

Objetos astrofísicos: Parcial 2

Andrés Antonio Fernández

Johan Sammir Mendez

Edisson Leonardo Peralta

4 de junio de 2018

1. Resumen

En el presente trabajo se hará el análisis estructural para 3 estrellas de $0,45M_{\odot}$, $7,5M_{\odot}$ y $52M_{\odot}$ gracias a la interpolación realizada a partir de los datos proporcionados en la (figura 1). Dicha interpolación se hizo por medio del método llamado "interpolación cubica de hermite". Posteriormente los valores obtenidos se ingresaron en el código fuente de *FORTRAN* con el nombre **zams.for** y de esta manera tener los algunos datos que nos permitieran hacer el respectivo análisis estructural. A continuación se procedió a realizar una serie de gráficas que nos permitieran ver de manera mas clara la estructura de las estrellas en cuestión. Una vez obtenidas las gráficas se procedió a realizar un análisis de éstas.

2. Introducción

Dentro del estudio de los sistemas estelares, un problema es la determinación de la estructura en las estrellas. Una solución se logra aplicando el teorema de Vogt-Russell, el cual es muy útil ya que permite simplificar en gran medida el estudio de las estrellas. Para esto se tienen en cuenta las ecuaciones de la estructura, las cuales están conformadas por la ecuación de equilibrio hidrostático, de continuidad de masas, ecuación de estado, gradiente de temperatura, gradiente de luminosidad, función de opacidad y función de generación de energía.

Según el teorema de Vogt-Russell, se sabe que estas ecuaciones se pueden relacionar, de manera que conociendo la masa de la estrella, es posible estimar el resto de las variables y con esto la estructura de la estrella.

Con los valores obtenidos se plantea la linea de secuencia principal de edad 0 (**ZAMS**), la cual se muestra en la figura 1. Extrapolando o interpolando los valores de esta tabla es posible predecir la estructura de una estrella dada su masa. Esto último es lo que pretendemos hacer en el siguiente trabajo.

TABLA 1. Tabla de Modelos ZAMS. Tomada de [1]

M/M_{\odot}	X	Y	$\log(L/L_{\odot})$	$\log(T_{eff})$	R_{10}	$T_{c,6}$	ρ_c	$\log(P_c)$	q_c	q_{env}
60	0.74	0.24	5.701	4.683	70.96	39.28	1.93	16.22	0.73	0
40	0.74	0.24	5.345	4.642	56.89	37.59	2.49	16.26	0.64	0
30	0.74	0.24	5.066	4.606	48.53	36.28	3.05	16.29	0.56	0
20	0.74	0.24	4.631	4.547	38.73	34.27	4.21	16.37	0.46	0
15	0.74	0.24	4.292	4.498	32.89	32.75	5.48	16.44	0.4	0
10	0.74	0.24	3.772	4.419	25.94	30.48	8.33	16.57	0.33	0
7	0.74	0.24	3.275	4.341	20.99	28.41	12.6	16.71	0.27	0
5	0.74	0.24	2.773	4.259	17.18	26.43	19	16.84	0.23	0
3	0.74	0.24	1.951	4.118	12.76	23.47	35.8	17.06	0.18	0
2	0.74	0.24	1.262	3.992	10.3	21.09	47	17.21	0.13	neg.
1.75	0.74	0.24	1.301	3.948	9.695	20.22	66.5	17.25	0.11	neg.
1.5	0.74	0.24	0.759	3.892	9.151	19.05	76.7	17.28	0.07	neg.
1.3	0.74	0.24	0.496	3.834	8.827	17.66	84.1	17.28	0.03	neg.
1.2	0.74	0.24	0.34	3.8	8.648	16.67	85.7	17.26	0.01	1.00E-07
1.1	0.74	0.24	0.16	3.771	8.032	15.57	84.9	17.22	0	5.00E-05
1	0.74	0.24	-0.042	3.752	6.931	14.42	82.2	17.17	0	0.0035
0.9	0.74	0.24	-0.262	3.732	5.902	13.29	78.5	17.11	0	0.02
0.75	0.73	0.25	-0.728	3.659	4.834	10.74	81.5	-	0	-
0.6	0.73	0.25	-1.172	3.594	3.908	9.31	79.1	-	0	-
0.5	0.7	0.28	-1.419	3.553	3.553	9.04	100	17.1	0	-
0.4	0.7	0.28	-1.723	3.542	2.64	8.15	104	17.04	0	-
0.3	0.7	0.28	-1.957	3.538	2.054	7.59	107	17.05	*	1
0.2	0.7	0.28	-2.238	3.533	1.519	6.53	180	17.24	*	1
0.1	0.7	0.28	-3.023	3.475	0.805	4.51	545	17.68	*	1
0.08	0.7	0.28	-3.803	3.327	0.65	3.3	775	17.83	*	1

Figura 1: Tabla de modelos ZAMS.

3. Procedimiento y métodos

Se desea obtener modelos teóricos para estrellas con masas de $0.45M_{\odot}$, $7.5M_{\odot}$ y $52M_{\odot}$. Ya que éstos datos no están en la figura 1, es necesario interpolar los valores de las demás variables.

Para escoger el mejor método, a continuación se mostrara una serie de comparaciones de los resultados obtenidos al aplicar algunas técnicas de ajuste de curvas.

Inicialmente se realizara la gráfica de $\log(L/L_s)$ contra M/M_s , la cual se puede ver en la figura 2. Como se puede apreciar, los puntos poseen una distribución exponencial, por lo que un método de ajuste válido sería un ajuste exponencial.

En la figura 3 se muestra dicho ajuste, la función obtenida esta dada por la ecuación 1.

$$f(x) = a \cdot x^b + c \quad (1)$$

Donde $a = -68.57$, $b = -0.02237$ y $c = 68.65$.

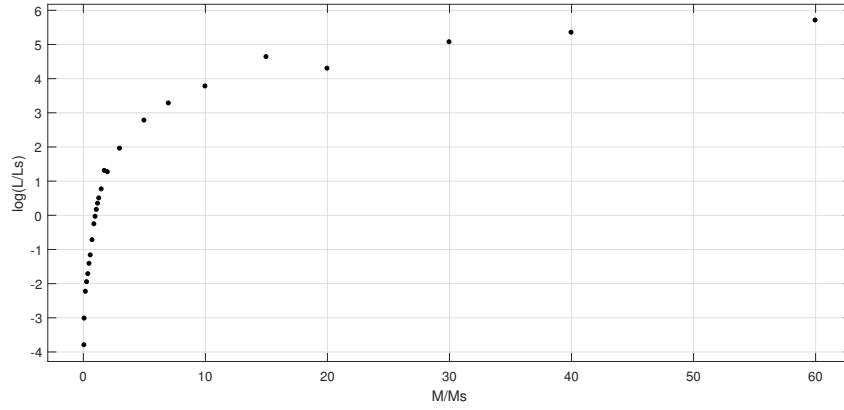


Figura 2: Puntos de la curva $\log(L/L_s)$ contra M/M_s .

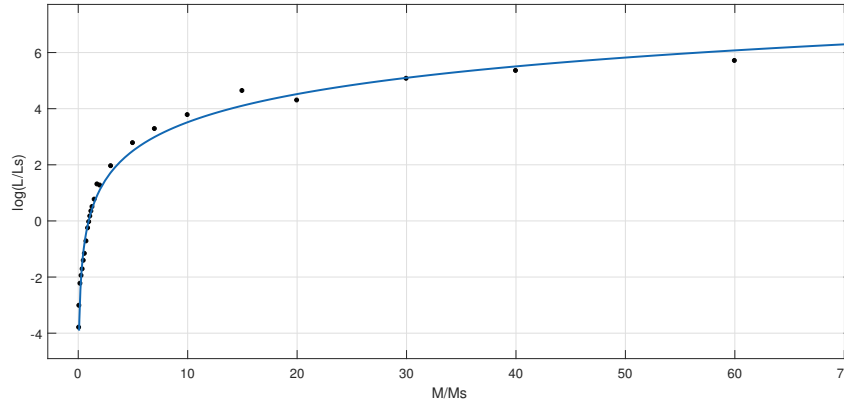


Figura 3: Ajuste exponencial de la curva.

Este ajuste sería válido en algunos contextos, pero en este caso una interpolación ideal debería seguir la forma de los datos de una forma mas exacta. Para estos casos una alternativa es usar un método alternativo llamado "*Piecewise Cubic Hermite Interpolating Polynomial*" [1], el cual está disponible en el software *Matlab*. Dicho método tiene el beneficio de conservar o seguir de forma mas exactas los datos, es decir, crea funciones monótonas (también llamadas isótonas) ya que estos datos, si bien tienen un comportamiento exponencial aproximado, su forma es más monótona [2].

La comparación del ajuste exponencial con la interpolación cubica de Hermite se muestra en la figura 4.

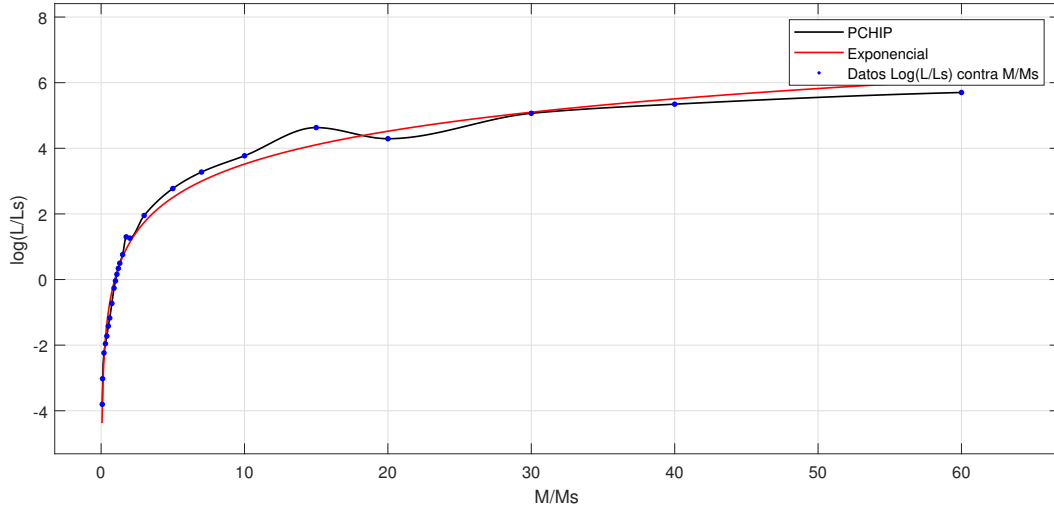


Figura 4: Ajuste exponencial contra interpolación cúbica de Hermite.

En la anterior figura es claro que el segundo método se ajusta mejor a los datos. Incluso, por lo mostrado, es de esperar que el método de interpolación cubica de Hermite proporcione mejores curvas incluso para distribuciones mas complejas de datos. Por lo tanto es el método que se usará para obtener las variables necesarias para la realización de los modelos de las estrellas propuestas.

Para el cálculo de los modelos se usará el código fuente de *FORTTRAN* con el nombre de **zams.for**. En la tabla 1 se muestra los valores obtenidos a partir de la extrapolación para las diferentes masas proporcionadas.

M/Ms	X	Y	Pc	Tc	R	L/Ls
0.45	0.7	0.28	1.1729e17	8.62914224e6	3.12182635e10	0.0267908687
7.5	0.74	0.24	4.8187e16	28.8104044e6	21.8680933e10	2346.2918
52	0.74	0.24	1.7108e16	38.7331329e6	65.7168164e10	386007.399

Tabla 1: Valores interpolados para las estrellas propuestas

4. Análisis

Para un estudio completo de las estrellas se requiere modelar diferentes estados evolución. Para empezar con este propósito se debe entender como los cuerpos aislados de cierta masa , en este caso las correspondientes a $0,45M_{\odot}$, $7,5M_{\odot}$, $52M_{\odot}$ y su composición química determinan la estructura interna del objeto astronómico. Para poder entender tal proceso se hace necesario plantear modelos de como se genera la energía, cómo se transporta y la naturaleza del equilibrio hidrostático.

El modelo ZAMS tiene cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias, considerando tres ecuaciones auxiliares que proponen un modelo de generación de energía por unidad de masa ,la opacidad (cantidad de energía absorbida desde el centro hasta la superficie de la estrella, por lo común depende de la densidad y la temperatura) y una ecuación de estado que considera la presión como función de la temperatura y la densidad. Considerando las condiciones iniciales adecuadas se tiene determinadas siete cantidades que determinan el modelo por completo, esto implica que dada la masa de un objeto se tiene la composición de la estrella (suponiendo que su composición es homogénea).

En este modelo se considera la independencia del tiempo , significa que la escala de tiempo considerada sobre cualquier proceso físico que haga cambiar las características macroscópicas de la estrella es considerada muy grande en respecto de la escala de tiempo a la cual se alcanza el equilibrio térmico y mecánico. También se considera que la estrella es simétrica y todos los efectos de rotación y campo magnético sobre la estructura son despreciables, en otras palabras se puede considerar que la energía cinética dada por los procesos rotacionales y magnéticos es mucho menor que la energía cinética dada por el aporte térmico y gravitacional. Por último se trabaja sobre una teoría Newtoniana, los efectos de la relatividad general son ignorados.

Para empezar a revisar las características principales de la estrella se presenta los resultados escalados con el radio solar y en escala logarítmica, también se utiliza el hecho de la simetría esférica para hacer una representación gráfica en coordenadas polares y ver la variación de la cantidad en estudio en relación con el radio en unidades *CGS*. En primer lugar se presenta la temperatura para cada estrella, donde se obtuvo.

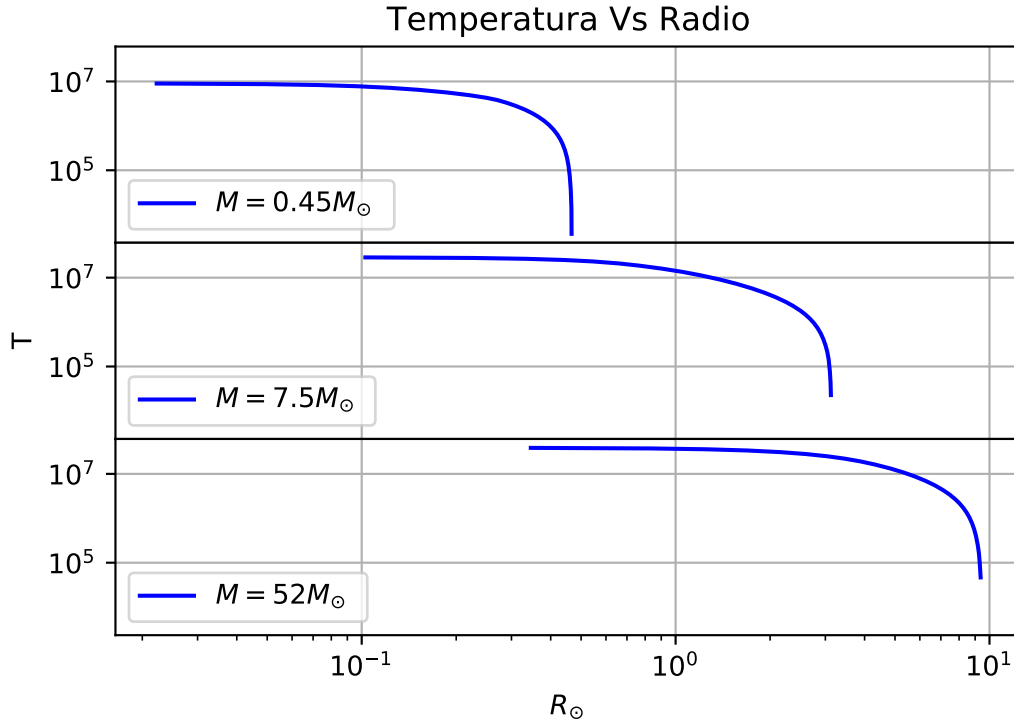


Figura 5: Temperatura obtenida para cada estrella asignada, en donde se tiene escalas logarítmicas

La gráfica anterior muestra las temperaturas obtenidas para las 200 capas en el cálculo numérico, en donde se tiene una temperatura para la última capa de $T_{M_{\odot}=0,45} = 3,7 \times 10^3$ K, $T_{M_{\odot}=7,5} = 2,8 \times 10^4$ K, $T_{M_{\odot}=5,2} = 4,7 \times 10^4$ K. varía con el radio, tal como sigue.

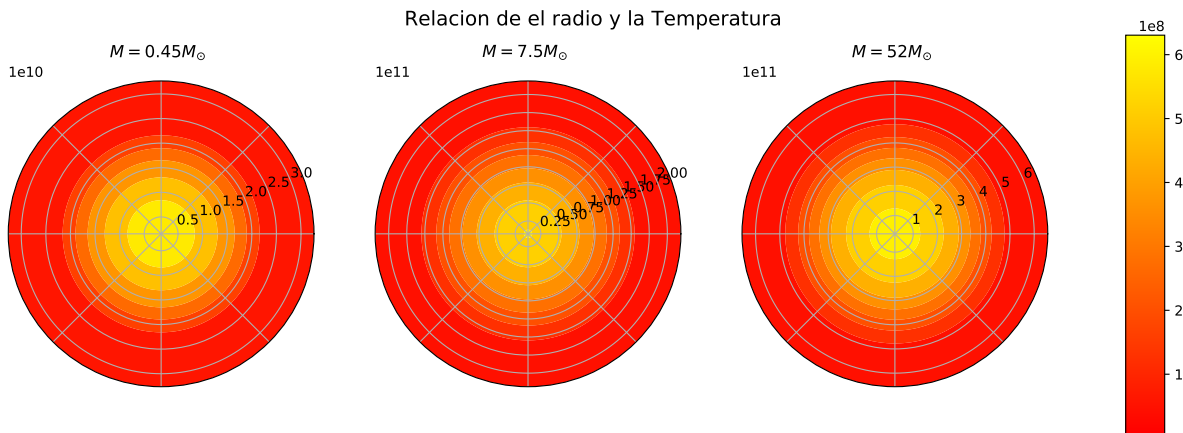


Figura 6: La escala de la barra de color está dada en grados Kelvin $[\times 10^8 K]$. Se considera un esquema simplificado de lo que podría ser la dependencia de la Temperatura con el radio

El valor de la temperatura central de una estrella determina el proceso dominante en la

reacción nuclear que se lleva a cabo en el núcleo. Para valores $T \gtrsim 1,4 \times 10^7 K$ el proceso dominante es el ciclo CNO (Carbón-Nitrógeno-Oxígeno), mientras que para $T \lesssim 1,4 \times 10^7 K$ es la cadena portón-protón. En particular las temperaturas centrales obtenidas para cada una de las estrellas se presenta a continuación con su respectivo proceso nuclear asociado

Tabla 2: Proceso nuclear presente en cada una de las estrellas en estudio a través de la consideración de la temperatura central obtenido por el modelo ZAMS

Estrella	T [$^{\circ}K$]	Proceso nuclear
$52M_{\odot}$	$3,87 \times 10^7$	CNO
$7,5M_{\odot}$	$2,88 \times 10^7$	CNO
$0,45M_{\odot}$	$9,05 \times 10^6$	cadena p-p

Otra cantidad importante para poder caracterizar la estrella, será la luminosidad en la superficie, para esto también se obtuvo el perfil que se calculo mediante el método numérico

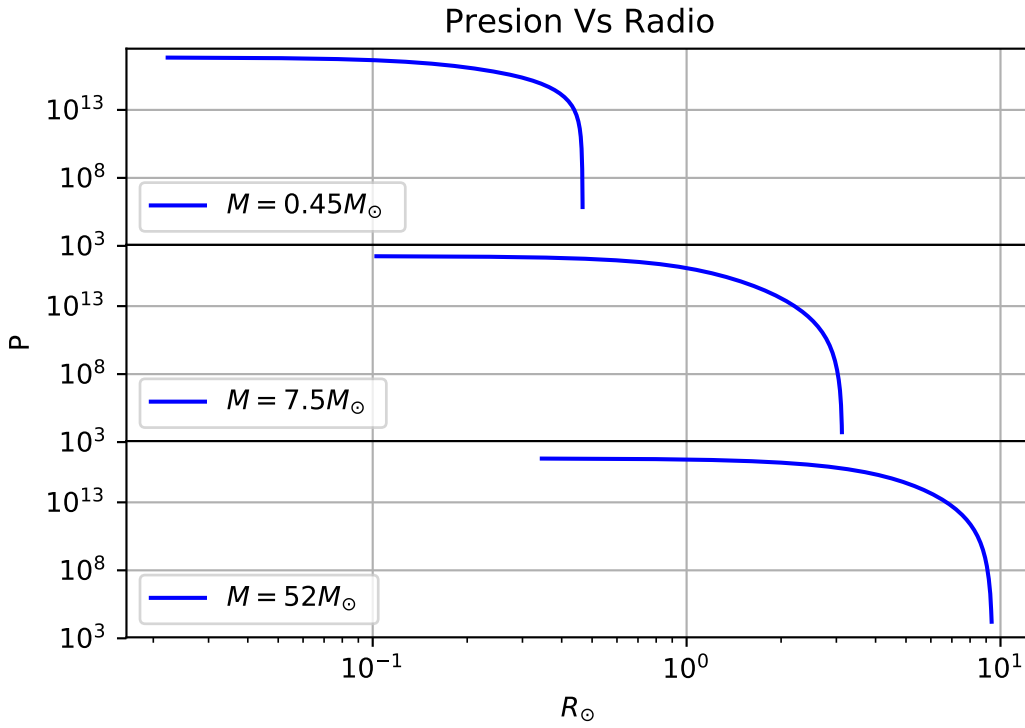


Figura 7: Presión en función del radio.

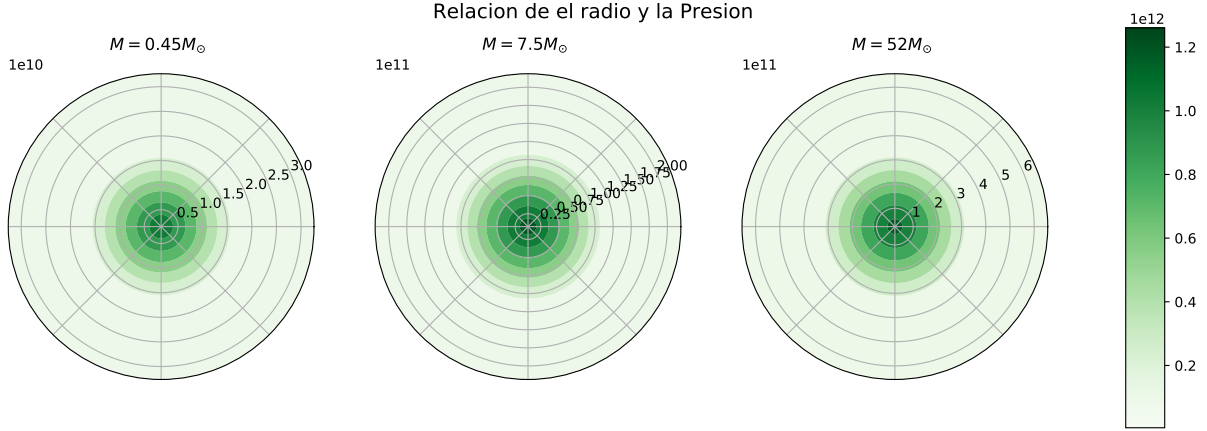


Figura 8: Esquema radial de la variación de la presión en relación al radio.

En las figuras 7 y 8 se muestra como es el cambio de la presión de las estrellas en función del radio. Podemos apreciar que tienen un comportamiento similar, mientras menor es el radio la presión es mayor y mientras mayor es el radio la presión es menor. Esta tendencia se debe a que el centro de la estrella es el punto de mayor presión, ya que soporta el peso de toda la masa, además también existe una gran contribución de presión por radiación. Por otra parte se tiene que es la región donde el ritmo de reacciones de fusión es más elevado.

Así mismo vemos que la temperatura aumenta o disminuye de acuerdo al radio, esto se debe a que como vimos anteriormente en el centro de la estrella es donde ocurren la mayor cantidad de fusiones nucleares haciendo que la temperatura en esta zona y en sus vecindades sea muy elevada. A medida que el radio se hace mayor las fusiones nucleares disminuyen y por ende la temperatura también se hace cada vez menor tal y como lo vemos en las figuras 5 y 6.

Ahora se muestra los valores obtenidos para la relación entre el radio y la masa

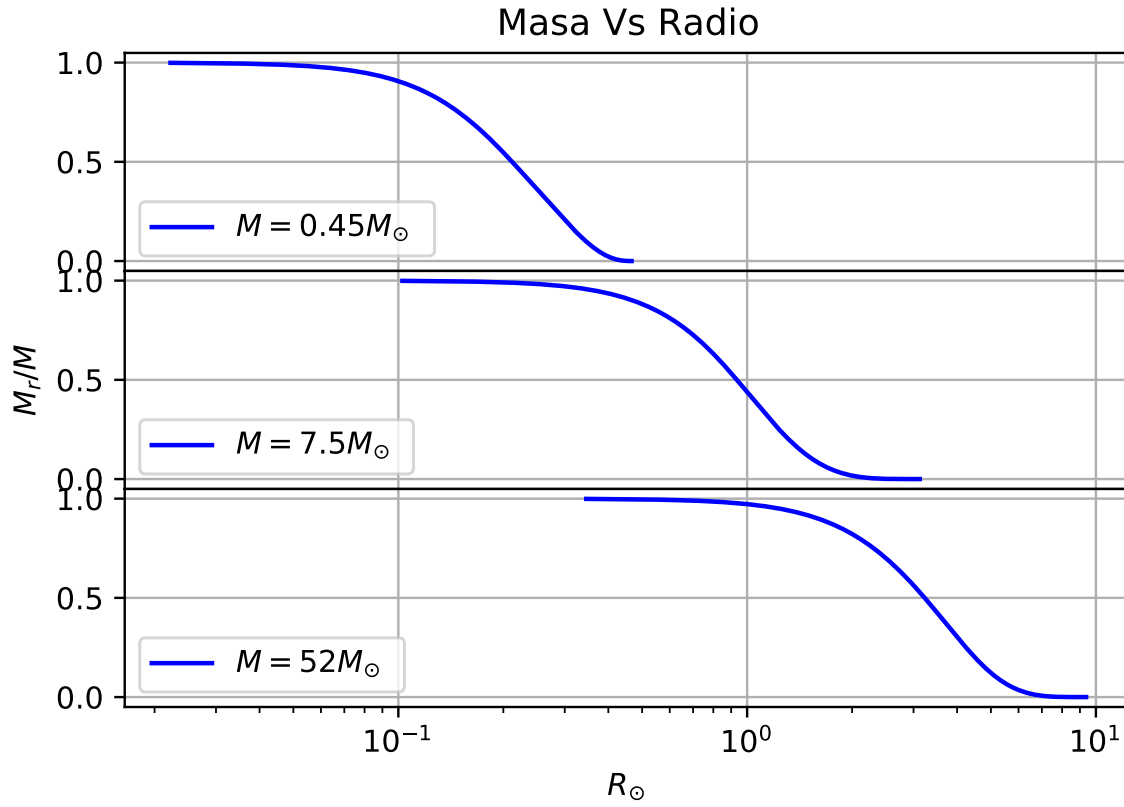


Figura 9: Cantidad de masa con relación al radio de la estrella.

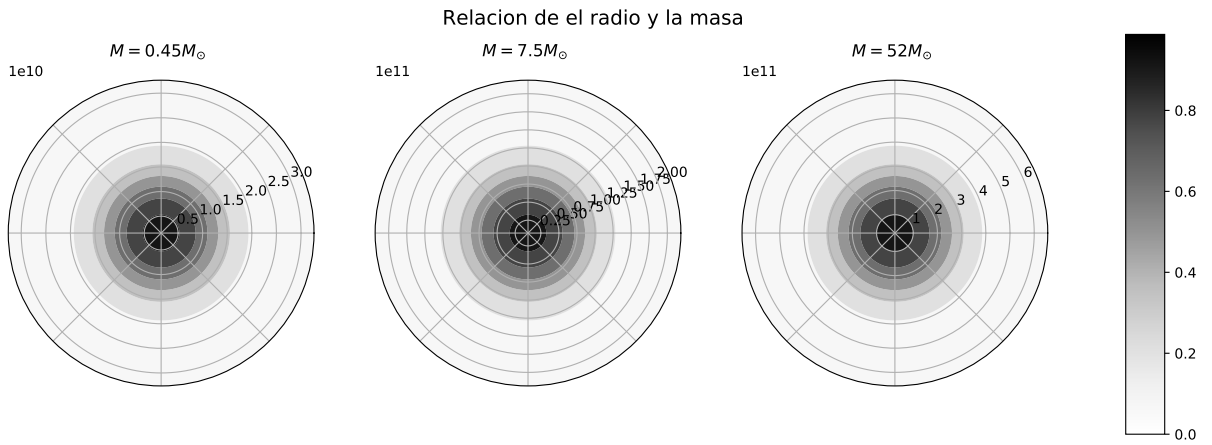


Figura 10: Esquema radial de la cantidad de masa.

Como podemos observar en las figuras 9 y 10, la cantidad de masa de las estrellas dadas tiene mismo comportamiento. Además, la masa en una estrella esta definida como :

$$M(r) = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr. \quad (2)$$

Vemos que depende de la densidad y el radio, de manera que no es de extrañarnos que disminuya o aumente de una manera similar a como lo hace la densidad en función del radio tal y como veremos más adelante. [3]

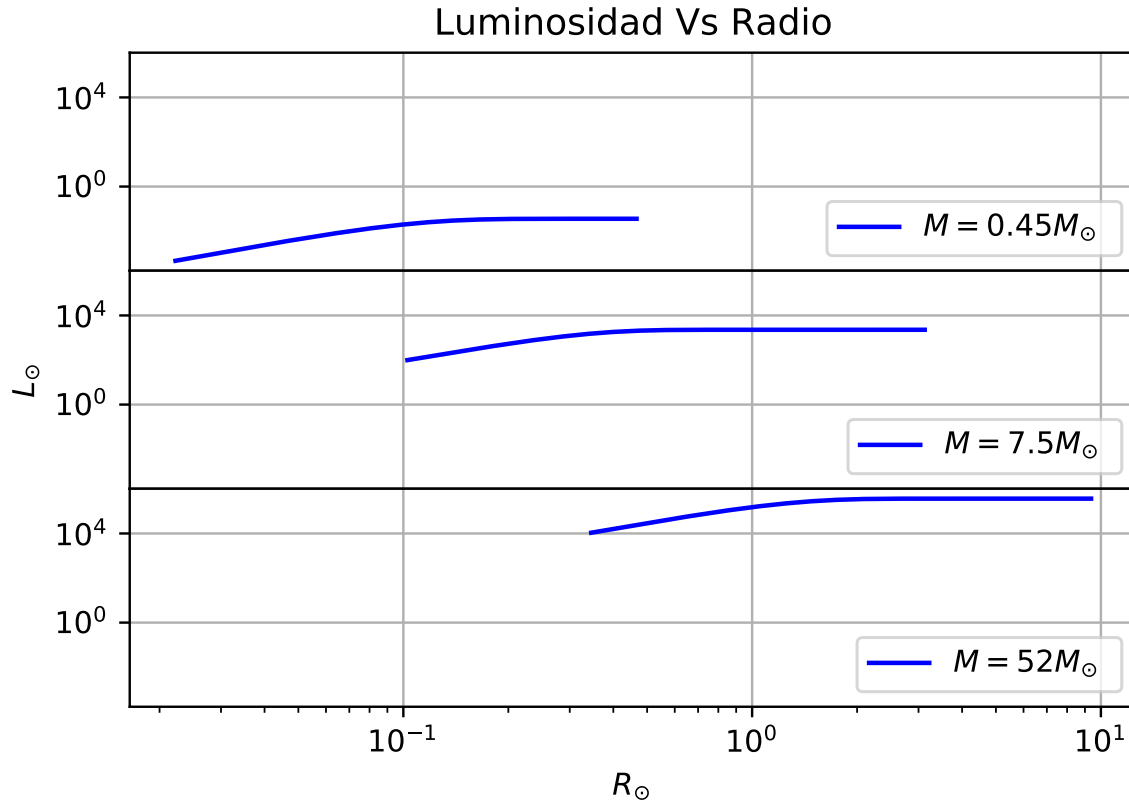


Figura 11: Luminosidad en función del radio.

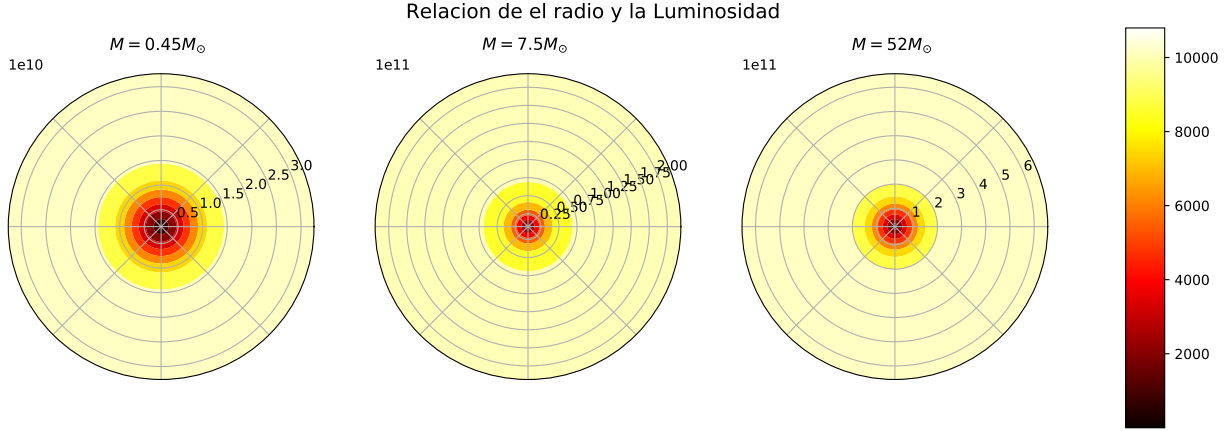


Figura 12: Esquema radial de la luminosidad.

La luminosidad de una estrella (L_r) es el flujo de la energía que se genera en el centro por las reacciones de fusión y es transportada hacia la superficie. Esta se define de la siguiente manera:

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad (3)$$

donde ϵ es la tasa de generación de energía por unidad masa y es una función conocida de ρ , T , y la composición química, que se obtiene de la física nuclear. Al igual que en las gráficas anteriores vemos que la luminosidad aumenta o disminuye acorde al radio de la estrella. [3]

La luminosidad claramente es una función que depende fuertemente de la masa de la estrella, para $M \gtrsim M_\odot$ se puede escalar aproximadamente así [5]

$$\frac{L}{L_\odot} \propto \begin{cases} 7^{1,75} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^3 & si \quad M \gtrsim 7M_\odot \\ \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{4,8} & si \quad 0,4M_\odot \lesssim M \lesssim 7M_\odot \\ 0,4^{2,85} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1,9} & si \quad M \lesssim 0,4M_\odot \end{cases} \quad (4)$$

estas relaciones se utilizan para estimar la escala de tiempo en la cual el combustible mantiene la estrella. Durante el consumo de hidrógeno se estima que se libera aproximadamente $\epsilon = 6 \times 10^{18} \text{ erg}$ por cada gramo de de hidrógeno consumido. Para estimar esto se propone que cuando se consuma un 10% de su masa total en conversión de Hidrógeno en Helio se pierde el equilibrio considerado por el modelo, por lo tanto

$$t_{nuc} \approx 0,1 \frac{\epsilon X M}{L} \approx 10^{10} \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-1} \text{ yr} \quad (5)$$

Las estrellas que pierden el equilibrio son llamadas estrellas de la secuencia principal, de las anteriores ecuaciones se pretende dar un estimado, de el tiempo en que se pierde el equilibrio.

$$t_{0,45M_{\odot}} \approx 10^{11} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-0,9} yr \approx 10^{11} yr \quad (6)$$

$$t_{7,5M_{\odot}} \approx 10^{10} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-4,8} yr \approx 10^6 yr \quad (7)$$

$$t_{52M_{\odot}} \approx 10^{11} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{-4,8} yr \approx 10^3 yr \quad (8)$$

$$(9)$$

Esto refleja que las estrellas masivas pierden más rápido el equilibrio que las estrellas de menor masa

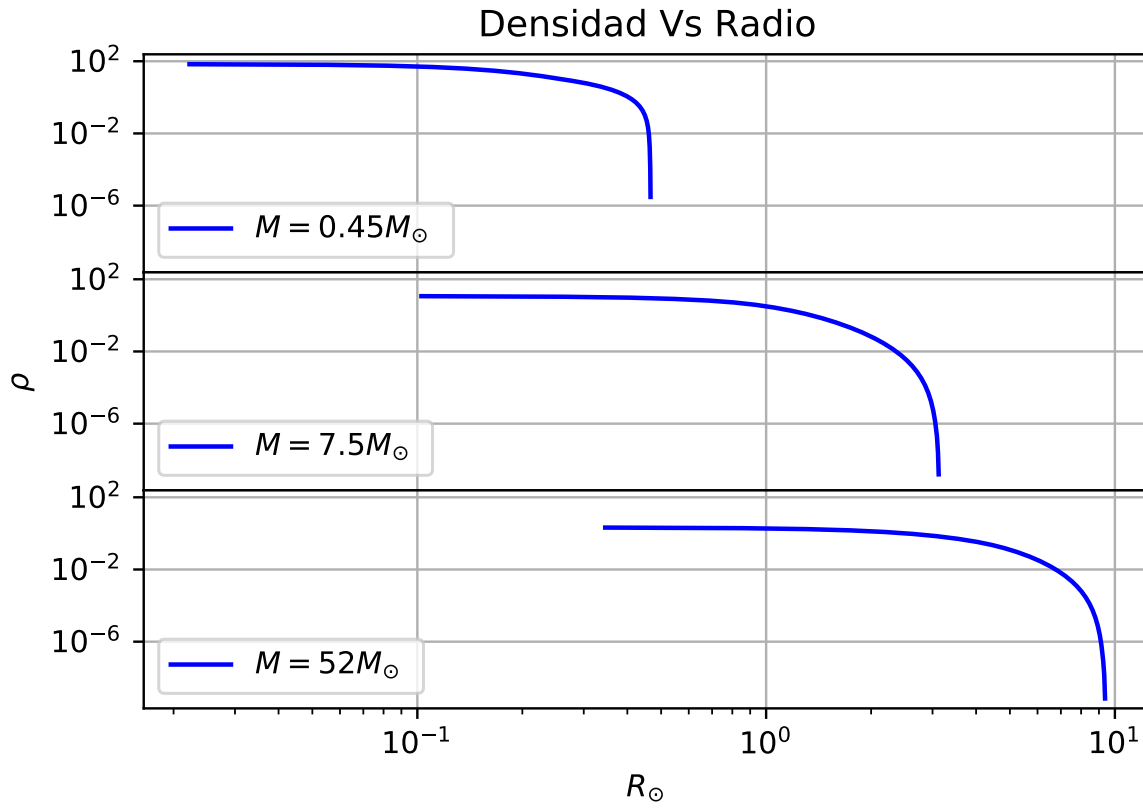


Figura 13: Densidad en función del radio.

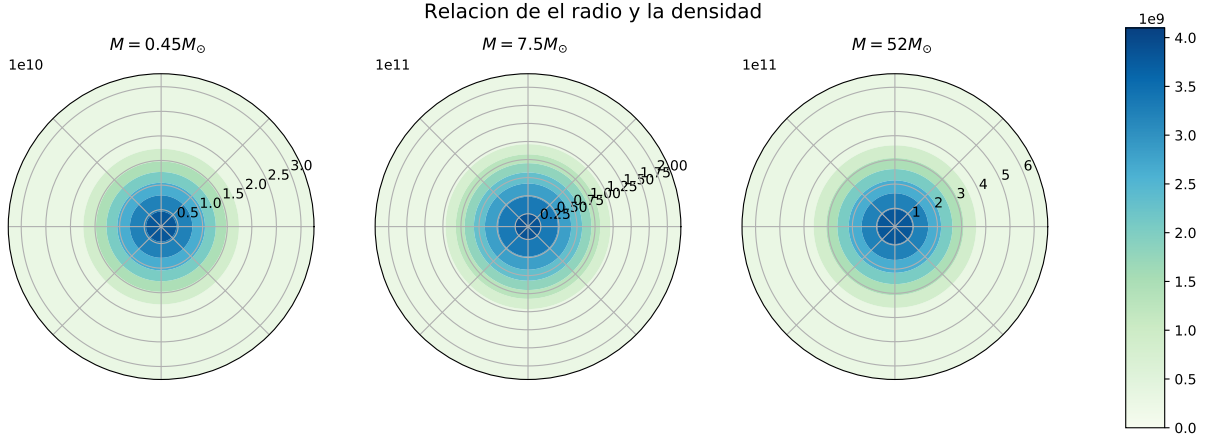


Figura 14: Esquema radial de la densidad.

Al observar las figuras 13 y 14 vemos que la relación entre la densidad y el radio es proporcional en las 3 estrellas analizadas. Esto se debe principalmente a que existe una dependencia entre la presión y la densidad, si la presión es mayor también lo será la densidad. Por otra parte vemos que para la estrella de menor masa ($0.45M_{\odot}$) la densidad disminuye mas lentamente que para la estrella de mayor masa ($52M_{\odot}$). La razón es que como pudimos ver anteriormente para la presión esto también ocurre.

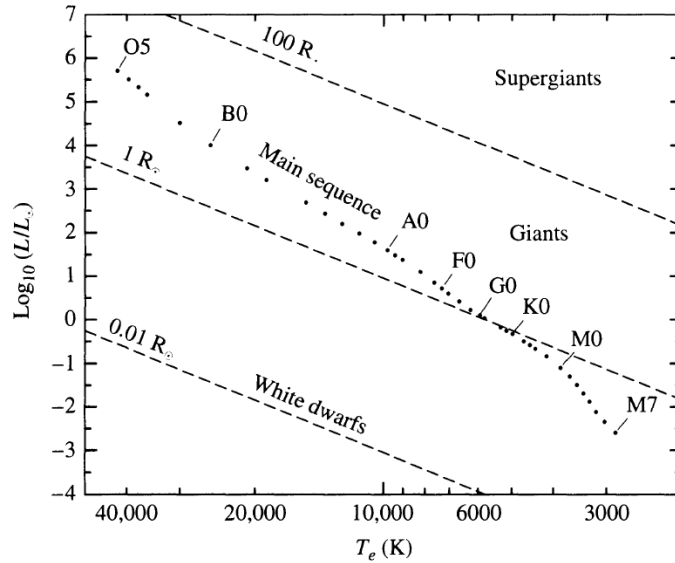


FIGURE 8.14 The theorist's Hertzsprung–Russell diagram. The dashed lines indicate lines of constant radius.

Figura 15: Diagrama de Hertzsprung-Russell [4].

5. Conclusiones

- Conociendo la temperatura superficial y luminosidad de las estrellas seleccionadas es posible clasificarlas dentro de los tipos espectrales y visualizarlas en el diagrama de Hertzsprung-Russell como muestra la figura 15.
- Para la estrella de $4,5M_{\odot}$ se encontró que su temperatura superficial era de $3,7 \times 10^3$ K y su luminosidad dada por $\text{Log}(L/L_{\odot})$ es de $-1,4286$. Para esta temperatura y luminosidad resulta que la estrella es una roja tipo M1 de la secuencia principal.
- En el caso de la estrella de $7,5M_{\odot}$ cuya temperatura superficial se estima en $2,8 \times 10^4$ K y luminosidad 3,3738, se puede ver que su clasificación espectral estaría entre una O1 o B0 aunque la luminosidad es algo mas baja que la que debería tener para estar en la secuencia principal.
- Finalmente la estrella de $52M_{\odot}$ tendría una temperatura superficial de $4,7 \times 10^4$ K y luminosidad 5,5799, lo que denotaría una estrella azul del tipo O5 correspondiente a la secuencia principal.

Referencias

- [1] Kahaner, David, Cleve Moler, Stephen Nash. Numerical Methods and Software. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1988.
- [2] Fritsch, F. N. and R. E. Carlson. Monotone Piecewise Cubic Interpolation. SIAM Journal on Numerical Analysis. Vol. 17, 1980, pp.238–246.
- [3] S. J. Arthur, Centro de Radioastronomía y Astrofísica, UNAM. Astrofísica Estelar. 4 de abril de 2012.
- [4] Bradley W. Carroll and Dale A. Ostlie. An introduction to modern astrophysics. Pearson. Ed. 2, 1980, pp.223.
- [5] Padmanabhan T. Theoretical Astrophysics VII: Stars and Stellar Systems Cambridge University Press. Ed. 2, 2001, Cap 2.