wyniesiemy za nawiasy współrzędne $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ wektora x. Znów powtarzając poprzednie rozważania otrzymamy:

$$A(x,x) = \zeta_1(a_{11}\overline{\eta}_1 + a_{12}\overline{\eta}_2 + ... + a_{1n}\overline{\eta}_n) +$$
$$+\zeta_2(a_{21}\overline{\eta}_1 + a_{22}\overline{\eta}_2 + ... + a_{2n}\overline{\eta}_n) +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\zeta_n(a_{n1}\overline{\eta}_1 + a_{n2}\overline{\eta}_2 + ... + a_{nn}\overline{\eta}_n) =$$
$$= \zeta_1\overline{(\bar{a}_{11}\eta_1 + \bar{a}_{12}\eta_2 + ... + \bar{a}_{1n}\eta_n)} +$$
$$+\zeta_2\overline{(\bar{a}_{21}\eta_1 + \bar{a}_{22}\eta_2 + ... + \bar{a}_{2n}\eta_n)} +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\zeta_n\overline{(\bar{a}_{n1}\eta_1 + \bar{a}_{n2}\eta_2 + ... + \bar{a}_{nn}\eta_n)} = (x, A^*y).$$

Przy tym macierz przekształcenia $A*$ otrzymuje się z macierzy przekształcenia A w dowolnej bazie ortogonalnej przez przejście do macierzy transponowanej z zamiana jej elementów na liczby zespolone sprzężone.

Zwracamy uwagę, że w bazie nieortogonalnej związek między macierzami przekształceń $A*$ i A jest bardziej złożony.

2. Operacja przejścia od przekształcenia *A do przekształcenia sprzężonego (operacja *).**

OKREŚLENIE 1. Niech A będzie przekształceniem liniowym przestrzeni euklidesowej zespolonej. Przekształcenie A^* określone przez warunek

$$(Ax, y) = (x, A^*y),$$

nazywamy *przekształceniem liniowym z A.*

TWIERDZENIE 2. *W przestrzeni euklidesowej każdemu przekształceniu liniowemu A odpowiada przekształcenie sprzężone i przy tym tylko jedno.*

D o w ó d Przekształceniu liniowemu A odpowiada w sposób jednoznaczny zgodnie z twierdzeniem 1 tego paragrafu forma dwuliniowa $A(x, y) = (Ax, y)$. Tę formę dwuliniową można zgodnie z uwaga z końca ustępu 1 przedstawić, i to jednoznacznie, w postaci (x, A^*y).

Ostatecznie mamy

$$(Ax, y) = A(x; y) = (x, A^*y).$$

Macierz przekształcenia sprzężonego A^* otrzymuje się z macierzy przekształcenia A w bazie ortogonalnej przez przejście do macierzy transponowanej, a następnie do elementów zespolonych sprzężonych, jak zostało dowiedzione w ustępie 1 tego paragrafu.

Przejście od A do A^* można wyrazić w postaci reguł. Jeżeli w wyrażeniu (x,A^*y) chcemy A przenieść na drugie miejsce to musimy do A dopisać *.

Operacja przejścia od przekształcenia A do przekształcenia sprzężonego A^* (operacja*) związana jest z określonymi wyżej operacjami dodawania i mnożenia przekształ-