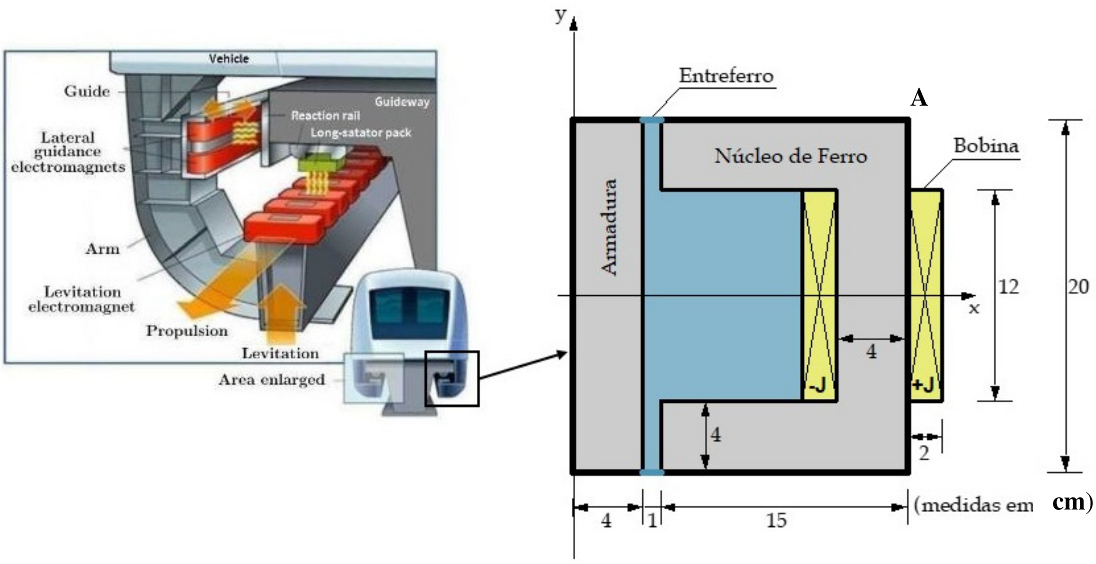
2^o Exercício Programa de PMR 3401
Data de entrega: 17/06/2021 (até às 11:59h)

Método de Diferenças Finitas (MDF)

O trem de levitação magnética mostrado na figura abaixo, possui o sistema de levitação magnética baseado em vários eletroímãs, como mostrado na figura. Cada um dos eletroímãs é constituído por uma bobina enrolada num núcleo de ferro (forma de "ferradura") e uma armadura que está a uma pequena distância do núcleo ("entreferro"). O meio entre o núcleo de ferro e a armadura é preenchido por ar. Quando uma corrente elétrica é aplicada na bobina, a armadura é atraída em direção a "ferradura" por uma força eletromagnética. O material do núcleo de ferro e da armadura tem permeabilidade magnética relativa (μ_{rF}) igual a *2500*, o material da bobina e do ar tem permeabilidade magnética relativa (μ_{rAR}) igual a 1. As dimensões do eletroímã estão indicadas na figura em *mm*, sendo que a profundidade do dispositivo é igual a 8.10^{-2} *m*. O eletroímã está sujeito a uma corrente elétrica distribuída na bobina $J_z = 2.10^6 \cos\left(\frac{\pi\, y}{12.10^{-2}}\right) + 8.10^5$ *A/m²*, *somente* na região da bobina -- que resulta na geração de um fluxo magnético no núcleo de ferro, que por sua vez gera uma força eletromagnética que atrai a armadura.



Em regime estacionário, o fenômeno eletromagnético em duas dimensões e em meios contínuos é regido pelas seguintes equações de Maxwell:

$$\nabla.\mathbf{B} = 0 \qquad (\textit{Lei de Gauss}) \qquad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \qquad (\textit{Lei de Ampere}) \qquad (2)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \qquad (3)$$

sendo **B**, o vetor de densidade superficial de fluxo magnético (*Tesla* ou *Vs/m²*), **H** o vetor de intensidade de campo magnético (*A/m*) e **J** o vetor de densidade superficial de corrente elétrica (*A/m²*). μ é a é permeabilidade magnética do material (*Henry/m*) que é dada por:

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

onde μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo (próxima do valor no ar) que vale $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ (*Henry/m*) e μ_r é denominada de permeabilidade magnética relativa do meio.
Para resolver esse sistema de equações, podemos definir um vetor $\mathbf{A} = A_z \mathbf{e_z}$, tal que:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow \nabla.(\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \qquad (4)$$

Uma vez que o gradiente do rotacional é sempre zero. Portanto, substituindo (4) em (3) e em (2):

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J} \qquad (5)$$

Assim resolvendo-se **A** encontra-se **B** através da equação (4) e **H** através da equação (3). No caso de um problema 2D, $\mathbf{J} = \pm J_z \mathbf{e_z}$ (*somente* na região da bobina, ou seja, $J_z=0$ para demais regiões) e portanto:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu J_z \qquad (6)$$

A força eletromagnética na armadura ($\mathbf{F}_{ela}$) é calculada pelo método de tensor de Maxwell. Nesse método, as componentes dessa força (F_{elax} e F_{elay}) são dadas por:

$$F_{ela\_x} = \frac{1}{2\mu_0} \oint_{\Gamma_{armadura}} \left[\left(B_x^2 - B_y^2 \right) n_x + 2 B_x B_y n_y \right] dl \qquad (7)$$

$$F_{ela\_y} = \frac{1}{2\mu_0} \oint_{\Gamma_{armadura}} \left[2 B_x B_y n_x + \left(B_y^2 - B_x^2 \right) n_y \right] dl \qquad (8)$$

onde $\Gamma_{armadura}$ corresponde ao contorno externo da armadura e n_x, n_y são as componentes do vetor normal a superfície da armadura. Note que o eletroimã é *simétrico*. O problema acima está sujeito às seguintes condições de contorno:

- nos pontos situados no contorno *externo* da figura $B_n=\mathbf{B}.\mathbf{n}=0$ e $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$ e $A_z=0$ no ponto A;
- nos pontos situados na fronteira entre dois meios (por exemplo, ar/ferro, bobina/ferro) a condição é $B_{n1}= B_{n2}$ e $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0$, uma vez que não há corrente superficial nas interfaces (veja ideia na *pág. 51* da apostila);

Considere as constantes dadas, e resolva a equação (6) no domínio da figura utilizando o método de diferenças finitas (MDF) com malha quadrada ($\Delta x=\Delta y$):

a) Implemente o método de “sobrerrelaxação” para a solução do sistema linear de equações resultante da aplicação do MDF (utilize $\lambda=1,75$ e tolerância de 0,0001 para a convergência). Verifique a influência da discretização ($\Delta x = \Delta y$) sobre a solução – considere **três** valores de Δx (pequeno, médio e grande). Explique como chegou no valor de Δx utilizado;
b) Plote a distribuição de $A(x,y)$ no eletroimã;
c) Plote o **vetor** de densidade superficial de fluxo magnético $\mathbf{B}(x,y)$ e o vetor de intensidade de campo magnético $\mathbf{H}(x,y)$ (use o **comando apropriado** no SCILAB ou MATLAB);
d) Calcule as componentes *x* e *y* da força eletromagnética $\mathbf{F}_{ela}$;
e) Considere agora a equação (6) na sua forma genérica, que inclui agora o termo transiente:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\mu_y} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu_x} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} + M \qquad (9)$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\mu}\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & \mu_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \end{Bmatrix} = (\mu_x H_x, \mu_y H_y) \qquad (10)$$

sendo $A_z(x,y,t)$. No eletroimã do trem de uma empresa alemã, o núcleo de ferro e a armadura são formados agora por um material com permeabilidades magnéticas relativas diferentes nas direções *x* e *y*, dadas por $\mu_{r\_x}(x,y) = 1200$ e $\mu_{r\_y}(x,y) = 2500$, onde μ_{r_x} e μ_{r_y} são as permeabilidades magnéticas relativas nas direções *x* e *y*, respectivamente. σ é a condutividade elétrica definida *somente* na região da bobina e é igual a 4.10^6 $(\Omega.m)^{-1}$. Supõe-se que o núcleo de ferro e a armadura são formados por placas finas coladas e portanto, não haverá corrente de fuga. M representa a excitação elétrica na bobina, dada por $M = -J_z \cos\omega t$ e J_z foi definido acima.

e.1) Resolva os itens b), c) e d) novamente, considerando a equação (9) e **apenas um** Δx apropriado (não precisa discutir Δx) com $\frac{\partial A_z}{\partial t} = 0$ e $\omega = 0\ Hz$ (ou seja, $M = -J_z$);

e.2) Suponha agora que o eletroímã esteja inicialmente desligado, ou seja, $A_z(x,y,0)=0$. Ao ligá-lo, $M = -J_z \cos\omega t$ para $t>0$ e $\omega = 60Hz$. As demais condições de contorno permanecem como descritas anteriormente. Pede-se:

- Resolva a equação (9) utilizando o **método explícito** (veja *pág. 47* da apostila) com uma discretização apropriada no espaço ($\Delta x = \Delta y$) e no tempo (Δt);

- Plote a distribuição dos vetores $\boldsymbol{B}(x,y,t)$ e $\boldsymbol{H}(x,y,t)$ para os tempos $t=10\Delta t$, $100\Delta t$, e $500\Delta t$ s.

- Plote a componente F_{ela_x} entre 0 e $500\Delta t$.

APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Os trabalhos podem ser feitos em grupos de dois alunos. Os resultados devem ser apresentados da seguinte forma:

a) Inicialmente apresente todos os equacionamentos analíticos e numéricos do problema a serem implementados no Python, SCILAB ou MATLAB;
b) NÃO será aceita a utilização de comandos prontos do SCILAB (ou MATLAB) para a solução da equação de derivadas parciais acima;
c) Todos os resultados do tipo *f(x,y)* devem ser plotados utilizando-se funções do SCILAB (ou MATLAB) como *mesh*, *contour*, *surf*, etc…(escolha uma) (coloque título e legenda nos gráficos). Os gráficos devem ser legíveis e de fácil leitura). NÃO será aceita a simples apresentação de tabelas ou a listagem dos valores da função nos nós da malha;
d) NÃO utilize os comandos de **manipulação simbólica** do SCILAB (ou MATLAB);
e) Entregue as listagens dos arquivos *.py, *.sci ou *.m) os quais devem estar decentemente comentados;
f) O relatório (pdf) contendo a listagem do algoritmo (pdf) deve ser entregue na forma digital no moodle. O relatório deve ser organizado em seções, os resultados devem ser discutidos e apresentados na sequência descrita neste EP, e no final do relatório deve incluir uma conclusão;
g) Qualquer discussão ou comparação deve ser acompanhada de gráficos e/ou outras indicações que o levou às conclusões;
h) Para cada dia de atraso serão descontados 2,0 pontos na nota do EP.