



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática y
Telecomunicación

Doble Grado en Ingeniería
Informática y Matemáticas

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Profundización en el teorema
de la aplicación abierta

Presentado por:

José María Borrás Serrano

Responsable de tutorización:

Francisco Javier Merí de la Maza

Curso académico 2020-2021

Profundización en el teorema de la aplicación abierta

José María Borrás Serrano

José María Borrás Serrano *Profundización en el teorema de la aplicación abierta.*

Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2020-2021.

**Responsable de
tutorización**

Francisco Javier Merí de la Maza
Análisis Matemático

Doble Grado en
Ingeniería Informática y
Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D. José María Borrás Serrano

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2020-2021, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 17 de noviembre de 2020

Fdo: José María Borrás Serrano

Índice general

Índice de figuras	IX
Resumen	XI
Summary	XIII
Introducción	XVII
Objetivos del trabajo.	XXI
I. Parte de Matemáticas.	1
1. Teorema de la aplicación abierta.	3
2. Teorema de Bloch.	7
2.1. Preparación para la prueba del teorema de Bloch	7
2.2. Teorema de Bloch.	10
2.3. Prueba del teorema de Bloch	11
2.4. Mejora de la cota mediante la solución de un problema extremal. . . .	12
3. Consecuencias del teorema de Bloch.	17
3.1. Representación de funciones que omiten dos valores	17
3.2. Demostración del teorema pequeño de Picard.	20
3.3. Consecuencia del teorema pequeño de Picard: Teorema del punto fijo.	20
3.4. Teorema pequeño de Picard para funciones meromorfas.	22
4. Teorema de Ahlfors.	25
4.1. Preparación para la prueba del teorema de Ahlfors.	25
4.1.1. Lema fundamental para la prueba.	29
4.2. Teorema de Ahlfors.	31
4.3. Constantes universales de Bloch y Landau.	33

II. Parte de Informática.	35
5. Estimación de valores para las constantes de Bloch y Landau.	37
5.1. Representación de las funciones de \mathcal{F}	38
5.2. Cálculo de L_f	39
5.2.1. Obtención de la frontera de la imagen.	40
5.2.2. Contorno de la imagen.	42
5.2.3. Obtención de la bola de mayor radio.	45
5.3. Estimación de una cota superior para la constante de Landau.	52
5.3.1. Procedimiento para la obtención de cotas pequeñas.	53
6. Conclusiones y trabajo futuro.	59
Bibliografía	63

Índice de figuras

5.1. Ejemplo de circunferencia unidad e imagen de la función.	41
5.2. Primer ejemplo del contorno obtenido mediante algoritmo 4.	43
5.3. Segundo ejemplo del contorno obtenido mediante algoritmo 4.	43
5.4. Ejemplos de vecinos de una bola usando 20 ángulos y 5 distancias. . .	49
5.5. Ejemplos de resultados obtenidos mediante algoritmo 7.	49
5.6. Resultado del cálculo de la cota de L para funciones con 100 coeficien- tes en el intervalo $[-1000000, 1000000]$	54
5.7. Resultado del cálculo de la cota de L para funciones con 100 coeficien- tes en el intervalo $[-1, 1]$	55
5.8. Resultado del cálculo de la cota de L para funciones con 100 coeficien- tes y el coeficiente i -ésimo en el intervalo $[-1/i, 1/i]$	56
5.9. Resultado del cálculo de la cota de L para funciones con 10 coeficientes y el coeficiente i -ésimo en el intervalo $[-1/i, 1/i]$	57
5.10. Resultado del cálculo de la cota de L	58

Resumen

El teorema de la aplicación abierta es una de las propiedades fundamentales de las funciones holomorfas. Se propone hacer un estudio detallado de las distintas mejoras cuantitativas de dicho resultado que han ido surgiendo. Concretamente, se pretende analizar el tamaño de los discos contenidos en la imagen de una función holomorfa, comenzando con el teorema de Bloch y sus sucesivas mejoras hasta llegar al teorema de Ahlfors. Se presentarán las constantes de Bloch y de Landau, cuyo valor exacto es desconocido en la actualidad, que concretan numéricamente el análisis cuantitativo del teorema de Bloch. Finalmente, se desarrollarán algoritmos y modelos automáticos que utilizarán técnicas de optimización y metaheurísticas para estimar valores de la cota superior de las constantes de Bloch y Landau.

Los objetivos planteados son:

- Revisión del teorema de la aplicación abierta.
- Probar el teorema de Bloch.
- Analizar distintas mejoras del teorema de Bloch.
- Probar el teorema de Ahlfors.
- Presentar las constantes de Bloch y Landau y la relación entre ellas.
- Estudio de las técnicas de optimización necesarias para abordar las estimaciones planteadas.
- Implementación de modelos automáticos para cálculo de funciones asociadas a las constantes de Bloch y Landau.
- Análisis experimental del comportamiento y eficacia de las soluciones propuestas.

Palabras clave: teorema de la aplicación abierta, teorema de Bloch, teorema de Ahlfors, constantes de Bloch y Landau, problema de optimización, metaheurísticas de búsqueda local y búsqueda global.

Summary

The open mapping theorem is one of the fundamental properties of holomorphic functions, which tells us that the image of a non-constant holomorphic functions contains open disks. Since then it arose the question of findig out the size of those disks.

In 1924 Bloch discovered the theorem that bears his name and provided a lower bound for the radius of the disks contained in the image of a holomorphic function, from that moment several mathematicians tried to obtain an improved version of Bloch's theorem that would provide a better bound. Thus, in 1929 Landau made a variation of the proof of Bloch's theorem, using an auxiliary function resulting from an extreme problem, and managed to obtain a lower bound $\sqrt{2}$ times higher than that of the original theorem. Later, in 1938, Ahlfors obtained his theorem through his differential-geometric version of Schwarz's lemma. Ahlfors' theorem greatly improved the lower bound of the disk radius, which was now about 3.5 times higher than the bound provided in the variant of Bloch's theorem.

Bloch's theorem and its variation motivated Landau to introduce the "universal constants" L and B in 1929, called respectively Landau's and Bloch's constants, whose exact value remains unknown today. But it is known that:

$$0.5 + 10^{-355} < L < 0.544 \quad \text{and} \quad 0.433 + 10^{-14} < B < 0.472.$$

Some of its bounds are relatively recent results, such as $0.5 + 10^{-355} < L$, which was demonstrated in 1995.

This work plan proposes to make a detailed study of the different quantitative improvements to the result of the open mapping theorem. Specifically, it is intended to analyze the size of the disks contained in the image of a holomorphic function, starting with Bloch's theorem and its successive improvements until reaching Ahlfors' theorem. It is also proposed to use learning and/or optimization techniques to estimate the values of the Bloch's and Landau's constants, which concretize numerically the quantitative analysis of Bloch's theorem and whose exact value is currently unknown. Taking into account that the estimation of these constants involves optimizing in Banach spaces of infinite dimension, it arises the need to use algorithms and models that work automatically. As well as the necessity to analyze the efficiency of the obtained approximations, balancing precision and calculation time.

Summary

In the mathematical part we are mainly working in the area of mathematical analysis of functions of a complex variable and some techniques for solving differential equations are used for the resolution of extremal problems. This part is elaborated in the chapters from the first to the fourth, in which we deepen in a theoretical way the in the open mapping theorem.

In the computer science part we focus on the development of algorithms to approach a problem of mathematical nature, the implementation of them in a programming language, the use of optimization techniques and metaheuristics for the estimation of the maximum of a continuous but non-derivative function in a space of infinite dimension and the experimental analysis of the obtained results. This part is elaborated in the fifth chapter.

The objectives of this works are as it follows:

1. Revision of the open mapping theorem.
2. Proof of the Bloch's theorem.
3. Analyze different improvements of Bloch's theorem.
4. Proof of the Ahlfors theorem.
5. Introduce Bloch's and Landau's constants of and the connection between them.
6. Analyze the optimization techniques needed to address the upper bound of the Bloch and Landau constants.
7. Implementation of automatic models for the calculation of functions related to the Bloch's and Landau's constants.
8. Experimental analysis of the behaviour and effectiveness of the proposed solutions.

In the first chapter we set the basic notation that we will use during this work and we focus on revising the open mapping theorem, in which we will deepen in the following chapters.

In the second chapter we focus on demonstrating Bloch's theorem and its improved version, which will provide us with a lower bound for the radius of the disks contained in the image of a holomorphic function. During this chapter we first make a preparation prior to the proof of Bloch's theorem, then we state the theorem and show some results that are a direct consequence. Next we demonstrate a theorem in which the Bloch's theorem is contained and we move on to see an improvement of the bound by solving an extremal problem, which will lead us to an improved version of Bloch's theorem.

In the third chapter we prove some not so immediate consequences of Bloch's theorem and with the help of this theorem we get to prove the little Picard theorem, both in its version for holomorphic functions and in its version for meromorphic functions, and then we prove fixed-point theorem as a result of the little Picard theorem.

In the fourth chapter we focus on stating and proving Ahlfors' theorem, obtaining as a result a much better lower bound for the radius of the disks contained in the image of a holomorphic function compared to the bound obtained in Bloch's theorem, including its improved version. Finally, we present the Bloch's and Landau's constants, whose exact values are currently unknown and represent a very deep mathematical problem, but from which lower and higher bounds have been obtained over time.

In the fifth chapter we develop and implement a series of algorithms that will allow us to reach an estimation of the Landau constant by means of a higher bound. In addition, we also obtain a higher bound for the Bloch constant because it is known that the value of the Landau constant is greater than the value of the Bloch constant.

We begin the chapter by giving a representation of the holomorphic functions so that they can be worked on in a machine. Then we carry out an analysis of the problem of obtaining with precision the estimate of the radius of the largest disk contained in the image of a holomorphic function and the optimization techniques that we need to approach it, after which we mainly develop an algorithm that allows us to obtain the points of the contour of the images with which we work and another one to find the largest disk contained in a closed figure, in which we will be using metaheuristics such as local and global searches with a stochastic component. We then implement an automatic model to calculate the size of the disks in the images of the functions associated with the Bloch's and Landau's constants. Finally, we carry out an experimental analysis of the efficiency and behaviour of the solutions obtained through the model and the algorithms developed, in the end we reach an estimate of 0.77237 as the upper bound for the Landau's and Bloch's constants.

Key words: open mapping theorem, Bloch's theorem, Ahlfors' theorem, Bloch's and Landau's constants, optimization problem, metaheuristics, local and global search.

Introducción

El teorema de la aplicación abierta es una de las propiedades fundamentales de las funciones holomorfas, que nos indica que la imagen de una función holomorfa no constante contiene discos abiertos. A partir de este teorema surgió la cuestión de averiguar el tamaño de dichos discos.

En 1924 Bloch descubrió el teorema que lleva su nombre y proporcionó una cota inferior para el radio de los discos contenidos en la imagen de una función holomorfa sobre el disco unidad, desde ese momento varios matemáticos intentaron obtener una versión mejorada del teorema de Bloch que proporcionara una mejor cota. Así, en 1929 Landau realizó una variación de la prueba del teorema de Bloch, utilizando una función auxiliar resultado de un problema extremal, y consiguió obtener una cota $\sqrt{2}$ veces mayor que la del teorema original. Más adelante, en 1938, Ahlfors obtuvo su teorema a través de su versión diferencial-geométrica del lema de Schwarz. El teorema de Ahlfors mejoraba notablemente la cota inferior del radio de los discos, que ahora era alrededor de 3,5 veces mayor que la cota proporcionada en la variante del teorema de Bloch.

El teorema de Bloch y su variación motivaron a Landau a introducir las "constantes universales" L y B en 1929, llamadas respectivamente constantes de Landau y Bloch, cuyo valor exacto sigue siendo desconocido hoy en día. Pero sí se conoce que:

$$0,5 + 10^{-355} < L < 0,544 \quad y \quad 0,433 + 10^{-14} < B < 0,472.$$

Siendo algunos resultados relativamente recientes, como $0,5 + 10^{-355} < L$, que se demostró en 1995.

En este trabajo se propone hacer un estudio detallado de las distintas mejoras cuantitativas del resultado del teorema de la aplicación abierta. Concretamente, se pretende analizar el tamaño de los discos contenidos en la imagen de una función holomorfa, comenzando con el teorema de Bloch y sus sucesivas mejoras hasta llegar al teorema de Ahlfors. También se propone utilizar técnicas de aprendizaje y/o optimización para estimar los valores de las constantes de Bloch y Landau, que concretan numéricamente el análisis cuantitativo del teorema de Bloch y cuyo valor exacto es desconocido en la actualidad. Teniendo en cuenta que la estimación de dichas constantes involucra optimizar en espacios de Banach de dimensión infinita surge la necesidad de utilizar algoritmos y modelos que trabajen de manera automática.

Así como la necesidad de analizar la eficiencia en la obtención de aproximaciones, equilibrando precisión y tiempo de cálculo.

En la parte de matemáticas nos encontramos principalmente en el área de análisis matemático de funciones en variable compleja y se utilizan técnicas de ecuaciones diferenciales para la resolución de problemas extremales. Esta parte se desarrolla en los capítulos del primero al cuarto, en los que profundizamos de forma teórica en el teorema de la aplicación abierta.

En la parte de informática nos centramos en el desarrollo de algoritmos para abordar un problema de naturaleza matemática, la implementación de los mismos en un lenguaje de programación, el uso de técnicas de optimización y metaheurísticas para la estimación del máximo de una función continua pero no derivable en un espacio de dimensión infinita y el análisis experimental de los resultados obtenidos. Esta parte se encuentra en el quinto capítulo.

En el primer capítulo fijamos la notación básica que utilizaremos durante el trabajo y nos centramos en revisar el teorema de la aplicación abierta, en el cual profundizaremos en los siguientes capítulos.

En el segundo capítulo nos centramos en demostrar el teorema de Bloch y su versión mejorada, los cuales nos proporcionarán una cota inferior para el radio de los discos contenidos en la imagen de una función holomorfa. Durante este capítulo realizamos primero una preparación previa a la prueba del teorema de Bloch, seguidamente enunciamos dicho teorema y mostramos algunos resultados que son consecuencia directa. A continuación realizamos la demostración de un teorema que contiene al de Bloch y pasamos a ver una mejora de la cota mediante la solución de un problema extremal, que nos llevará a una versión mejorada del teorema de Bloch.

En el tercer capítulo probamos algunas consecuencias no tan inmediatas del teorema de Bloch y con ayuda de dicho teorema llegamos a demostrar el teorema pequeño de Picard, tanto en su versión para funciones holomorfas como en su versión para funciones meromorfas, y a continuación el teorema del punto fijo.

En el cuarto capítulo nos centramos en enunciar y realizar la prueba del teorema de Ahlfors, obteniendo como resultado una cota mucho mejor para el radio de los discos contenidos en la imagen de una función holomorfa comparada con la cota obtenida en el teorema de Bloch, incluyendo su versión mejorada. Finalmente, presentamos las constantes de Bloch y Landau, cuyos valores exactos se desconocen en la actualidad y presentan un problema matemático muy profundo, pero de los que sí se han obtenido cotas inferiores y superiores, de las cuales mostramos las mejoras obtenidas hasta la fecha.

En el quinto capítulo desarrollamos e implementamos una serie de algoritmos que nos permitirán llegar a una estimación de la constante de Landau mediante una cota

superior, además obtenemos una cota superior para la constante de Bloch porque se sabe que el valor de la constante de Landau es mayor que el valor de la constante de Bloch.

Empezamos el capítulo dando una representación de las funciones holomorfas de forma que se pueda trabajar con ellas en una máquina. Luego realizamos un análisis del problema de obtener con precisión la estimación del radio del disco de mayor tamaño contenido en la imagen de una función holomorfa y las técnicas de optimización que nos hacen falta para abordarlo, tras lo cual desarrollamos principalmente un algoritmo que nos permita obtener los puntos del contorno de las imágenes con que trabajamos y otro para encontrar la bola de mayor tamaño contenida en una figura cerrada, utilizando metaheurísticas como algoritmos multiarranque y búsquedas locales y globales con un componente estocástico. Después implementamos un modelo automático para calcular el tamaño de los discos en las imágenes de las funciones asociadas a las constantes de Bloch y Landau. Realizando por último un análisis experimental de la eficacia y el comportamiento de las soluciones obtenidas mediante el modelo y los algoritmos desarrollados, llegando finalmente a una estimación de 0,77237 como cota superior para las constantes de Landau y Bloch.

Las principales fuentes consultadas para la realización del trabajo han sido:

- *Apuntes sobre Variable Compleja I (2016-2017)*, del catedrático Rafael Payá Albert. De donde hemos obtenido los conceptos básicos para el teorema de la aplicación abierta.
- *Classical Topics in Complex Function Theory*, por Reinhold Remmert. Se trata de la principal referencia durante la parte de matemáticas.
- *Clever Algorithms: Nature-Inspired Programming Recipes*, por Jason Brownlee. Contiene la explicación de las metaheurísticas que empleamos.
- *IntroAlgorithms*, por Thomas Cormen, Charles Leiserson, Ronald Rivest y Clifford Stein. Es la fuente principal utilizada para el desarrollo de los algoritmos en la parte de informática.

Objetivos del trabajo.

Los objetivos planteados para la parte de matemáticas son:

1. Revisión del teorema de la aplicación abierta.
2. Probar el teorema de Bloch.
3. Analizar distintas mejoras del teorema de Bloch.
4. Probar el teorema de Ahlfors.
5. Presentar las constantes de Bloch y Landau y la relación entre ellas.

Todos estos objetivos se han alcanzado completamente. En el capítulo 1 hacemos la revisión del teorema de la aplicación abierta, cumpliendo el objetivo 1. En el capítulo 2 demostramos el teorema de Bloch y analizamos sus distintas mejoras llegando a una variante del teorema, así se dan por alcanzados los objetivos 2 y 3. En el capítulo 4 probamos el teorema de Ahlfors y presentamos las constantes de Bloch y Landau y la relación que existe entre ellas, de forma que cumplimos los objetivos 4 y 5.

Adicionalmente, en el capítulo 3 mostramos algunas consecuencias importantes del teorema de Bloch incluyendo el teorema pequeño de Picard, del que obtenemos el teorema del punto fijo. Se trata de un trabajo extra que complementa al teorema de Bloch y que no aparecía inicialmente como objetivo.

Los objetivos planteados para la parte de informática son:

1. Estudio de las técnicas de optimización necesarias para abordar las estimaciones de la cota superior de las constantes de Bloch y Landau.
2. Implementación de modelos automáticos para cálculo de funciones asociadas a las constantes de Bloch y Landau.
3. Análisis experimental del comportamiento y eficacia de las soluciones propuestas.

Estos objetivos también han sido alcanzados. En el capítulo 5 hemos hecho un análisis del problema de obtener una estimación de cota superior para las constantes y hemos explicado las técnicas utilizadas para su optimización, de forma que se da por cumplido el objetivo 1. En el penúltimo apartado del capítulo hemos implementado el algoritmo de un modelo, que hace uso de las técnicas y algoritmos desarrollados

Objetivos del trabajo.

durante el capítulo, para calcular las bolas de mayor tamaño contenidas en las imágenes de las funciones holomorfas, dicho cálculo nos permite estimar la cota de las constantes y dar por alcanzado el objetivo 2. En el último apartado del capítulo 5 realizamos el análisis experimental del comportamiento y eficacia de las soluciones propuestas, obteniendo al final una estimación para la cota superior de las constantes de Bloch y Landau, cumpliendo así el objetivo 3.

Parte I.

Parte de Matemáticas.

1. Teorema de la aplicación abierta.

En esta sección nos centraremos en revisar el teorema de la aplicación abierta, en el cual profundizaremos en el resto de capítulos. Primero vamos a fijar la notación básica que utilizaremos frecuentemente durante todo el trabajo. Luego expondremos una serie de principios que utilizaremos en la demostración del teorema de la aplicación abierta y posteriormente pasaremos a enunciar y demostrar dicho teorema. La fuente de este capítulo es [Alb], en concreto los temas 1, 2, 3, 9 y 11.

Sea $a \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, denotaremos por $B_r(a)$ al disco o bola abierta de centro a y radio r . Es decir, $B_r(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$.

De igual manera, denotaremos por $\overline{B_r(a)}$ al disco o bola cerrada de centro a y radio r . Es decir, $\overline{B_r(a)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$.

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, denotaremos por A° al interior de A y por A' al conjunto de los puntos de acumulación de A .

Diremos que $A \subset \mathbb{C}$ es un dominio si A es abierto y conexo.

El concepto de derivada para funciones complejas de variable compleja es formalmente idéntico al de la derivada para funciones reales de variable real.

Sea un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{C}$, una función f definida en A y un punto $a \in A \cap A'$. Consideramos la función $f_a : A \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f_a(z) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad \forall z \in A \setminus \{a\}$$

Se dice que f es derivable en el punto a cuando la función f_a tiene límite en a . Dicho límite, que es un número complejo, recibe el nombre de derivada de la función f en el punto a , y se denota por $f'(a)$.

Definición 1.1. Función holomorfa: Dado un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$ y f una función en Ω , diremos que f es una función holomorfa en Ω cuando f es derivable en todo punto de Ω .

Denotamos por $\mathcal{H}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω y decimos que una función es entera si es holomorfa en \mathbb{C} .

1. Teorema de la aplicación abierta.

A continuación enunciamos una serie de principios que vamos a utilizar para la demostración del teorema de la aplicación abierta:

Principio de los ceros aislados. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que f no es idénticamente nula y sea $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$ el conjunto de sus ceros. Entonces, para cada $a \in Z(f)$ existe un $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subset \Omega$ y $f(z) \neq 0$ para todo $B_\delta(a) \setminus \{a\}$.

Principio de identidad para funciones holomorfas. Sea Ω un dominio y $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que A es un subconjunto de Ω tal que $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$ y que $A' \cap \Omega \neq \emptyset$. Entonces f y g son idénticas: $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

Principio del módulo mínimo. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que $|f|$ tiene un mínimo relativo en un punto $a \in \Omega$. Entonces, o bien $f(a) = 0$, o bien f es constante.

Remarcamos una notación que utilizaremos en la prueba del teorema de la aplicación abierta. Dados $z \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, llamamos circunferencia de centro z y radio r al subconjunto del plano $C_r(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| = r\}$.

Teorema 1.1. Teorema de la aplicación abierta: Sea Ω un dominio del plano complejo y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no constante. Entonces f es una aplicación abierta, es decir, para cualquier subconjunto abierto $U \subset \Omega$ se tiene que $f(U)$ es abierto.

Demostración:

Vamos a realizar la demostración en dos partes, en la primera supondremos $U = \Omega$ y en la segunda parte abordaremos el caso general.

Fijado un punto $b \in f(\Omega)$, denotamos $b = f(a)$ con $a \in \Omega$, nuestro objetivo es encontrar $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $B_\rho(b) \subset f(\Omega)$.

La función $z \rightarrow f(z) - b$ es holomorfa en Ω , por serlo f , y claramente se anula en el punto a , pero no es idénticamente nula porque f no es constante. Por el principio de los ceros aislados, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{B_r(a)} \subset \Omega$ y $f(z) \neq b$ para cualquier $z \in \overline{B_r(a)} \setminus \{a\}$. Comprobemos que tomando

$$\rho = \frac{1}{2} \min\{|f(z) - b| : z \in C_r(a)\} > 0$$

tenemos $B_\rho(b) \subset f(\Omega)$ tal y como queríamos.

Fijado un punto cualquiera $w_0 \in B_\rho(b)$, tengamos en cuenta la función $g : \overline{B_r(a)} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(z) = f(z) - w_0$ para todo $z \in \overline{B_r(a)}$. Como f es continua, $|g|$ es continua

en el compacto $\overline{B_r(a)}$, luego existe $z_0 \in \overline{B_r(a)}$ tal que $|g(z_0)| \leq |g(z)|$ para todo $z \in \overline{B_r(a)}$. Ahora tenemos que

$$|g(z_0)| \leq |g(a)| = |b - w_0| < \rho$$

mientras que para $z \in C_r(a)$ tenemos

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |f(z) - w_0| = |f(z) - b + b - w_0| \geq |f(z) - b| - |w_0 - b| \\ &\geq \min\{|f(z) - b| : z \in C_r(a)\} - |w_0 - b| = 2\rho - |w_0 - b| > 2\rho - \rho = \rho \end{aligned}$$

Luego $z_0 \notin C_r(a)$, así que $z_0 \in B_r(a)$. Por tanto, el módulo de la función $g \in \mathcal{H}(B_r(a))$ tiene un mínimo absoluto en $z_0 \in B_r(a)$. Si g fuese constante, f sería constante en $B_r(a)$ y, por el principio de identidad, también sería constante en Ω , lo que iría en contra de la hipótesis. Así sabemos que g no es constante y aplicando el principio del módulo mínimo, obtenemos que $g(z_0) = f(z_0) - w_0 = 0$, es decir, $w_0 = f(z_0) \in f(B_r(a)) \subset f(\Omega)$. Como ésto se cumple para cualquier $w_0 \in B_\rho(b)$, se sigue que $B_\rho(b) \subset f(\Omega)$, lo que queríamos.

Ahora pasamos al caso general, sea U un subconjunto abierto de Ω , comprobemos que $f(U)$ también es abierto.

Podemos expresar U como unión de sus componentes conexas, de forma que basta ver que la imagen por f de cada componente conexa de U es un conjunto abierto.

Sea V una componente conexa arbitraria de U , entonces V es un dominio y $f|_V$ es una función holomorfa en V y no constante, pues si fuera constante en V , aplicando otra vez el principio de identidad obtendríamos que f es constante en Ω , en contra de la hipótesis.

Aplicando a V y $f|_V$ lo que ya hemos demostrado para Ω , obtenemos que $f(V)$ es abierto. \square

El teorema de la aplicación abierta nos indica que la imagen de una función holomorfa no constante contiene discos abiertos. Ahora la cuestión a resolver es el tamaño de dichos discos, en los siguientes capítulos obtendremos una cota para el radio de los discos a partir del teorema de Bloch e iremos viendo las versiones que mejoran dicha cota hasta llegar al teorema de Ahlfors.

2. Teorema de Bloch.

En este capítulo nos centraremos en el Teorema de Bloch y su versión mejorada, los cuales nos proporcionarán una cota inferior para el radio de los discos contenidos en la imagen de una función holomorfa.

Primero realizaremos una preparación para la prueba del teorema de Bloch, luego enunciaremos dicho teorema y daremos resultados obtenidos directamente del teorema. A continuación demostraremos un teorema que contiene al de Bloch y posteriormente veremos una mejora de la cota mediante la solución de un problema extremal, la cual nos llevará a una versión mejorada del Teorema de Bloch.

La fuente principal que se ha usado en este capítulo es el libro [Rem98], en concreto el capítulo 10 en las páginas 226 a la 229.

Antes de la preparación para la prueba, empezamos aclarando ciertas notaciones que utilizaremos a lo largo del trabajo.

Para cada abierto $D \subset \mathbb{C}$, denotaremos $\mathcal{H}(\overline{D})$ al conjunto de todas las funciones que son holomorfas en un entorno abierto de $\overline{D} = D \cup \partial D$.

Denotaremos \mathbb{E} al disco abierto de radio 1 y centro 0, es decir, $\mathbb{E} = B_1(0)$.

2.1. Preparación para la prueba del teorema de Bloch

Sea $G \subset \mathbb{C}$ un dominio y $f \in \mathcal{H}(G)$ una función no constante, entonces por el *teorema de la aplicación abierta* $f(G)$ también es un dominio.

Vamos a dar un primer criterio para determinar el tamaño de los discos contenidos en el dominio de la imagen.

Proposición 2.1. *Sea G un dominio acotado, $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ continua y $f|_G : G \rightarrow \mathbb{C}$ abierta. Fijando $a \in G$ y definiendo $s := \min_{z \in \partial G} |f(z) - f(a)| > 0$. Entonces $f(G)$ contiene el disco $B_s(f(a))$.*

Demostración:

\overline{G} es un conjunto cerrado y también es acotado por serlo G , luego es un compacto. Como \overline{G} es un compacto y $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua, por el teorema de Weierstrass sabemos que $f(\overline{G})$ es un compacto y por ello $\partial f(G)$ también lo es.

2. Teorema de Bloch.

Dado que $\partial f(G)$ es compacto, entonces existe un punto $w \in \partial f(G)$ cumpliendo que

$$d(\partial f(G), f(a)) = |w - f(a)|.$$

Como \overline{G} es compacto, entonces existe una secuencia de puntos $z_n \in G$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = w \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in \overline{G}.$$

Así $f(z) = w \in \partial f(G)$. Como $f|_G$ es abierta y G es un dominio, entonces $f(G)$ es un abierto y se cumple que $\partial f(G) \cap f(G) = \emptyset$. Así, si suponemos que $z \in G$ se tiene que $f(z) = w \notin \partial f(G)$, lo cual es una contradicción. Por consiguiente, $z \in \overline{G}$ y sabemos que $z \notin G$, luego $z \in \partial G$.

Por tanto, tenemos que $|w - f(a)| \geq \min_{z \in \partial G} |f(z) - f(a)| = s$, lo que significa que $s \leq d(\partial f(G), f(a))$. Así, sea un punto $b \in B_s(f(a))$, se cumple que

$$|b - f(a)| < d(\partial f(G), f(a))$$

y, como $f(G)$ es un abierto, ésto implica que $b \in f(G)$. Así, $B_s(f(a)) \subset f(G)$. \square

Aplicando la **Proposición 2.1** a una función holomorfa f , el valor de s depende de $f'(a)$ y $|f|_G$. Para discos $V := B_r(a)$, $r > 0$, podemos encontrar buenas cotas inferiores de s desde abajo.

Lema 2.1. Sea $V = B_r(a)$ y $f \in \mathcal{H}(\overline{V})$ no constante y satisfaciendo $|f'|_V \leq 2|f'(a)|$. Entonces se cumple que $B_R(f(a)) \subset f(V)$, con $R := (3 - 2\sqrt{2})r|f'(a)|$. ($3 - 2\sqrt{2} > \frac{1}{6}$)

Demostración:

Primero supongamos que $a = 0 = f(a)$. Definiendo $A(z) := f(z) - f'(0)z$, tenemos que

$$\int_{[0,z]} [f'(\zeta) - f'(0)] d\zeta = f(z) - f'(0)z + f(0) - 0 = \int_0^1 [f'(zt) - f'(0)](z) dt,$$

de donde $|A(z)| = \left| \int_0^1 [f'(zt) - f'(0)](z) dt \right| \leq \int_0^1 |f'(zt) - f'(0)| |z| dt$.

Para cada $v \in V$, la fórmula integral de Cauchy y las estimaciones estándar nos proporcionan

$$\begin{aligned} f'(v) - f'(0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f'(\zeta)}{\zeta - v} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f'(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \left(\frac{f'(\zeta)}{\zeta - v} - \frac{f'(\zeta)}{\zeta} \right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{\zeta f'(\zeta) - (\zeta - v)f'(\zeta)}{\zeta(\zeta - v)} d\zeta = \frac{v}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f'(\zeta)}{\zeta(\zeta - v)} d\zeta. \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
 |f'(v) - f'(0)| &\stackrel{(2.1)}{=} \left| \frac{v}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f'(\zeta)}{\zeta(\zeta - v)} d\zeta \right| \leq \frac{|v|}{2\pi} \int_{\partial V} \frac{|f'(\zeta)|}{|\zeta||\zeta - v|} d\zeta \\
 &\leq \frac{|v|}{2\pi} \int_{\partial V} \frac{|f'|_V}{r|r - v|} d\zeta = \frac{|v|}{2\pi} \frac{|f'|_V}{r(r - |v|)} \int_{\partial V} 1 d\zeta \\
 &= \frac{|v|}{2\pi} \frac{|f'|_V}{r(r - |v|)} 2\pi r = \frac{|v|}{r - |v|} |f'|_V.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
 |A(z)| &\leq \int_0^1 |f'(zt) - f'(0)| |z| dt \stackrel{(2.2)}{\leq} \int_0^1 \frac{|zt||f'|_V}{r - |zt|} |z| dt \leq \int_0^1 \frac{|zt||f'|_V}{r - |z|} |z| dt \\
 &= \frac{|z||f'|_V}{r - |z|} \int_0^1 |zt| dt = \frac{|z||f'|_V}{r - |z|} \int_0^1 |z| t dt = \frac{1}{2} \frac{|z|^2}{r - |z|} |f'|_V.
 \end{aligned} \tag{*}$$

Sea ahora $\rho \in (0, r)$ y $z \in V$ tal que $|z| = \rho$, se cumple la desigualdad

$$|A(z)| = |f(z) - f'(0)z| \geq |f'(0)|\rho - |f(z)|.$$

Dado que por hipótesis $|f'|_V \leq 2|f'(0)|$, se sigue de (*) que

$$\begin{aligned}
 |f'(0)|\rho - |f(z)| &\leq |A(z)| \leq \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{r - \rho} |f'|_V \leq \frac{\rho^2}{r - \rho} |f'(0)| \\
 &\Leftrightarrow -|f(z)| \leq \frac{\rho^2}{r - \rho} |f'(0)| - |f'(0)|\rho \\
 &\Leftrightarrow |f(z)| \geq \left(\rho - \frac{\rho^2}{r - \rho}\right) |f'(0)|.
 \end{aligned}$$

Ahora vamos a comprobar como $\rho - \frac{\rho^2}{(r - \rho)}$ asume su máximo valor, $(3 - 2\sqrt{2})r$, en $\rho^* := (1 - \sqrt{2}/2)r \in (0, r)$.

Para determinar su máximo calculamos la primera derivada de $\rho - \frac{\rho^2}{(r - \rho)}$:

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho - \frac{\rho^2}{(r - \rho)} \right) = 1 - \frac{2\rho(r - \rho) + \rho^2}{(r - \rho)^2} = 1 + \frac{\rho^2 - 2r\rho}{(r - \rho)^2}.$$

y calculamos sus ceros en $(0, r)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\rho} \left(\rho - \frac{\rho^2}{(r - \rho)} \right) = 0 &\Leftrightarrow 1 + \frac{\rho^2 - 2r\rho}{(r - \rho)^2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (r - \rho)^2 + \rho^2 - 2r\rho = 0 \\
 &\Leftrightarrow 2\rho^2 - 4r\rho + r^2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow \rho = \frac{4r \pm \sqrt{16r^2 - 8r^2}}{4} = \left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)r.
 \end{aligned}$$

2. Teorema de Bloch.

Luego la primera derivada únicamente se anula en $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})r$ dentro del intervalo $(0, r)$. Como además

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} 1 + \frac{\rho^2 - 2r\rho}{(r - \rho)^2} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\rho \rightarrow r} 1 + \frac{\rho^2 - 2r\rho}{(r - \rho)^2} = -\infty,$$

la función $\rho - \frac{\rho^2}{r-\rho}$ alcanza su máximo en $\rho = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})r$.

Por lo que $|f(z)| \geq (3 - 2\sqrt{2})r|f'(0)| = R$ para todos los puntos z tal que $|z| = \rho^*$. Usando $G := B_{\rho^*}(0)$ en la **Proposición 2.1** obtenemos $B_R(0) \subset f(G) \subset f(V)$.

En el caso de que no se cumpliera $a = 0 = f(a)$, entonces la demostración es igual pero trabajando con $V^* := \{z - a : z \in V\} = B_r(0)$ y con $f^*(z) := f(z + a) - f(a)$ que es holomorfa en $B_r(0)$, en lugar de con V y f . Se cumple que $f(G) = f^*(B_r(0))$, por lo que contienen discos de igual tamaño.

□

2.2. Teorema de Bloch.

Teorema 2.1. Teorema de Bloch: Sea $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ con $f'(0) = 1$, entonces la imagen $f(\mathbb{E})$ contiene discos de radio $\frac{3}{2} - \sqrt{2} > \frac{1}{12}$.

Lo peculiar de este enunciado es que para una familia "grande" de funciones se ha obtenido un enunciado *universal* sobre el "tamaño de las imágenes".

Corolario 2.1. Sea f una función holomorfa en un dominio $G \subset \mathbb{C}$ de modo que existe un punto $c \in G$ tal que $f'(c) \neq 0$, entonces $f(G)$ contiene discos de radio $\frac{1}{12}s|f'(c)|$ para todo s cumpliendo $0 < s < d(c, \partial G)$.

Demostración:

Podemos asumir $c = 0$. En caso de que $c \neq 0$, trabajaríamos con $G^* = \{z - c : z \in G\}$ y $f^*(z) := f(z + c)$ que es holomorfa en G^* , se cumple que $f(G) = f^*(G^*)$ por lo que contienen discos de igual tamaño.

Para todo s cumpliendo $0 < s < d(0, \partial G)$, tenemos que $\overline{B_s(0)} \subset G$; por consiguiente podemos definir

$$g: \overline{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{f(sz)}{sf'(0)}$$

siendo $g \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{E}})$ porque $sf'(0)$ es un valor fijo distinto de 0, $sz \in \overline{B_s(0)} \subset G$ para todo $z \in \overline{\mathbb{E}}$ y f es holomorfa en el dominio G .

Calculando la derivada de la función g , obtenemos que $g'(z) = \frac{sf'(sz)}{sf'(0)} = \frac{f'(sz)}{f'(0)}$, luego $g'(0) = \frac{f'(0)}{f'(0)} = 1$. Así, estamos en condiciones de aplicar el teorema de Bloch a la función g , lo que implica que $g(\mathbb{E})$ contiene discos de radio $\frac{1}{12}$.

Como $f(B_s(0)) = sf'(0)g(\mathbb{E})$ y $B_s(0) \subset G$, se sigue que $f(G)$ contiene discos de radio $|\frac{1}{12}sf'(c)| = \frac{1}{12}s|f'(c)|$. \square

En particular, a partir de este corolario podemos deducir la siguiente proposición:

Proposición 2.2. *Si f es una función entera y no constante, entonces $f(\mathbb{C})$ contiene discos de cualquier radio.*

Demostración:

Sea un radio cualquiera $r > 0$, vamos a probar que $f(\mathbb{C})$ contiene un disco de radio r .

La función f es holomorfa en todo \mathbb{C} y, como no es constante, existe un punto $c \in \mathbb{C}$ tal que $f'(c) \neq 0$. Tomando $r^* := 12r/|f'(c)|$, como f es entera, entonces f es holomorfa en el dominio $B_{r^*}(c)$ y, empleando el corolario, sabemos que $f(B_{r^*}(c))$ contiene discos de radio $\frac{1}{12}s|f'(c)|$ para todo s cumpliendo $0 < s < r^*$.

Por tanto, dado que $0 < 12r/|f'(c)| < r^*$, tenemos que $f(\mathbb{C})$ contiene un disco de radio $\frac{|f'(c)|}{12} \frac{12}{|f'(c)|} r = r$. \square

2.3. Prueba del teorema de Bloch

A cada función $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{E}})$ le asignamos la función $|f'(z)|(1 - |z|)$, que es continua en el compacto $\overline{\mathbb{E}}$ y alcanza su máximo M en un punto $p \in \mathbb{E}$. El teorema de Bloch se encuentra contenido en el siguiente:

Teorema 2.2. *Sea $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ no constante, entonces $f(\mathbb{E})$ contiene el disco de centro $f(p)$ y radio $(\frac{3}{2} - \sqrt{2})M \geq (\frac{3}{2} - \sqrt{2})|f'(0)| > \frac{1}{12}|f'(0)|$.*

Demostración:

Por hipótesis $(1 - |p|)|f'(p)| = M$ y $|p| < 1$. Luego fijando $t := \frac{1}{2}(1 - |p|) > 0$, tenemos que $M = (1 - |p|)|f'(p)| = 2t|f'(p)|$.

2. Teorema de Bloch.

Se cumple que $B_t(p) \subset \mathbb{E}$, ya que si $z \in B_t(p)$ tenemos que

$$|z| \leq |p| + |t| = |p| + \frac{1}{2}(1 - |p|) = 1/2 + |p|/2 < 1.$$

Por otro lado, para cada $z \in B_t(p)$ se cumple

$$1 - |z| \geq 1 - (|p| + |t|) = 1 - |p| - t = (1 - |p|) - \frac{1}{2}(1 - |p|) = t.$$

Recopilando, tenemos que

$$M = 2t|f'(p)|, B_t(p) \subset \mathbb{E} \text{ y } 1 - |z| \geq t \text{ para cualquier } z \in B_t(p).$$

De donde se sigue que $|f'(z)|t \leq |f'(z)|(1 - |z|) \leq M = 2t|f'(p)|$. Luego

$$|f'(z)| \leq 2|f'(p)| \quad \forall z \in B_t(p).$$

Por tanto, tenemos que $f \in \mathcal{H}(\overline{B_t(p)})$ es no constante y que $|f'|_{B_t(p)} \leq 2|f'(p)|$. Así, por el **Lema 2.1**, $B_R(f(p)) \subset f(\mathbb{E})$ para $R := (3 - 2\sqrt{2})t|f'(p)| = (\frac{3}{2} - \sqrt{2})M$. \square

Nota histórica: A. Bloch descubrió este teorema en 1924, posteriormente G. Valiron y E. Landau simplificaron considerablemente los argumentos expuestos por Bloch. No obstante, la prueba que se ha presentado en este trabajo se basa en la de T. Estermann, cuya demostración es más intuitiva que la de Landau.

2.4. Mejora de la cota mediante la solución de un problema extremal.

En el **Teorema 2.2**, la función auxiliar $|f'(z)|(1 - |z|)$ se introdujo sin una razón previa. Ahora vamos a discutir una variante cuya prueba es más transparente: otra función auxiliar, $|f'(z)|(1 - |z|^2)$, y una mejor cota $\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2 > \frac{1}{12}\sqrt{2}$ aparecerán automáticamente.

Sea $f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{E}})$ no constante. La expectativa de que $f(\mathbb{E})$ contendrá discos de un mayor tamaño a medida que aumente el valor $|f'(0)|$ nos lleva al siguiente problema.

Problema extremal. Encontrar una función $F \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{E}})$ tal que $F(\mathbb{E}) = f(\mathbb{E})$ y F tenga la mayor derivada posible en el punto 0 (función extremal).

2.4. Mejora de la cota mediante la solución de un problema extremal.

Para precisar el problema, fijada la función f , vamos a considerar la familia de funciones

$$\mathcal{F} := \{h = f \circ j : j \in \text{Aut } \mathbb{E}\} \quad (2.3)$$

donde $j(z) := \frac{\varepsilon z - w}{\bar{w}\varepsilon z - 1}$, $\varepsilon \in S^1$, $w \in \mathbb{E}$.

La forma de la función j que hemos presentado se trata de una caracterización de los automorfismos conformes del disco unidad, es un teorema que se puede demostrar a partir del lema de Schwarz: sea $j \in \text{Aut } \mathbb{E}$, existen $\varepsilon \in S^1$, $w \in \mathbb{E}$ tales que:

$$j(z) := \frac{\varepsilon z - w}{\bar{w}\varepsilon z - 1},$$

siendo su inversa la función:

$$k(z) := \frac{z - w}{\bar{w}\varepsilon z - \varepsilon},$$

y siendo su derivada:

$$j'(z) = \frac{\varepsilon(\bar{w}\varepsilon z - 1) - (\varepsilon z - w)\bar{w}\varepsilon}{(\bar{w}\varepsilon z - 1)^2} = \frac{\bar{w}\varepsilon^2 z - \varepsilon - \bar{w}\varepsilon^2 z + w\bar{w}\varepsilon}{(\bar{w}\varepsilon z - 1)^2} = \frac{\varepsilon(|w|^2 - 1)}{(\bar{w}\varepsilon z - 1)^2}.$$

Dado que j es un automorfismo de \mathbb{E} , $j \in \mathcal{H}(\bar{\mathbb{E}})$ y $j'(0) = \varepsilon(|w|^2 - 1)$, está claro que para todo $h \in \mathcal{F}$ se cumple

$$h \in \mathcal{H}(\bar{\mathbb{E}}), \quad h(\mathbb{E}) = f(\mathbb{E}), \quad |h'(0)| = (1 - |w|^2)|f'(w)| \quad (2.4)$$

para cada $h = f \circ j \in \mathcal{F}$, ya que $h'(z) = j'(z)f'(j(z))$ y $j(0) = w$.

Como $f' \in \mathcal{H}(\bar{\mathbb{E}})$, la función auxiliar $|h'(0)| = |f'(w)|(1 - |w|^2)$ es continua y dado que $\bar{\mathbb{E}}$ es un compacto, entonces existe un punto $q \in \bar{\mathbb{E}}$ tal que

$$|f'(q)|(1 - |q|^2) = \max_{w \in \bar{\mathbb{E}}} |f'(w)|(1 - |w|^2),$$

denotaremos por N a dicho máximo. Debido a que la función auxiliar es no negativa en $\bar{\mathbb{E}}$, se anula en la frontera de \mathbb{E} y $|f'|_{\mathbb{E}} > 0$ porque f no puede ser constante, entonces tenemos que $N > 0$ y $q \in \mathbb{E}$.

De esta manera, una solución al problema extremal es la función

$$F(z) := f\left(\frac{z - q}{\bar{q}z - 1}\right) \in \mathcal{H}(\bar{\mathbb{E}}), \quad (2.5)$$

donde $F(0) = f(q)$ y $|F'(0)| = |f'(q)|(1 - |q|^2) = \max_{|w| \leq 1} |f'(w)|(1 - |w|^2)$.

2. Teorema de Bloch.

La siguiente estimación para la derivada de F es crucial:

$$|F'(z)| \leq \frac{N}{1-|z|^2} \text{ para cualquier } z \in \mathbb{E}, \text{ en particular,} \quad (2.6)$$

$$\max_{|z| \leq r} |F'(z)| \leq \frac{N}{1-r^2} \text{ para } 0 < r < 1.$$

Demostración de (2.6):

Primero notamos que tenemos que $F = f \circ j_q$ con $j_q \in \text{Aut } \mathbb{E}$ de la forma $j_q = \frac{z-q}{\bar{q}z-1}$. Como la composición de automorfismos es un automorfismo, se cumple que $\mathcal{F} = \{F \circ j, j \in \text{Aut } \mathbb{E}\}$ y como cada $j \in \text{Aut } \mathbb{E}$ es de la forma (2.3), por lo ya razonado en (2.4) y su máximo, se sigue que la desigualdad

$$|F'(w)|(1-|w|^2) = |(F \circ j)'(0)| \leq N$$

se cumple para todo $w \in \mathbb{E}$. □

Así, quedan justificadas las esperanzas que despositamos en la función F . A continuación utilizaremos dicha función para obtener una cota mejor que la del teorema de Bloch.

Teorema 2.3. Variante del Teorema de Bloch: Sea $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ no constante. Supongamos que la función $|f'(z)|(1-|z|^2)$ asume su máximo $N > 0$ en el punto $q \in \mathbb{E}$. Entonces $f(\mathbb{E})$ contiene el dico de centro $f(q)$ y radio $(\frac{3}{2}\sqrt{2}-2)N$.

Demostración:

Denotamos $V := B_{\sqrt{2}/2}(0)$ y definimos la función F como en (2.5),

$$F(z) := f\left(\frac{z-q}{\bar{q}z-1}\right) \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{E}}).$$

Tenemos que $|F'(0)| = |f'(q)|(1-|q|^2) = N > 0$, luego F no puede ser una función constante y, por el principio de identidad, F restringida a cualquier abierto de \mathbb{E} tampoco puede ser constante.

Por (2.6), para cada $z \in V$ tenemos $|F'(z)| \leq N/(1-|z|^2)$, de donde se sigue que

$$|F'(z)| \leq \frac{N}{(1-(\sqrt{2}/2)^2)} = 2|F'(0)| \quad \forall z \in V.$$

Luego se cumple que $F \in \mathcal{H}(\overline{V})$ es una función no constante con $|F'|_V \leq 2|F'(0)|$ y podemos aplicar el **Lema 2.1** a F . Por tanto, $F(V)$ contiene el disco de centro $F(0) = f(q)$ y radio $(3-2\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}|F'(0)| = (3-2\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}N = (\frac{3}{2}\sqrt{2}-2)N$.

2.4. Mejora de la cota mediante la solución de un problema extremal.

Es evidente que $f(\mathbb{E})$ contiene el mismo disco, ya que $F(V) \subset F(\mathbb{E}) = f(\mathbb{E})$. \square

El problema extremal nos ha conducido a la función auxiliar $|f'(z)|(1 - |z|^2)$. Como $(1 - |z|) \geq (1 - |z|^2)$ para todo $z \in \mathbb{E}$, es evidente que

$$N = \max_{z \in \mathbb{E}} |f'(z)|(1 - |z|^2) \geq \max_{z \in \mathbb{E}} |f'(z)|(1 - |z|) = M$$

Así, la nueva cota inferior, $(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2)N$, es mejor que la del **Teorema 2.2**, $(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2)M$.

En concreto, empleando la variante del Teorema de Bloch, si $f'(0) = 1$, entonces la imagen $f(\mathbb{E})$ contiene discos de radio $\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2 > \frac{1}{12}\sqrt{2}$. Mientras que con el teorema de Bloch original sólo podemos asegurar que la imagen $f(\mathbb{E})$ contiene discos de radio $\frac{3}{2} - \sqrt{2} > \frac{1}{12}$.

Nota histórica: La función auxiliar $|f'(z)|(1 - |z|^2)$ y su máximo N en \mathbb{E} fueron introducidos en 1929 por Landau.

En el siguiente capítulo veremos algunas consecuencias del teorema de Bloch, en concreto el teorema pequeño de Picard. En el capítulo posterior continuaremos con las mejoras realizadas al teorema de Bloch y llegaremos a obtener una versión con una cota aun más precisa que la del teorema de Bloch, el teorema de Ahlfors.

3. Consecuencias del teorema de Bloch.

Una función entera que nunca es igual a dos valores distintos tiene que ser constante. (Une fonction entière, qui ne devient jamais ni à a ni à b est nécessairement une constante.)

(E. Picard, 1879)

La función seno asume cada número complejo como valor y la función exponencial omite únicamente el valor 0. Ambas funciones son ejemplos significativos del famoso teorema de E. Picard que dice que toda función entera y no constante omite como mucho un único valor. Este teorema, más conocido como el teorema pequeño de Picard, es una asombrosa generalización de los teoremas de Liouville y Casorati-Weierstrass.

Los polinomios no constantes asumen todos los números complejos como valores. En contraste, las funciones enteras no constantes pueden omitir valores, como demuestra la función exponencial ya que no puede tomar el valor 0.

Con la ayuda del teorema de Bloch llegaremos a demostrar el teorema pequeño de Picard, la prueba que mostraremos será la de Landau-König. La fuente principal usada en este capítulo es el libro [Rem98], en concreto el capítulo 10 en las páginas 233 a la 235.

3.1. Representación de funciones que omiten dos valores

Sea $G \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo, entonces las funciones en $\mathcal{H}(G)$ que no se anulan tienen sus logaritmos y raíces cuadradas en $\mathcal{H}(G)$. El siguiente resultado se sigue de ésto, mediante transformaciones elementales.

Lema 3.1. Sea $G \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo y sea $f \in \mathcal{H}(G)$ tal que ni 1 ni -1 pertenezcan a $f(G)$. Entonces existe una función $F \in \mathcal{H}(G)$ de forma que

$$f = \cos F.$$

3. Consecuencias del teorema de Bloch.

Demostración:

Como ninguno de los valores $1, -1$ pertenecen a $f(G)$, entonces $1 - f^2$ no tiene ceros en G . Por consiguiente existe una función $g \in \mathcal{H}(G)$ tal que $g^2 = 1 - f^2$, de manera que

$$1 = f^2 + g^2 = (f + ig)(f - ig)$$

Así, ni $f + ig$ ni $f - ig$ tienen ceros en G , por lo que existe una función $F \in \mathcal{H}(G)$ cumpliendo $f + ig = e^{iF} = \cos F + i \sin F$. Debido a la paridad del coseno y la imparidad del seno se sigue que $e^{-iF} = \cos(-F) + i \sin(-F) = \cos F - i \sin F = f - ig$.

Por lo tanto, $f = \frac{1}{2}(e^{iF} + e^{-iF}) = \cos F$. □

Con la ayuda del lema probaremos el siguiente teorema:

Teorema 3.1. Sea $G \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo y sea $f \in \mathcal{H}(G)$ tal que ni 0 ni 1 pertenezcan a $f(G)$. Entonces existe una función $g \in \mathcal{H}(G)$ tal que

$$f = \frac{1}{2}[1 + \cos(\pi(\cos(\pi g)))].$$

Sea cualquier función $g \in \mathcal{H}(G)$ para la que se cumple la igualdad de este teorema, entonces $g(G)$ no contiene discos de radio 1 .

Demostración:

a) La función $2f - 1$ omite los valores $-1, 1$ en G . Así, por el **Lema 3.1**, tenemos que existe una función $F^* \in \mathcal{H}(G)$ tal que $2f - 1 = \cos F^*$.

Sea ahora la función $F := F^*/\pi \in \mathcal{H}(G)$, se cumple que $2f - 1 = \cos(\pi F)$, luego F omite todos los valores enteros, en particular ± 1 . Así, volviendo a usar el **Lema 3.1**, existe una función $g^* \in \mathcal{H}(G)$ tal que $F = \cos g^*$. Sea la función $g := g^*/\pi \in \mathcal{H}(G)$ se cumple que $F = \cos(\pi g)$ y, por tanto

$$f = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi F)) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi \cos(\pi g))).$$

b) Definimos el conjunto $A := \{m \pm i\pi^{-1} \log(n + \sqrt{n^2 - 1}), m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ y vamos a probar que $A \cap g(G) = \emptyset$.

Sea $a := m \pm i\pi^{-1} \log(n + \sqrt{n^2 - 1}) \in A$, con $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, entonces usando que el coseno es una función par, el seno es una función impar y la fórmula

3.1. Representación de funciones que omiten dos valores

de Euler:

$$\begin{aligned}
 \cos(\pi a) &= \frac{1}{2}[\cos(\pi a) + \cos(\pi a) - i \operatorname{sen}(\pi a) + i \operatorname{sen}(\pi a)] \\
 &= \frac{1}{2}[\cos(\pi a) - i \operatorname{sen}(\pi a) + \cos(-\pi a) - i \operatorname{sen}(-\pi a)] \\
 &= \frac{1}{2}(e^{i\pi a} + e^{-i\pi a}) = \frac{1}{2}(e^{\pm \log(n+\sqrt{n^2-1})+i\pi m} + e^{\mp \log(n+\sqrt{n^2-1})-i\pi m}) \\
 &= \frac{1}{2}[(n + \sqrt{n^2-1})^{\pm 1}(\cos(\pi m) + i \operatorname{sen}(\pi m)) + (n + \sqrt{n^2-1})^{\mp 1}(\cos(-\pi m) + i \operatorname{sen}(-\pi m))] \\
 &= \frac{1}{2} \cos(\pi m)[(n + \sqrt{n^2-1}) + (n + \sqrt{n^2-1})^{-1}] \\
 &= \frac{1}{2}(-1)^m \left[\frac{(n + \sqrt{n^2-1})^2 + 1}{n + \sqrt{n^2-1}} \right] = \frac{1}{2}(-1)^m \left[\frac{(2n^2 + 2n\sqrt{n^2-1})^2}{n + \sqrt{n^2-1}} \right] = \frac{1}{2}(-1)^m 2n \\
 &= (-1)^m n.
 \end{aligned}$$

Así, $\cos(\pi(\cos(\pi a))) = \pm 1$ para cualquier $a \in A$. Como $f = \frac{1}{2}[1 + \cos(\pi(\cos(\pi g)))]$ y $0, 1 \notin f(G)$, entonces el conjunto $A \cap g(G) = \emptyset$.

Obsérvese que los puntos de A son los nodos de un "entramado rectangular" en \mathbb{C} y que obviamente para cada rectángulo la longitud de la base es 1. Vamos a comprobar que la altura es menor que 1.

Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 \log(n+1+\sqrt{(n+1)^2-1}) - \log(n+\sqrt{n^2-1}) &= \log \frac{n+1+\sqrt{(n+1)^2-1}}{n+\sqrt{n^2-1}} \\
 &= \log \frac{n+1+\sqrt{n^2+2n}}{n+\sqrt{n^2-1}} = \log \frac{n(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}})}{n(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}})} \\
 &\leq \log(1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}) \leq \log(2+\sqrt{3}) < \pi.
 \end{aligned}$$

por la monotonía de $\log x$, por consiguiente la altura de cada rectángulo es menor que $\pi^{-1}\pi = 1$.

Así, para cada $w \in \mathbb{C}$ existe un punto $a \in A$ tal que $|\operatorname{Re} a - \operatorname{Re} w| \leq \frac{1}{2}$ y $|\operatorname{Im} a - \operatorname{Im} w| < \frac{1}{2}$, por consiguiente $|a - w| < 1$.

Por tanto, cada disco de radio 1 interseca con A , pero $g(G) \cap A = \emptyset$, por lo que $g(G)$ no contiene ningún disco de radio 1. \square

3.2. Demostración del teorema pequeño de Picard.

Teorema 3.2. Teorema pequeño de Picard: *Toda función entera no constante omite como mucho el valor de un número complejo.*

Podemos reformular el teorema de forma equivalente como sigue:

Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y supongamos que $0 \notin f(\mathbb{C})$ y $1 \notin f(\mathbb{C})$. Entonces f es constante.

Es evidente que este enunciado es un caso concreto del teorema pequeño de Picard en el que se omiten los valores 0 y 1. Ahora, vamos a comprobar como del enunciado se deduce inmediatamente el teorema pequeño de Picard y, por tanto, ambos son equivalentes:

Supongamos que una función $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ omite los valores $a, b \in \mathbb{C}$ con $a \neq b$. Entonces la función $(h(z) - a)/(b - a) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ omite los valores 0 y 1 y por tanto es constante. Así, como $(h(z) - a)/(b - a)$ es constante, h también es constante y se cumple el teorema.

Demostración del teorema pequeño de Picard:

Sea f una función entera que omite los valores 0 y 1, podemos aplicar el **Teorema 3.1**, obteniendo que $f = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi(\cos \pi g)))$, con $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $g(\mathbb{C})$ no conteniendo ningún disco de radio 1.

Como g es entera, gracias a la **Proposición 2.2** sabemos que o bien g es constante o bien $g(\mathbb{C})$ contiene discos de cualquier radio. Como $g(\mathbb{C})$ no contiene ningún disco de radio 1, g tiene que ser constante. Por consiguiente, f también es constante. \square

3.3. Consecuencia del teorema pequeño de Picard: Teorema del punto fijo.

Una aplicación interesante. En general, las funciones holomorfas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ no tienen puntos fijos; por ejemplo, $f(z) := z + e^z$ no tiene ningún punto fijo. Pero sí se cumple el siguiente resultado.

Teorema 3.3. Teorema del punto fijo: *Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Entonces $f \circ f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ siempre tiene un punto fijo, a no ser que f sea una traslación $z \mapsto z + b$ con $b \neq 0$.*

3.3. Consecuencia del teorema pequeño de Picard: Teorema del punto fijo.

Demostración:

Vamos a probar que si $f \circ f$ no tiene puntos fijos entonces f se trata de una traslación.

Supongamos que $f \circ f$ no tiene puntos fijos, entonces f tampoco tiene puntos fijos ya que si existe un punto $z_f \in \mathbb{C}$ tal que $f(z_f) = z_f$, entonces $f(f(z_f)) = f(z_f) = z_f$, pero hemos supuesto que $f \circ f$ no tiene puntos fijos. Luego podemos definir la función $g(z) := [f(f(z)) - z] / [f(z) - z] \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Supongamos que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $g(z_0) = 0$, entonces $f(f(z_0)) - z_0 = 0$, luego $f(f(z_0)) = z_0$ y sería una contradicción con el supuesto de que $f \circ f$ no tiene puntos fijos.

Supongamos ahora que existe $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $g(z_1) = 1$, entonces se cumpliría que $f(f(z_1)) - z_1 = f(z_1) - z_1$, luego $f(f(z_1)) = f(z_1)$ por lo que $f(z_1)$ sería un punto fijo para f y volveríamos a tener una contradicción.

Por consiguiente, g es una función entera que omite los valores 0 y 1. El teorema de Picard nos asegura que g es constante y, por tanto, existe un valor $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ tal que

$$f(f(z)) - z = c(f(z) - z), \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Derivando obtenemos que

$$f'(z)f'(f(z)) - 1 = c(f'(z) - 1) \Rightarrow f'(z)[f'(f(z)) - c] = 1 - c.$$

Como $c \neq 1$, entonces f' no tiene ceros y $f'(f(z))$ nunca es igual a c . Luego $f' \circ f$ omite los valores 0 y $c \neq 0$; así, por el teorema de Picard, $f' \circ f$ es constante. Si la composición de dos funciones enteras es constante, entonces una de las dos es constante. Como f no puede ser constante porque no tiene puntos fijos, deducimos que f' es constante, por lo que $f(z) = az + b$ para ciertos $a, b \in \mathbb{C}$.

Si $b = 0$, entonces $f(0) = 0$, lo cual contradice que f no tiene puntos fijos.

Supongamos que $a \neq 1$, entonces $b/(1-a)$ es un punto fijo de f ya que $ab/(1-a) + b = (ab + b(1-a))/(1-a) = b/(1-a)$. Lo cual contradice que f no tiene puntos fijos.

Por tanto, $f(z) = z + b$ con $b \neq 0$. □

3.4. Teorema pequeño de Picard para funciones meromorfas.

Ahora probaremos el teorema pequeño de Picard pero en su versión para funciones meromorfas, que es un concepto menos estricto que el de función holomorfa.

Definición 3.1. Función meromorfa: Una función f es meromorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ si f es holomorfa en Ω excepto un conjunto de puntos aislados en los que tiene polos. Denotaremos por $\mathcal{M}(\Omega)$ al conjunto de las funciones meromorfas en Ω .

Una de las propiedades más relevantes de las funciones meromorfas es que se pueden expresar como cociente de funciones holomorfas.

Proposición 3.1. Representación cociente de funciones meromorfas: Para toda función h meromorfa en un dominio G existen dos funciones f y g , holomorfas en G sin ceros comunes en dicho dominio, tales que $h = f/g$.

Dicha representación cociente nos ayudará a probar que en \mathbb{C} las funciones meromorfas pueden omitir hasta dos valores, ninguno más. Por ejemplo, $1/(1 + e^z)$ nunca toma los valores 0 ó 1.

Teorema 3.4. Teorema pequeño de Picard para funciones meromorfas: Toda función $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ no constante omite como mucho el valor de dos números complejos distintos.

Demostración:

Supongamos una función $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ que omita tres valores distintos que denotaremos $a, b, c \in \mathbb{C}$. Dado que $h \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, existen dos funciones enteras f y g sin ceros comunes tales que $h = \frac{f}{g}$.

Consideremos la función

$$h^*: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{g(z)}{f(z) - ag(z)}$$

que es holomorfa en el conjunto de puntos en que el denominador no se anula. Supongamos que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) - ag(z_0) = 0$, pueden darse dos casos:

- Si $g(z_0) = 0$, entonces $f(z_0) = 0$. Contradicción, porque f y g no tienen ceros comunes.
- Si $g(z_0) \neq 0$, entonces $a = \frac{f(z_0)}{g(z_0)} = h(z_0)$. Contradicción, porque h omite el valor a .

Así, h^* se trata de una función entera. Veamos que omite los valores $\frac{1}{b-a}$ y $\frac{1}{c-a}$. Fijado un punto $z \in \mathbb{C}$ cualquiera tenemos dos posibilidades:

3.4. Teorema pequeño de Picard para funciones meromorfas.

– Si $g(z) = 0$, entonces $\frac{g(z)}{f(z)-ag(z)} = 0 \neq \frac{1}{b-a}, \frac{1}{c-a}$.

– Si $g(z) \neq 0$, entonces se cumple que

$$\frac{g(z)}{f(z)-ag(z)} = \frac{1}{(f(z)-ag(z))/g(z)} = \frac{1}{h(z)-a} \neq \frac{1}{b-a}, \frac{1}{c-a},$$

puesto que h no puede tomar los valores b ni c .

Por consiguiente, se tiene que la función h^* es entera y omite los valores $1/(b-a)$ y $1/(c-a)$, luego por el teorema pequeño de Picard se trata de una función constante. Como $h^* = 1/(h-a)$ en todos los puntos en que h está definida, ésto implica que h también es constante. \square

4. Teorema de Ahlfors.

En esta sección nos centraremos en enunciar y demostrar el teorema de Ahlfors, en el cual obtendremos una cota mucho mejor del radio de los discos contenidos en la imagen de una función holomorfa que la cota obtenida mediante el teorema de Bloch. Como paso previo a enunciar el teorema de Ahlfors, demostraremos una serie de proposiciones y lemas que nos serán necesarios para la prueba del teorema.

Ahlfors obtiene dicho teorema de su versión diferencial-geométrica del lema de Schwarz que aparece en su artículo [Ahl38]. Aquí vamos a presentar la que se puede considerar como la prueba más sencilla del teorema, la proporcionada por M. Bonk en el artículo [Bon43]. La fuente principal usada en este capítulo es el libro [Rem98], en concreto las páginas 230 a la 232.

4.1. Preparación para la prueba del teorema de Ahlfors.

Primero vamos a recordar las definiciones de biholomorfismo y de un tipo especial de discos llamados discos *simples*.

Definición 4.1. Biholomorfismo. Un biholomorfismo es una función biyectiva y holomorfa con inversa también holomorfa.

Definición 4.2. Disco simple. Sea $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa, un disco $B \subset f(G)$ es *simple* (respecto de f) si existe un dominio $G^* \subset G$ de manera que $f : G^* \rightarrow B$ es un biholomorfismo.

A continuación vamos a proporcionar un criterio para encontrar biholomorfismos.

Proposición 4.1. Sea $G \subset \mathbb{C}$ un subconjunto convexo y $h \in \mathcal{H}(G)$, verificando que $\operatorname{Re} h'(z) > 0$ para todo $z \in G$. Entonces $h : G \rightarrow h(G)$ es un biholomorfismo.

Demostración:

Una condición suficiente para que una función sea un biholomorfismo con su imagen es que la función sea holomorfa e inyectiva. Es evidente que $h : G \rightarrow h(G)$ es una función holomorfa, luego para determinar que se trata de un biholomorfismo solamente queda comprobar que es inyectiva.

4. Teorema de Ahlfors.

Como G es un subconjunto convexo se cumple que para todo $u, v \in G$ el segmento $\gamma(t) = u + (v - u)t$, $0 \leq t \leq 1$, está contenido en G . Así, si $u \neq v$ se cumple:

$$\begin{aligned} h(v) - h(u) &= h(\gamma(1)) - h(\gamma(0)) = \int_0^1 \gamma'(t) h'(\gamma(t)) dt = \int_0^1 (v - u) h'(\gamma(t)) dt \\ &= (v - u) \left[\int_0^1 \operatorname{Re} h'(\gamma(t)) dt + i \int_0^1 \operatorname{Im} h'(\gamma(t)) dt \right] \neq 0 \end{aligned}$$

puesto que la integral $\int_0^1 \operatorname{Re} h'(\gamma(t)) dt$ es positiva, ya que por hipótesis $\operatorname{Re} h'(z) > 0$ para todo $z \in G$.

Por tanto, $h : G \rightarrow h(G)$ es inyectiva y se concluye que es un biholomorfismo. \square

Las dos siguientes proposiciones son un requisito para la demostración de un lema fundamental para el teorema de Ahlfors.

Proposición 4.2. Para $z := p(w) := \sqrt{3}(1 - w)/(3 - w)$ y $q(w) := \frac{9}{4}w(1 - \frac{1}{3}w)^2$ se cumplen las siguientes afirmaciones:

- $p(\overline{\mathbb{E}}) \subset \mathbb{E}$;
- p lleva $[0, 1]$ sobre $[0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$;
- $q(p^{-1}(z)) = \frac{1 - \sqrt{3}z}{(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}z)^3}$;
- $|q(w)|(1 - |p(w)|^2) = 1$ para todo $w \in \partial\mathbb{E}$.

Proposición 4.3. Si $h \in \mathcal{H}(\mathbb{E})$ cumple $h'(0) = 1$ y $|h'(z)| \leq 1/(1 - |z|^2)$, entonces $h''(0) = 0$.

Demostración de la **Proposición 4.2**:

– Sea $w = a + ib \in \overline{\mathbb{E}}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que $0 \leq a^2 + b^2 \leq 1$ luego:

$$\begin{aligned} |p(w)| &= \frac{|\sqrt{3}(1 - a - ib)|}{|(3 - a - ib)|} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3}(1 - a))^2 + (\sqrt{3}b)^2}{(3 - a)^2 + b^2}} = \sqrt{\frac{3 + 3(a^2 + b^2) - 6a}{9 + (a^2 + b^2) - 6a}} \\ &\leq \sqrt{\frac{6 - 6a}{9 - 6a}} < 1 \quad \text{ya que} \quad 6 - 6a < 9 - 6a. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $p(\overline{\mathbb{E}}) \subset \mathbb{E}$.

– Sea $x \in [0, 1]$, la derivada de p cumple:

$$p'(x) = \frac{-\sqrt{3}(3 - x) + \sqrt{3}(1 - x)}{(3 - x)^2} = -\frac{2\sqrt{3}}{(3 - x)^2} < 0,$$

4.1. Preparación para la prueba del teorema de Ahlfors.

tenemos entonces que $p|_{[0,1]}$ es una función real, continua y estrictamente decreciente. Por tanto, p lleva $[0,1]$ sobre $[p(1), p(0)] = [0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.

– Primero comprobemos que la inversa de p es $p^*(z) := \frac{\sqrt{3}-3z}{\sqrt{3}-z}$. Para cada $z \in \overline{\mathbb{E}}$ tenemos

$$\begin{aligned} p^*(p(z)) &= p^*\left(\frac{\sqrt{3}(1-z)}{(3-z)}\right) = \frac{\sqrt{3}-3\sqrt{3}(1-z)/(3-z)}{\sqrt{3}-\sqrt{3}(1-z)/(3-z)} = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}z-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}z}{3\sqrt{3}-\sqrt{3}z-\sqrt{3}+\sqrt{3}z} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}z = z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(p^*(z)) &= p\left(\frac{\sqrt{3}-3z}{\sqrt{3}-z}\right) = \frac{\sqrt{3}(1-(\sqrt{3}-3z)/(\sqrt{3}-z))}{3-(\sqrt{3}-3z)/(\sqrt{3}-z)} = \frac{3-\sqrt{3}z-3+3\sqrt{3}z}{3\sqrt{3}-3z-\sqrt{3}+3z} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}z = z. \end{aligned}$$

Ahora pasamos a calcular $q(p^{-1}(z))$:

$$q(p^{-1}(z)) = \frac{9}{4} \frac{1-\sqrt{3}z}{1-z/\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{1-\sqrt{3}z}{1-z/\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{9}{4} \frac{1-\sqrt{3}z}{1-z/\sqrt{3}} \frac{4}{9} \frac{1}{(1-z/\sqrt{3})^2} = \frac{1-\sqrt{3}z}{(1-\frac{1}{\sqrt{3}}z)^3}.$$

– Sea $w = a + ib \in \partial\mathbb{E}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que $|w| = \sqrt{a^2 + b^2} = a^2 + b^2 = 1$ luego:

$$\begin{aligned} |q(w)|(1-|p(w)|^2) &= \left|\frac{9}{4}w(1-\frac{1}{3}w)^2\right|(1-|\sqrt{3}(1-w)/(3-w)|^2) = \frac{9}{4} \left|\frac{3-w}{3}\right|^2 (1-\frac{3|1-w|^2}{|3-w|^2}) \\ &= \frac{|3-w|^2}{4} \frac{|3-w|^2-3|1-w|^2}{|3-w|^2} = \frac{1}{4} [|3-w|^2-3|1-w|^2] \\ &= \frac{1}{4} [|3-a-ib|^2-3|1-a-ib|^2] = \frac{1}{4} [(3-a)^2+b^2-3(1-a)^2+3b^2] \\ &= \frac{1}{4} [9+a^2-6a+b^2-3-3a^2+6a-3b^2] = \frac{1}{4} [6-2(a^2+b^2)] = \frac{4}{4} = 1. \end{aligned}$$

Demostración de la **Proposición 4.3**:

Como $h \in \mathcal{H}(\mathbb{E})$, también se trata de una función analítica y podemos expresarla como

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{E}.$$

4. Teorema de Ahlfors.

Ahora denotemos $h''(0)/2 = a$ y consideremos la primitiva de h'

$$\begin{aligned}\int_0^z h'(\zeta) d\zeta &= -h(0) + h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} z^n = h'(0)z + az^2 + \dots \\ &= z + az^2 + \dots \in \mathcal{H}(\mathbb{E}).\end{aligned}$$

Para todo $z = re^{i\phi} \in \mathbb{E}$, se cumple por hipótesis que $|h'(z)| \leq 1/(1 - |z|^2)$, así tenemos

$$\begin{aligned}|z + az^2 + \dots| &= \left| \int_0^z h'(\zeta) d\zeta \right| \leq \int_0^r |e^{i\phi}| |h'(e^{i\phi}t)| dt \leq \int_0^r \frac{1}{1 - |e^{i\phi}t|^2} dt = \int_0^r \frac{1}{1 - |t|^2} dt \\ &= \tanh^{-1}(r) - \tanh^{-1}(0) = \tanh^{-1}(|z|) = |z| + \frac{1}{3}|z|^3 + \frac{1}{5}|z|^5 + \dots.\end{aligned}$$

Supongamos $a \neq 0$ y consideremos la sucesión $\{z_n := \frac{1}{n} \frac{\bar{a}}{|a|}\}_{n \geq 2}$, donde $|z_n| = \frac{1}{n}$, así que $z_n \in \mathbb{E}$ para todo natural $n > 1$. Se cumple

$$|z_n| + \frac{1}{3}|z_n|^3 + \frac{1}{5}|z_n|^5 + \dots = \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{5n^5} + \dots \leq \frac{1}{n} + \frac{2}{3n^3} \quad \text{para cualquier } n > 10.$$

Dado que $h \in \mathcal{H}(\mathbb{E})$ sabemos por las desigualdades de Cauchy que existe $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $\frac{h^{(n)}(0)}{n!} < c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego

$$\begin{aligned}|z_n + az_n^2 + \dots| &\geq |z_n + az_n^2| - \left| \sum_{n=3}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} z^n \right| \geq |z_n + az_n^2| - |cz_n^3| \\ &= \left| \frac{1}{n} \frac{\bar{a}}{|a|} + \frac{a}{n^2} \frac{\bar{a}^2}{|a|^2} \right| - c \frac{1}{n^3} = \left| \left(\frac{1}{n} + \frac{a}{n^2} \frac{\bar{a}}{|a|} \right) \frac{\bar{a}}{|a|} \right| - c \frac{1}{n^3} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} |a| - c \frac{1}{n^3} \quad \text{para cualquier } n > 1.\end{aligned}$$

Juntando las desigualdades anteriores obtenemos que para cualquier $n > 10$ se cumple

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} + \frac{|a|}{n^2} - \frac{c}{n^3} &\leq \frac{1}{n} + \frac{2}{3n^3} \\ \Leftrightarrow \frac{|a|}{n^2} &\leq \frac{2}{3n^2} + \frac{c}{n^3} \\ \Leftrightarrow |a| &\leq \frac{3c + 2}{3n}.\end{aligned}$$

Pero es evidente que la última desigualdad no es cierta para n lo suficientemente grande porque $|a| > 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3c+2}{3n} = 0$. Deducimos que necesariamente $a = 0$ y, por tanto, que $h''(0) = 2a = 0$. \square

4.1.1. Lema fundamental para la prueba.

El siguiente lema juega un papel fundamental en la demostración que se realizará del teorema de Ahlfors.

Lema 4.1. Sea la función $F \in \mathcal{H}(\mathbb{E})$ satisfaciendo $|F'(z)| \leq 1/(1 - |z|^2)$ y $F'(0) = 1$. Entonces

$$\operatorname{Re} F'(z) \geq \frac{1 - \sqrt{3}|z|}{(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}|z|)^3} \text{ para todo } z \text{ con } |z| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Demostración: En primer lugar vamos a justificar que para probar el lema es suficiente demostrar la desigualdad $\operatorname{Re} F'(z) \geq \frac{1 - \sqrt{3}|z|}{(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}|z|)^3}$ para todo real $z \in [0, 1/\sqrt{3}]$.

Veamos como en efecto, si F satisface las hipótesis del **Lema 4.1**, entonces $F_\phi(z) := e^{-i\phi}F(e^{i\phi}z)$ también las satisface para cualquier $\phi \in \mathbb{R}$.

$F_\phi(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{E})$, puesto que se trata de una composición de funciones que son holomorfas en un entorno de \mathbb{E} .

La derivada es: $F'_\phi(z) = e^{i\phi}e^{-i\phi}F'(e^{i\phi}z) = F'(e^{i\phi}z)$, luego se cumple:

- $|F'_\phi(z)| = |F'(e^{i\phi}z)| \leq \frac{1}{1 - |e^{i\phi}z|^2} = \frac{1}{1 - |z|^2}.$
- $F'_\phi(0) = F'(0) = 1.$

Así, si la desigualdad $\operatorname{Re} F'_\phi(z) \geq \frac{1 - \sqrt{3}|z|}{(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}|z|)^3}$ se cumple para F_ϕ y $z = r$, entonces también se cumple $\operatorname{Re} F'(z) \geq \frac{1 - \sqrt{3}|z|}{(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}|z|)^3}$ para F y $z = re^{i\phi}$.

Después de estos preliminares, podemos continuar la demostración de la desigualdad del **Lema 4.1** de la siguiente manera. Consideramos la función auxiliar

$$H(w) := \frac{F'(p(w)) - q(w)}{\frac{9}{4}(1 - \frac{1}{3}w)^2(1 - w)^2},$$

que para $w \neq 0$ también se puede expresar como

$$H(w) = \left(\frac{F'(p(w))}{q(w)} - 1 \right) \frac{w}{(1 - w)^2}.$$

donde $w/(1 - w)^2$ es la función extremal de Koebe, que lleva el conjunto $\partial\mathbb{E} \setminus \{1\}$ al intervalo real $(-\infty, -1/4)$. Dado que $F \in \mathcal{H}(\mathbb{E})$ y $p(\overline{\mathbb{E}}) \subset \mathbb{E}$, tenemos que $F' \circ p \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{E}})$ y puesto que H es composición de funciones holomorfas en $\overline{\mathbb{E}}$, cuyo

4. Teorema de Ahlfors.

denominador solamente se anula en los puntos 1 y $3 \in \mathbb{C}$, sabemos que H es holomorfa en $\overline{\mathbb{E}} \setminus \{1\}$. A continuación vamos a demostrar que H también es derivable en 1 , para ello probaremos que la función que aparece en el numerador de H

$$w \mapsto \zeta(w) := F'(p(w)) - q(w),$$

que es claramente holomorfa en un entorno de 1 , cumple $\zeta'(1) = \zeta(1) = 0$.

Como $p(1) = 0$, $q(1) = 1$ y $F'(0) = 1$ tenemos que $\zeta(1) = 0$. Por otro lado, como $q'(1) = 0$ y $F''(0) = 0$ por la **Proposición 4.3**, tenemos también que $\zeta'(1) = F''(p(1))p'(1) - q'(1) = 0$. Sabemos que existe entonces una función holomorfa donde lo es ζ de modo que $\zeta(w) = (w - 1)^2 \zeta^*(w)$. El teorema de extensión de Riemann nos dice que H es derivable en $w = 1$, luego $H \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{E}})$. Ahora, $w/(1 - w)^2$ es un real negativo ($\leq -\frac{1}{4}$) para todo $w \in \partial\mathbb{E} \setminus \{1\}$. Así

$$\operatorname{Re} H(w) = \frac{w}{(1 - w)^2} \operatorname{Re} \left(\frac{F'(p(w))}{q(w)} - 1 \right) \text{ para todo } w \in \partial\mathbb{E}.$$

La desigualdad $|F'(z)|(1 - |z|^2) \leq 1$, que se cumple por hipótesis, y la última ecuación de la **Proposición 4.2**, $|q(w)|(1 - |p(w)|^2) = 1$ para todo $w \in \partial\mathbb{E}$, implican que $\left| \frac{F'(p(w))}{q(w)} \right| \leq 1$ para todo $w \in \partial\mathbb{E}$. Como $\operatorname{Re}(a - 1) \leq 0$ para cada $a \in \overline{\mathbb{E}}$, deducimos que $\operatorname{Re} H(w) \geq 0$ para todo $w \in \partial\mathbb{E}$.

Aplicando el principio del módulo máximo a $e^{-H(w)}$ y teniendo en cuenta que $|e^{-H(w)}| = e^{-\operatorname{Re} H(w)}$, obtenemos que $\max\{e^{-\operatorname{Re} H(w)} : w \in \overline{\mathbb{E}}\} = \max\{e^{-\operatorname{Re} H(w)} : w \in \partial\mathbb{E}\}$ y, por consiguiente, el mínimo de $\operatorname{Re} H$ en $\overline{\mathbb{E}}$ se alcanza en $\partial\mathbb{E}$. Luego $\operatorname{Re} H(w) \geq 0$ para todo $w \in \overline{\mathbb{E}}$.

Es claro que $q(w) = \frac{9}{4}w(1 - \frac{1}{3}w)^2 \geq 0$ y $w/(1 - w)^2 \geq 0$ para $w \in [0, 1]$, de donde obtenemos que para todo $w \in (0, 1)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} H(w) &= \frac{w}{(1 - w)^2} \operatorname{Re} \left(\frac{F'(p(w))}{q(w)} - 1 \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re} \left(\frac{F'(p(w))}{q(w)} - 1 \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Re} F'(p(w)) \geq q(w). \end{aligned}$$

Como la desigualdad $\operatorname{Re} F'(p(w)) \geq q(w)$ se cumple para todo $w \in (0, 1)$ y $F'(p(w))$ y $q(w)$ son continuas en $[0, 1]$, entonces $\operatorname{Re} F'(p(w)) \geq q(w)$ se cumple para todo $w \in [0, 1]$. Utilizando ésto y las afirmaciones de la **Proposición 4.2**, se tiene que

$$\operatorname{Re} F'(z) = \operatorname{Re} F'(p(p^{-1}(z))) \geq q(p^{-1}(z)) = \frac{1 - \sqrt{3}|z|}{(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}|z|)^3},$$

para todo real $z \in [0, 1/\sqrt{3}]$. □

Tras todos estos resultados, finalmente nos encontramos en posición de enunciar y poder demostrar el teorema esencial de este capítulo.

4.2. Teorema de Ahlfors.

Teorema 4.1. Teorema de Ahlfors: Sea $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{E}})$ y sea $N := \max_{|z| \leq 1} |f'(z)|(1 - |z|^2) > 0$. Entonces $f(\mathbb{E})$ contiene discos simples de radio $\frac{1}{4}\sqrt{3}N$.

Tengamos en cuenta que este teorema es mucho más potente que el teorema de Bloch por dos razones: la primera es que ahora tenemos discos simples en lugar de discos y la segunda, y más importante, es que la nueva cota inferior para el radio $\frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0,433$ es más de tres veces mayor que la antigua cota $\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2 \approx 0,121$.

Demostración del Teorema de Ahlfors:

Para esta demostración primero vamos a considerar el caso en que $N = 1$.

Elegimos F como en (2.5),

$$F(z) := f\left(\frac{z - q}{\overline{q}z - 1}\right) \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{E}}),$$

se cumple que $|F'(0)| = 1$, luego $F'(0) = \eta \in S^1$. Vamos a dividir la demostración en dos partes, según η sea igual o no a 1.

Primero supongamos que $\eta = 1$. Sabemos por (2.6) que $|F'(z)|(1 - |z|^2) \leq 1$, luego estamos en condiciones de emplear el **Lema 4.1**. Así, tomando $B := B_\rho(0)$ con $\rho := 1/\sqrt{3}$ tenemos que $\operatorname{Re} F'(z) \geq (1 - \sqrt{3}|z|)(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}|z|)^{-3} > 0$ para cualquier $z \in B$. De donde deducimos que $F|_B : B \rightarrow F(B)$ es biholomorfo por la **Proposición 4.1**.

Para todo $\zeta = \rho e^{i\phi} \in \partial B$, el **Lema 4.1** implica que

$$\begin{aligned} |F(\zeta) - F(0)| &= \left| \int_0^\rho e^{i\phi} F'(te^{i\phi}) dt \right| = |e^{i\phi}| \left| \int_0^\rho F'(te^{i\phi}) dt \right| = \left| \int_0^\rho F'(te^{i\phi}) dt \right| \\ &\geq \int_0^\rho \operatorname{Re} F'(te^{i\phi}) dt \geq \int_0^\rho \frac{1 - \sqrt{3}t}{(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}t)^3} dt = \frac{9(2\sqrt{3} - 3t)}{(\sqrt{3}t - 3)^2} \Bigg|_{t=0}^{t=1/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

De esta forma, por la **Proposición 2.1**, $F(B)$ contiene discos de radio $\sqrt{3}/4$. Dado que $f = F \circ j$ con $j \in \operatorname{Aut} \mathbb{E}$, f lleva de forma biholomorfa el dominio $G := j^{-1}(B) \subset \mathbb{E}$ en un dominio G^* que contiene discos simples de radio $\sqrt{3}/4$.

4. Teorema de Ahlfors.

Sea ahora $\eta \in S^1$ arbitrario, trabajamos con $\eta^{-1}F$ en lugar de F y realizamos el mismo proceso. Obtenemos que $f : G \rightarrow \eta G^*$ es un biholomorfismo y que ηG^* , como G^* , contiene discos simples de radio $\sqrt{3}/4$.

En el caso $N \neq 1$ trabajaríamos con $g(z) := f(z)/N$ en lugar de f . Se cumple que $g \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$, $\max_{|z| \leq 1} |g'(z)|(1 - |z|^2) = \max_{|z| \leq 1} N|f'(z)|(1 - |z|^2) = N/N = 1$ y si $g(\mathbb{E})$ contiene discos simples de radio r , entonces $f(\mathbb{E})$ contiene discos simples de radio Nr . Por tanto, replicando la prueba del caso $N = 1$ pero con $g(z) := f(z)/N$, obtenemos al final que $f(\mathbb{E})$ contiene discos simples de radio $\frac{1}{4}\sqrt{3}N$. \square

De la misma forma que del teorema de Bloch obtuvimos el **Corolario 2.1** y la **Proposición 2.2**, ahora del teorema de Ahlfors obtenemos los siguientes resultados.

Corolario 4.1. *Sea f una función holomorfa en un dominio $G \subset \mathbb{C}$ de modo que existe un punto $c \in G$ tal que $f'(c) \neq 0$, entonces $f(G)$ contiene discos simples de radio $\frac{\sqrt{3}}{4}s|f'(c)|$ para todo s cumpliendo $0 < s < d(c, \partial G)$.*

Demostración:

La demostración es análoga a la del **Corolario 2.1**, utilizando el teorema de Ahlfors en lugar del teorema de Bloch.

En primer lugar observamos que podemos asumir $c = 0$. En caso de que $c \neq 0$, trabajamos con $G^* = \{z - c : z \in G\}$ y $f^*(z) := f(z + c)$, que es holomorfa en G^* , como se cumple que $f(G) = f^*(G^*)$ ambas funciones contienen discos de igual tamaño.

Para todo s cumpliendo $0 < s < d(0, \partial G)$, tenemos que $\overline{B_s(0)} \subset G$; por consiguiente podemos definir

$$g: \overline{\mathbb{E}} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto \frac{f(sz)}{sf'(0)}$$

que cumple $g \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{E}})$ porque $sf'(0)$ es un valor fijo distinto de 0, $sz \in \overline{B_s(0)} \subset G$ para todo $z \in \overline{\mathbb{E}}$ y f es holomorfa en el dominio G .

Calculando la derivada de la función g , obtenemos que

$$g'(z) = \frac{sf'(sz)}{sf'(0)} = \frac{f'(sz)}{f'(0)},$$

luego $g'(0) = \frac{f'(0)}{f'(0)} = 1$. Así, $\max_{|z| \leq 1} |g'(z)|(1 - |z|^2) \geq |g'(0)| = 1$ y podemos aplicar el teorema de Ahlfors a la función g , de forma que $g(\mathbb{E})$ contiene discos simples de radio $\frac{1}{4}\sqrt{3}$.

4.3. Constantes universales de Bloch y Landau.

Como $f(B_s(0)) = sf'(0)g(\mathbb{E})$ y $B_s(0) \subset G$, deducimos que $f(G)$ contiene discos de radio $|\frac{1}{4}\sqrt{3}sf'(c)| = \frac{1}{4}\sqrt{3}s|f'(c)|$. \square

El siguiente resultado aparece inmediatamente:

Proposición 4.4. *Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es no constante, entonces $f(\mathbb{C})$ contiene discos simple de tamaño arbitrario.*

Demostración:

La demostración es análoga a la de la **Proposición 2.2**, pero utilizando el **Corolario 4.1** de Ahlfors en lugar del **Corolario 2.1**. En efecto, sea un radio cualquiera $r > 0$, vamos a probar que $f(\mathbb{C})$ contiene un disco simple de radio r .

La función f es holomorfa en todo \mathbb{C} y, como no es constante, existe un punto $c \in \mathbb{C}$ tal que $f'(c) \neq 0$. Tomando $r^* := \frac{5}{\sqrt{3}}r/|f'(c)|$, como f es entera, entonces f es holomorfa en el dominio $B_{r^*}(c)$ y, empleando el **Corolario 4.1**, sabemos que $f(B_{r^*}(c))$ contiene discos simples de radio $\frac{\sqrt{3}}{4}s|f'(c)|$ para todo s cumpliendo $0 < s < r^*$.

Por tanto, dado que $0 < \frac{4}{\sqrt{3}}r/|f'(c)| < r^*$, tenemos que $f(\mathbb{C})$ contiene un disco de radio $\frac{\sqrt{3}|f'(c)|}{4} \frac{4}{\sqrt{3}|f'(c)|}r = r$. \square

4.3. Constantes universales de Bloch y Landau.

Como conclusión al teorema de Bloch y sus versiones mejoradas, incluyendo el teorema de Ahlfors, vamos a presentar las constantes universales de Bloch y Landau.

El teorema de bloch y su variación motivaron a Landau a introducir "constantes universales". Para cada $h \in \mathcal{F} := \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{E}) : f'(0) = 1\}$, denotamos L_h al radio del mayor disco contenido en $h(\mathbb{E})$ y B_h al radio del mayor disco que sea la imagen biholomorfa de un subdominio de \mathbb{E} mediante h . Entonces

$$L := \inf\{L_h : h \in \mathcal{F}\} \quad \text{y} \quad B := \inf\{B_h : h \in \mathcal{F}\}.$$

se denominan, respectivamente, las constantes de Landau y Bloch.

Landau análogamente define los números A_h y A para la familia $\mathcal{F}^* := \{h \in \mathcal{F} : h \text{ inyectiva}\}$, siendo A_h el radio del mayor disco contenido en $h(\mathbb{E})$ para $h \in \mathcal{F}^*$ y

$$A := \inf\{A_h : h \in \mathcal{F}^*\}.$$

4. *Teorema de Ahlfors.*

Es evidente que $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$ y $B_h \leq L_h$ para cualquier $h \in \mathcal{F}$, ya que si $h \in \mathcal{F}$ se cumple que $h'(0) = 1$, así que h es localmente inyectiva alrededor de 0 y también biholomorfa. Luego es trivial que

$$B \leq L \leq A.$$

En la actualidad no se conocen los valores exactos para B , L y A , sólo se conocen algunas cotas para sus valores.

En la sección anterior hemos probado primero que $L \geq \frac{3}{2} - \sqrt{2} \approx 0,0858$ y luego que $L \geq \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2 \approx 0,1213$.

Del teorema de Ahlfors sabemos que $B \geq \frac{1}{4}\sqrt{3}$. Adicionalmente M. Bonk en su artículo [Bon43] llega a mostrar la mejor cota inferior para la constante de Bloch hasta la fecha: $B > \frac{1}{4}\sqrt{3} + 10^{-14}$.

Como resultado de que $\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} \in \mathcal{H}(\mathbb{E})$ es una función inyectiva y su forma analítica es

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} = z + z^3/3 + z^5/5 + z^7/7 + \dots,$$

trabajando con la forma analítica hasta el término n -ésimo y haciendo n cada vez más grande se llega a que $A \leq \frac{\pi}{4} \approx 0,7853$. Así,

$$0,433 + 10^{-14} < B \leq L \leq A \leq 0,7853$$

Tales estimaciones y refinamientos de estas constantes continúan fascinando a los teóricos funcionales. Se ha llegado a probar que

$$\begin{aligned} 0,433 + 10^{-14} < B < 0,472 & \quad [\text{Min83}]; \\ 0,5 + 10^{-335} < L < 0,544 & \quad [\text{HY04}] \text{ y } [\text{Rad43}]; \\ 0,5 \leq A & \quad [\text{Bon43}]. \end{aligned}$$

Por tanto, se cumple que $B < L \leq A$.

Parte II.

Parte de Informática.

5. Estimación de valores para las constantes de Bloch y Landau.

El valor exacto de las constantes de Bloch y Landau es desconocido y constituye un problema muy profundo en matemáticas. Nuestro objetivo en este capítulo consiste en intentar estimar la constante de Landau, L , mediante una cota superior. Adicionalmente obtendremos una cota superior para la constante de Bloch, B , ya que se cumple $B < L$.

Para aproximarnos a la estimación de las constantes vamos a desarrollar una serie de algoritmos que implementaremos en un programa informático. Primero explicaremos cómo podemos trabajar en una máquina con el conjunto de funciones que nos interesa y a continuación pasaremos a explicar los algoritmos que nos permitirán estimar la cota superior de L .

Recordamos que la constante de Landau se define como $L := \inf\{L_f : f \in \mathcal{F}\}$ donde $\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{E}}) : f'(0) = 1\}$ y L_f denota al radio del mayor disco contenido en $f(\mathbb{E})$.

Dado que la constante de Landau se trata de un ínfimo sabemos que para cualquier función $f \in \mathcal{F}$ se cumple $L \leq L_f$. Por esta razón, para aproximarnos al valor de dicha constante vamos a “parametrizar” las funciones del conjunto \mathcal{F} y realizaremos una búsqueda sistemática de las funciones que tengan valores pequeños de L_f mediante un programa.

La implementación de los algoritmos que describiremos a lo largo del capítulo se ha realizado en su totalidad con el lenguaje Python en su versión 3.7.6 y haciendo uso del entorno de desarrollo Spyder. El código puede encontrarse en <https://github.com/jomabose/TFGAplicacionAbierta>.

Las principales fuentes de este capítulo son los libros [Bro12] y [THCo8].

5.1. Representación de las funciones de \mathcal{F} .

Debido a que \mathcal{F} es un espacio afín de dimensión infinita para poder trabajar con él en un programa primero tenemos que discretizarlo.

Gracias al teorema de Taylor sabemos que las funciones de $\mathcal{H}(\overline{\mathbb{E}})$, que son analíticas en $\overline{\mathbb{E}}$, se pueden ver como la suma de una serie de potencias centrada en el origen con radio de convergencia mayor o igual que 1. Es decir,

$$f \in \mathcal{H}(\overline{\mathbb{E}}) \Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ con } \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1 \text{ para cualquier } z \in \overline{\mathbb{E}}.$$

Las series de potencias se derivan sumando a sumando por lo que

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Evaluando la derivada en 0 obtenemos $f'(0) = a_1 * 0^0 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n 0^{n-1} = a_1$, por lo que $f'(0) = 1 \Leftrightarrow a_1 = 1$.

De este modo \mathcal{F} está contenido en el conjunto de funciones de la forma

$$\mathcal{F}_1 = \{a_0 + z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n : \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1 \text{ y } a_n \in \mathbb{C}\}.$$

Adicionalmente podemos añadir como condición a las funciones que el término a_0 sea igual a 0, ya que la imagen de la función sería la misma pero trasladada y, por tanto, el radio del mayor disco contenido en la imagen seguiría siendo el mismo.

Como no podemos trabajar con series infinitas en la máquina, para poder implementarlas tenemos que truncarlas. A efectos prácticos estamos trabajando con polinomios que cumplen que el coeficiente constante es 0 y que el coeficiente que acompaña a z vale 1, es decir, trabajamos con funciones del conjunto

$$\mathcal{F}^* = \{z + \sum_{n=2}^m a_n z^n : a_n \in \mathbb{C}, m \geq 2\}.$$

Para obtener funciones aleatorias del conjunto \mathcal{F}^* implementamos el **algoritmo 1** y para calcular un punto de la imagen de la función el **algoritmo 2**.

Algoritmo 1: Obtención de una función aleatoria.

Entrada: n , número de coeficientes de la función.**Entrada:** $cota_sup$.**Entrada:** $cota_inf$.**Salida:** Vector de coeficientes de la función $coeficientes \leftarrow$ vector de n números complejos; $coeficientes[0] \leftarrow 0$; $coeficientes[1] \leftarrow 1$;**para** $2 \leq i < n$ **hacer**
| $Coeficientes[i] \leftarrow$ complejo con parte real e imaginaria aleatoria en el
| intervalo $[cota_inf, cota_sup]$;
fin**devolver** $coeficientes$;

Algoritmo 2: Cálculo de la imagen en un punto.

Entrada: f , vector de coeficientes de la función.**Entrada:** p , punto del que calcular su imagen.**Salida:** $f(p)$ $n \leftarrow$ número de coeficientes en f ; $imagen \leftarrow 0$;**para** $0 \leq i < n$ **hacer**
| $imagen \leftarrow imagen + f[i] * z^i$;
fin**devolver** $imagen$;

5.2. Cálculo de L_f .

Una vez tengamos seleccionada una función $f \in \mathcal{F}^*$ tenemos que calcular o estimar con precisión L_f , que se trata del radio del mayor disco contenido en $f(\mathbb{E})$.

Lo primero a tener en cuenta es que fijado un punto $p \in f(\mathbb{E})$, el mayor disco centrado en p y contenido en $f(\mathbb{E})$ tiene por radio la distancia de p a la frontera de $f(\mathbb{E})$. Ya que dicha frontera es un compacto, la distancia se calcula como

$$d(p, \partial f(\mathbb{E})) = \min\{|p - q| : q \in \partial f(\mathbb{E})\}.$$

De manera que para calcular L_f necesitamos saber cuáles son los puntos de la frontera de $f(\mathbb{E})$.

La frontera de $f(\mathbb{E})$ se trata de un conjunto con infinitos puntos y como es lógico no podemos trabajar con todos ellos en una máquina. Pero somos capaces de trabajar con un subconjunto finito de puntos de $\partial f(\mathbb{E})$ sin mayor problema.

5. Estimación de valores para las constantes de Bloch y Landau.

Dado un punto $p \in \mathbb{C}$ cualquiera y teniendo presente la expresión de la distancia de un punto a la frontera de la imagen, se cumple que

$$\text{si } A \subseteq B \subseteq \partial f(\mathbb{E}), \text{ entonces } d(p, \partial f(\mathbb{E})) \leq d(p, B) \leq d(p, A).$$

Por lo tanto, aunque trabajemos con un subconjunto finito de puntos de la frontera podemos estimar por arriba el radio del mayor disco centrado en p y contenido en la imagen. Además, si en el subconjunto de $\partial f(\mathbb{E})$ con el que trabajamos no dejamos "huecos" significativos, entonces el error que podemos llegar a cometer será prácticamente nulo. Con "huecos" nos referimos a partes de la frontera de las cuales no hemos tomado ningún punto en el subconjunto.

5.2.1. Obtención de la frontera de la imagen.

Denotamos \mathbb{T} a la circunferencia unidad centrada en el punto 0, es decir, $\mathbb{T} = \partial \mathbb{E}$.

Las funciones con la que trabajamos son polinomios, así que son funciones enteras y dado que $\overline{\mathbb{E}} = \mathbb{E} \cup \mathbb{T}$ es compacto, entonces $f(\overline{\mathbb{E}})$ también es compacto. Por lo tanto,

$$f(\overline{\mathbb{E}}) = f(\mathbb{E})^\circ \cup \partial f(\mathbb{E}).$$

Como f es entera y es no constante, porque $f'(0) = 1$, el teorema de la aplicación abierta nos dice que $f(\mathbb{E})$ es abierta. Luego $f(\mathbb{E}) \subset f(\mathbb{E})^\circ$ y necesariamente se cumple $\partial f(\mathbb{E}) \subset f(\mathbb{T})$.

Por ello, escogiendo una cantidad lo suficientemente grande de puntos en \mathbb{T} , de forma que lo "llene", y calculando su imagen por f obtenemos una imagen discreta de la frontera de $f(\mathbb{E})$ y de puntos del interior. Para obtener n puntos equidistantes de \mathbb{T} implementamos el **algoritmo 3**, que consiste en tomar como punto p_0 el punto $(1, 0)$ y luego tomar iterativamente como p_i el punto p_0 girado $i * 2\pi/n$ radianes con $1 \leq i < n$. De esta forma si tomamos un número grande de puntos, "llenamos" \mathbb{T} . En nuestro caso usaremos por lo general 100000 puntos, para que así la imagen de la circunferencia por la función también esté "llena".

En la **Figura 5.1** podemos observar un ejemplo de como la función f lleva la circunferencia unidad a su imagen. En la imagen de la función se puede observar visualmente la frontera, que se trata del contorno de la figura, y como también hay puntos que se encuentran dentro de la figura, que son puntos del interior de $f(\mathbb{E})$.

Algoritmo 3: Obtención de los puntos de la circunferencia unidad centrada en 0.

Entrada: n , número de puntos de la circunferencia.

Salida: Vector con los puntos de la circunferencia unidad.

$P \leftarrow \emptyset$;

$\theta \leftarrow 2\pi/n$;

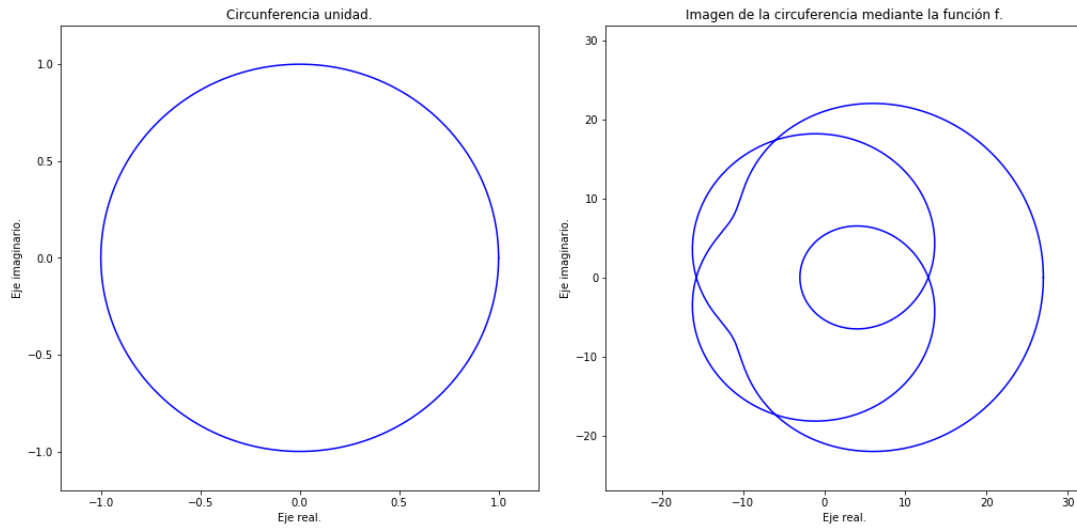
añadir $[1, 0]$ a P ;

para $1 \leq i < n$ **hacer**

 | añadir $[\cos(i * \theta), -\sin(i * \theta)]$ a P ;

fin

devolver P ;



(a) Circunferencia obtenida mediante **algoritmo 3** (b) Imagen de la función $f(z) = z + 14z^2 + 8z^3 - 2z^4 + 6z^5$

Figura 5.1.: Ejemplo de circunferencia unidad e imagen de la función.

Una vez tenemos los puntos de la imagen de la circunferencia mediante la función, para poder calcular el disco máximo contenido en la imagen tenemos que eliminar los puntos que pertenezcan al interior de la misma y quedarnos únicamente con los puntos de la frontera.

La imagen de la circunferencia unidad mediante una función de \mathcal{F}^* resulta en una figura cerrada, llamamos contorno a los puntos del exterior de la figura. La frontera de la imagen se corresponde con el contorno de la misma, así que vamos a implementar un algoritmo que nos permita obtener puntos del contorno realizando un "barrido" de los ángulos alrededor de un punto central.

5. Estimación de valores para las constantes de Bloch y Landau.

5.2.2. Contorno de la imagen.

Sean P y Q dos puntos de \mathbb{C} con coordenadas $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ consideraremos el ángulo entre P y Q como el ángulo del vector \overrightarrow{PQ} . Dicho ángulo se puede calcular como $\arctan((q_2 - p_2)/(q_1 - p_1))$, restringiendo el valor del ángulo al intervalo $[0, 2\pi)$ existe otro ángulo que difiere en π que tiene la misma tangente, así que debemos tener en cuenta los signos de la parte real e imaginaria para determinar el cuadrante del vector y obtener el ángulo de forma unívoca.

Fijando un punto p_0 contenido en el interior de la imagen, para cada ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ tengamos en cuenta el conjunto

$$A_\alpha := \{p \in f(\mathbb{T}) : \text{ángulo}(p_0, p) = \alpha\}.$$

Es evidente que el punto $p_\alpha \in A_\alpha$ tal que $d(p_0, p_\alpha) = \max_{p \in A_\alpha} d(p_0, p)$ se trata de un punto perteneciente a la frontera de $f(\mathbb{E})$. Por tanto, si para cada ángulo polar α nos quedamos con el punto p_α y desechamos el resto de puntos de A_α , al final habremos eliminado todos los puntos del interior de la imagen y nos habremos quedado con un conjunto de puntos que pertenecen a la frontera.

Como sabemos que el punto 0 pertenece al interior de la imagen, pues $f(0) = 0$ para cualquier función f con la que trabajamos, tomaremos $p_0 = 0$ como punto central desde el que realizar el "barrido". Este procedimiento viene especificado en el [algoritmo 4](#).

En la [Figura 5.2](#) y [Figura 5.3](#) podemos ver dos ejemplos de como queda el contorno de la figura al realizar el procedimiento del "barrido", donde se puede observar fácilmente que hemos eliminado los puntos del interior y nos hemos quedado con puntos que conservan el contorno de la figura.

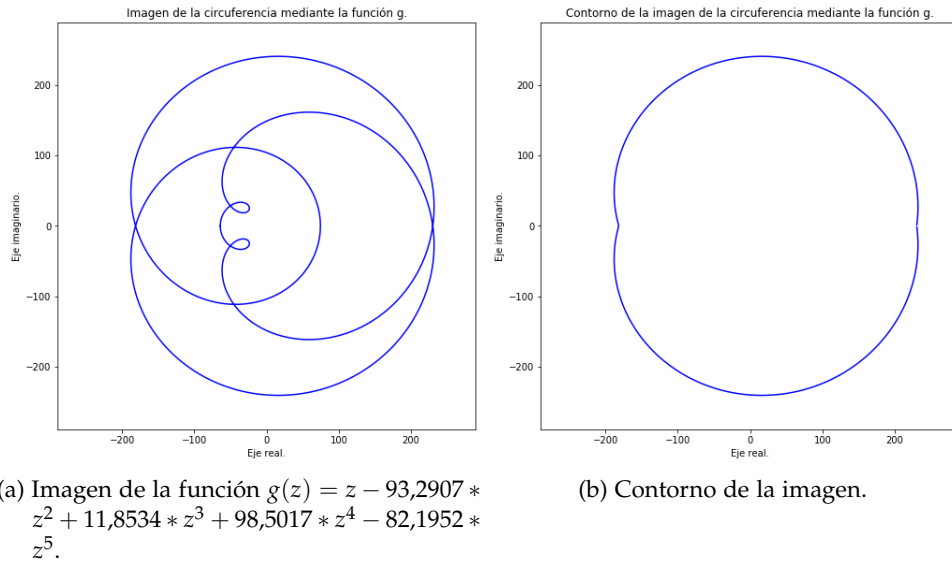


Figura 5.2.: Primer ejemplo del contorno obtenido mediante **algoritmo 4**.

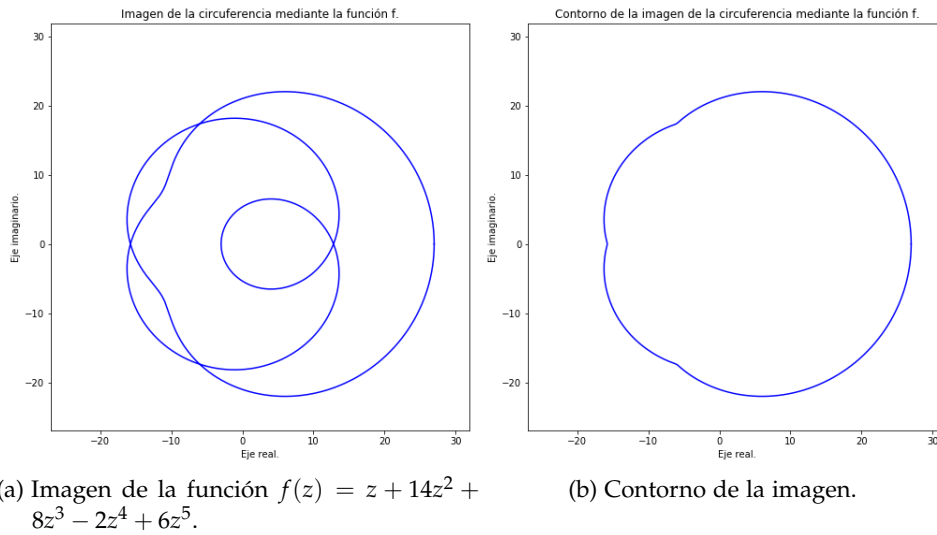


Figura 5.3.: Segundo ejemplo del contorno obtenido mediante **algoritmo 4**.

5. Estimación de valores para las constantes de Bloch y Landau.

Algoritmo 4: Obtención de los puntos del contorno de una figura.

Entrada: P vector de puntos de la figura

Salida: Vector de puntos del contorno de la figura

$centro \leftarrow [0,0];$

$Q \leftarrow \emptyset;$

para $p \in P$ **hacer**

 añadir $[\text{angulo}(centro, p), \text{distancia}(centro, p), \text{indice}(p)]$ a Q ;

fin

ordenar Q según el primer valor de cada elemento;

$S \leftarrow \emptyset;$

$angulo \leftarrow Q[0][0];$

$distancia \leftarrow Q[0][1];$

$indice \leftarrow Q[0][2];$

para $q \in Q$ **hacer**

si $angulo == q[0]$ **entonces**

si $distancia < q[1]$ **entonces**

$distancia \leftarrow q[1];$

$indice \leftarrow q[2];$

fin

en otro caso

 añadir $P[indice]$ a S ;

$angulo \leftarrow q[0][0];$

$distancia \leftarrow q[0][1];$

$indice \leftarrow q[0][2];$

fin

fin

añadir $P[indice]$ a S ;

devolver S ;

Dado que estamos trabajando con la imagen discreta de la función, para que el **algoritmo 4** funcione correctamente y obtengamos los puntos del contorno, al calcular el ángulo entre dos puntos tenemos que redondearlo o truncarlo, de lo contrario habría puntos del interior que no compartirían el mismo ángulo con ningún punto del contorno.

En el programa realizado los ángulos en radianes se han redondeado a 2 cifras decimales, lo que nos permite eliminar todos los puntos del interior conservando el contorno. Además de esta forma el número máximo de puntos que tendrá el contorno será de 629 puntos y ésto nos permitirá realizar la siguiente parte del cálculo de L_f más eficiente en el tiempo ya que reducimos el número de cálculos a realizar para la distancia del centro de la bola a la frontera.

5.2.3. Obtención de la bola de mayor radio.

Una vez tenemos un conjunto de puntos del contorno de la imagen, nuestro objetivo es encontrar la bola de mayor radio contenida en la figura. Dado un punto p_0 que sirva como centro, el mayor radio de la bolas contenidas en la imagen y centradas en p_0 es la distancia de p_0 al contorno de la imagen. Podemos calcular dicha distancia mediante la expresión

$$d(p_0, P) = \min\{|p_0 - p| : p \in P\}, \quad \text{donde } P \text{ es un conjunto finito de puntos.}$$

Implementamos dicha expresión en el **algoritmo 5**, de esta forma nuestro problema se resume en encontrar el punto que sirve como centro para la bola de mayor radio contenida en la imagen.

Algoritmo 5: Distancia entre un punto y un conjunto de puntos.

Entrada: *punto*.

Entrada: P , vector de puntos.

Salida: Valor de la distancia entre *punto* y P .

distancia $\leftarrow \infty$;

para $p \in P$ **hacer**

si $|punto - p| < distancia$ **entonces**

$distancia \leftarrow |punto - p|$;

fin

fin

devolver *distancia*;

Denotando a C_f como el conjunto de puntos del contorno de la imagen obtenidos mediante el **algoritmo 4**, ahora queremos obtener

$$\max_{z \in f(\mathbb{E})} d(z, C_f) \approx L_f.$$

Nos encontramos con un problema de optimización global en un espacio de dimensión infinita en el que queremos obtener el máximo de una función que es continua pero no derivable y que puede tener varios máximos locales, para afrontar dicho problema vamos utilizar un algoritmo de búsqueda estocástico.

Debido a que vamos a tener que estimar L_f para una gran cantidad de funciones, el algoritmo que implementemos tiene que equilibrar precisión y tiempo de cálculo. Un punto inicial, que es un buen candidato por el que empezar a buscar el centro para la bola de mayor radio, es el baricentro del conjunto de puntos C_f , que se puede calcular mediante el **algoritmo 6**.

5. Estimación de valores para las constantes de Bloch y Landau.

Algoritmo 6: Cálculo del baricentro de un conjunto de puntos.

Entrada: P , vector de punto.

Salida: El baricentro del conjunto P .

$\text{baricentro} \leftarrow 0$;

para $p \in P$ **hacer**

$\text{baricentro} \leftarrow \text{baricentro} + p$;

fin

$\text{baricentro} \leftarrow \text{baricentro} / (\text{número de puntos en } P)$;

devolver bola ;

5.2.3.1. Búsqueda local de la bola.

Es probable que el punto que buscamos para el cálculo de L_f se encuentre en un entorno del baricentro, por lo que realizaremos una búsqueda local en dicho entorno mediante el **algoritmo 7**, que se trata de un algoritmo de escalada estocástico donde se selecciona la mejor solución vecina.

Procedimiento del **algoritmo 7**:

1. Tomamos como solución inicial la bola que tiene por centro al baricentro y como radio la distancia del baricentro a los puntos del contorno de la imagen.
2. Iteramos generando bolas cuyos centros son puntos del entorno de la solución actual mediante un procedimiento estocástico.
3. Seleccionamos la mejor solución vecina, aquella bola cuyo radio sea el mayor.
4. Si la mejor solución vecina mejora a la solución actual, es decir, el radio de la nueva bola es mayor que el de la bola actual, entonces la sustituimos y continuamos la iteración. En otro caso, finalizamos el algoritmo.

Pasamos a explicar las consideraciones para la generación de vecinos del **algoritmo 7** y qué entendemos como entorno del centro de una bola:

- Consideramos como vecinos del centro de un disco al resto de puntos contenidos en dicho disco.
- Obviamente no podemos trabajar con todos los puntos vecinos del centro, ya que su número es infinito, por esta razón nos restringimos a un subconjunto finito de vecinos.
- Dotamos de cierta aleatoriedad a la elección de cada vecino para evitar que haya puntos del disco a los que nunca se pueda tomar como vecinos.

Algoritmo 7: Obtención de la bola de mayor radio mediante búsqueda local.

Entrada: P , vector de puntos del contorno de la figura.

Entrada: *centro*, punto del centro de la bola en que empezamos la búsqueda local. Por defecto es *None*.

Salida: Bola de mayor radio contenida en un entorno local del baricentro de la figura.

si *centro* es *None* **entonces**

 | *centro* \leftarrow baricentro(P);

fin

radio \leftarrow distancia(*centro*, P);

bola \leftarrow [baricentro(P), *radio*];

parada \leftarrow falso;

mientras \neg *parada* **hacer**

 | *parada* \leftarrow verdad;

 | $Q \leftarrow$ genera_vecinos(*bola*);

para $q \in Q$ **hacer**

 | *radio_q* \leftarrow distancia(q , P);

si *radio_q* $>$ *bola.radio* **entonces**

 | *bola* \leftarrow [q , *radio_q*];

 | *parada* \leftarrow falso;

fin

fin

fin

devolver *bola*;

Los vecinos que se utilizan en el **algoritmo 7** los generamos mediante el **algoritmo 8**. Su procedimiento es el siguiente:

1. Tomamos una bola B contenida en la imagen con centro c y radio r , un número entero $n > 0$ de ángulos y un número entero $m > 0$ de distancias. Al final, generaremos $n * (m + 1)$ puntos que serán los vecinos del centro de la bola B .
2. Dividimos la bola en n regiones según el ángulo, de forma que la primera región contiene los ángulos en el intervalo $[0, 2\pi/n]$, la segunda son los ángulos del intervalo $[2\pi/n, 2 * (2\pi/n)]$ y así hasta la n -ésima región que contiene los ángulos del intervalo $[(n - 1) * (2\pi/n), 2\pi]$.
3. Para cada región elegimos aleatoriamente un ángulo α contenido en su intervalo y volvemos a dividir la bola en m partes según la distancia al centro de la bola, de forma que la primera parte son las distancias al centro en el intervalo $[0, \text{radio}/m]$, la segunda el intervalo $[\text{radio}/m, 2 * (\text{radio}/m)]$ y así

5. Estimación de valores para las constantes de Bloch y Landau.

sucesivamente hasta la m -ésima parte que son las distancias al centro en el intervalo $[(m - 1) * (radio / m), radio]$.

4. Para cada parte de la región con ángulo α volvemos a elegir aleatoriamente una distancia r de su intervalo y tomamos como vecino al punto cuya distancia al centro de la bola sea r y cuyo ángulo sea α , adicionalmente añadimos el punto cuyo ángulo respecto al centro siga siendo α y cuya distancia al centro sea $radio / 100$. Añadimos ese punto para ajustar con mayor precisión la bola de radio máximo contenida en la imagen.

Algoritmo 8: Generación de vecinos del centro de la bola.

Entrada: B , bola de la que generar los vecinos.

Entrada: n , número de ángulos a usar.

Entrada: m , número de distancias .

Salida: Vector de centros del entorno de B .

$centro \leftarrow B.centro$;

$radio \leftarrow B.radio$;

$V \leftarrow \emptyset$;

$\theta = 2\pi / n$;

$d = radio / m$;

para $i < n$ **hacer**

$angulo \leftarrow$ real aleatorio en el intervalo $[i * \theta, (i + 1) * \theta]$;

$giro_parte_real \leftarrow \cos(angulo)$;

$giro_parte_imaginaria \leftarrow -\sin(angulo)$;

para $j < m$ **hacer**

$distancia \leftarrow$ real aleatorio en el intervalo $[j * d, (j + 1) * d]$;

$parte_real \leftarrow distancia * giro_parte_real + centro.parte_real$;

$parte_imaginaria \leftarrow$

$distancia * giro_parte_imaginaria + centro.parte_imaginaria$;

 añadir $[parte_real, parte_imaginaria]$ a V ;

fin

$distancia \leftarrow radio / 100$;

$parte_real \leftarrow distancia * giro_parte_real + centro.parte_real$;

$parte_imaginaria \leftarrow$

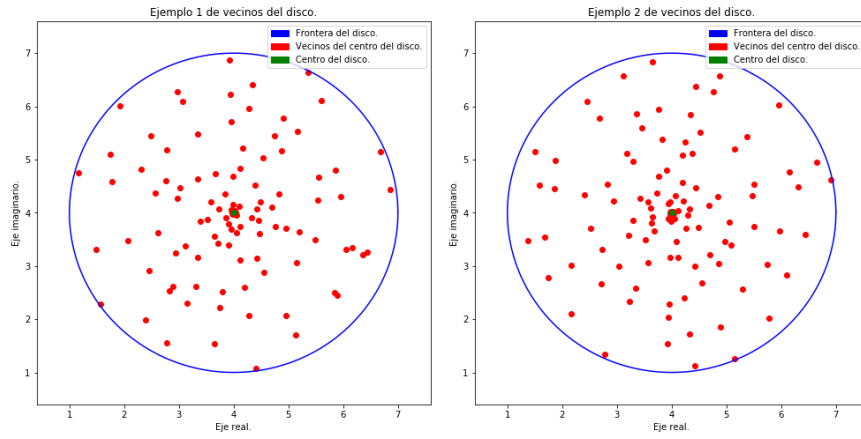
$distancia * giro_parte_imaginaria + centro.parte_imaginaria$;

 añadir $[parte_real, parte_imaginaria]$ a V ;

fin

devolver V ;

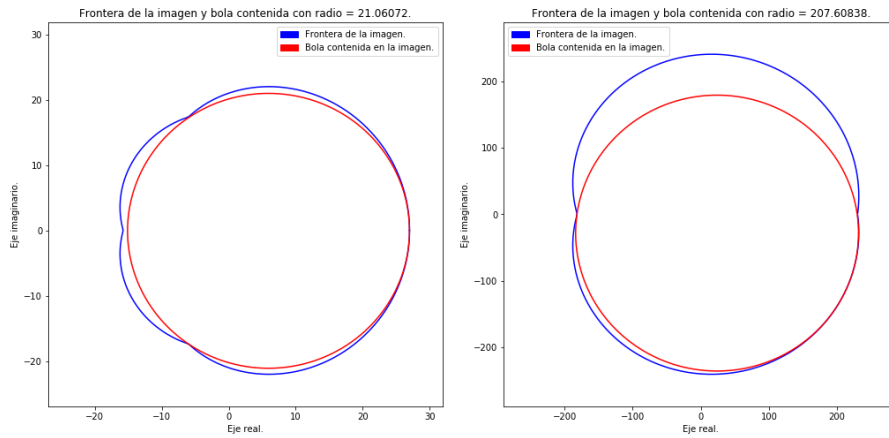
En la [Figura 5.4](#) podemos observar dos conjuntos de vecinos distintos del centro del disco unidad generados mediante el [algoritmo 8](#).



(a) Primera ejecución del **algoritmo 8**. (b) Segunda ejecución del **algoritmo 8**.

Figura 5.4.: Ejemplos de vecinos de una bola usando 20 ángulos y 5 distancias.

En la **Figura 5.5** tenemos dos ejemplos de la frontera de la imagen obtenidos mediante el **algoritmo 4** y de la bola de mayor radio contenida en la imagen mediante el **algoritmo 7**. Aunque a simple vista no podamos determinar si efectivamente se trata de la bola de mayor radio, sí se puede observar que aunque haya una bola más grande su radio debe ser similar al de la bola actual.



(a) Función $f(z) = z + 14z^2 + 8z^3 - 2z^4 + 6z^5$. (b) Función $g(z) = z - 93,2907 * z^2 + 11,8534 * z^3 + 98,5017 * z^4 - 82,1952 * z^5$.

Figura 5.5.: Ejemplos de resultados obtenidos mediante **algoritmo 7**.

5. Estimación de valores para las constantes de Bloch y Landau.

Ventajas y desventajas de la búsqueda local del **algoritmo 7**:

- Ventajas: nos permite obtener la bola de mayor radio de forma eficiente en el tiempo si ésta se encuentra en un entorno del punto que utilizamos como centro inicial, en nuestro caso el baricentro porque es el punto que podemos calcular directamente donde es más probable que se encuentre la bola de mayor radio.
- Desventajas: puede darse el caso que la bola que buscamos se encuentre "alejada" del baricentro y no la obtengamos con la búsqueda local que realizamos.

5.2.3.2. Búsqueda global de la bola.

Debido a la desventaja que presenta la búsqueda local, también vamos a implementar una búsqueda global para aumentar la probabilidad de que la bola que obtengamos sea la de mayor radio.

Para la nueva búsqueda global haremos repetidas búsquedas locales partiendo cada vez de una solución distinta, se trata de una búsqueda multiarranque. La idea es que las nuevas soluciones desde las que realizamos cada nueva búsqueda local sean bolas que estén a una distancia "pequeña" del contorno de la figura y cuyo centro se encuentre fuera de la bola que ya hemos obtenido. Realizamos esta nueva búsqueda mediante el **algoritmo 9**. Su procedimiento es el siguiente:

Procedimiento del **algoritmo 9**:

1. Tomamos como solución inicial la bola B obtenida mediante el **algoritmo 7**, que será el algoritmo que utilizaremos para cada nueva búsqueda local.
2. Seleccionaremos un conjunto de puntos del interior de la imagen que se encuentren cerca de la frontera, para ello tomaremos los puntos del contorno ordenados según su ángulo polar y de ellos seleccionaremos n puntos de la siguiente forma:
 - a) Dividiremos los puntos del contorno de la imagen en n partes. Cada i -ésima parte contiene los puntos cuyos índices se encuentran en el intervalo $[(i-1) * n/m, i * n/m - 1]$, donde m es el número de puntos del contorno.
 - b) Para cada parte seleccionaremos aleatoriamente un punto p_i . Fijamos $t \in [0, 1]$ y si el punto $t * p_i$ se encuentra fuera de la bola B entonces lo guardamos, en caso contrario lo desechamos.

Aclaración: el punto $t * p_i$ se encuentra en el segmento que une el punto p_i con el punto 0. Debido a como hemos obtenido los puntos del contorno mediante el **algoritmo 4**, dicho segmento se encuentra dentro de la imagen.

Cuanto más cerca esté el valor t de 1, más cerca se encuentra el punto $t * p_i$ del punto p_i y más alejado del punto 0. En nuestro caso, vamos a tomar $t = 0,8$ porque así el punto $t * p_i$ se encuentra "cerca" de la frontera pero tampoco demasiado, ya que también ocurre que cuanto más cerca esté, mayor será el tiempo que necesitemos para la búsqueda local.

3. Por cada punto guardado escogemos la bola centrada en ese punto y realizamos una búsqueda local mediante el **algoritmo 7**.
4. Comparamos los radios de las nuevas bolas y nos quedamos con aquella que tenga mayor radio.

Algoritmo 9: Obtención de la bola de mayor radio mediante búsqueda global.

Entrada: P , vector ordenado de puntos del contorno de la figura.

Entrada: $bola$, por defecto es la bola obtenida mediante el **algoritmo 7**.

Entrada: n , número de búsquedas locales nuevas.

Entrada: t , valor de la proximidad al punto de la frontera, por defecto 0,8.

Salida: Bola de mayor radio de entre todas las búsquedas.

$Q \leftarrow \emptyset$;

$m \leftarrow$ número de puntos en P ;

para $i < n$ **hacer**

$indice \leftarrow$ entero aleatorio en el intervalo $[i * m/n, (i + 1) * m/n - 1]$;

$punto \leftarrow t * P[indice]$;

si $distancia(punto, bola.centro) > bola.radio$ **entonces**
 añadir $punto$ a Q ;

fin

fin

para $q \in Q$ **hacer**

$bola_nueva \leftarrow$ bola resultado de la búsqueda del **algoritmo 7**(P, q);

si $bola_nueva.radio > bola.radio$ **entonces**
 $bola \leftarrow bola_nueva$

fin

fin

devolver $bola$;

Ventaja y desventaja de la búsqueda global del **algoritmo 9**:

- Ventaja: es más probable que lleguemos a la verdadera bola de mayor radio contenida en la imagen.
- Desventaja: el tiempo que tardamos en calcular la bola es varias veces mayor que el del **algoritmo 7**. Si realizamos n búsquedas locales nuevas entonces el tiempo será aproximadamente n veces el tiempo del **algoritmo 7**.

5. Estimación de valores para las constantes de Bloch y Landau.

Por este motivo, como vamos a calcular L_f para muchas funciones $f \in \mathbb{F}$, usaremos el **algoritmo 7** y en general reservaremos el **algoritmo 9** para estimar con mayor precisión la bola de mayor radio en funciones específicas cuya estimación del valor de L_f sea pequeña.

5.3. Estimación de una cota superior para la constante de Landau.

Ahora que somos capaces de trabajar con funciones $f \in \mathcal{F}$ y de calcular el valor aproximado de L_f , estamos en condiciones para dar una cota superior de L , la constante de Landau, e intentar aproximarnos a la menor cota superior posible. Nuestra finalidad en esta sección es obtener $f \in \mathcal{F}$ cuyo valor de L_f sea el menor posible. Para obtener una cota de la constante de Landau implementamos el **algoritmo 10**.

Algoritmo 10: Obtención de cota para la constante de Landau.

Entrada: n , número de funciones que utilizar.

Salida: función f con menor L_f y bola de mayor radio contenida en la imagen.

$\text{circunferencia} \leftarrow$ frontera del disco unidad;

$\text{bola_cota} \leftarrow \text{None}$;

$f_cota \leftarrow \text{None}$;

$\text{radio_cota} \leftarrow \infty$;

para $i < n$ **hacer**

$f \leftarrow$ función de \mathcal{F} ;

$\text{imagen} \leftarrow f(\text{circunferencia})$;

$\text{contorno} \leftarrow$ puntos del contorno de imagen ;

$\text{bola} \leftarrow$ bola de mayor radio contenida en contorno ;

si $\text{bola.radio} < \text{radio_cota}$ **entonces**

$\text{radio_cota} \leftarrow \text{bola.radio}$;

$\text{bola_cota} \leftarrow \text{bola}$;

$f_cota \leftarrow f$;

fin

fin

devolver $[\text{bola_cota}, f_cota]$;

En el procedimiento del **algoritmo 10** realizamos los siguientes pasos:

1. Fijamos el número n de funciones distintas a utilizar y obtenemos el conjunto de puntos de la circunferencia unidad.

5.3. Estimación de una cota superior para la constante de Landau.

2. Inicializamos $bola_cota$ y f_cota a *None*, porque todavía no tenemos ni la bola ni la función de la cota, y le asignamos a $radio_cota$ el mayor valor posible.
3. Iteramos n veces y en cada iteración:
 - a) Obtenemos $f \in \mathcal{F}^*$ mediante el **algoritmo 1**. De forma adicional podemos añadirle restricciones a las funciones para centrarnos en un tipo en concreto.
 - b) Calculamos la imagen de f en los puntos de la circunferencia y nos quedamos con los puntos de su contorno mediante el **algoritmo 4**.
 - c) Calculamos la bola B de mayor radio contenida en los puntos del contorno mediante el **algoritmo 7**. El radio de la bola B es la estimación de L_f .
 - d) Si el radio de la bola B es menor que $radio_cota$, entonces actualizamos $bola_cota$, f_cota y $radio_cota$ asignándoles B , f y $radio$ de B respectivamente.
4. Devolvemos B_cota y f_cota . El radio de B_cota es una estimación de la cota superior para la constante de Landau.

Una vez obtengamos mediante el **algoritmo 10** la estimación de la bola de mayor radio y la función f que mejor aproxime a L_f , podemos utilizar el **algoritmo 9** con la bola obtenida para comprobar si existe una bola de mayor radio contenida en $f(\mathbb{T})$ y así afinar la estimación de la cota.

5.3.1. Procedimiento para la obtención de cotas pequeñas.

Nuestro objetivo final es conseguir una cota superior para L que sea lo más pequeña posible. Como mínimo la mejor cota que obtengamos debe de ser menor que 1, ya que la función identidad $f(z) = z$ pertenece a \mathcal{F} y es evidente que $L_f = 1$. Ya que en la actualidad la mejor estimación para la constante de Landau es $0,5 + 10^{-335} < L < 0,544$, la cota que obtengamos será mejor cuanto más se aproxime al valor 0,544.

Primero vamos a ver cómo es el valor de la cota de L si utilizamos funciones lo más diversas posibles, para ello vamos a utilizar una gran cantidad de coeficientes para cada función y valores positivos muy elevados para las cotas superiores y negativos para las cotas inferiores de los coeficientes. Así podremos comprobar visualmente como de grande "suelen" ser las bolas para polinomios aleatorios, es de esperar que si los valores de los coeficientes son grandes, entonces la bola contenida en la imagen también será grande.

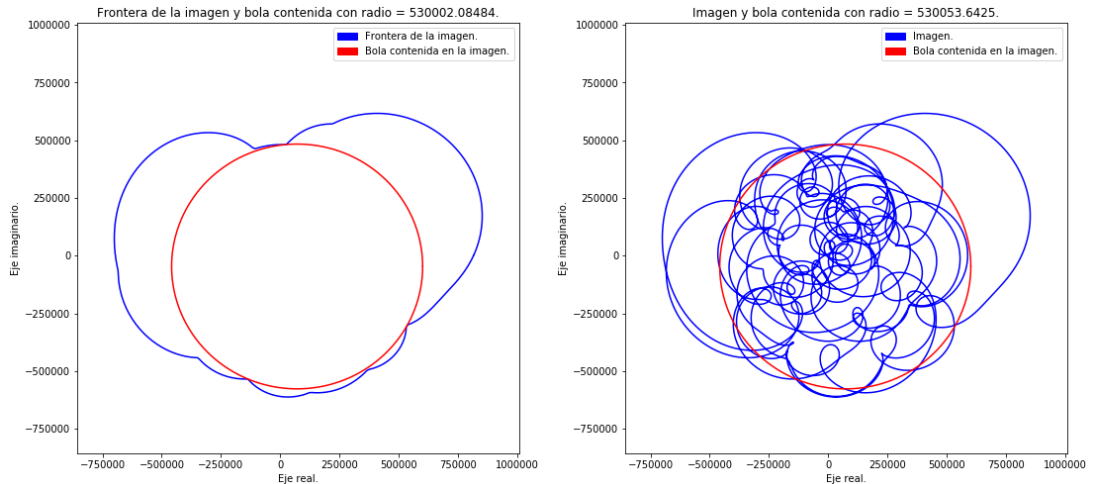
5. Estimación de valores para las constantes de Bloch y Landau.

Usando 100 funciones cada una con 100 coeficientes en el intervalo $[-1000000, 1000000]$, obtenemos como mejor resultado:

- La bola de radio = 530002,084837 para la función

$$\begin{aligned} f(z) = & 0j + (1 + 0j) * z + (-43077,2203 - 74737,4699j) * z^3 + \dots \\ & + (-8825,327650119078 - 374,057581j) * z^{98} \\ & + (3069,1411064456433 + 8662,459704956898j) * z^{99}. \end{aligned}$$

Este resultado se puede ver en la **Figura 5.6**.



(a) Bola obtenida mediante el **algoritmo 10**. (b) Imagen original de la función y bola refinada mediante el **algoritmo 9**.

Figura 5.6.: Resultado del cálculo de la cota de L para funciones con 100 coeficientes en el intervalo $[-1000000, 1000000]$.

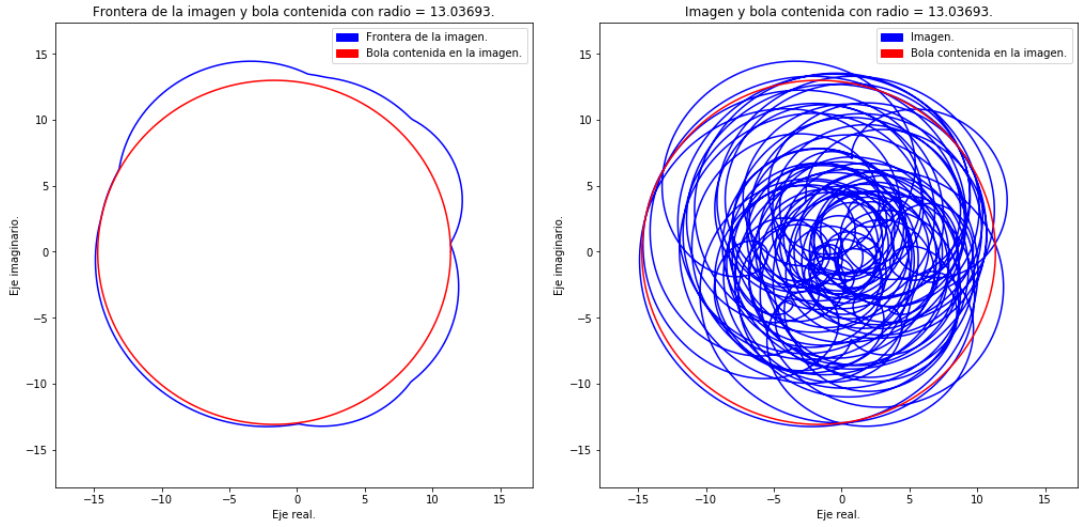
Tal y como era de esperar, con coeficientes grandes obtenemos bolas grandes, así que ahora reduciremos el intervalo de los valores de los coeficientes. Volviendo a usar 100 funciones con 100 coeficientes, pero ésta vez en el intervalo $[-1, 1]$, obtenemos como mejor resultado:

- La bola de radio = 13,03413 para la función

$$\begin{aligned} f(z) = & 0j + (1 + 0j) * z + (0,010567738 + 0,0469269j) * z^2 \\ & + (-0,1887307 + 0,529159j) * z^3 + (-0,375777 + 0,7127971j) * z^4 \\ & + \dots + (0,429558 - 0,6742959j) * z^{98} \\ & + (0,7229395 + 0,547626j) * z^{99} \end{aligned}$$

Este resultado se puede ver en la **Figura 5.7**.

5.3. Estimación de una cota superior para la constante de Landau.



(a) Bola obtenida mediante el **algoritmo 10**. (b) Imagen original de la función y bola refinada mediante el **algoritmo 9**.

Figura 5.7.: Resultado del cálculo de la cota de L para funciones con 100 coeficientes en el intervalo $[-1, 1]$.

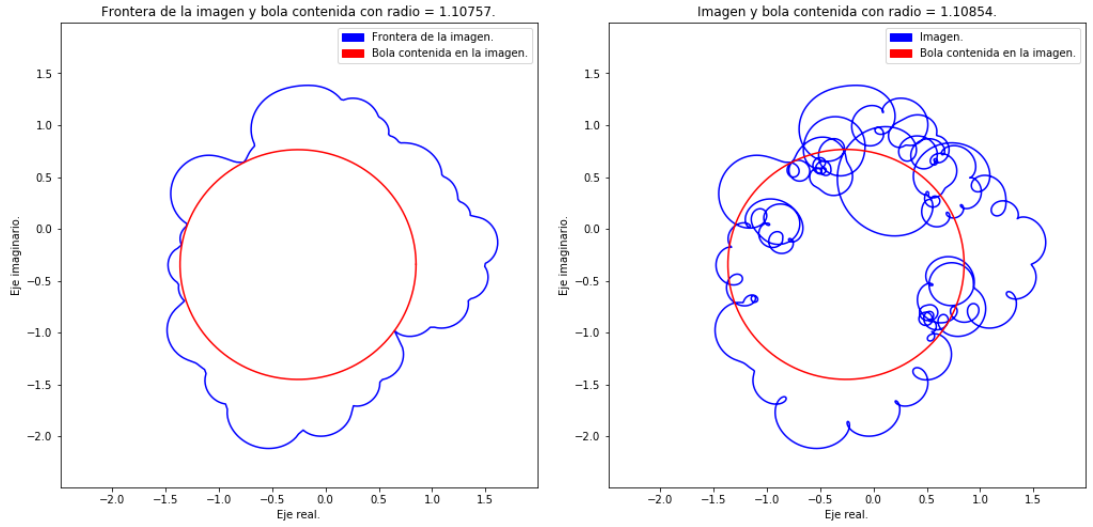
Se ha reducido en gran medida el radio de la mayor bola, pero aun así sigue siendo demasiado grande ya que como mínimo nos gustaría llegar a una función en que el radio de la bola de la imagen sea menor que 1. Que el radio siga siendo grande seguramente se deba a que hemos utilizado muchos coeficientes con valores que no son nulos o casi nulos. Ahora vamos a restringir a que el coeficiente i -ésimo se encuentre en el intervalo $[-1/i, 1/i]$, para que así cuanto mayor sea la potencia más cerca del valor nulo se encuentre su coeficiente. Así obtenemos:

- La bola de radio = 1,10854 para la función

$$f(z) = 0j + (1 + 0j) * z + (-0,07998 + 0,2509j) * z^2 + (-0,1363 - 0,05684j) * z^3 \\ + \dots + (-9,77398e - 05 + 0,0102495j) * z^{97} + (0,0069585 + 0,005323j) * z^{98} \\ + (-0,00020490,009574j) * z^{99}$$

Este resultado se puede ver en la **Figura 5.8**.

5. Estimación de valores para las constantes de Bloch y Landau.



(a) Bola obtenida mediante el algoritmo 10. (b) Imagen original de la función y bola refinada mediante el algoritmo 9.

Figura 5.8.: Resultado del cálculo de la cota de L para funciones con 100 coeficientes y el coeficiente i -ésimo en el intervalo $[-1/i, 1/i]$.

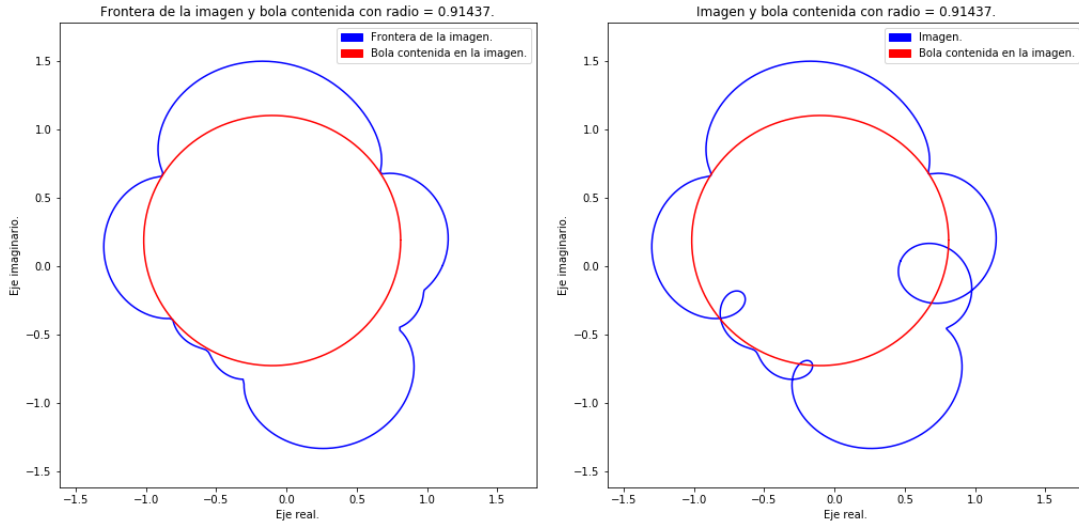
El radio que obtenemos es cada vez más pequeño pero sigue siendo superior a 1, vamos a restringir todavía más el valor de los coeficientes para ver si así conseguimos una cota más pequeña. Utilizamos funciones cuyos coeficientes sean nulos a partir del décimo término, a efectos prácticos polinomios con 10 coeficientes, y otra vez de forma que el coeficiente i -ésimo se encuentre en el intervalo $[-1/i, 1/i]$. De esta forma probando 100 funciones distintas nos encontramos con una estimación de la cota menor que 1 y obtenemos como mejor resultado:

- La bola de radio = 0,91437 para la función

$$\begin{aligned}
 f(z) = & 0j + (1 + 0j) * z + (-0,041355 - 0,145133j) * z^2 \\
 & + (-0,1756766 + 0,139031j) * z^3 + (-0,047779 + 0,0112413j) * z^4 \\
 & + (-0,080656 - 0,068316j) * z^5 + (-0,01692 - 0,078656j) * z^6 \\
 & + (-0,065265 + 0,0971923j) * z^7 + (-0,0018 + 0,062763j) * z^8 \\
 & + (-0,101275 + 0,0163796j) * z^9
 \end{aligned}$$

Este resultado se puede ver en la Figura 5.9.

5.3. Estimación de una cota superior para la constante de Landau.



(a) Bola obtenida mediante el **algoritmo 10**. (b) Imagen original de la función y bola refinada mediante el **algoritmo 9**.

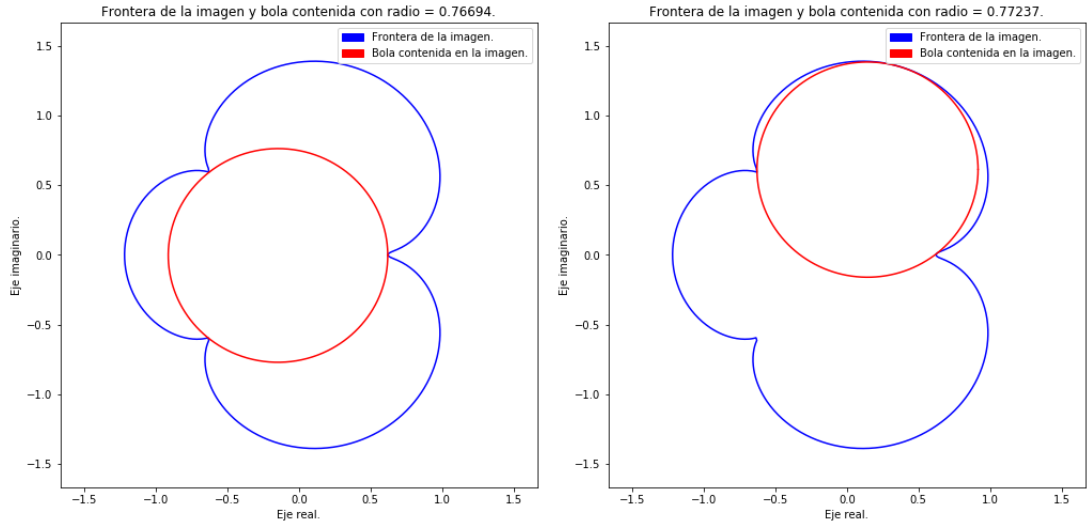
Figura 5.9.: Resultado del cálculo de la cota de L para funciones con 10 coeficientes y el coeficiente i -ésimo en el intervalo $[-1/i, 1/i]$.

Al final tras diversas pruebas utilizando miles de funciones distintas y alternando el número y el valor de los coeficientes, la mejor cota superior de L que hemos obtenido es 0,77237 y la hemos conseguido en la función

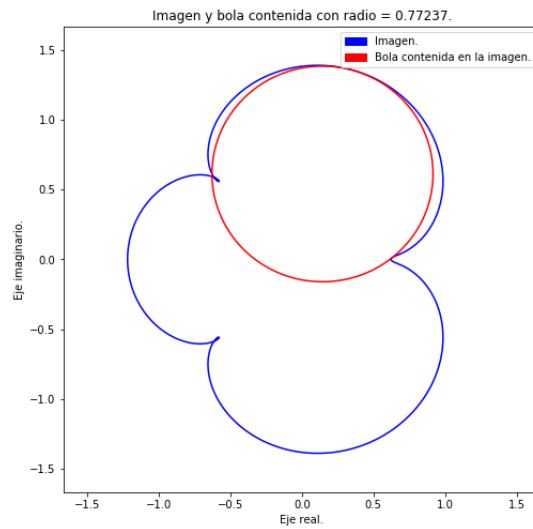
$$f(z) = z + (-0,11265218483690814 + 0j) * z^2 + (-0,22485422962175083 + 0j) * z^3 \\ + (-0,18456528508162684 + 0j) * z^4 + (0,14577651034488337 + 0j) * z^5$$

Por lo que hemos llegado a ver experimentalmente que los valores de las constantes B y L tienen que ser menores o iguales que 0,77237, aproximadamente. Las imágenes del resultado aparece en la **Figura 5.10**.

5. Estimación de valores para las constantes de Bloch y Landau.



(a) Bola obtenida mediante el algoritmo 10. (b) Refinamiento de la bola mediante el algoritmo 9.



(c) Bola refinada en la imagen original de la función.

Figura 5.10.: Resultado del cálculo de la cota de L .

6. Conclusiones y trabajo futuro.

En el trabajo se ha empezado revisando el teorema de la aplicación abierta, a partir del cual sabemos que las imágenes de funciones holomorfas no constantes contienen discos abiertos. Para la revisión se han expuesto los conceptos y principios que se utilizan en el teorema y se ha pasado a demostrarlo.

A continuación, se ha realizado una preparación previa para la prueba la teorema de Bloch en la que se han probado dos criterios para determinar el tamaño de los discos contenidos en la imagen de una función holomorfa no constante. Luego se ha enunciado el teorema de Bloch, se han presentado algunos de sus resultados más inmediatos y se ha pasado a demostrar un teorema que contiene al de Bloch.

Después, hemos presentado un problema extremal, relacionado con la función auxiliar empleada en la prueba del teorema, y lo hemos resuelto. La solución de dicho problema nos ha permitido llegar a una variante del teorema de Bloch que proporciona una mejor cota inferior para el tamaño de los discos que nos interesan. Seguidamente se han visto las consecuencias del teorema de Bloch, en concreto se ha demostrado el teorema pequeño de Picard, empleando en su prueba el teorema de Bloch, y como resultado hemos llegado al teorema del punto fijo.

Tras ésto pasamos al teorema de Ahlfors. Volvemos a realizar una preparación previa en la que demostramos varios resultados que nos facilitarán la demostración del teorema, a continuación lo enunciamos y probamos.

Para finalizar la primera parte hemos visto algunas consecuencias inmediatas del teorema de Ahlfors y pasamos a presentar las constantes de Bloch y Landau, cuyo valor exacto sigue siendo desconocido en la actualidad.

Con todo lo anterior se han cumplido completamente todos los objetivos propuestos para la parte de matemáticas, en la que hemos hecho especial hincapié en que las demostraciones realizadas sean fáciles de seguir. Además, hemos llegado a probar algunos resultados muy importantes como el teorema pequeño de Picard y el teorema del punto fijo, que no se propusieron inicialmente como objetivos.

En la segunda parte se ha empezado dando una representación de las funciones holomorfas de forma que podamos trabajar con ellas en una máquina.

Posteriormente se ha explicado de forma detallada cómo podemos llegar a estimar con precisión el radio de la bola de mayor tamaño contenida en la imagen de una

6. Conclusiones y trabajo futuro.

función holomorfa. Para ello hemos realizado un análisis del problema en que nos encontramos y las técnicas de optimización necesarias para abordarlo, tras lo cual hemos desarrollado varios algoritmos que nos permitan obtener dicha estimación.

Entre los algoritmos que hemos desarrollado se encuentran la obtención de los puntos del contorno de las imágenes de las funciones con que trabajamos y la obtención de la bola de mayor radio dentro de una figura, para esta última hemos realizado dos versiones, siendo la primera una búsqueda local mediante un algoritmo de escalada estocástico y siendo la segunda versión una búsqueda global que utiliza la primera.

Después, hemos implementado un modelo automático para calcular los discos de mayor tamaño contenidos en las imágenes de las funciones asociadas a la constante de Landau y así poder estimar una cota superior de dicha constante. Como la constante de Landau es mayor que la constante de Bloch, cada vez que conseguimos una cota superior para la primera constante también nos sirve como cota superior para la segunda.

Por último se ha realizado un análisis experimental de la eficacia de las soluciones que obtenemos mediante los modelos y algoritmos anteriores, llegando al final a una estimación del valor de la cota superior para la constante de Landau, consiguiendo el valor 0,77237.

Con todo lo anterior se consideran cumplidos los objetivos iniciales que fueron propuestos para la parte de informática. Aunque, esta parte presenta vías claras para un desarrollo posterior en el que intentar conseguir mejores estimaciones para las constantes:

1. Optimización de los algoritmos y sus parámetros para reducir el tiempo de ejecución manteniendo la calidad de las soluciones. Aunque ya se ha intentado equilibrar la precisión y el tiempo de cálculo, es probable que puedan realizarse mejoras de manera que podamos utilizar más funciones en un tiempo menor o igual que el actual.
2. Desarrollo de modelos para obtener funciones holomorfas que nos permitan estimar con mayor precisión la constante de Landau y acercarnos al valor 0,544, que es la mejor cota superior que ha sido demostrada hasta la fecha. Las funciones con las que hemos trabajado han sido obtenidas principalmente de forma aleatoria tras fijar su número de coeficientes y establecer un intervalo para el valor de cada coeficiente, lo que da lugar a intentar conseguir mejores funciones mediante técnicas más complejas.
3. Realización de un análisis más exhaustivo de las funciones concernientes a la constante de Bloch para intentar dar una cota superior que no dependa de la cota obtenida para la constante de Landau. Durante la realización del trabajo

se ha intentado desarrollar un algoritmo que dada una función holomorfa nos permita estimar el radio del mayor disco biholomorfo mediante la función contenido en la imagen de la función. Pero aunque hemos conseguido obtener discos biholomorfos, no tenían ninguna garantía de ser los de mayor tamaño ni de que estuvieran cerca de serlo. Por ello se podría analizar si es viable desarrollar algún método para obtener un disco biholomorfo contenido en la imagen garantizando con cierta seguridad que su radio se asemeja al del disco biholomorfo de mayor tamaño contenido en la imagen.

Bibliografía

Las referencias se listan por orden alfabético. Aquellas referencias con más de un autor están ordenadas de acuerdo con el primer autor.

- [Ahl38] Lars Valerian Ahlfors. An extension of schwarz's lemma. *Transactions of the American Mathematical Society*, 43(3):359–364, 1938. [Citado en pág. 25]
- [Alb] Rafael Payá Albert. Apuntes sobre variable compleja i (2016-2017). <https://www.ugr.es/~rpaya/cursosanteriores.htm>. Recurso online. Accedido el 27 de abril de 2020. [Citado en pág. 3]
- [Bon43] Mario Bonk. On bloch's constant. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 94(1):889–894, 1943. [Citado en págs. 25 and 34]
- [Bro12] Jason Brownlee. *Clever Algorithms: Nature-Inspired Programming Recipes*. 2012. [Citado en pág. 37]
- [HY04] Masakaru Shiba Huaihui Yanagihara. On the locally univalent bloch constant. *Journal d'Analyse Mathématique*, 110(4):159–170, 2004. [Citado en pág. 34]
- [Min83] Carl David Minda. Bloch constants. *Journal d'Analyse Mathématique*, 276(2):645–655, 1983. [Citado en pág. 34]
- [Rad43] Hans Rademacher. On the bloch-landau constant. *Transactions of the American Mathematical Society*, 65(3):387–390, 1943. [Citado en pág. 34]
- [Rem98] Reinhold Remmert. *Classical Topics in Complex Function Theory*. Springer-Verlag, New York, 1998. Traducido del alemán por Leslie Kay. [Citado en págs. 7, 17, and 25]
- [THCo8] Ronald L. Rivest Clifford Stein Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson. *Introduction to Algorithms (Third Edition)*. MIT Press, 2008. [Citado en pág. 37]