Gesamtwiderstand, Spannung am Gerät™und Leistung ergeben sich wie in a) bzw. c)

$$U_2(R_\mathrm{i,\,max}) = \frac{U_0 R_2 R_\mathrm{i,\,max}}{R_1 R_\mathrm{i,\,max} + R_1 R_2 + R_2 R_\mathrm{i,\,max}} = 35\,\mathrm{V}$$

$$R_\mathrm{Ges,\,max} = R_1 + \frac{R_2 R_\mathrm{i,\,max}}{R_2 + R_\mathrm{i,\,max}} = 178.4\,\Omega$$

$$P_\mathrm{max} = \frac{U_2^2}{R_\mathrm{i,\,max}} = 25.67\,\mathrm{W}$$

e) Für den unbelasteten Spannungsteiler gilt $R_\mathrm{i} \to \infty$, also (vgl. b)): $U_2(\infty) = 70\,\mathrm{V} = 2 \cdot U_2(R_\mathrm{i,\,max})$

3.17 Spulen

3.17.1 zu Ringspule ohne Eisenkern

a) Gemäß der 4. Maxwellgleichung gilt für einen Integrationsweg entlang des Rings

$$\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = nI$$

und da $\vec{H} \parallel \vec{s}$ und der Integrationsweg πD lang ist,

$$H = \frac{nI}{\pi D}$$

Die Stromstärke ergibt sich aus Spannung, Drahtgeometrie und spezifischem Widerstand:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{UA}{l\varrho} = \frac{UA}{n \cdot \pi \cdot d \cdot \varrho} = \frac{40\,\mathrm{V} \cdot 0.75 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2}{1200\pi \cdot 0.03\,\mathrm{m} \cdot 1.75 \cdot 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m}} = 15.16\,\mathrm{A}$$

Damit

$$\begin{aligned} H_\mathrm{m} &= \frac{n}{\pi D} \cdot \frac{UA}{n\pi d\varrho} = \frac{UA}{\pi^2 \varrho d D} \\ &= \frac{40\,\mathrm{V} \cdot 0.75 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2}{\pi^2 \cdot 1.75 \cdot 10^{-8}\,\Omega \cdot \mathrm{m} \cdot 0.03\,\mathrm{m} \cdot 0.3\,\mathrm{m}} \\ &= 1.93 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{V}}{\Omega \cdot \mathrm{m}} = 1.93 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

für die Spulenmitte, $H_\mathrm{i} = 2.144 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ am inneren und $H_\mathrm{a} = 1.754 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$ am äußenren Spulenrand. (NB: unabhängig von der Windungszahl!)

b) Wegen $B = \mu_0 H$ ist in der Spulenmitte die Flussdichte

$$B_\mathrm{m} = 4\pi \cdot 10^-7\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \cdot 1.93 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = 2.425 \cdot 10^{-2}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}} = 2.425 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T}$$

und der bei konstanter Flussdichte angenommene Fluss Φ

$$\Phi = BA = 2.425 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T} \cdot 2\pi \cdot (0.015\,\mathrm{m})^2 = 1.714 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Wb}$$

c) Durch das Ausschalten der Spannung ändert sich der magnetische Fluss in der Spule, wodurch in der Sekundärspule (mit n_2 Windungen) eine Spannung induziert wird. Der Spannungsstoß ist die über die „Abklingzeit" aufintegrierte Spannung. Ausgehend von dem Induktionsgesetz ergibt sich

$$\begin{aligned} U_\mathrm{ind} &= -n_2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \\ \Rightarrow U_\mathrm{ind}\mathrm{d}t &= -n_2 \mathrm{d}\Phi \Rightarrow \int U_\mathrm{ind}\mathrm{d}t = n_2 \Phi \end{aligned}$$

Der genaue zeitliche Verlauf des magnetischen Flusses ist unerheblich, es genügt zu wissen, dass er von Φ auf 0 abnimmt. Zahlenmäßig ergibt sich $\int U \mathrm{d}t = 8.572 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Vs}$.

3.17.2 zu Ringspule mit Eisenkern und Lücke

a) Die magnetische Feldstärke ist von der Permeabilität unabhängig, daher gilt wie in der Lösung ohne Eisenkern $H_{(\mathrm{m,\ Fe})} = 1.93 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$. Wegen $B = \mu_0 \mu_r H$ ist die Flussdichte im Eisen

$$B_{(\mathrm{m,\ Fe})} = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}} \cdot 70 \cdot 1.93 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = 1.698\,\mathrm{T}$$

und der Fluss

$$\Phi = B_{(\mathrm{m,\ Fe})} \cdot A = 1.698\,\mathrm{T} \cdot \pi(0.015\,\mathrm{m})^2 = 1.2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Wb}$$

Die Induktivität ergibt sich (mit dem Strom aus 3.17.1) zu

$$L = n\frac{\Phi}{I} = 1200 \cdot \frac{1.2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Wb}}{15.16\,\mathrm{A}} = 9.499 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{H}$$

b) Mit Maxwell 4 ergibt sich $\oint H \mathrm{d}s = nI = H_{\mathrm{Fe}} l_{\mathrm{Fe}} + H_{\mathrm{L}} l_0$, da das Feld nicht konstant ist, sondern in zwei Teile (im Eisen und in Luft) zerfällt. Aus Maxwell 2 ($\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$) ergibt sich, dass $\vec{B}$ in Eisen und Luft gleich sein müssen (Integration über „Pillendose“ mit einem Deckel in Luft, anderem in Eisen). Wegen $B = \mu_0(\mu_r)H$ muss also die Feldstärke unterschiedlich sein.

$$\oint H \mathrm{d}s = nI = H_{\mathrm{Fe}} l_{\mathrm{Fe}} + H_{\mathrm{L}} l_0 = \frac{B'}{\mu_0 \mu_r} l_{\mathrm{Fe}} + \frac{B'}{\mu_0} l_0 = \frac{B'}{\mu_0}\left(\frac{l_{\mathrm{Fe}}}{\mu_r} + l_0\right)$$

$$\Rightarrow B' = \frac{\mu_0 \cdot n \cdot I}{\left(\frac{l_{\mathrm{Fe}}}{\mu_r} + l_0\right)} = \frac{\mu_0 \mu_r n I}{l_{\mathrm{Fe}} + \mu_r l_0} = \frac{\mu_0 \mu_r n I}{l_0(\mu_r - 1) + 2\pi r} = 1.582\,\mathrm{T}$$

Um dieselbe Flussdichte wie in a) zu erhalten, muss die Stromstärke erhöht werden:

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r n I}{l_0(\mu_r - 1) + 2\pi r} \Rightarrow I = B\frac{l_0(\mu_r - 1) + 2\pi r}{\mu_0 \mu_r n}$$

$$\Rightarrow I = 1.698\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}} \cdot \frac{0.001\,\mathrm{m} \cdot (70 - 1) + 2\pi \cdot 0.15\,\mathrm{m}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \cdot 70 \cdot 1200} = 16.27\,\mathrm{A}$$

Die Feldstärken in Eisen und Luft ergeben sich aus der Flussdichte B' zu

$$H_{\mathrm{L}} = \frac{B'}{\mu_0} = \frac{1.582\,\mathrm{T}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2}} = 1.259 \cdot 10^6\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

$$H_{\mathrm{Fe}} = \frac{B'}{\mu_0 \mu_r} = \frac{1.582\,\mathrm{T}}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \cdot 70} = 1.798 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$$

c) Kräfte können durch Ableitung einer Energie/Arbeit nach dem Weg bestimmt werden (vgl. $F_g = mg$, $E_{\mathrm{pot}} = mgh$). Der Energieinhalt eines (homogenen) magnetischen Feldes vom Querschnitt A und der Länge s ist (aus $W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}LI^2$ und Betrachtung einer langen Spule)

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}BHAs$$

Die Wegableitung liefert also

$$F = \frac{1}{2}HBA = \frac{1}{2}\Phi H_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{Wb} \cdot 1.259 \cdot 10^{6}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = 755.4\,\mathrm{N}$$

3.18 zu Elektronen im elektrischen/magnetischen Feld

a) $\vec{F} = e\vec{E}$ mit der Elementarladung e.

b) Die potentielle Energie durch die Lage im elektrischen Feld, Ue, wird in kinetische Energie umgewandelt: $Ue = mv^2/2 \Rightarrow v = \sqrt{2Ue/m}$.

c) Durch die Überlagerung einer gleichförmigen und einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung entsteht völlig analog zum horizontalem Wurf eine Parabel. Mit $a = F/m$ ergibt sich

$$\begin{aligned} x(t) &= vt \\ y(t) &= \frac{1}{2}\frac{eE}{m_{\mathrm{e}}}t^2 \\ \Rightarrow y(x) &= \frac{1}{2}\frac{eE}{m_{\mathrm{e}}v^2}x^2 \end{aligned}$$

d) Die Lorentzkraft $\vec{F}_{\mathrm{L}} = e(\vec{v} \times \vec{B})$.

e) Auf einer Kreisbahn, da stets eine Ablenkung rechtwinklig zur Momentangeschwindigkeit stattfindet. Der Radius dieser Bahn ergibt sich aus der nötigen Zentripetalkraft:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{L}} &= F_{\mathrm{Z}} \\ \Rightarrow evB &= \frac{m_{\mathrm{e}}v^2}{r} \\ \Rightarrow r &= \frac{m_{\mathrm{e}}}{e}\frac{1}{B}v \end{aligned}$$

f) In der Parabelgleichung aus c) wird E durch U_{A}/d und die Geschwindigkeit v gemäß b) ersetzt:

$$\begin{aligned} y(l) &= \frac{1}{2}\frac{e}{m_{\mathrm{e}}}\frac{U_{\mathrm{A}}}{d}\frac{l^2}{v^2} \\ \Rightarrow y(l) &= \frac{1}{2}\frac{e}{m_{\mathrm{e}}}\frac{U_{\mathrm{A}}}{d}\frac{l^2}{v^2} \\ \Rightarrow y(l) &= \frac{1}{2}\frac{e}{m_{\mathrm{e}}}\frac{U_{\mathrm{A}}}{d}\frac{l^2}{2U_{\mathrm{B}}e/m_{\mathrm{e}}} = \frac{1}{4}\frac{U_{\mathrm{A}}}{dU_{\mathrm{B}}}l^2 \end{aligned}$$

Die Winkelabweichung ergibt sich aus dem Tangens:

$$\tan\alpha = \frac{y(l)}{l} = \frac{1}{4}\frac{U_{\mathrm{A}}}{dU_{\mathrm{B}}}$$

ACHTUNG: wahrscheinlich ist hier eher der Austrittswinkel aus dem Feld zur Horizontalen gesucht, der sich aus der Richtung der Momentangeschwindigkeit beim Austritt ergibt!
Für eine gerade Flugbahn müssen sich Kraft durch Magnetfeld und elektrisches Feld gegenseitig aufheben. Aufgrund der geschwindigkeitsabhängigen Lorentzkraft ist dies für genau eine Geschwindigkeit gegeben. Aus $\vec{F}_\mathrm{L} = -\vec{F}_\mathrm{E} \Rightarrow \vec{v} \times \vec{B} = -\vec{E}$ ergibt sich, dass ein nach „rechts“ fliegendes Elektron durch ein „von vorne nach hinten“ gerichtetes magnetisches und ein „von oben nach unten“ gerichtetes elektrisches Feld geradeaus weiterfliegen kann. („Rechte-Hand-Regel“ für das Kreuzprodukt und dann Umkehrung von $\vec{E}$, oder direkt „Linke-Hand-Regel“). Für die benötigte Flussdichte B gilt

$$|B| = \frac{E}{v} = \frac{U_\mathrm{A}}{d\sqrt{2U_\mathrm{B}e/m_\mathrm{e}}}$$

g) Ausgehend von den Gleichungen aus f):

$$\begin{aligned} y(l) &= \frac{1}{2}\frac{e}{m_\mathrm{e}}\frac{U_\mathrm{A}}{d}\frac{l^2}{v^2}, \quad \tan\alpha = \frac{y(l)}{l} \\ \Rightarrow \tan\alpha &= \frac{1}{2}\frac{e}{m_\mathrm{e}}\frac{U_\mathrm{A}}{d}\frac{l}{v^2} \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{1}{2}\frac{e}{m_\mathrm{e}}\frac{U_\mathrm{A}}{d}\frac{l}{\tan\alpha}} = 2.735\cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 0.1c \\ |B| &= \frac{U_\mathrm{A}}{dv} = \frac{600\,\mathrm{V}}{0.02\,\mathrm{m}\cdot 2.735\cdot 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1.097\cdot 10^{-3}\,\mathrm{T} \end{aligned}$$

3.19 zu Energie im Kondensator

a) Die Verschiebungsarbeit, um eine Ladung $\mathrm{d}Q$ bei gegebener Spannung von der „leeren“ zur „vollen“ Platte zu verschieben, ist $\mathrm{d}W = U\mathrm{d}Q$. Da sich die Spannung eines Kondensators aus Kapazität und Ladung ergibt, kann nach Einsetzen von $U = Q/C$ integriert werden:

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}W &= \int \frac{Q}{C}\mathrm{d}Q \\ \Rightarrow W &= \frac{1}{2C}Q^2 = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU \end{aligned}$$

b) Durch den zweiten Kondensator verteilt sich die konstante Ladung Q nun auf die doppelte Kapazität:

$$W_1 = \frac{1}{2C}Q^2 \qquad W_2 = \frac{1}{4C}Q^2 = \frac{1}{2}W_1\ !$$

c) Bei exakter Berechnung des Umladevorgangs über einen ohmschen Widerstand ergibt sich, dass genau die Hälfte der ursprünglich gespeicherten Energie im Widerstand gemäß $P = RI^2$ in Wärme umgesetzt wird

Rechnung?

3.20 zu Kondensator mit Dielektrika

a) Wegen $U = Ed = \text{const}$, $D = \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{i}E$ und $Q = DA$ verteilt sich die Ladung aufgrund der unterschiedlichen ε_i nicht gleichmäßig auf den Platten. Die elektrische Flussdichten ergeben sich zu $D_\mathrm{i} = \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{i}E = \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{i}\frac{U}{d}$ und die Gesamtkapazität aus

$$\begin{aligned}
Q &= D_1\frac{A}{2} + D_2\frac{A}{2} = \frac{A}{2}\varepsilon_0\frac{U}{d}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\\
Q &= CU\\
\Rightarrow C &= \frac{\varepsilon_0 A}{2d}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\\
C &= C_0\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}
\end{aligned}$$

Betrachtet man den Kondensator als Parallelschaltung von zwei Kondensatoren mit unterschiedlichen Dielektrika, so ergeben sich die Teilladungen wie folgt:

$$U = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \tag{1}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 \tag{2}$$

$$C_\mathrm{i} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{i}A}{2d} \tag{3}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$Q_2 = Q\frac{C_2}{C_1 + C_2}$$

und daraus mit (3)

$$Q_2 = Q\frac{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 A}{2d}}{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_1 A + \varepsilon_0\varepsilon_2 A}{2d}} = Q\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = Q\frac{12}{6+12} = \frac{2}{3}Q$$

und analog

$$Q_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = Q\frac{6}{6+12} = \frac{1}{3}Q$$

b) Der Kondensator mit parallel zu den Platten unterteiltem Dielektrikum verhält sich wie eine Parallelschaltung von Kondensatoren. Wegen $Q = DA$ muss D überall im Kondensator konstant sein, das E-Feld hat an dem Übergang zwischen den Dielektrika einen Sprung, und damit auch der Spannungsverlauf. Das Problem entspricht zwei in Reihe geschalteten Kondensatoren, bei denen sich auf den mittleren beiden

Platten Ladungen nur durch Influenz verschieben, so dass auf allen vier Platten betragsmäßig gleiche Ladungen vorliegen. Die Gesamtkapazität ergibt sich aus

$$\begin{aligned} U &= \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_{\text{ges}}} \\ \Leftrightarrow \frac{U}{Q} &= \underbrace{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_{\text{ges}}}} \\ \Rightarrow C_{\text{ges}} &= \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{d}{2\varepsilon_0\varepsilon_1 A} + \frac{d}{2\varepsilon_0\varepsilon_2 A}} = \frac{2\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 A}{\varepsilon_2 d + \varepsilon_1 d} = 2\frac{\varepsilon_0 A}{d}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \end{aligned}$$

Die Spannung in einem Kondensator findet man über

$$\begin{aligned} Q &= UC_{\text{ges}} \\ U_1 &= \frac{Q}{C_1} = U\frac{C_{\text{ges}}}{C_1} = U\frac{2\frac{\varepsilon_0 A}{d}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}{2\frac{\varepsilon_0 A}{d}\varepsilon_1} = U\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{2}{3}U \\ U_2 &= U\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{1}{3}U \end{aligned}$$

3.21 zu Widerstände (Stern/Ring)

Benennung: R_1 zwischen A und B, R_2 zwischen B und C im Dreieck; R_{a} an A im Stern.

a) Der Gesamtwiderstand zwischen A und B bestimmt sich aus Parallelschaltung von R_1 und (der Reihenschaltung von R_2 und R_3), daher

$$R_{\text{AB}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2+R_3}} = \frac{1}{\frac{R_2+R_3}{R_1(R_2+R_3)} + \frac{R_1}{R_1(R_2+R_3)}} = \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3},$$

also „direkt · Umweg / alle“.

b) Es ergibt sich das Gleichungssystem

$$R_{\text{a}} + R_{\text{b}} = R_{\text{AB}} = \frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} \tag{4}$$

$$R_{\text{a}} + R_{\text{c}} = R_{\text{AC}} = \frac{R_3(R_1+R_2)}{R_1+R_2+R_3} \tag{5}$$

$$R_{\text{b}} + R_{\text{c}} = R_{\text{BC}} = \frac{R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3} \tag{6}$$

in dem durch ((4) – (5)) + (6) die Variable R_{b} isoliert werden kann:

$$\begin{aligned} ((R_{\text{a}}+R_{\text{b}}) - (R_{\text{a}}+R_{\text{c}})) + (R_{\text{b}}+R_{\text{c}}) &= \frac{R_1(R_2+R_3) - R_3(R_1+R_2) + R_2(R_1+R_3)}{R_1+R_2+R_3} \\ \Rightarrow 2R_{\text{b}} &= \frac{R_1R_2 + R_1R_3 - R_1R_3 - R_2R_3 + R_1R_2 + R_2R_3}{R_1+R_2+R_3} \\ \Rightarrow 2R_{\text{b}} &= \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2+R_3} \\ \Rightarrow R_{\text{b}} &= \frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}, \end{aligned}$$

also „Produkt der (im Dreieck) angeschlossenen / alle“

3.22 zu Eis im Kühlschrank

Dem Wasser muss Wärme zur Abkühlung auf 0 °C und dann zum Erstarren entzogen werden.

$$\begin{aligned}\Delta Q_{\mathrm{W}} &= C_{\mathrm{W}}\Delta T + m_{\mathrm{W}} s_{\mathrm{E}}\\ &= m_{\mathrm{w}} c_{\mathrm{W}}\Delta T + m_{\mathrm{W}} s_{\mathrm{E}}\end{aligned}$$

Das Kältemittel entzieht beim Verdampfen der Umgebug Wärme entsprechend der Verdampfungswärme, mit Berücksichtigung des Wirkungsgrades:

$$\begin{aligned}\Delta Q_{\mathrm{KM}} &= \eta m_{\mathrm{KM}} v_{\mathrm{KM}}\\ \Rightarrow m_{\mathrm{KM}} &= \frac{m_{\mathrm{W}} c_{\mathrm{W}}\Delta T + m_{\mathrm{W}} s_{\mathrm{E}}}{\eta v_{\mathrm{KM}}}\\ &= \frac{0.15\,\mathrm{kg}\cdot 4182\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\cdot K}}\cdot 16\,\mathrm{K} + 0.15\,\mathrm{kg}\cdot 333.5\cdot 10^{3}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}}{0.8\cdot 1.3\cdot 10^{6}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}} = 57.75\,\mathrm{g}\end{aligned}$$

3.23 zu Schwarzer Strahler/Sonnenscheibe

Die Abbildungsgleichung führt zu

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} = \frac{f}{g} \Rightarrow f = \frac{Bg}{G}$$

Die von der Sonnenscheibe abgestrahlte Leistung ergibt sich aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz:

$$P_{\mathrm{S}} = 4\pi R_{\mathrm{S}}^2 \cdot \sigma T_{\mathrm{S}}^4$$

Die Leistung, die auf dem Spiegel ankommt, ergibt sich aus dem Verhältnis von Spiegelfläche zu der Kugeloberfläche mit Radius Erde-Sonne:

$$P_{\mathrm{Sp}} = P_{\mathrm{S}} \cdot \frac{\pi R^2}{4\pi R_{\mathrm{SE}}^2} = \frac{4\pi R_{\mathrm{S}}^2 \cdot \sigma T_{\mathrm{S}}^4 \cdot \pi R^2}{4\pi R_{\mathrm{SE}}^2} = \pi\sigma T_{\mathrm{S}}^4 \frac{R^2 R_{\mathrm{S}}^2}{R_{\mathrm{SE}}^2}$$

Die Temperatur der Scheibe entsteht durch die gebündelte Strahlungsleistung des Spiegels aus dem nach T umgestellten Stefan-Boltzmann-Gesetz. Da die Scheibe auf beiden Seiten strahlt, kommt ein Faktor 2 ins Spiel:

$$T_{\mathrm{Sch}} = \sqrt[4]{\frac{P_{\mathrm{Sp}}}{2\sigma A_{\mathrm{Sch}}}} = \sqrt[4]{\frac{\pi\sigma T_{\mathrm{S}}^4 R^2 R_{\mathrm{S}}^2}{R_{\mathrm{SE}}^2 \cdot 2\sigma\pi r^2}} = T_{\mathrm{S}}\sqrt{\frac{R}{2}\cdot\frac{R_{\mathrm{S}}}{r R_{\mathrm{SE}}}}$$

Wie man leicht sieht, steht unter der Wurzel der Kehrwert der Brennweite, so dass sich insgesamt ergibt

$$T_{\mathrm{Sch}} = T_{\mathrm{S}}\sqrt{\frac{R}{2f}} = 6000\,\mathrm{K}\cdot\sqrt{\frac{0.1\,\mathrm{m}}{2\cdot 1\,\mathrm{m}}} = 1341\,\mathrm{K}$$

3.24 zu Wärmekapazität

Nötige Annahme ist, dass Wasser und Kalorimeter auf derselben Anfangstemperatur sind. Im Gleichgewicht ist die gesamte Wärme auf die gesamte Masse verteilt, also

$$\begin{aligned}
Q_{\mathrm{Ges}} &= T_{\mathrm{Al}}C_{\mathrm{Al}} + T_{\mathrm{W}}(C_{\mathrm{W}} + C_{\mathrm{Kal}}) = T_{\mathrm{GG}}(C_{\mathrm{W}} + C_{\mathrm{Kal}} + C_{\mathrm{Al}}) \\
\Rightarrow C_{\mathrm{Al}}(T_{\mathrm{Al}} - T_{\mathrm{GG}}) &= (C_{\mathrm{W}} + C_{\mathrm{Kal}})(T_{\mathrm{GG}} - T_{\mathrm{W}}) \\
\Rightarrow C_{\mathrm{Al}} &= \frac{(C_{\mathrm{W}} + C_{\mathrm{Kal}})(T_{\mathrm{GG}} - T_{\mathrm{W}})}{T_{\mathrm{Al}} - T_{\mathrm{GG}}} \\
c_{\mathrm{Al}} &= \frac{(m_{\mathrm{W}}c_{\mathrm{W}} + C_{\mathrm{Kal}})(T_{\mathrm{GG}} - T_{\mathrm{W}})}{(T_{\mathrm{Al}} - T_{\mathrm{GG}})lbh\varrho} \\
&= \frac{(0.2\,\mathrm{kg} \cdot 4190\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\mathrm{C}} + 209\,\frac{\mathrm{J}}{{}^\circ\mathrm{C}})(24.1\,{}^\circ\mathrm{C} - 17\,{}^\circ\mathrm{C})}{(100\,{}^\circ\mathrm{C} - 24.1\,{}^\circ\mathrm{C})(0.05\,\mathrm{m} \cdot 0.04\,\mathrm{m} \cdot 0.02\,\mathrm{m} \cdot 2720\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3})} \\
&= 900.2\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot{}^\circ\,\mathrm{C}}
\end{aligned}$$

Wikipedia sagt $c_{\mathrm{Al}} = 897\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}$.

3.25 zu Wärmeleitung

Der Wärmestrom durch einen Körper der Länge l und des Querschitts A ist

$$\Phi = \frac{\lambda A}{l}\Delta T =: \frac{\Delta T}{R_\lambda}$$

mit dem Wärmeleitwiderstand R_λ. Wie elektrische Widerstände addieren sich Wärmeleitwiderstände bei „Reihenschaltung“, so dass sich

$$R_{\mathrm{ges}} = \frac{1}{A}\left(\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2}\right)$$

ergibt. Für das Verhältnis der Wärmeströme mit und ohne Isolierung ergibt sich also

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi_{\mathrm{iso}}}{\Phi_{\mathrm{ohne}}} &= \frac{\Delta T A \cdot l_1}{\left(\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2}\right) \cdot A\Delta T\lambda_1} = \frac{l_1\lambda_1\lambda_2}{(l_1\lambda_2 + l_2\lambda_1)\lambda_1} = \frac{l_1\lambda_2}{l_1\lambda_2 + l_2\lambda_1} \\
&= \frac{0.2\,\mathrm{m} \cdot 0.3\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}}{0.2\,\mathrm{m} \cdot 0.3\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}} + 0.02\,\mathrm{m} \cdot 2.1\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}}} = 0.5882
\end{aligned}$$

3.26 zu Dopplereffekt

Für den relativistischen Dopplereffekt gilt mit $v > 0$ bei Annäherung

$$f_{\mathrm{B}} = f_{\mathrm{Q}}\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$$

Die Schwebungsfrequenz ergibt sich aus der Differenz der beteiligten Frequenzen:

$$\begin{aligned}
f_{\text{Schweb}} = f_{\text{dir}} - f_{\text{indir}} &= f_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - f_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \\
&= \frac{c}{\lambda}\left(\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\right) \\
&= \frac{c}{632.8 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} \cdot 2.4 \cdot 10^{-7} \\
&= 1.138 \cdot 10^{8}\,\text{Hz}
\end{aligned}$$

Die gesuchte Geschwindigkeit ergibt sich durch Umstellung nach v mit der Definition $a := \frac{f_{\text{Schweb}}}{f_0}$:

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \\
\Rightarrow a^2 &= \frac{c+v}{c-v} - 2\sqrt{\frac{(c+v)(c-v)}{(c-v)(c+v)}} + \frac{c-v}{c+v} \\
\Rightarrow a^2 + 2 &= \frac{(c+v)^2 + (c-v)2}{(c-v)(c+v)} \\
\Rightarrow a^2 + 2 &= \frac{c^2 + 2cv + v^2 + c^2 - 2cv + v^2}{c^2 - v^2} \\
\Rightarrow (a^2+2)(c^2-v^2) &= 2c^2 + 2v^2 \\
\Rightarrow a^2c^2 + 2c^2 - a^2v^2 - 2v^2 &= 2c^2 + 2v^2 \\
\Rightarrow a^2c^2 &= (a^2+4)v^2 \\
\Rightarrow v &= \frac{ac}{\sqrt{a^2+4}}
\end{aligned}$$