DM n°6
Elie GEDEON MPSIB

PARTIE I

1°) $\forall n \in \mathbb{N}$

$w(n) = max\left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots \binom{n}{n}\right)$

$= \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = \binom{n}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$

car $\left(k \to \binom{n}{k}\right) = \left(k \to \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\right)$ est strictement croissante sur $\left\{0..\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$

strictement décroissante sur $\left\{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil..n\right\}$

et $\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = \binom{n}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$

2°)

$2.w(2n-1) = \binom{2n-1}{\left\lfloor n-\frac{1}{2} \right\rfloor} + \binom{2n-1}{\left\lceil n-\frac{1}{2} \right\rceil} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} = \binom{2n}{n} = w(2n)$

$\Rightarrow w(2n-1) = w\frac{(2n)}{2}$

PARTIE II

1°) $\forall p \in \{1..n-1\}$

$\forall (A, B) \in P_p(E)^2$

$\# A = \# B$

$\Rightarrow (A \in B \text{ ou } B \in A \Rightarrow A = B)$

$\Rightarrow (A \neq B \Rightarrow A \notin B \text{ et } B \notin A)$

2°) $\forall t \in \mathbb{R}\; tq\; f^{-1}(\{t\}) \neq \emptyset$,

$\forall (A, B) \in f^{-1}(\{t\})^2$

$f(A) = f(B)$

D'où

$A \subset B$

$\Rightarrow \sum_{i \in A} a_i = \sum_{i \in B} a_i$

$\Rightarrow \sum_{i \in A} a_i = \sum_{i \in A} a_i + \sum_{i \in B/A} a_i$

$\Rightarrow \sum_{i \in B/A} a_i = \cdot$

$\Rightarrow B/A = \emptyset\; (car\, a_i > 0\; \forall i)$

$\Rightarrow B = A$

De même $B \subset A \Rightarrow B = A$

D'où $f^{-1}(\{t\})$ est une partie de sperner si non vide

DM n°6

Elie GEDEON MPSIB

٣°) $\{A_{1,} A_2\}$ est une partie de Sperner si et seulement si:

$A_1 / A_2 \neq \emptyset$ et $A_2 / A_1 \neq \emptyset$

D'où l'ensemble ϑ des parties de sperner $\{A_{1,} A_2\}$ à deux éléments est

$$\vartheta = \bigcup_{A_1 \in P(E)/(\{\emptyset\} \cup \{E\})} \bigcup_{U \in P(A_1)/A_1} \bigcup_{A_2 \in \{X, X \cap A_1 = U, X / U \in P(E/A_1)/\{\emptyset\}\}} \{\{A_{1,} A_2\}\}$$

$$= \bigcup_{p=1}^{n-1} \bigcup_{A_1 \in P_p(E)} \bigcup_{U \in P(A_1)/A_1} \bigcup_{A_2 \in \{X, X \cap A_1 = U, X / U \in P(E/A_1)/\{\emptyset\}\}} \{\{A_{1,} A_2\}\}$$

Comme $(A_1 \neq A_2$ et $A_1\, A_2$ jouent des rôles identiques$)$

Chaque partie apparaitra exactement deux fois

$$\Rightarrow \# \vartheta = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{A_1 \in P_p(E)} \sum_{U \in P(A_1)/A_1} \sum_{A_2 \in \{X, X \cap A_1 = U, X / U \in P(E/A_1)/\{\emptyset\}\}} \#\{\{A_{1,} A_2\}\}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{A_1 \in P_p(E)} \sum_{U \in P(A_1)/A_1} (2^{n-p} - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{A_1 \in P_p(E)} (2^p - 1)(2^{n-p} - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} \binom{n}{p} (2^n + 1 - 2^p - 2^{n-p})$$

$$= \frac{1}{2}(2^n - 2)(2^n + 1) - \frac{2}{2}(1+2)^n$$

$$= \frac{1}{2}(2^n - 2)(2^n + 1) - \frac{2}{2}(1+2)^n$$

$$= 2^{2n-1} - 2^{n-1} - 1 - 3^n$$

PARTIE III

$(C_{.,} C_{1,} C_2 \dots C_n)$ est une chaine si et seulement si

$\forall i \in \{1..n\}, \exists t_i \in E / C_{i-1}\ tq\ C_i = C_{i-1} \cup \{t_i\}$

D'où, à toute chaine, on peut associer une unique bijection $\begin{pmatrix} E \to E \\ i \to t_i \end{pmatrix}$

Et réciproquement, à toute bijection $f = \begin{pmatrix} E \to E \\ i \to t_i \end{pmatrix}$

on peut associer une unique chaine définie par

$\forall i \in \{1..n\}, C_i = C_{i-1} \cup \{t_i\}$ et $t_i \notin C_{i-1}$ (car f injective)

$$\Rightarrow \#\{(C_{0,} C_1 .. C_n)\ tq\ C_k = A\}$$

$$= \#\{\text{bijection } f\,(E \to E) \text{ tq } f(\{1..k\}) = A\}$$

$$= \#(\{\text{bijection}\,(\{1..k\} \to A)\} \times \{\text{bijection } f \text{ de } \{(k+1)..n\} \text{ dans } E/A\})$$

$$= k!\,(n-k)!$$

DM n°6
Elie GEDEON MPSIB

PARTIE IV

1°)

$(C_{0,} C_{1,} .. C_n) \cap S \neq \emptyset$

$\Rightarrow \forall (A, B) \in \left((C_{0,} C_{1,} .. C_n) \cap S\right)^2$

$\Rightarrow A \subset B \,\text{ou}\, B \subset A \,(\text{car}\,(A, B) \in (C_{0,} C_{1,} .. C_n)^2)$

$\Rightarrow A = B (\text{car}\,(A, B) \in S^2)$

$\Rightarrow \#(C_{0,} C_{1,} .. C_n) \cap S = 1 (1)$

$(C_{0,} C_{1,} .. C_n) \cap S = \emptyset$

$\Rightarrow \#((C_{0,} C_{1,} .. C_n) \cap S) = 0 (2)$

$(1)\, et\, (2) \Rightarrow \#((C_{0,} C_{1,} .. C_n) \cap S) \leq 1$

2°) $soit\, k_A = \# A$

$\sum_{A \in S} (n - k_A)!\, k_A! = \sum_{A \in S} \# \{(C_1 .. C_n)\, tq\, C_{k_A} = A\}$

$\leq \# \{(C_1 .. C_n)\} = \# \{bijection (E \rightarrow E)\} = n!$

$\Rightarrow \sum_{A \in S} \frac{1}{\binom{n}{k_A}} \leq 1$

$\left(car \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\, p!}\right)$

3°)

$\frac{\# A}{w(n)} = \sum_{A \in S} \frac{1}{w(n)} \leq \sum_{A \in S} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq 1$

$\Rightarrow \# A \leq w(n)$