

Movimientos de los cuerpos celestes

Objetos Astrofísicos

Prof. Benjamín Calvo Mozo

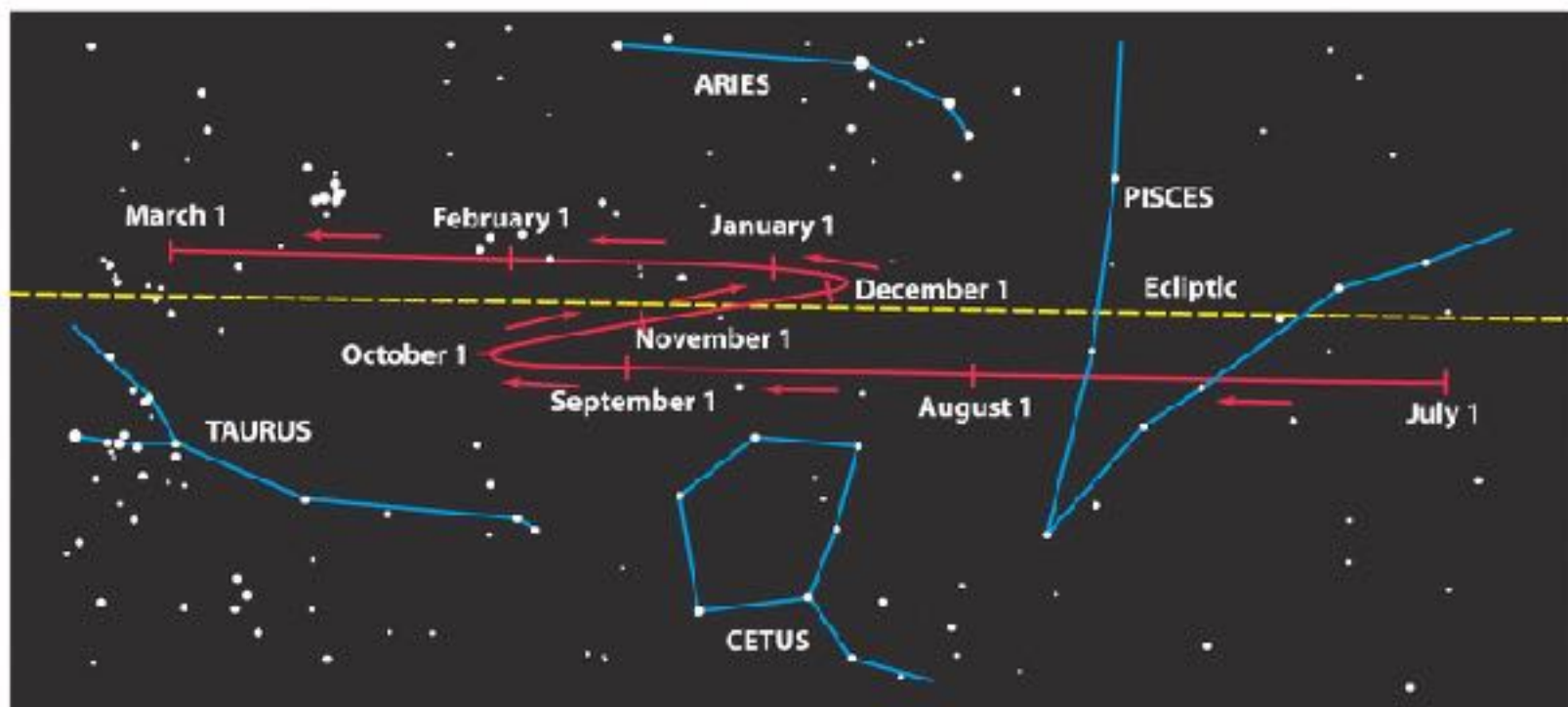
Universidad Nacional de Colombia

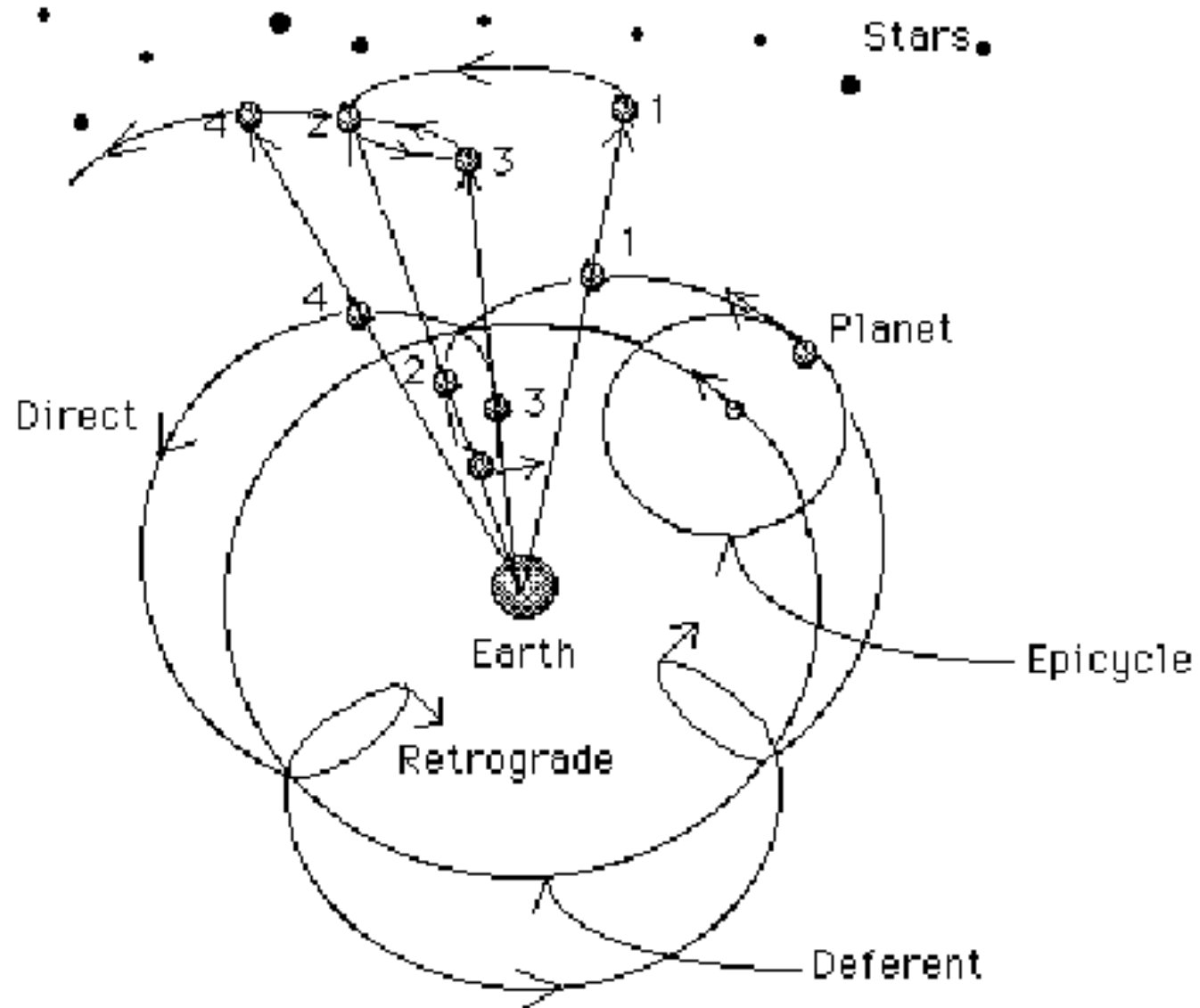
Sede Bogotá, Facultad de Ciencias

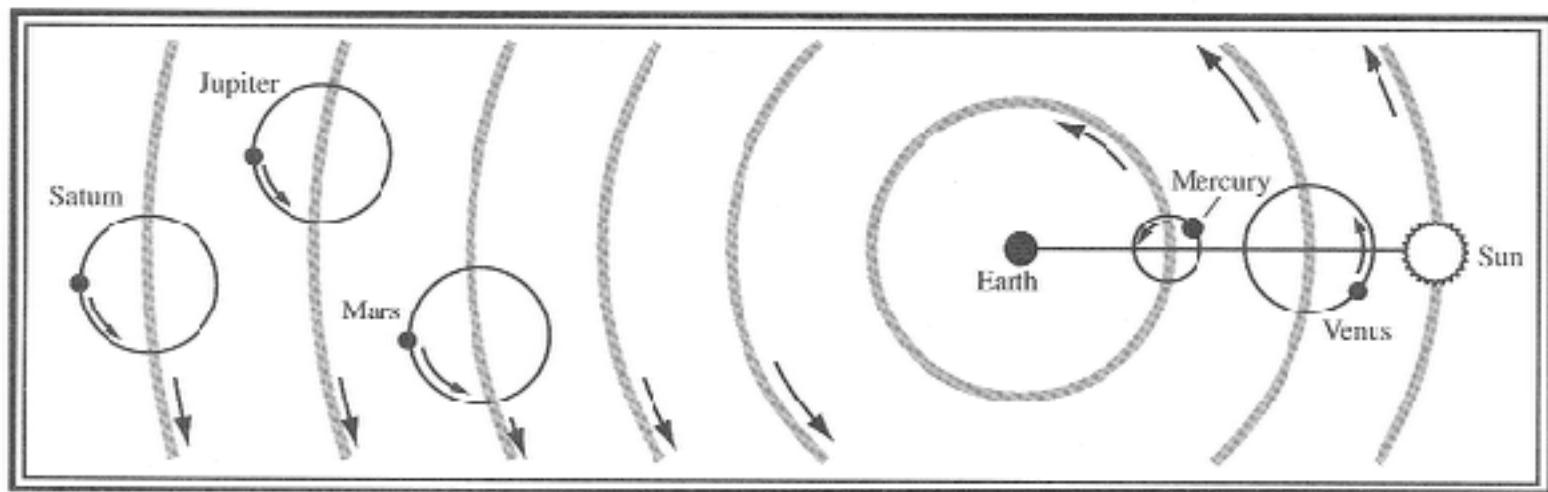
Observatorio Astronómico Nacional

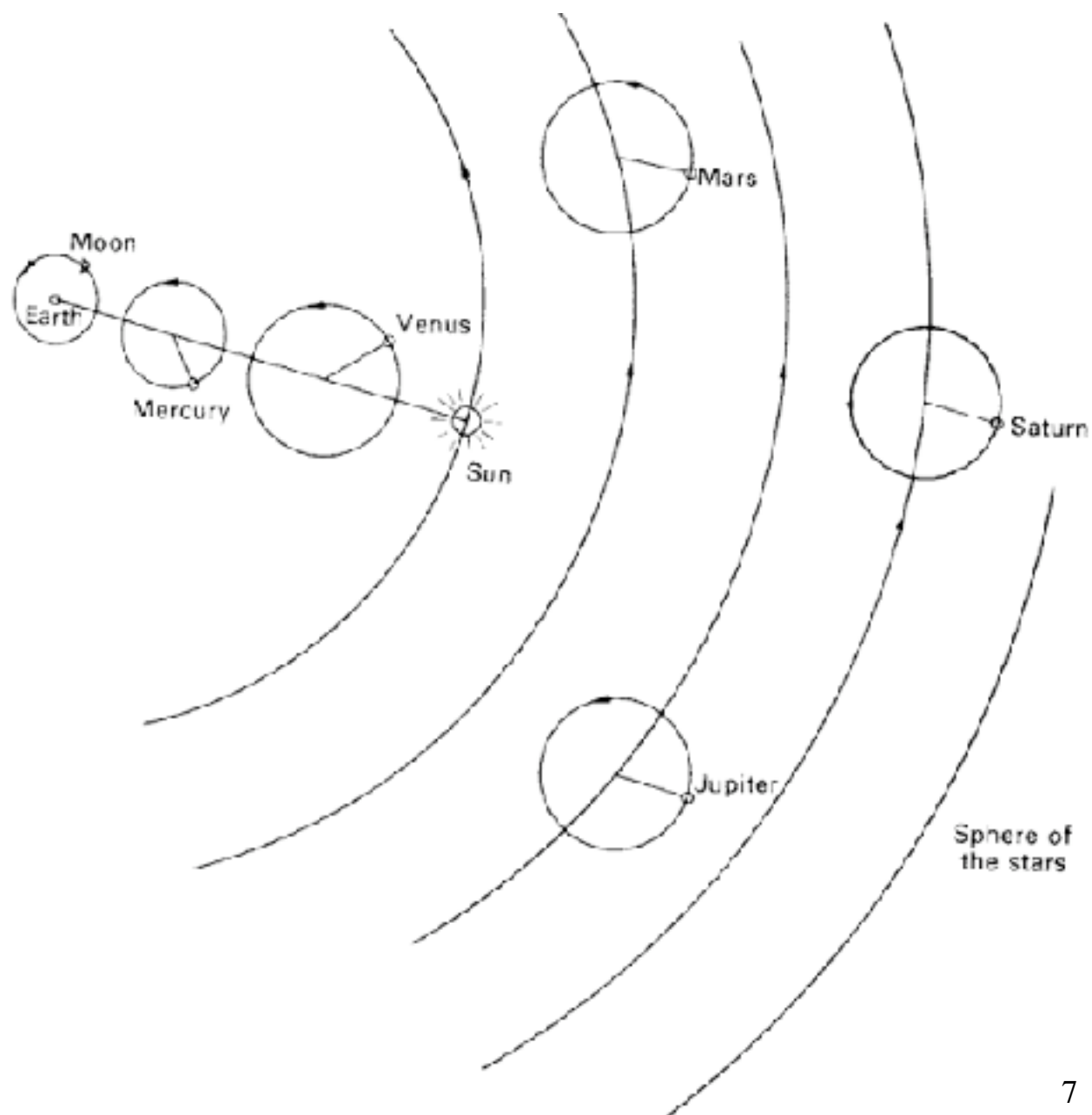




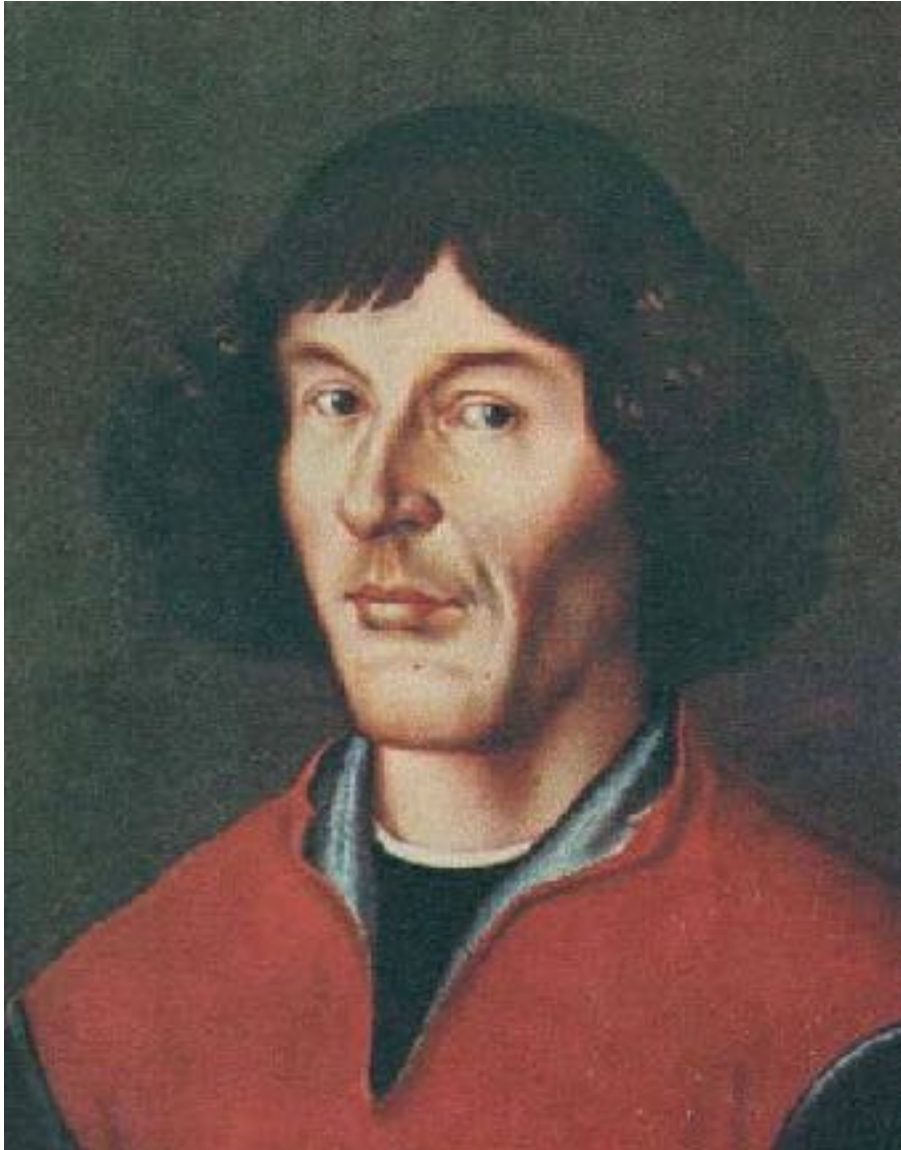








De Revolutionibus Orbium Coelestium, 1ª edición 1643



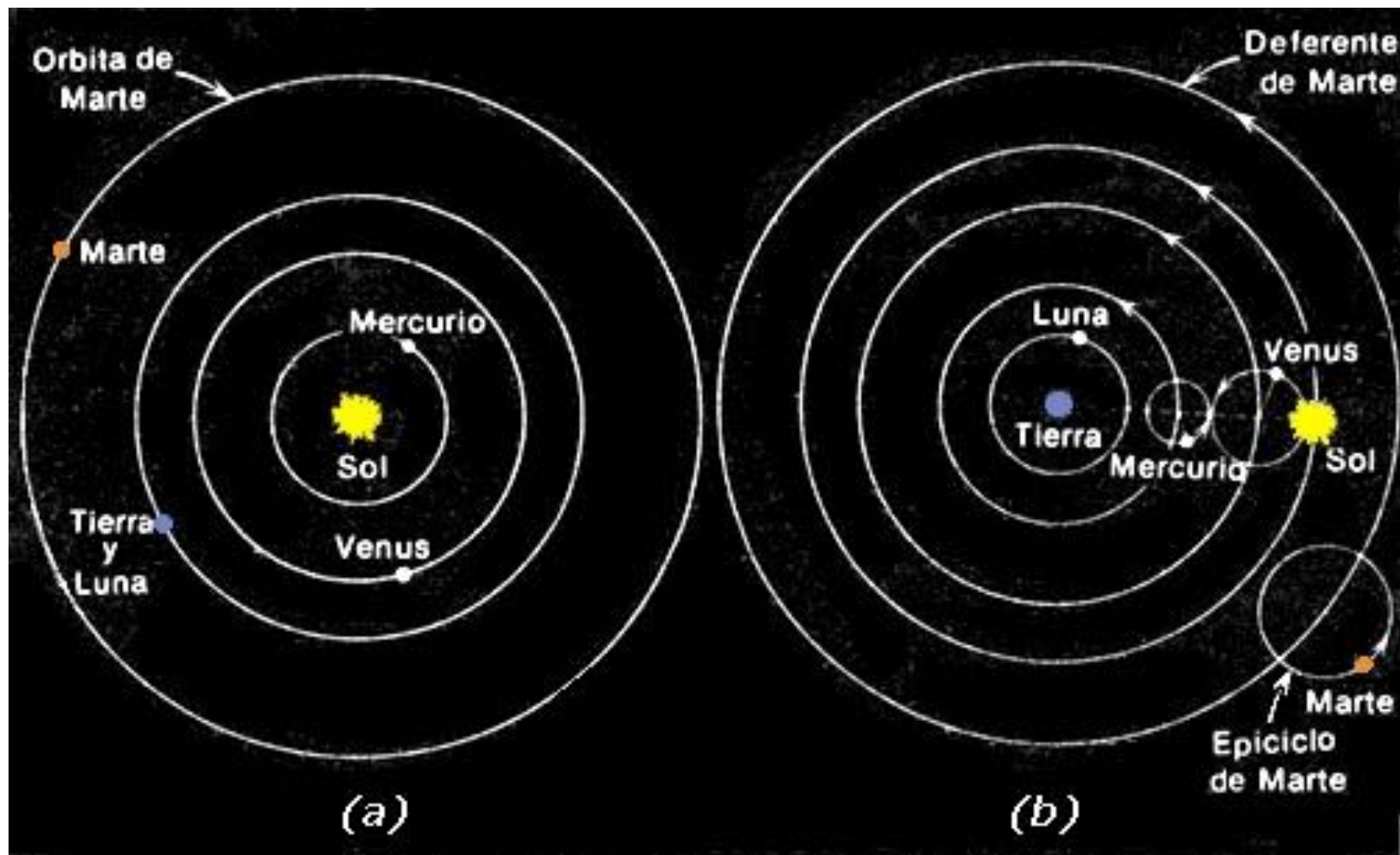
NICOLAI CO PERNICI TORINENSIS DE REVOLUTIONIBVS ORBI- um coelestium, Libri vi.

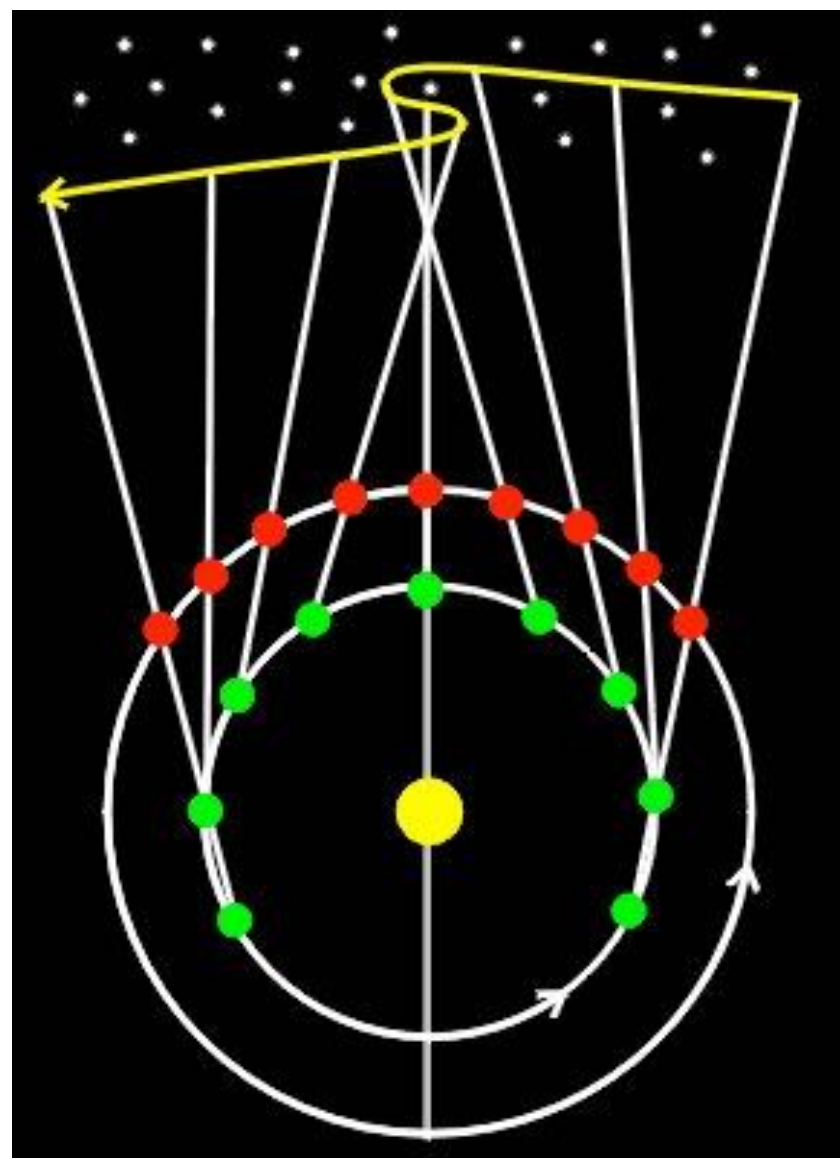
Habes in hoc opere tam recens nato, & ædito,
studiose lector, Motus stellarum, tam fixarum,
quàm erraticarum, cum ex ueteribus, tum etiam
ex recentibus obseruationibus reſtitutos: & no-
uis inſuper ac admirabilibus hypotheſibus or-
natos. Habes etiam Tabulas expediſſimas, ex
quibus eoſdem ad quoduis tempus quàm facili
me calculare poteris. Igitur eme, lege, fructe.

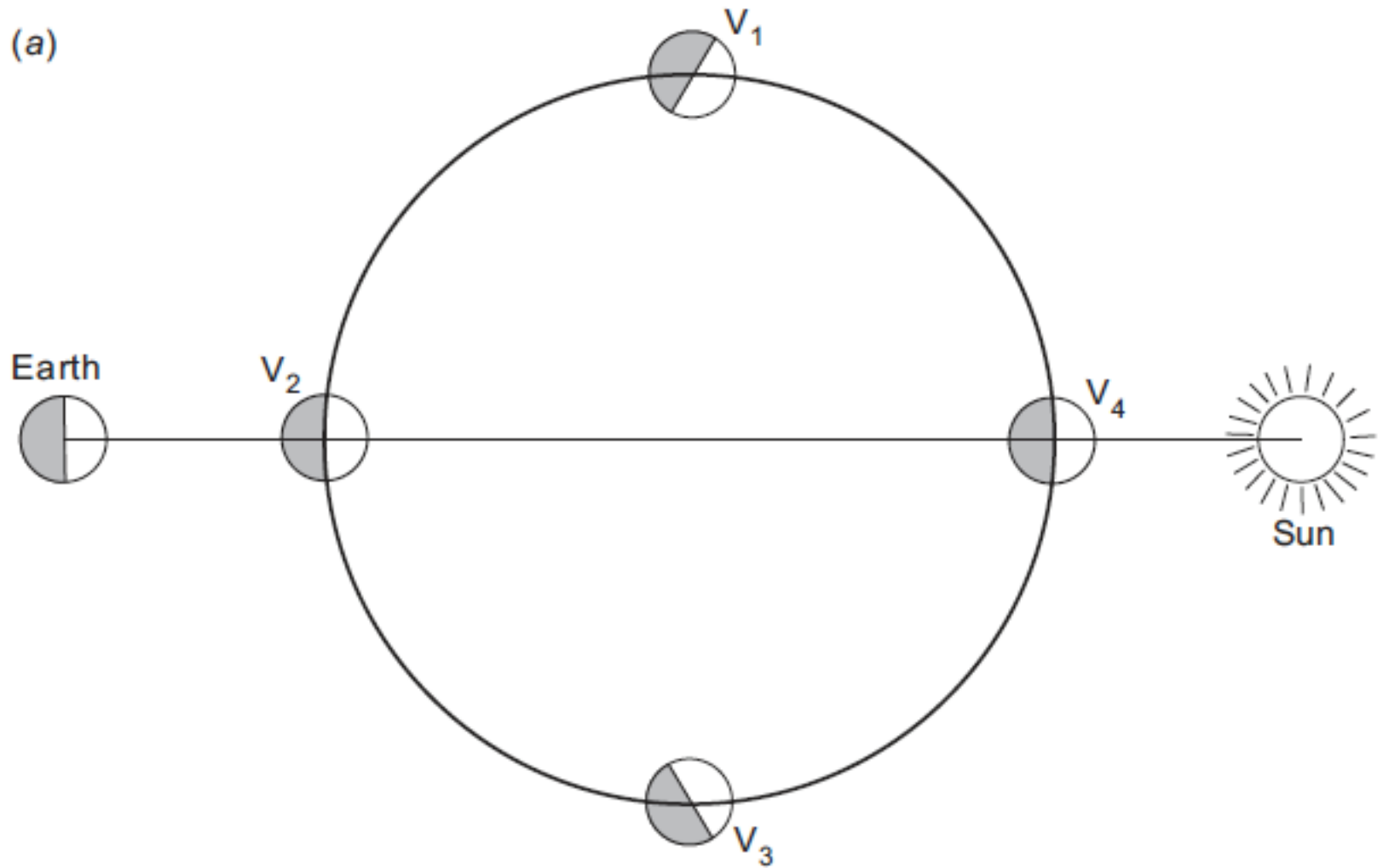
Αναμνηστικὸν εἶδος ἐστίν.

Norimbergæ apud Ioh. Petreium,
Anno M. D. XLIII.

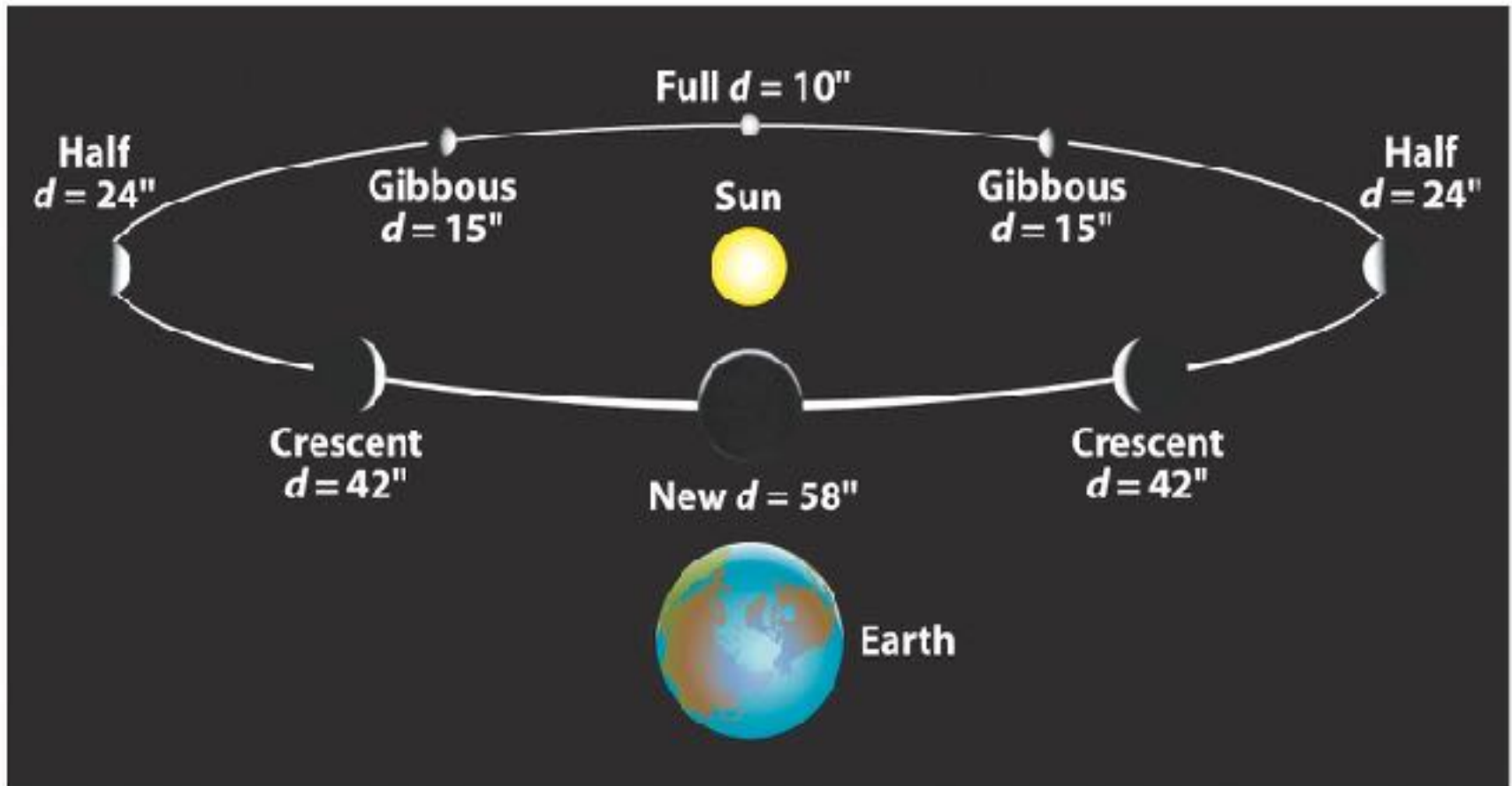
Nicolaus Copernicus (1473-1543)





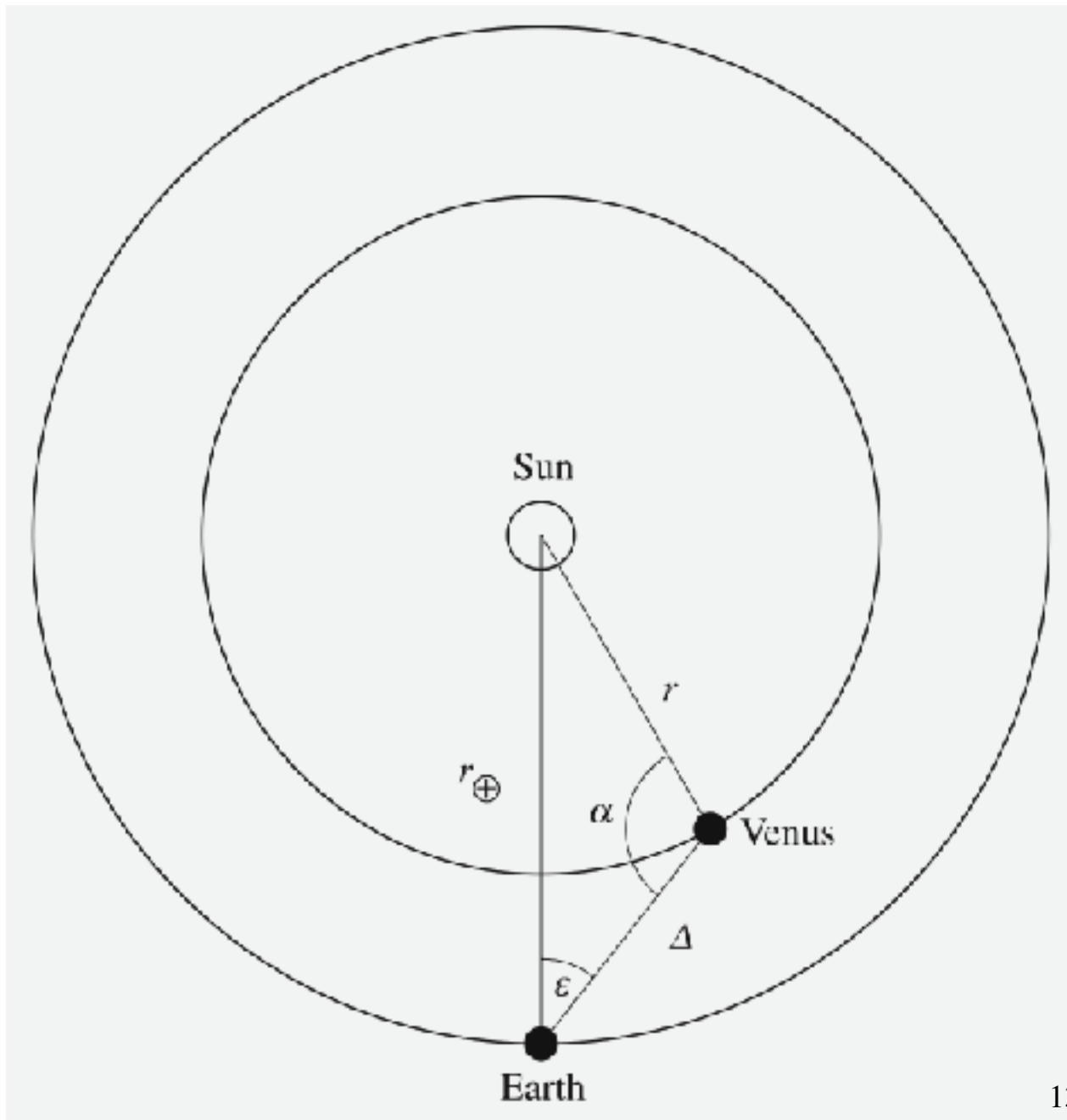


Fases de Venus en el modelo geocéntrico NO corresponde a la secuencia observada con el telescopio.

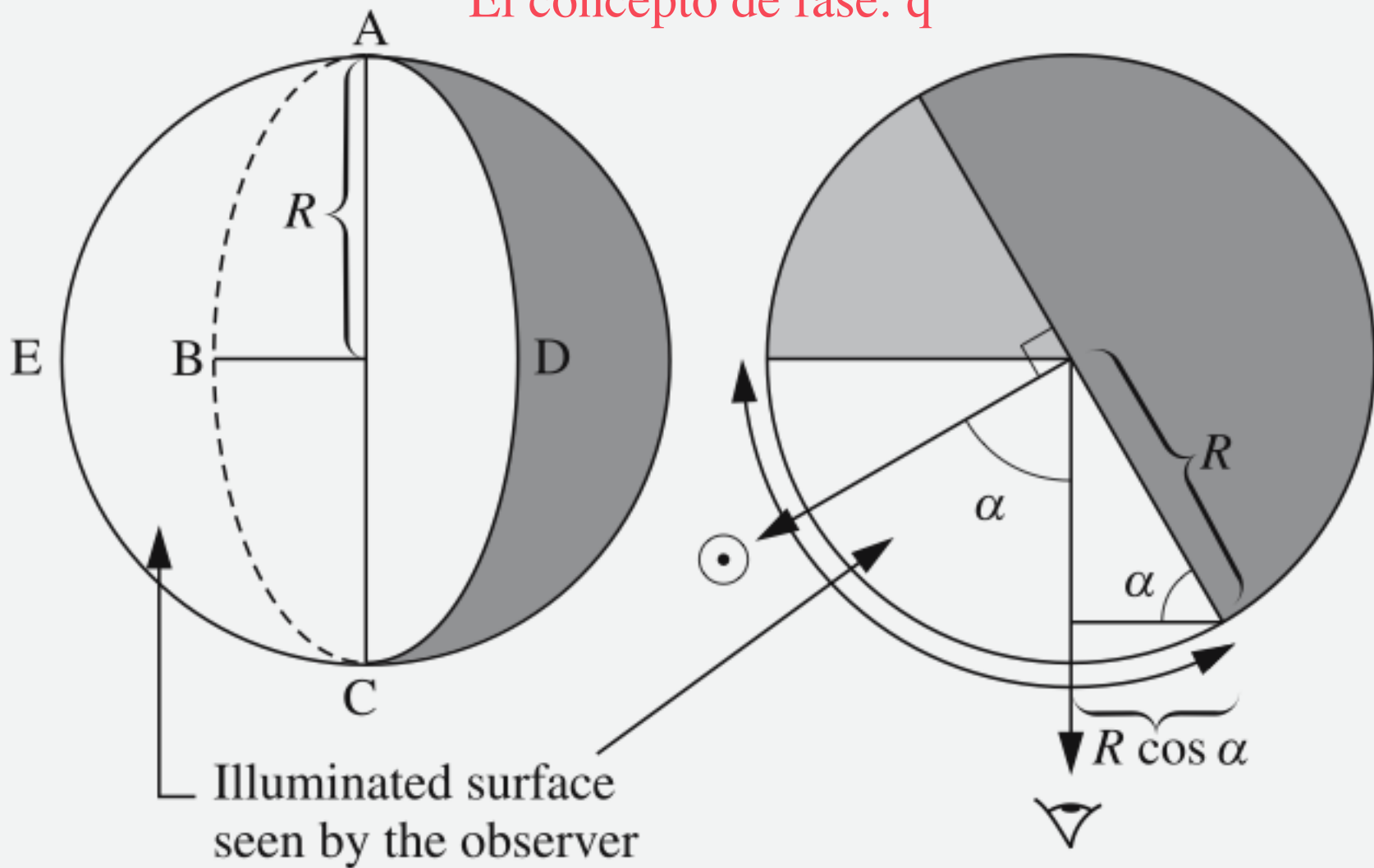


Fases de Venus según el modelo geocéntrico, corresponden a lo observado en el telescopio.

Ángulo de fase de un planeta inferior

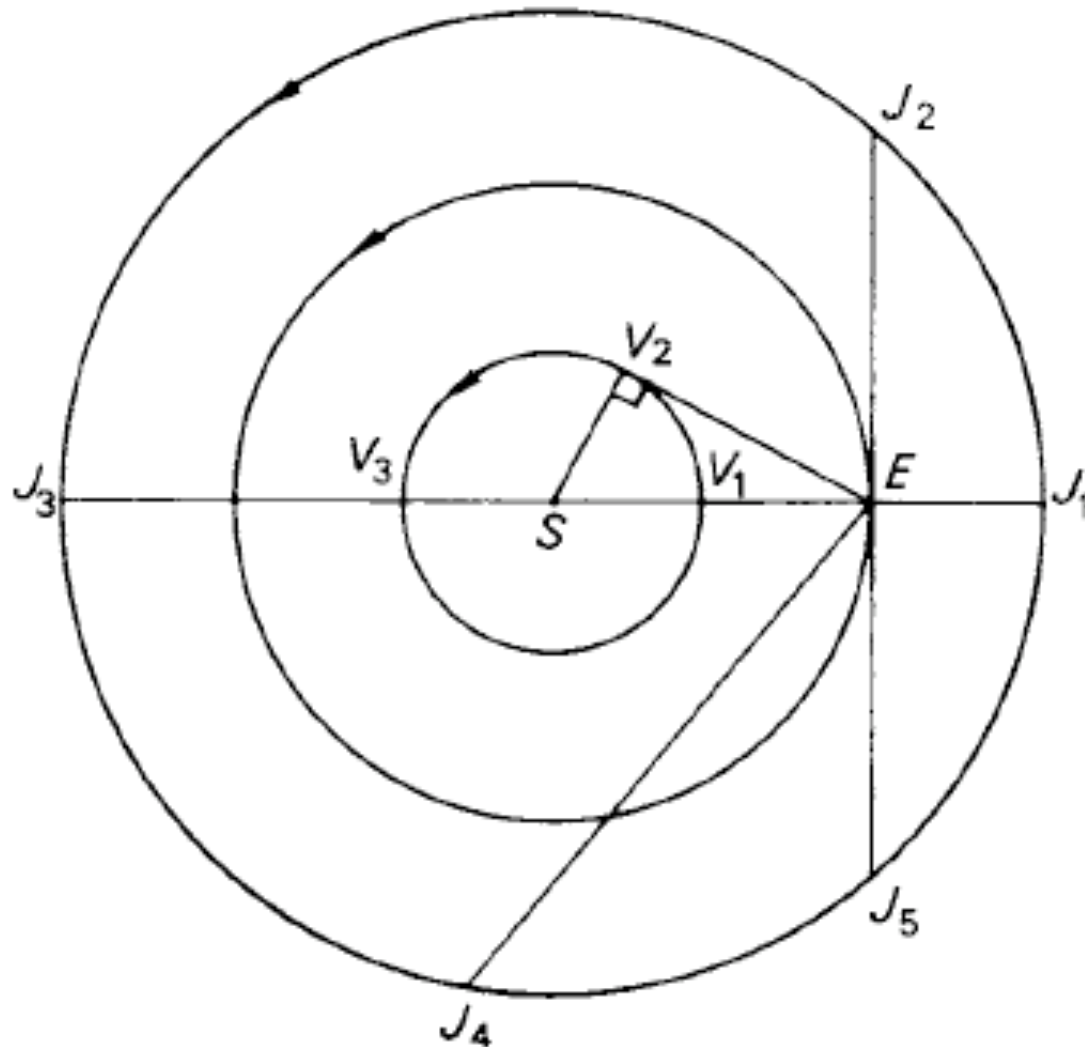


El concepto de fase: q



$$q = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)$$

Configuraciones Planetarias



Oposiciones de Júpiter

Fecha	Distancia a la Tierra (10^6 km)	Diámetro (segundo-arco)	Magnitud aparente
2012 dic 03	609.0	48.4	-2.8
2014 ene 05	630.0	46.8	-2.7
2015 feb 06	650.1	45.4	-2.6
2016 mar 08	663.4	44.5	-2.5
2017 abr 07	666.3	44.3	-2.5

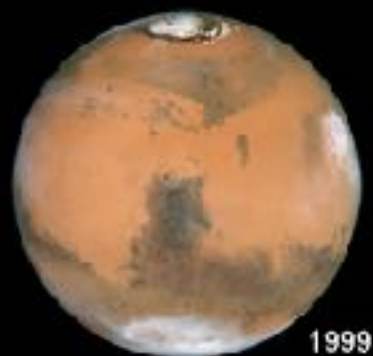
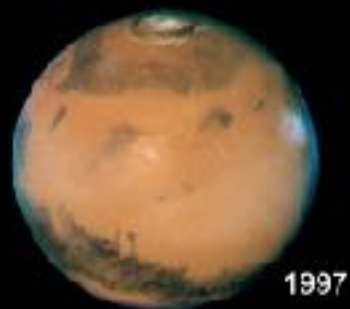
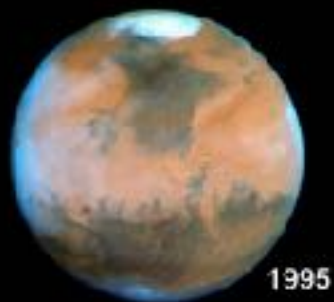
Oposiciones de Saturno

Fecha	Distancia a la Tierra (UA)	Diámetro (segundo-arco)	Magnitud aparente
2012 abr 15	8,7196	19.2	- 0.05
2013 abr 28	8.8162	19.0	- 0.19
2014 may 10	8.8997	18.6	- 0.28
2015 may 23	8.9667	18.4	- 0.32
2016 jun 03	9.0149	18.3	- 0.34



Oposiciones de Marte

Fecha	Distancia a la Tierra (UA) x100	Diámetro (segundo- arco)
2003 ago 23	373	25.1
2005 nov 07	470	19.8
2007 dic 28	600	15.5
2010 ene 29	664	14.0
2012 mar 03	674	14.0
2014 abr 08	621	15.1
2016 may 22	509	18.4



Mars Near Opposition
Hubble Space Telescope




Conjunciones inferiores y superiores de Venus y Mercurio

- 🌞 Conjunción superior: Planeta inferior posterior al Sol. Se puede presentar ocultación del planeta por el Sol.
- 🌞 Conjunción inferior: Planeta inferior anterior al Sol. Se puede presentar **tránsito** del planeta por el frente del disco solar (como un micro-eclipse).

 Tránsitos de Mercurio recientes/próximas: mayo 7/2003, noviembre 8/2006, mayo 9/2016, noviembre 11/2019, noviembre 13/2032, noviembre 7/2039, mayo 7/2049....

Cada: 7, 13 o 33 años en noviembre, 13 o 33 años en mayo.

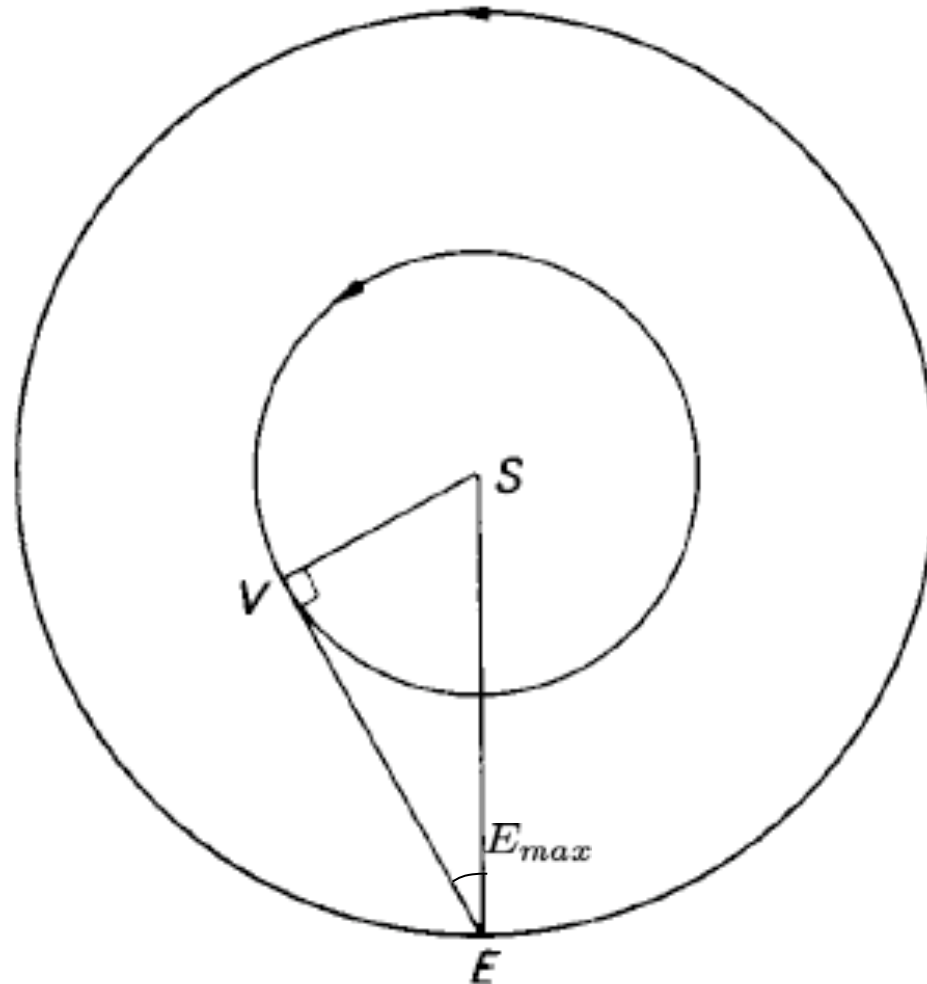
 Tránsitos de Venus recientes/próximas: junio 8/2004, junio 5-6/2012, diciembre 11/2117, diciembre 8/2115, diciembre 8/2125, junio 11/2247,

Cada: 105.5, 8, 121, 8 años, etc.





Planeta inferior (interior)

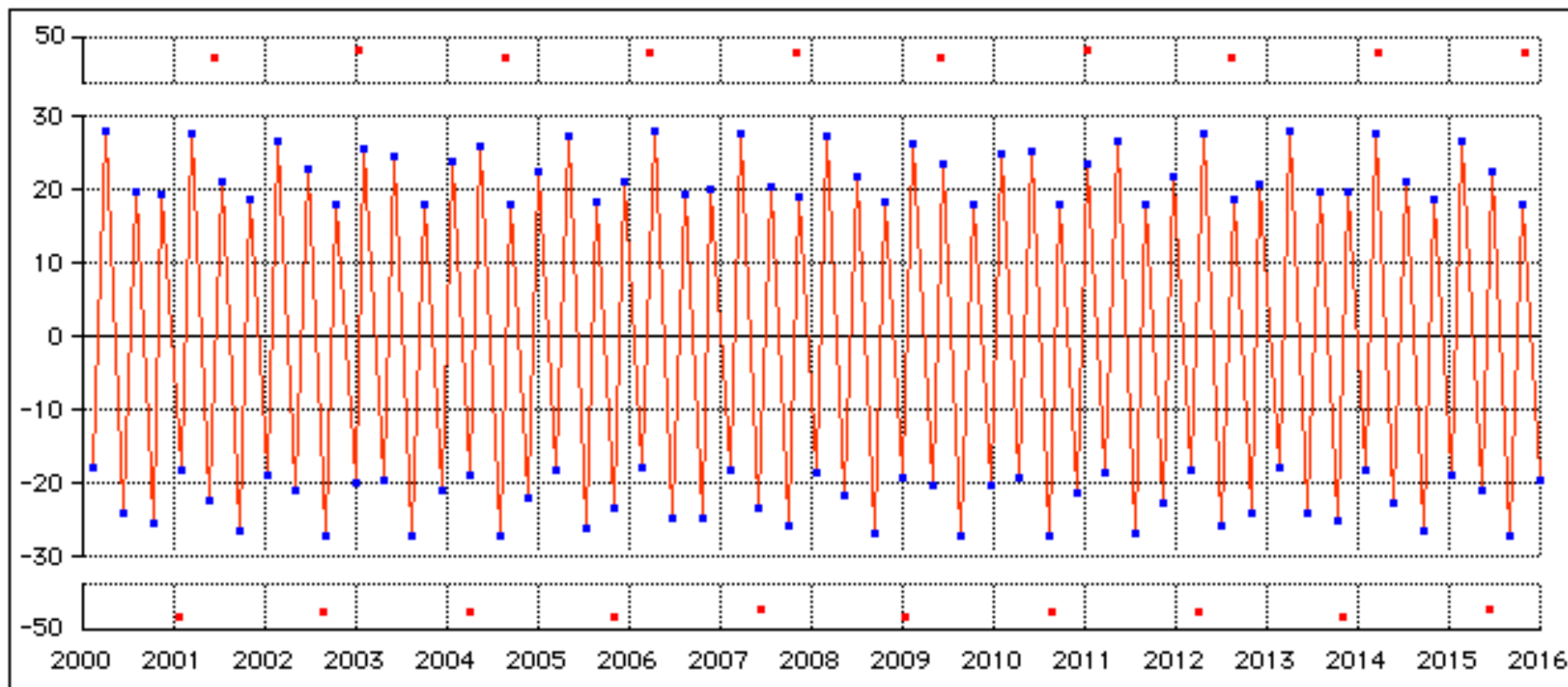


$$R_V = (1 \text{ UA}) \times \sin E_{max} < 1 \text{ UA}$$

Elongaciones Mercurio

- Mercurio tiene una órbita de excentricidad grande, aproximadamente 0.206
- Las elongaciones del planeta varían considerablemente a lo largo del año y de los años. Entre 2000 y 2015, se tiene:
- Elongaciones este: entre 18.1° y 27.4°
- Elongaciones oeste: entre 17.9° y 27.4°

Cuadro comparativo elongaciones de Venus (azul) y Mercurio(rojo)
Positivas las elongaciones Oeste y negativas las elongaciones Este.



Las máximas elongaciones de Venus están entre 45.8° y 47.0°
(E-oeste), y entre -45.4° y -47.1° (E-oeste)
Cuadro de J. Giesen (febrero de 2006).

Períodos sinódico y sidéreo

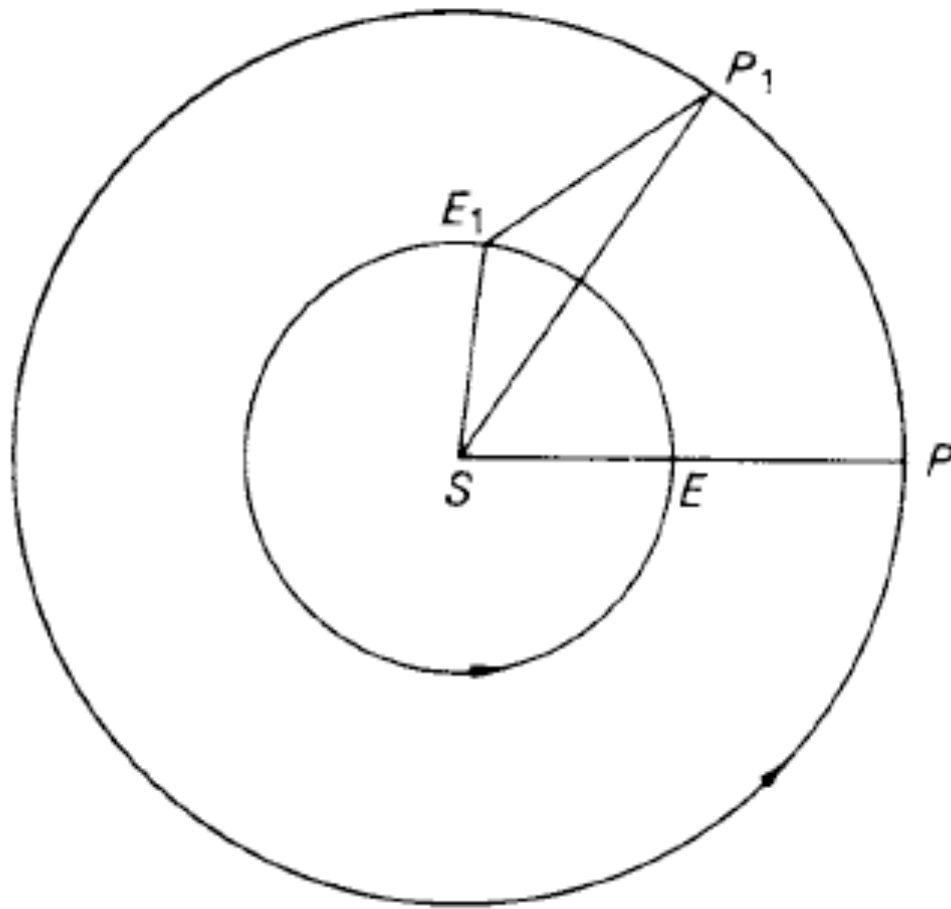
$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}$$

$$\frac{1}{583.9} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{365.25}$$

$$\frac{1}{T_1} = \frac{365.25 + 583.9}{583.9 \times 365.25}$$

$$T_1 = 224.7 \text{ days.}$$

Planeta superior (exterior)



$$\theta = (n_{\oplus} - n_P)t$$

$$\theta = 360 \left(\frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_P} \right) t$$

$$\theta = 360 \frac{t}{S}.$$

Cálculo de distancia planeta externo

$$\angle E_1 P_1 S = 180 - \angle S E_1 P_1 - \angle E_1 S P_1.$$

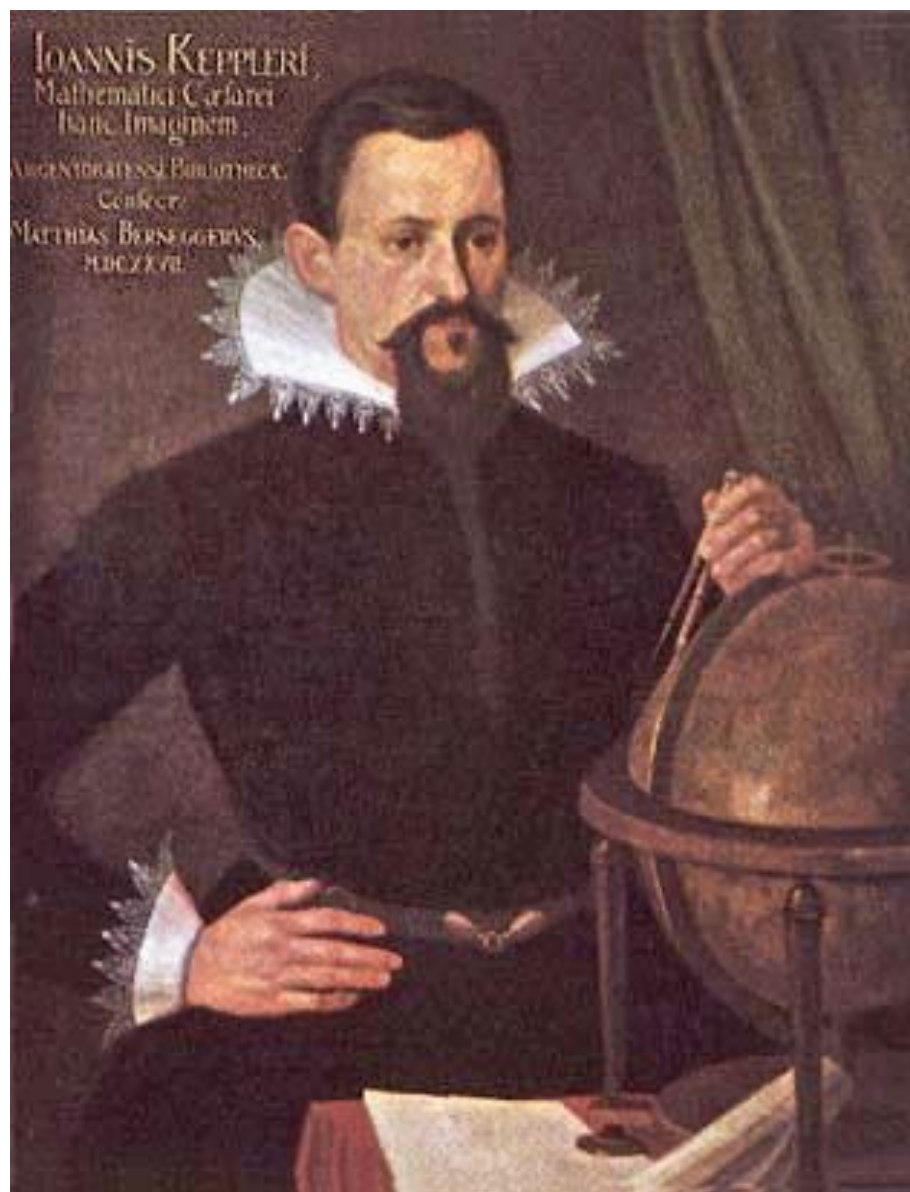
$$\frac{\sin P_1 E_1 S}{S P_1} = \frac{\sin E_1 P_1 S}{S E_1}$$

$$\frac{S P_1}{S E_1} = \frac{\sin P_1 E_1 S}{\sin E_1 P_1 S}$$



Tycho Brahe (1546-1601)





Johannes Kepler
(1571-1630)

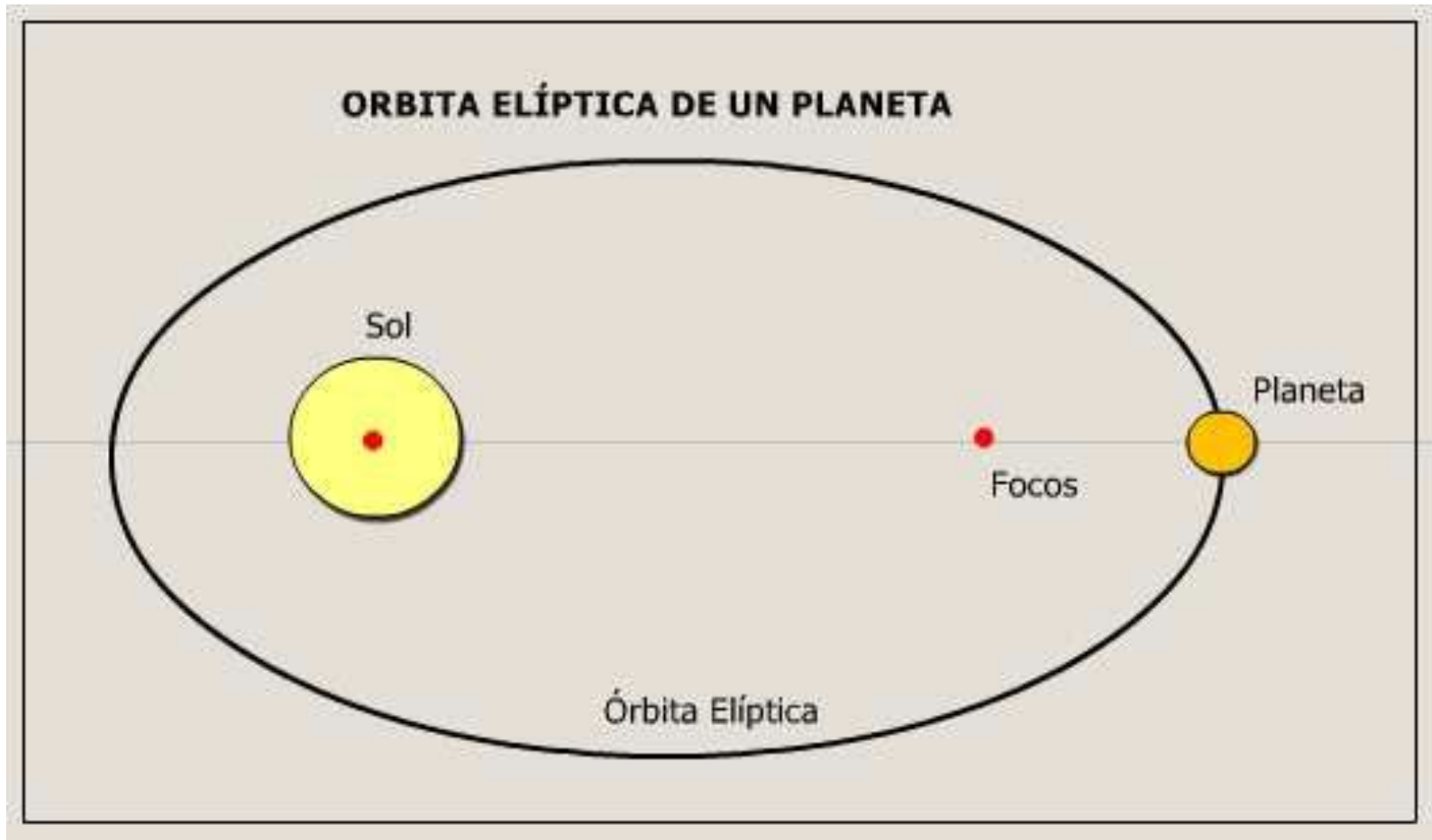


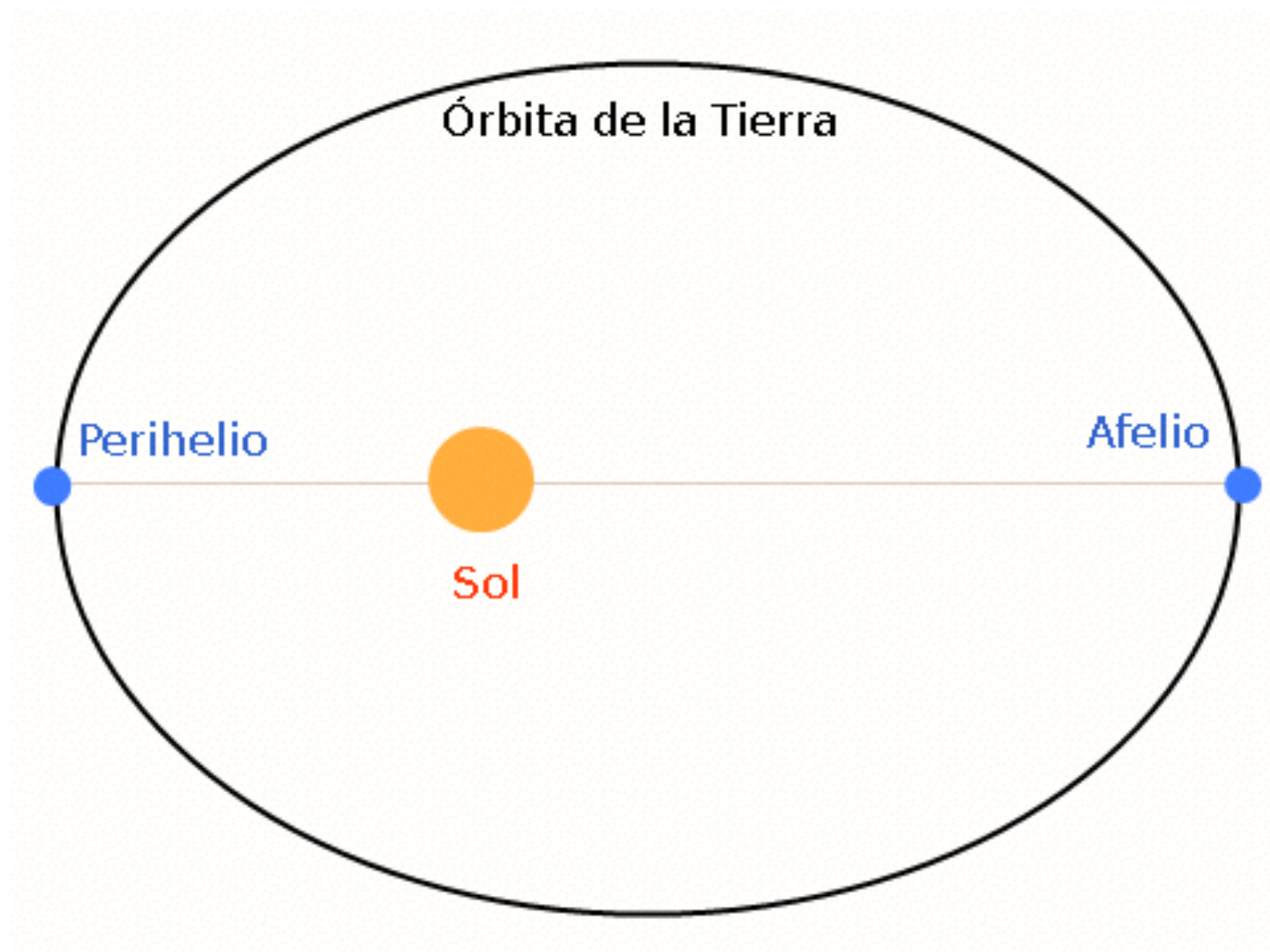
Astronomia Nova 1609
Primeras dos leyes.



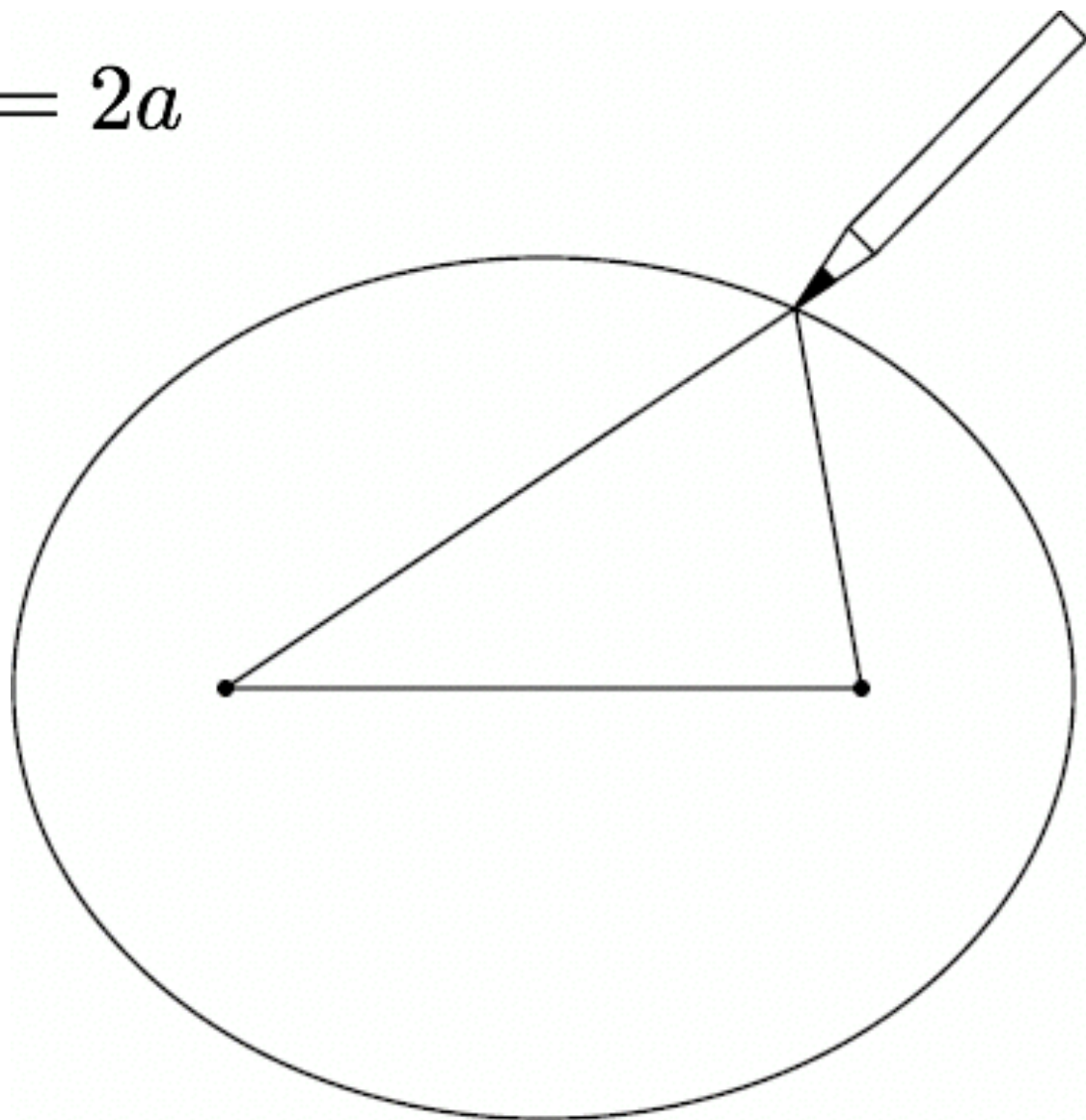
Armonices Mundi 1619
Tercera ley.

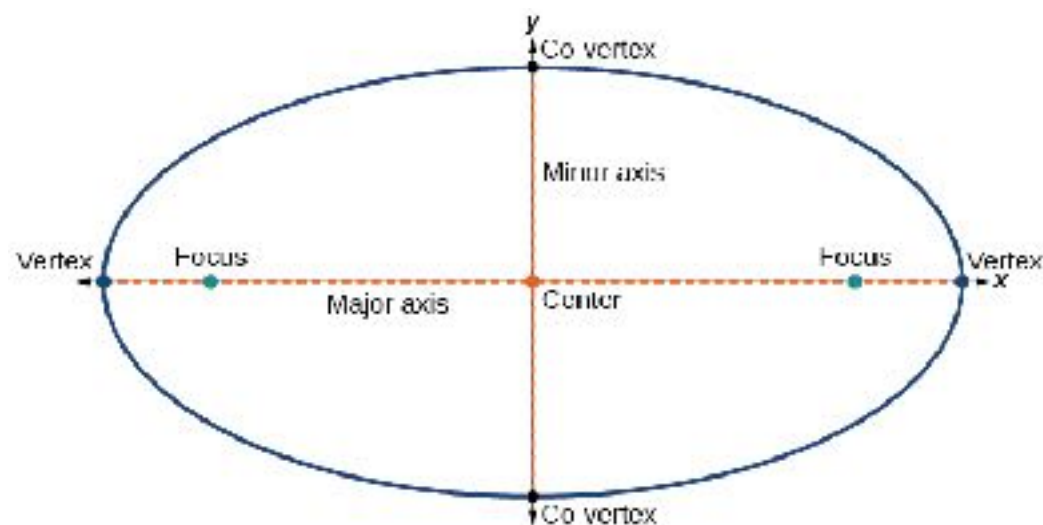
Primera ley de Kepler: el planeta sigue una **órbita elíptica** con el Sol en uno de sus focos.





$$r + r' = 2a$$

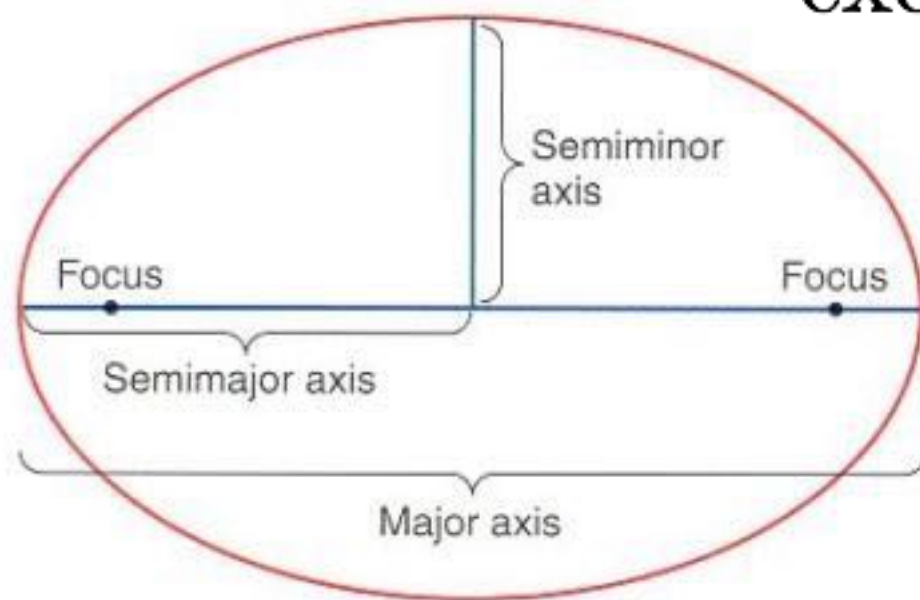




Semieje mayor: a

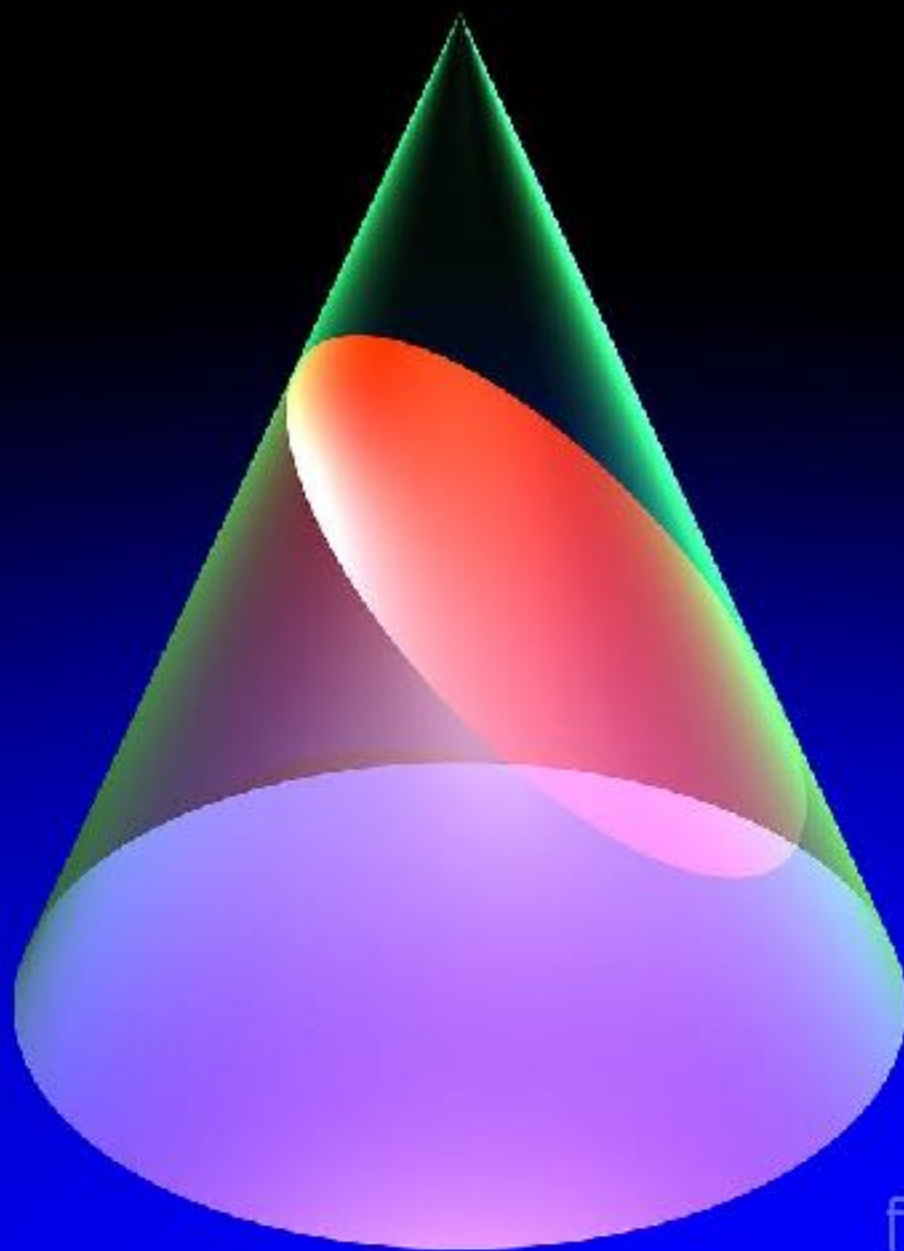
Semieje menor: b

excentricidad: $e = \frac{\overline{FF'}}{2a}$

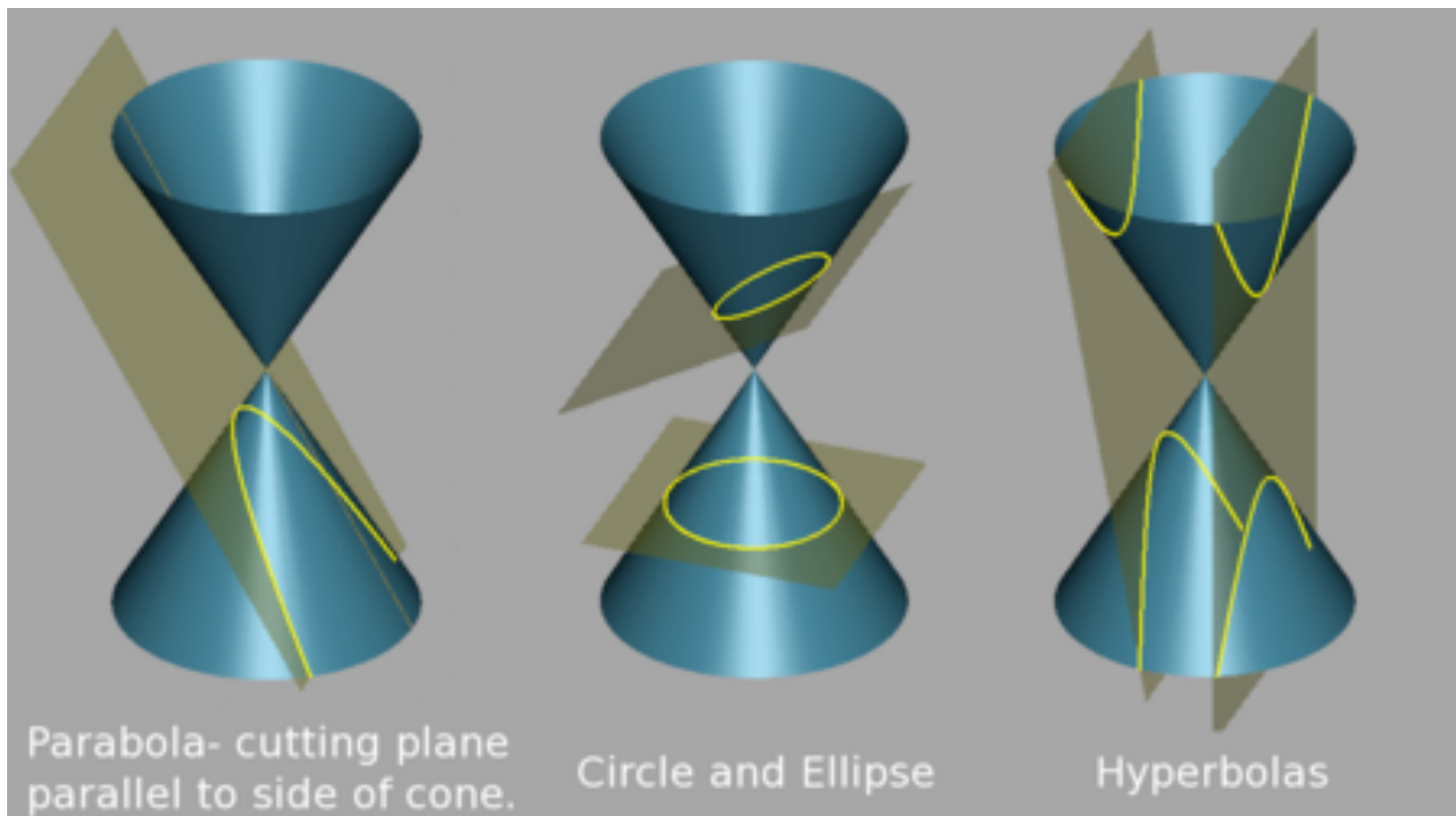


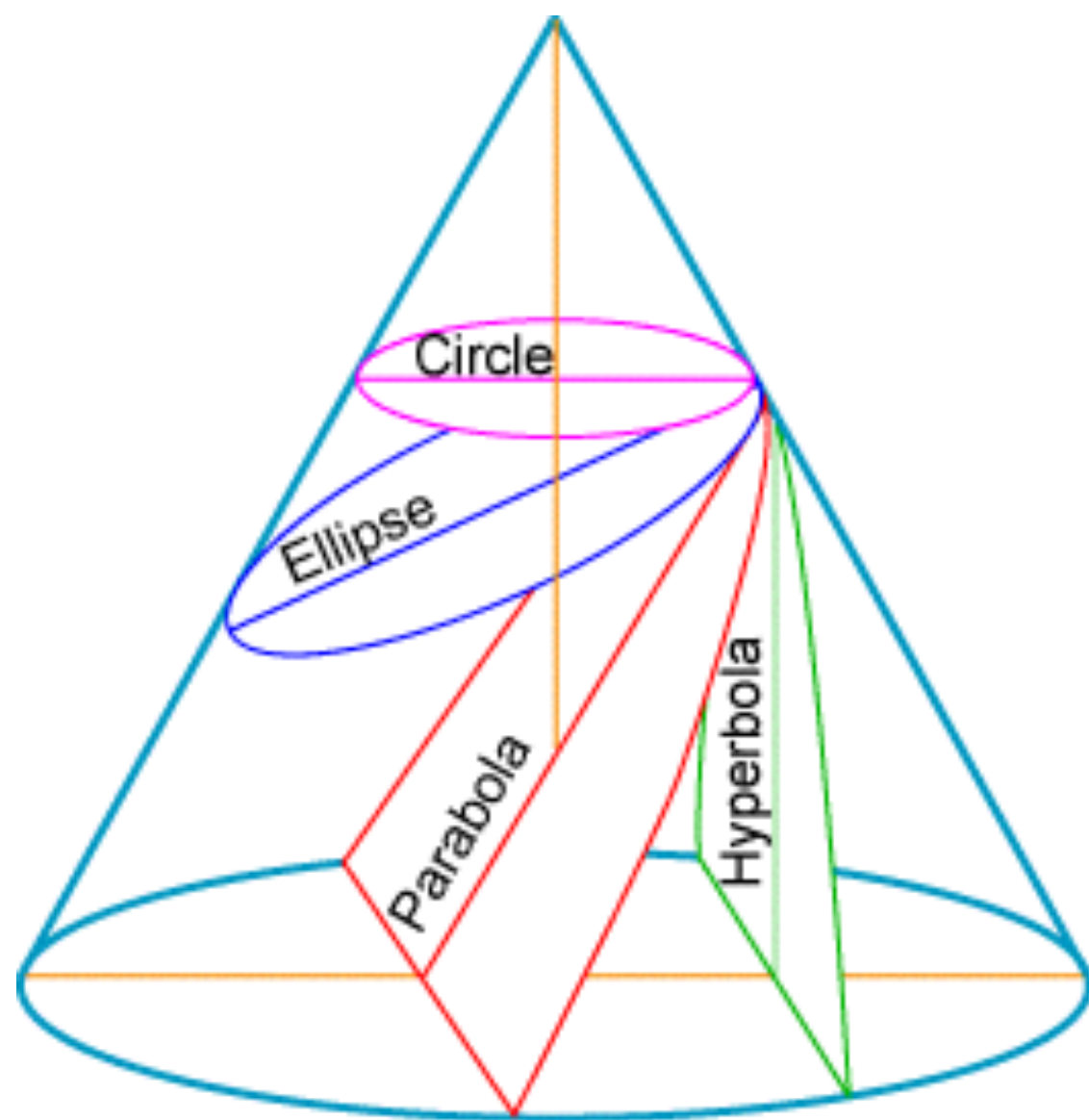
en elipses: $0 < e < 1$

$$\overline{OF} = \overline{OF'} = ae$$

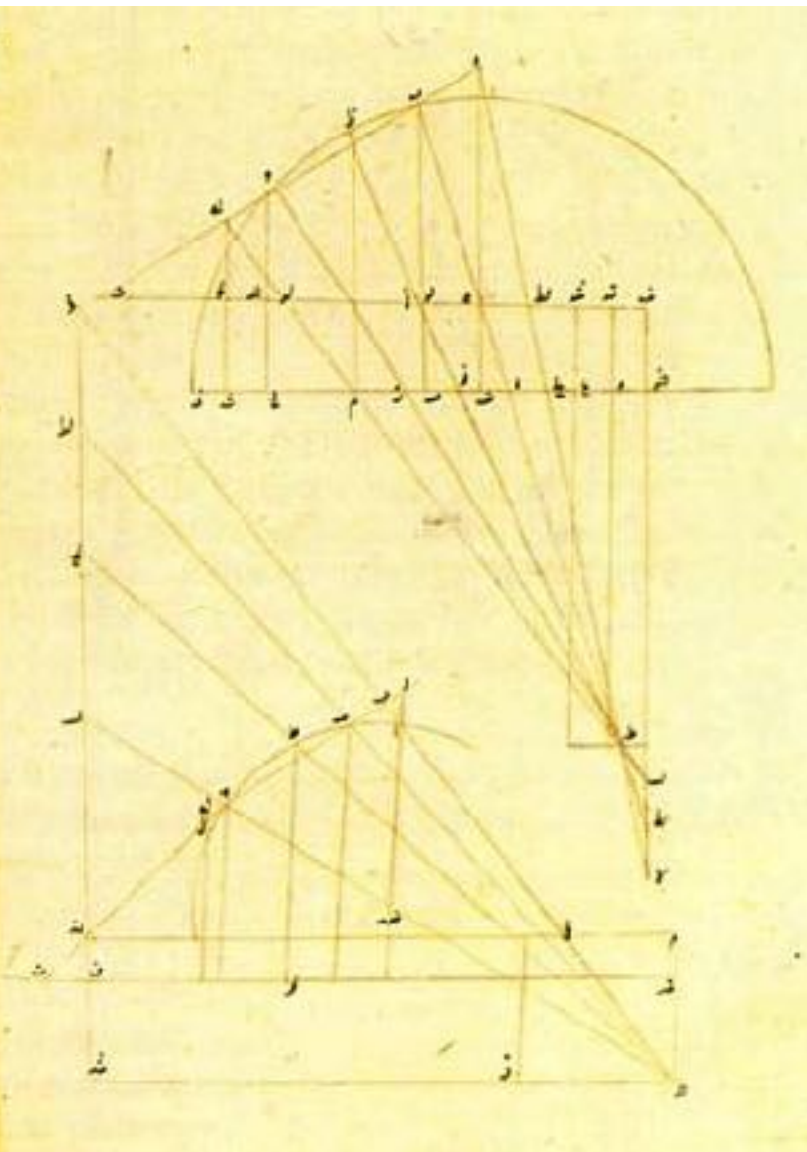


fineart
america





Libro de Apolonio en versión árabe

[illegible]

Descripción de la órbita cónica en coordenadas polares:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

En donde p es el semilado recto, e la excentricidad; en el problema de los dos cuerpos:

$$p = \frac{h^2}{\mu}$$

Distancia entre focos: $\overline{FF'} = 2\overline{OF} = 2ae$

pericentro: $r_{min} = a(1 - e)$

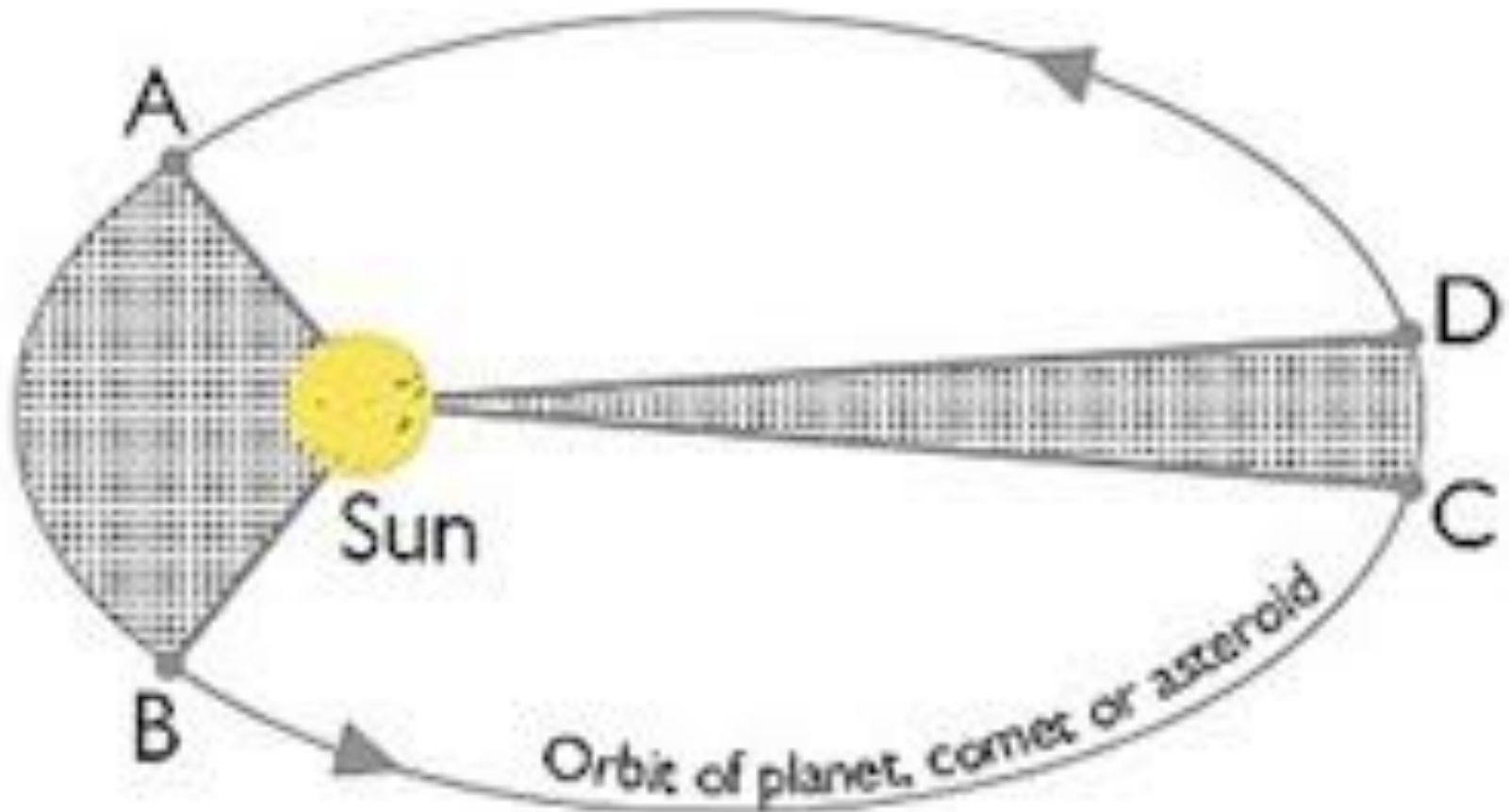
apocentro: $r_{max} = a(1 + e)$

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \qquad \overline{OF} = \overline{OF'} = ae$$

semilatus rectum: $p = a(1 - e^2)$

$$A = \pi ab$$

Segunda ley de Kepler: el radio vector del planeta barre **áreas iguales en tiempo iguales**.



Tercera Ley de Kepler: El **cuadrado del período** sidéreo es directamente proporcional al **cubo de la distancia media** del planeta al Sol. En el problema de los dos cuerpos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)} a^3$$

$$\mu = G(M_1 + M_2)$$

Principios Matemáticos de la Filosofía Natural



ISAACUS NEWTON EQ. AUR. ÆT. 83.

L. Vandenhoeck pinxit 1704

Geo. Kneller delinavit 1704

B.C.
3.14

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

AUCTORE
ISAACO NEWTONO, EQ. AUR.

Editio tertia aucta & emendata.

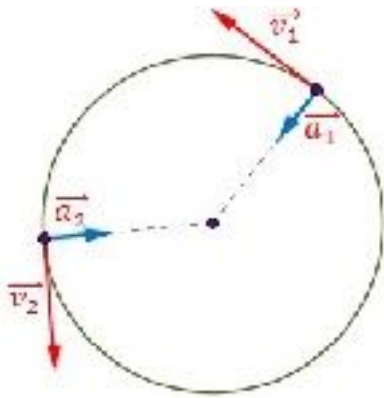
LONDINI:

Apud GUL. & JOH. INNES, Regie Societatis typographos.
MDCCXXVI.

Ediciones: 1687, 1713, 1726.

Período sidéreo Lunar: $27^d.321529 \approx 2.36 \times 10^6 \text{s}$

Distancia media Tierra-Luna: $384401 \text{km} \approx 3.84 \times 10^8 \text{m}$



$$a_c = \omega^2 R, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Para la Luna, asumiendo movimiento circular uniforme, tenemos:

$$a_c \simeq 2.7 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

Si la acción de atracción de la Luna y el de un objeto que cae sobre la superficie terrestre fuera la misma entonces habría una dependencia con la distancia, pues el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie es del orden de 9.8 m/s^2 . Cómo hallar esa dependencia con la distancia? Si asumimos que la fuerza con que el Sol atrae los planetas es de la misma naturaleza que llamaremos la fuerza de gravedad, podemos aplicar una ley fruto de las observaciones, la tercera ley de Kepler, para encontrar tal dependencia con la distancia. Como las excentricidades de Venus, la Tierra, Júpiter y Saturno son relativamente pequeñas, respectivamente 0.0068, 0.0167, 0.0484, 0.0541, podemos pensar que para estos planetas considerar una órbita circular en primera aproximación no es una hipótesis muy descabellada. Para Marte y Mercurio esta suposición no es aplicable por cuanto sus excentricidades son aproximadamente iguales a 0.0934 y 0.2056 aproximadamente.

Entonces, bajo la consideración de un planeta que gira alrededor del Sol siguiendo una órbita (en primera aproximación), podemos volver a usar:

$$a_c = \omega^2 R, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

De modo tal que:

$$F = ma = \frac{4m\pi^2 R}{T^2}$$

De acuerdo con la tercera ley de Kepler, si R es el radio de la órbita asumiéndola circular:

$$K = R^3 / T^2, \text{ o bien: } T^2 = R^3 / K$$

De modo tal que al reemplazar T^2 en la ecuación de fuerza, obtenemos:

$$F = 4\pi^2 K \frac{m}{R^2}$$

Así obtenemos una ley de gravedad que decae con el inverso del cuadrado de la distancia.

Ley de gravitación universal:

$$\vec{F}_{grav} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{u}$$

En donde el vector unitario \hat{u} va del cuerpo de masa M al de masa m , y la fuerza es la gravitacional sobre la partícula de masa m . En el problema de los dos cuerpos:

$$\vec{F}_1 = \frac{GM_1M_2}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{F}_2 = -\frac{GM_1M_2}{r^3}\vec{r}$$

Si en las últimas dos expresiones aplicamos la segunda ley de Newton, se tiene:

$$M_1 \vec{a}_1 = \frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{e}_r$$

$$M_2 \vec{a}_2 = -\frac{GM_1 M_2}{r^2} \hat{e}_r$$

En donde el vector unitario está definido en la dirección que va desde la partícula de masa M_1 a la de masa M_2 .

$$\vec{r} = r \hat{e}_r \qquad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Si en las dos ecuaciones de movimiento simplificamos la respectiva masa y luego restamos, obtenemos:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r$$

La anterior expresión representa el movimiento relativo de un astro con respecto al otro. Como los movimientos se realizan en un plano, expresaremos nuestras descripciones en un sistema de coordenadas polares, la cual tiene una componente radial y otra angular, cada uno con un vector unitario asociado:

$$\hat{e}_r = \hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta$$

$$\hat{e}_\theta = -\hat{i} \sin \theta + \hat{j} \cos \theta$$

Los vectores unitarios en las direcciones cartesianas x , y son fijos en el espacio; en cambio, los vectores unitarios asociados a las variables radial y angular se mueven con la partícula.

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta} \hat{e}_r$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{e}_r)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$$

Si aplicamos esta expresión en coordenadas polares de la aceleración relativa de los dos cuerpos en el problema dinámico relativo, se obtienen dos ecuaciones, una radial y otra angular:

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

La segunda expresiones de las dos anteriores, es decir, la de la componente angular, se multiplica por r y se llega a la conclusión de que existe una constante de movimiento, la cual denotamos h y representa el momento angular por unidad de masa:

$$h = r^2 \dot{\theta} : \text{constante}$$

Teniéndose por tanto que el momento angular por unidad de masa se conserva durante el movimiento. La cantidad $h/2$ representa además la tasa temporal con la que el radio vector relativo barre un área en el plano orbital. En el caso solar, representa el área que por unidad de tiempo barre el radio vector heliocéntrico del planeta, confirmando la tercera ley de Kepler:

$$\Delta A / \Delta t = h/2 : \text{constante}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right)$$

$$u = \frac{1}{r},$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{u} \right) = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = hu^2 \frac{d}{d\theta} \left[hu^2 \left(-\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right) \right] = -hu^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

Si tenemos en cuenta además que:

$$-r\dot{\theta}^2 = -r \frac{h^2}{r^4} = -h^2 u^3, \quad -\frac{\mu}{r^2} = -\mu u^2$$

Entonces la parte radial de la ecuación de movimiento en el problema de los dos cuerpos es:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + u = \mu/h^2$$

La solución de esta ecuación se compone de dos términos, la solución de la ecuación homogénea, u_H , y la solución particular, u_P ; la suma de las dos nos da la solución general.

$$u_H = A \cos(\theta + \alpha) \qquad u_P = \mu/h^2$$

En donde A, α son dos constantes a determinar por las condiciones del problema. Por ejemplo, si $u_H = A$ cuando el ángulo es nulo, entonces tenemos que la otra constante es nula: $\alpha = 0$

Así, nuestra solución es igual a:

$$\frac{1}{r} = u = A \cos \theta + \mu/h^2$$

Sea e un número real no-negativo. Re-definamos nuestras constantes de modo tal que:

$$h^2/\mu = p, \quad A = ep$$

De este modo llegamos a que la solución de la dinámica Newtoniana al problema de los cuerpos es una cónica:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

En donde p es el semi-lado recto de la cónica, mientras que e es la excentricidad de la misma.

Si: $e=0$ tenemos un círculo de radio p .

Si: $0 < e < 1$ tenemos una elipse.

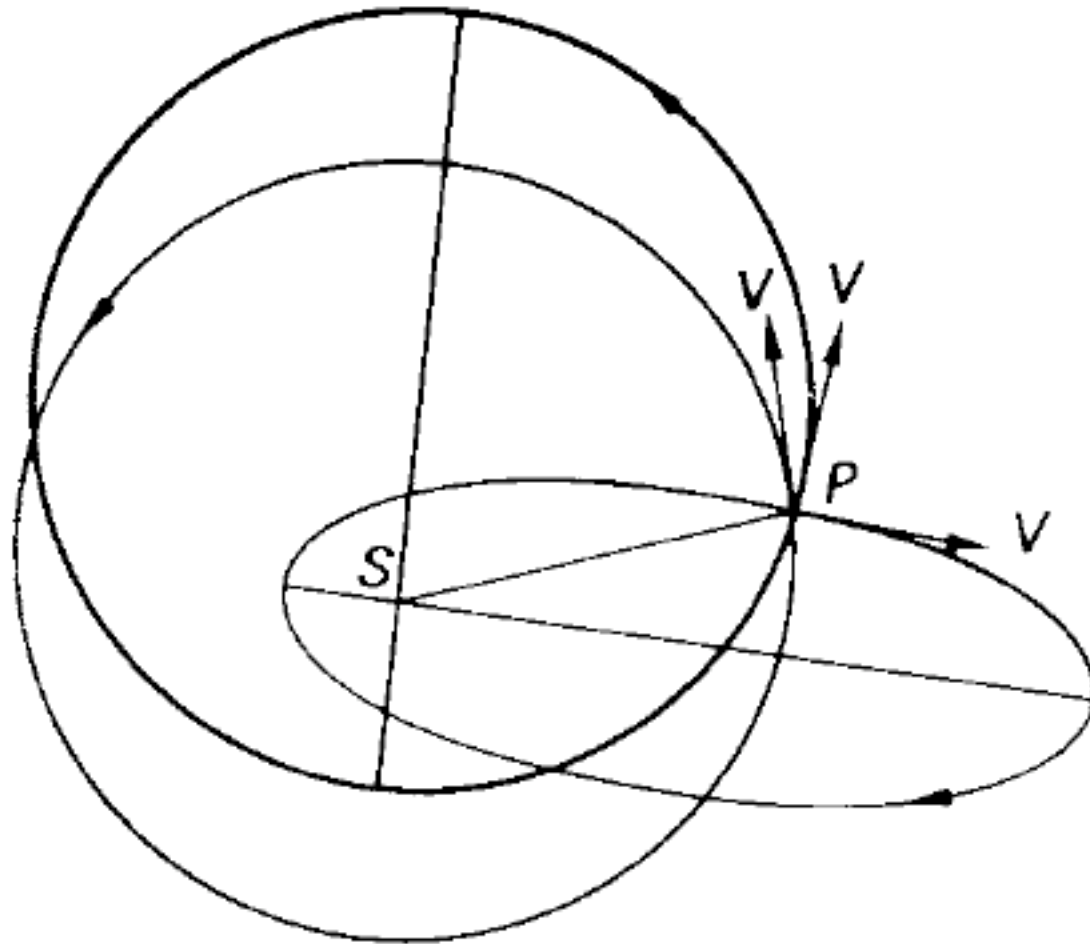
Si $e=1$ tenemos una parábola.

Si: $e > 1$ tenemos una hipérbola.

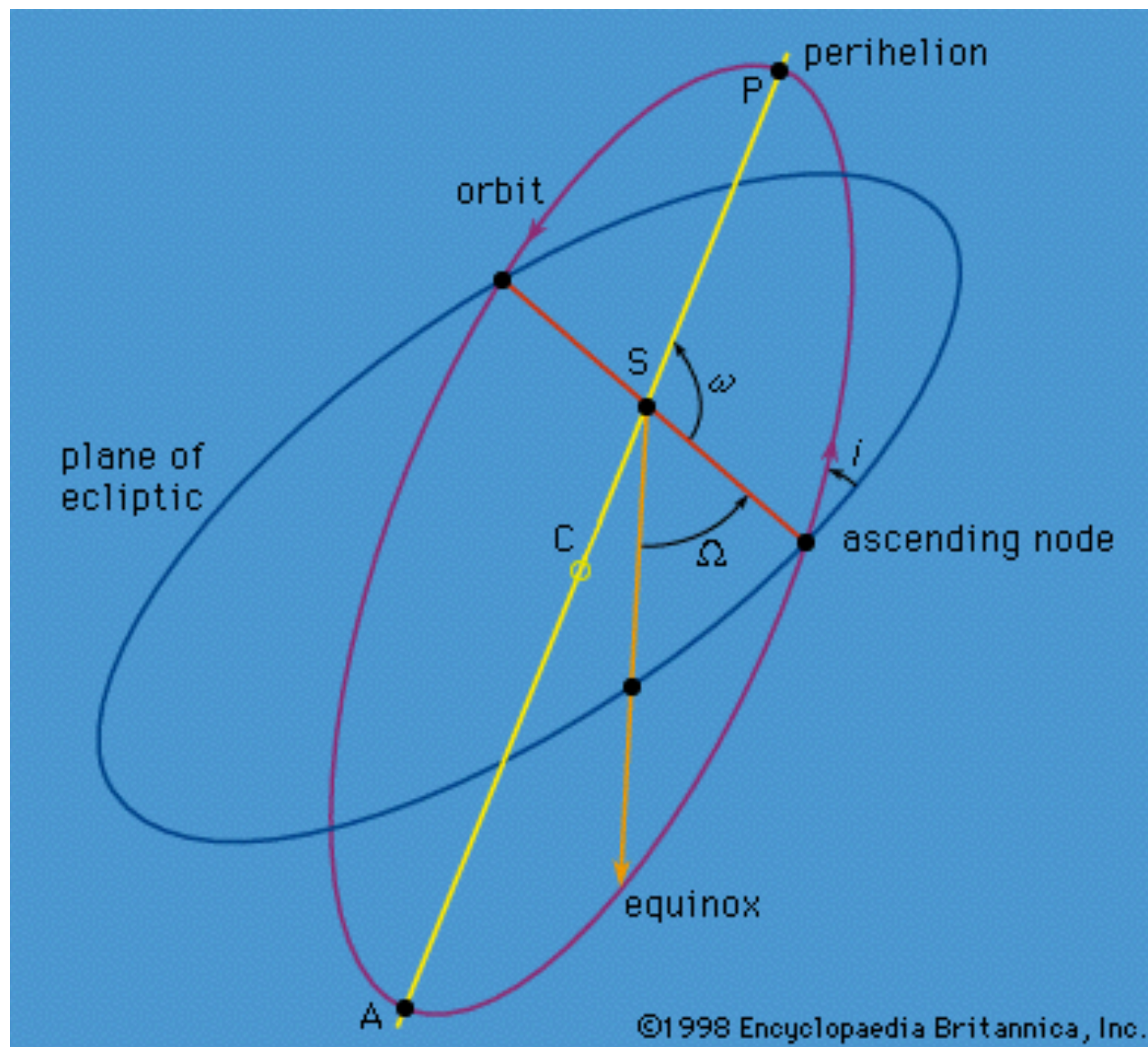
Constantes de movimiento en el problema de los dos cuerpos:

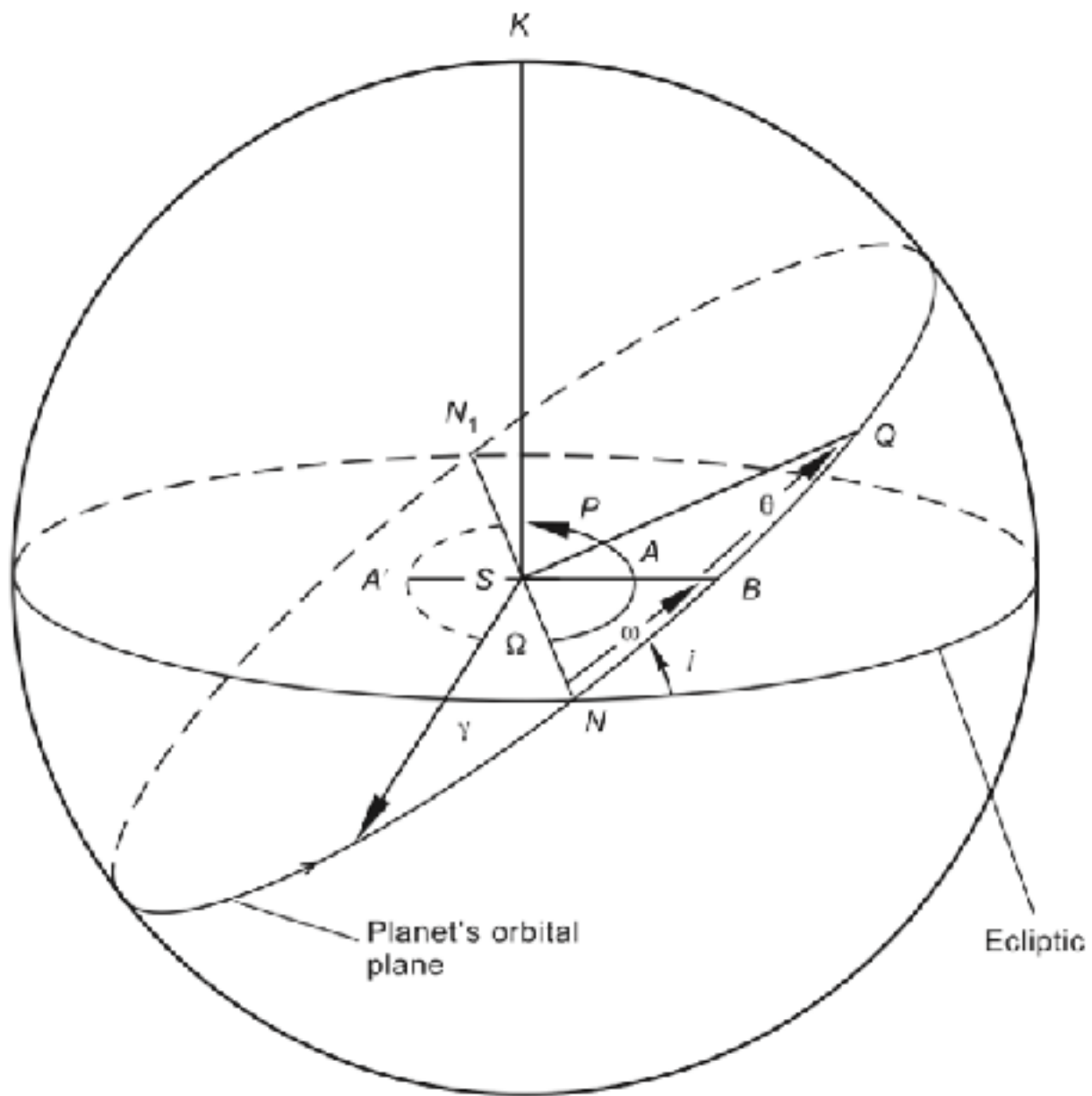
- 🌟 Momento angular por unidad de masa, h , el cual representa la mitad del área que recorre el radio vector (del cuerpo móvil) por unidad de tiempo.
- 🌟 Constante de la energía por unidad de masa. El extremo derecho es válido en el caso del movimiento elíptico.

$$E = \frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

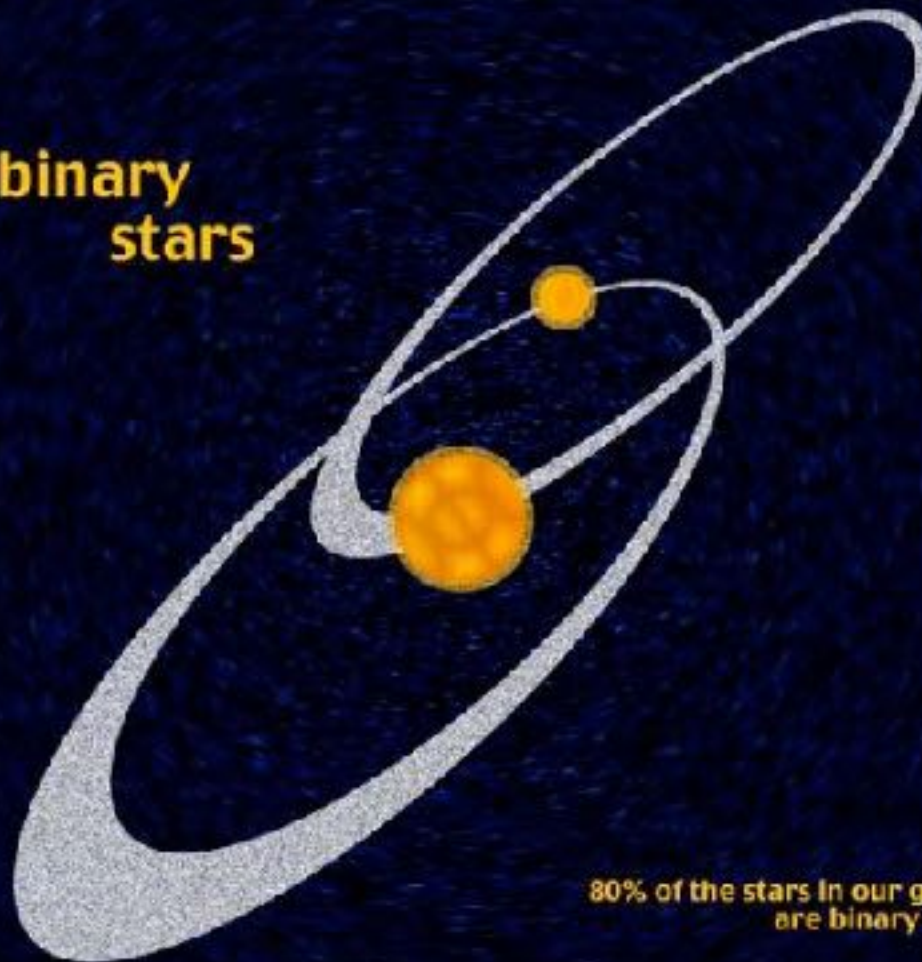


En el problema Newtoniano de los dos cuerpos, la solución del problema, es decir, la forma de la órbita, depende tanto de la energía como del momento angular. Como tenemos una cónica, dicha forma se puede expresar mediante el valor de la excentricidad e :



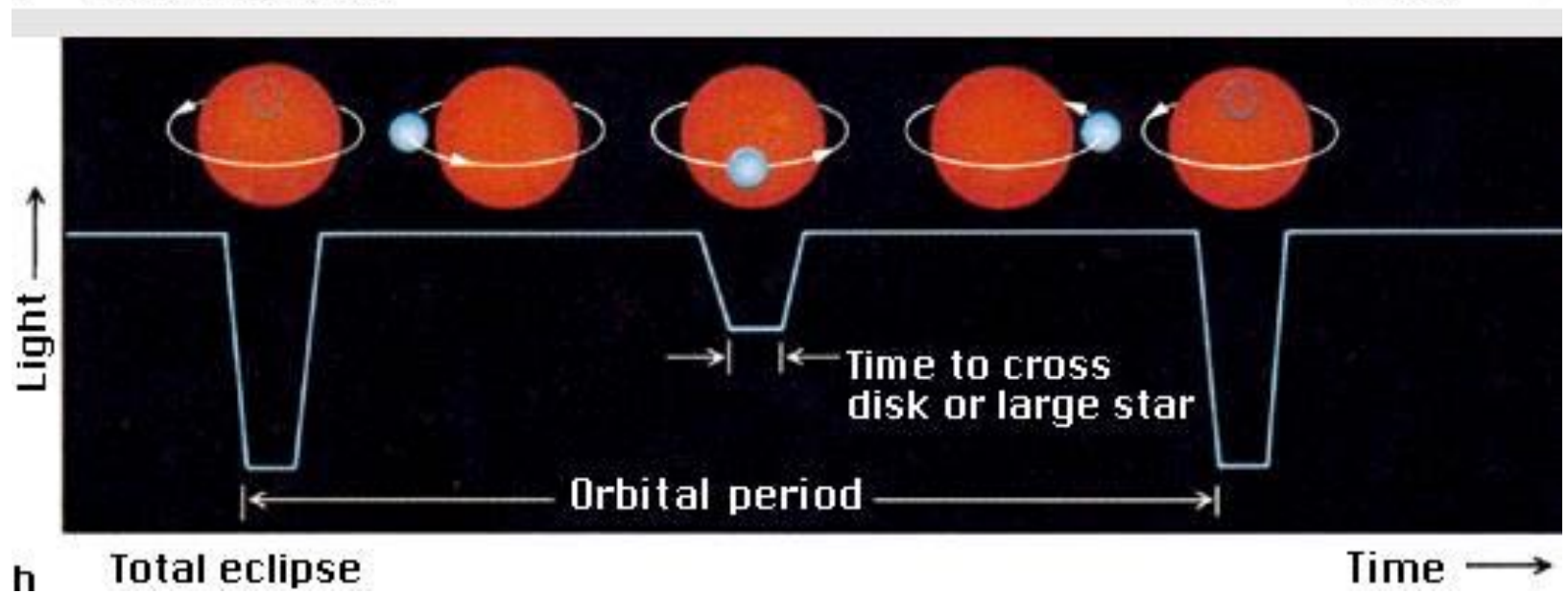
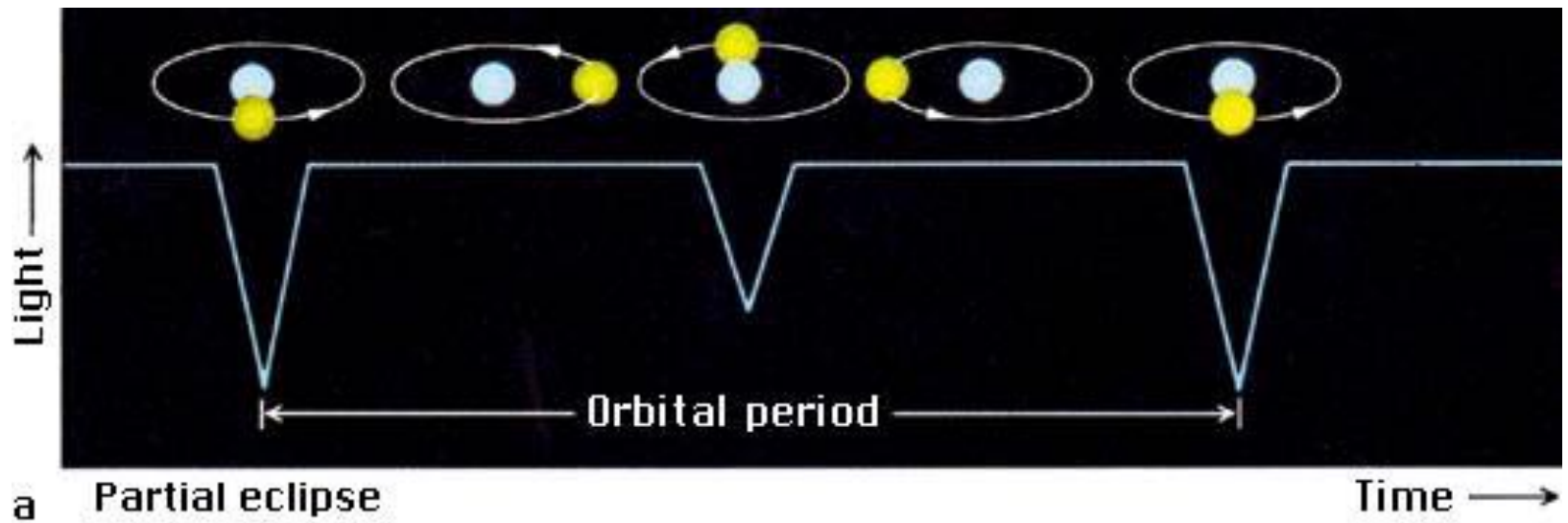


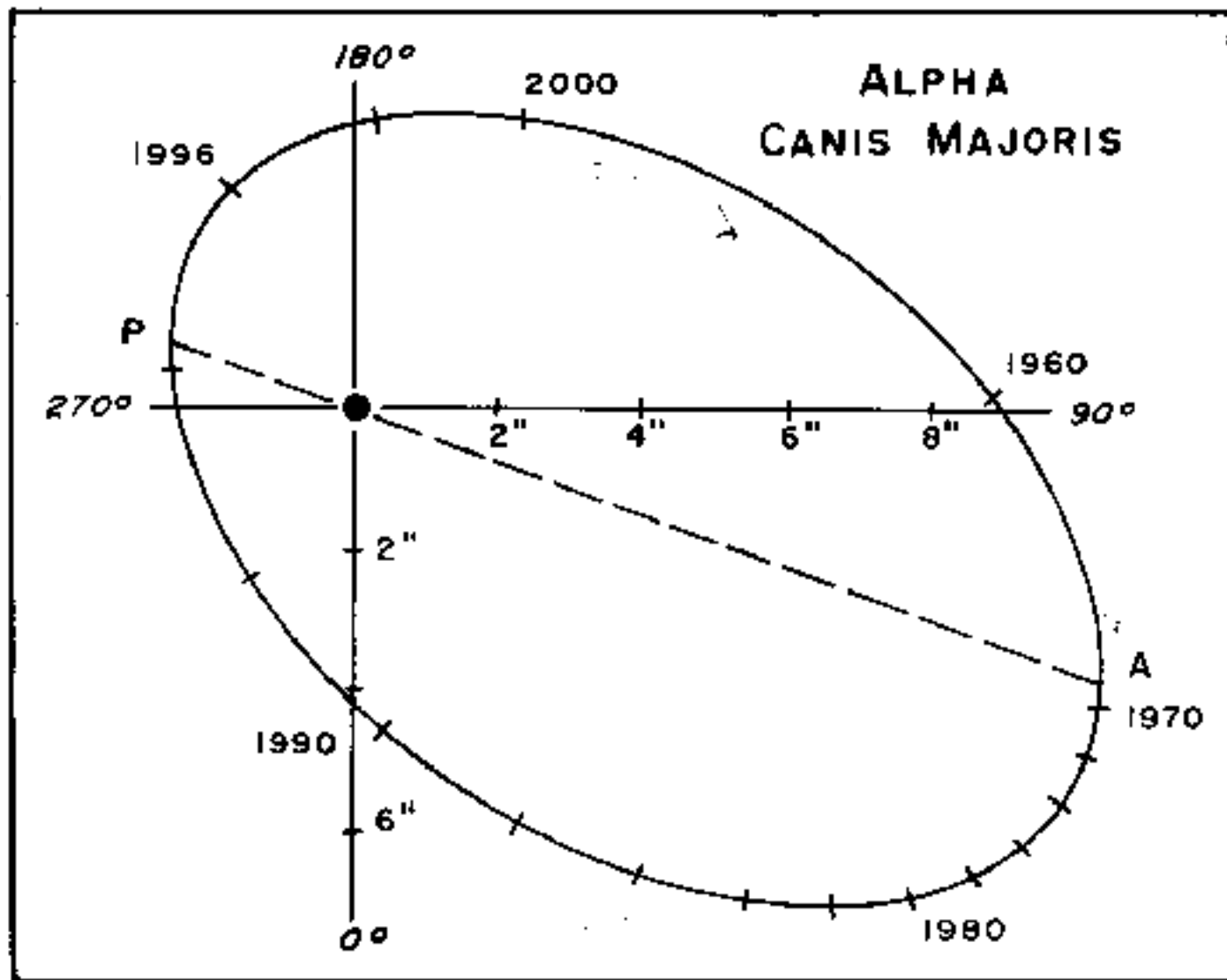
**binary
stars**



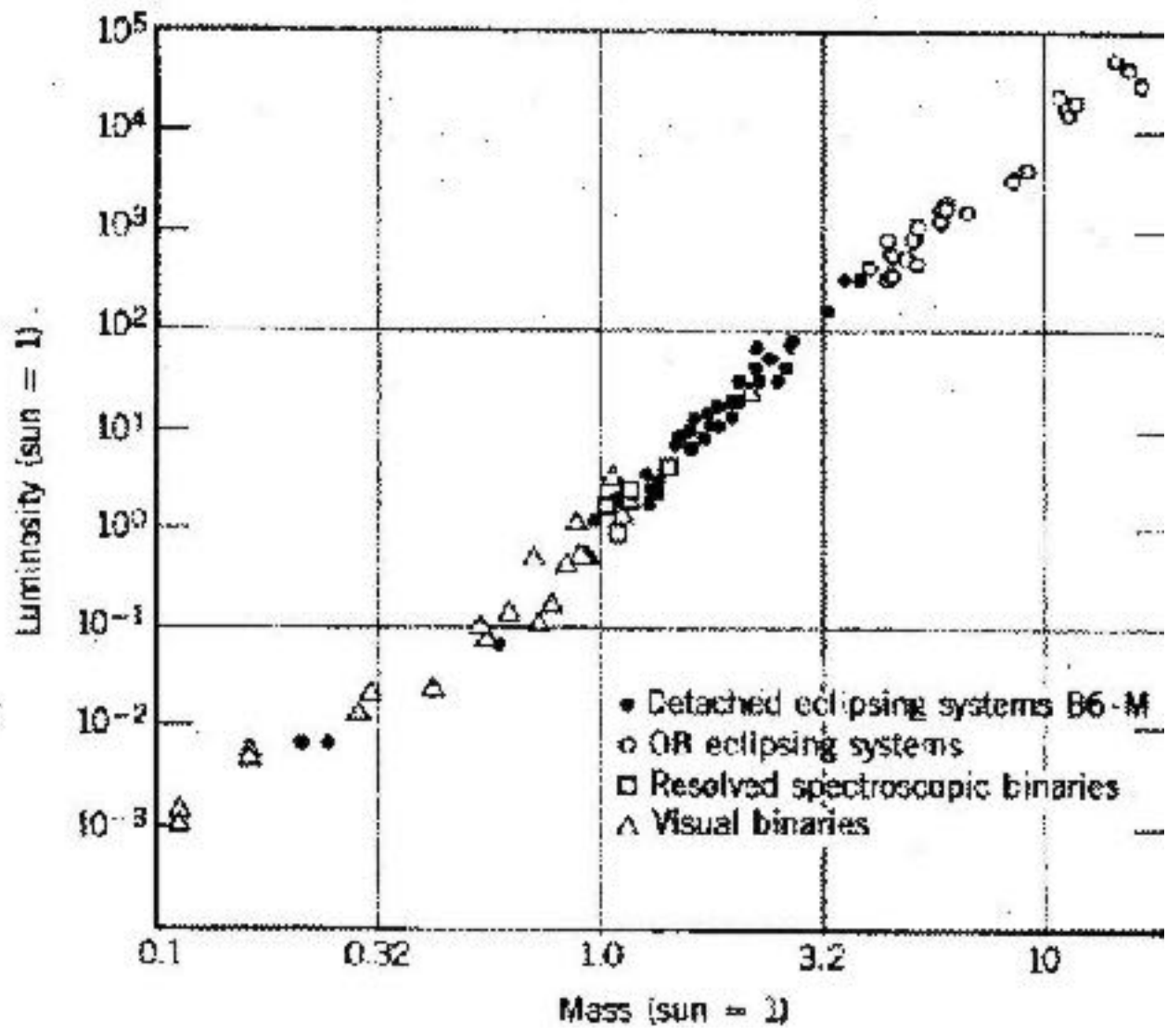
**80% of the stars in our galaxy
are binary stars**



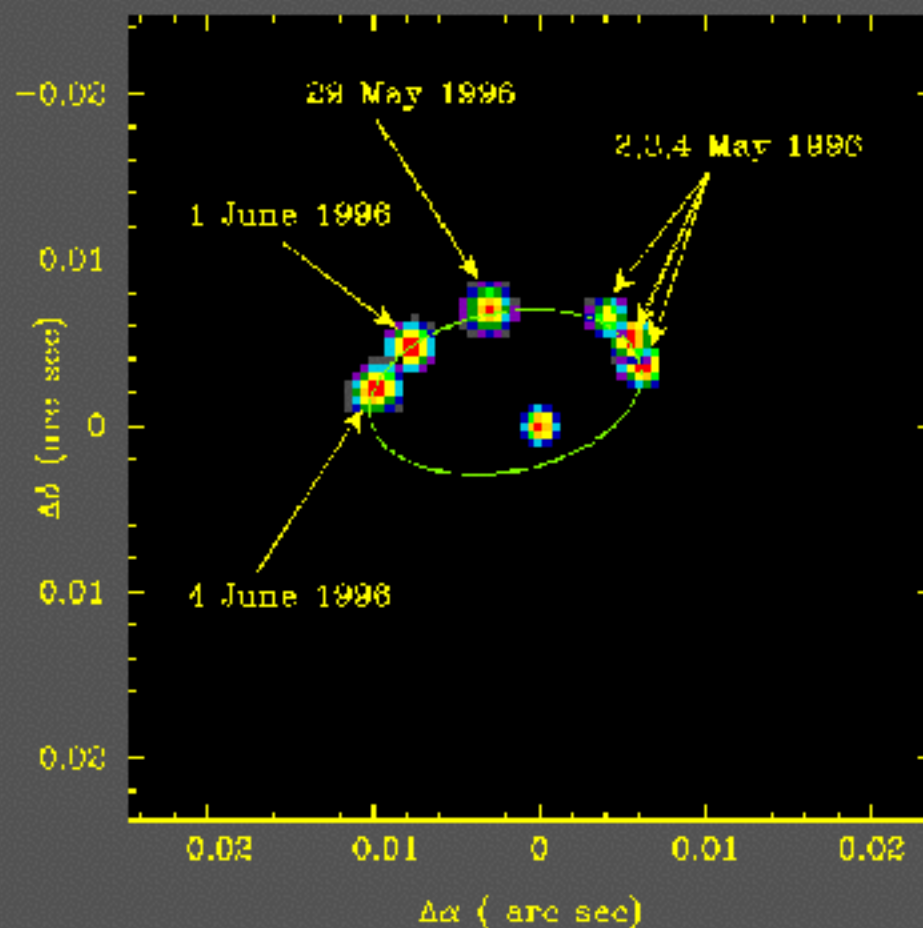




The mass - luminosity relation for stars, as determined from binary systems, in which the individual masses can be found.

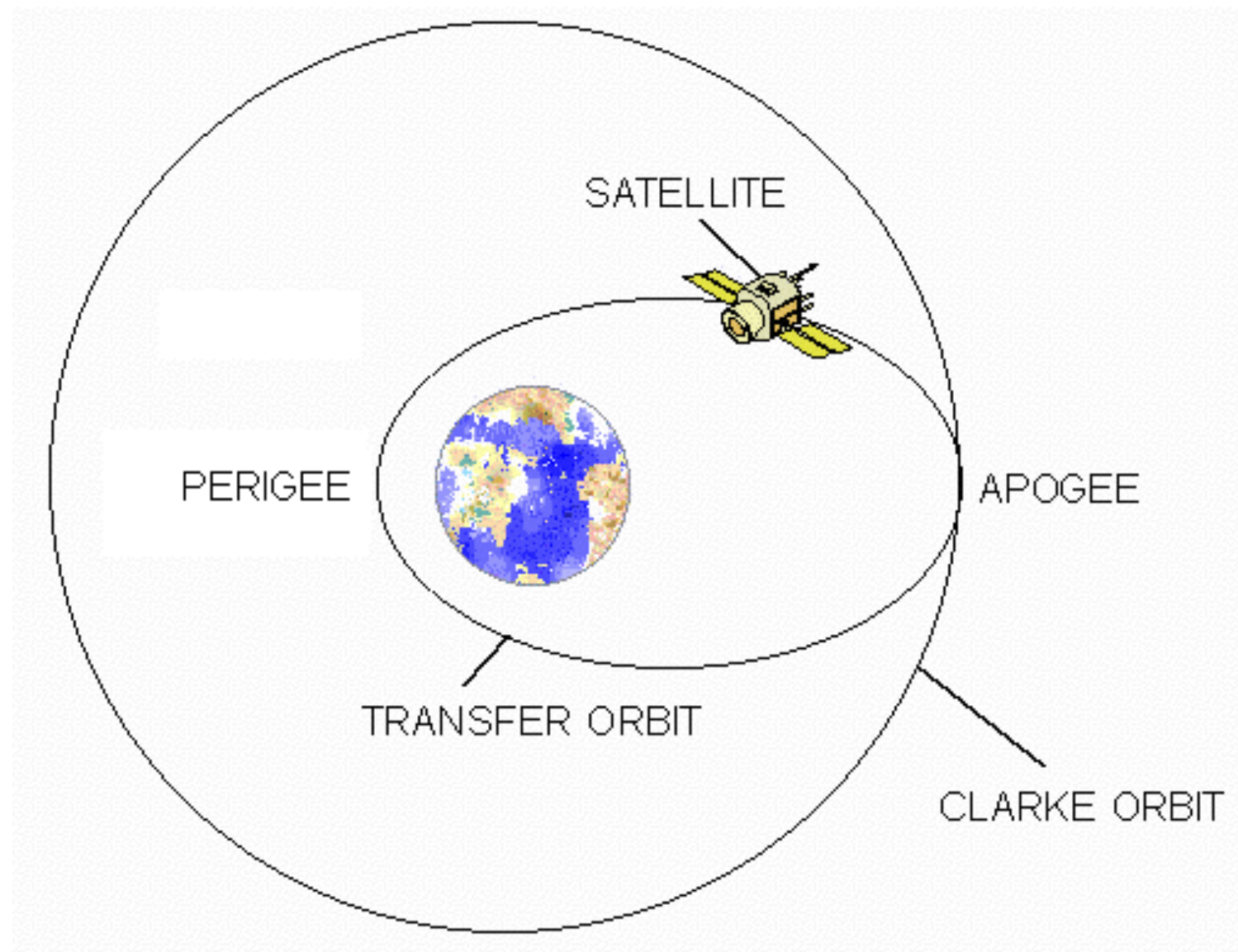


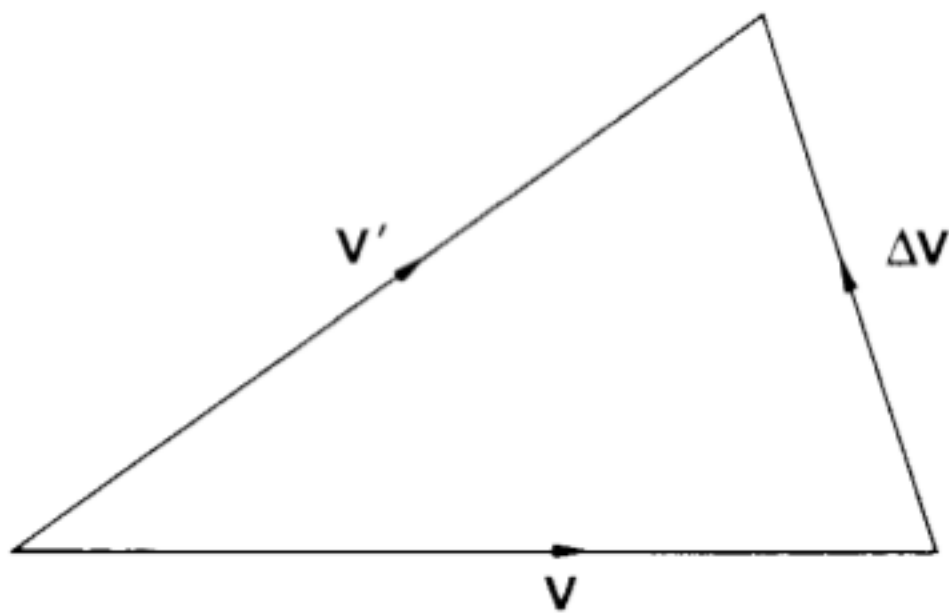
ζ^1 Ursae Majoris

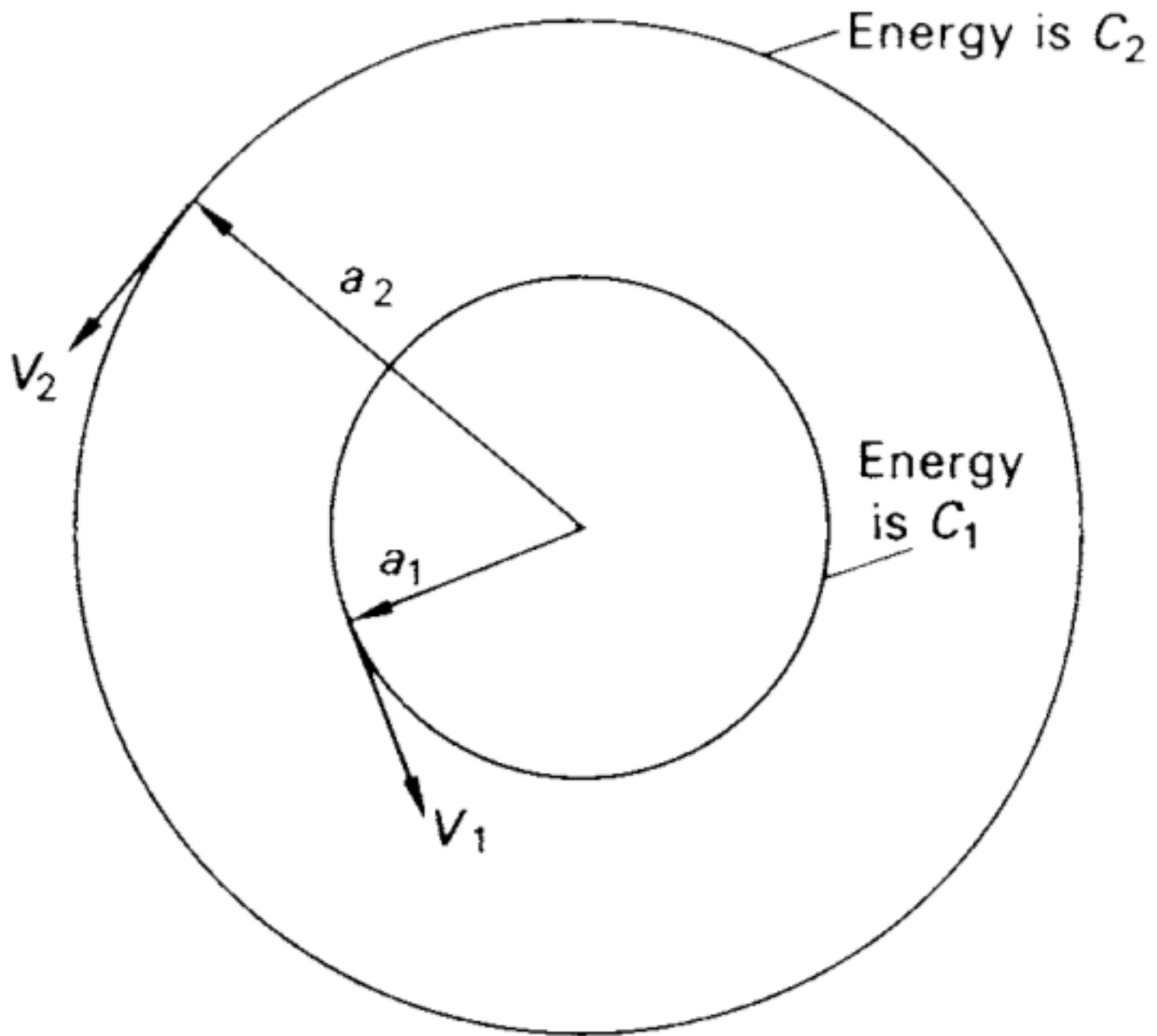






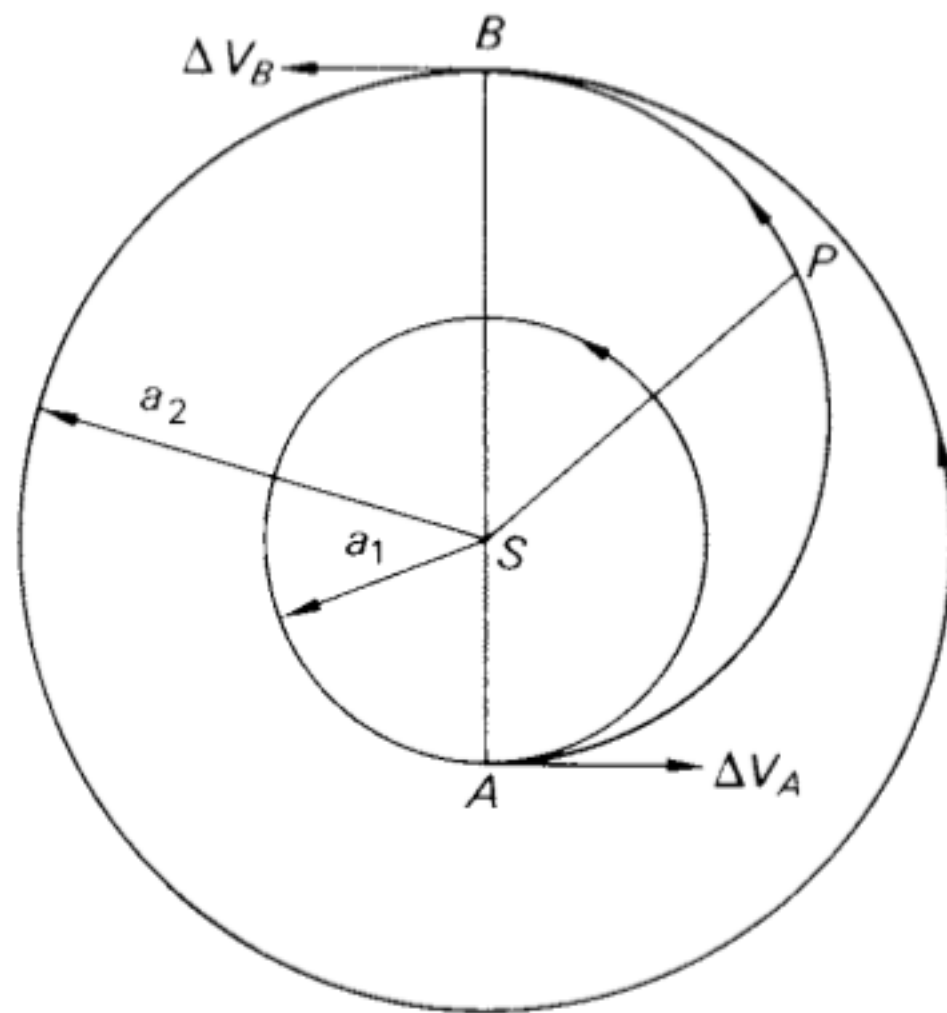






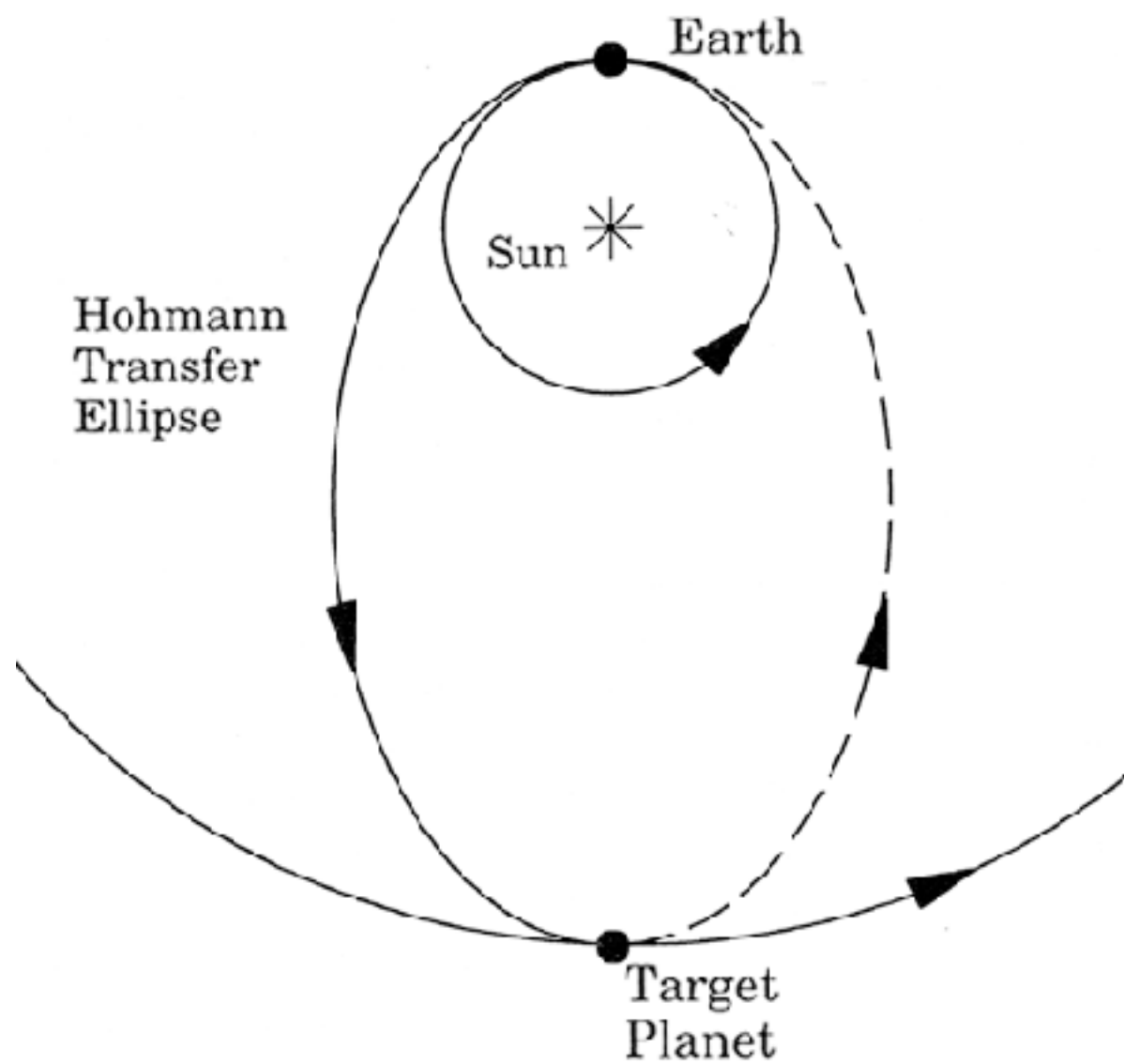
$$E_1 = -\frac{\mu}{a_1}$$

$$E_2 = -\frac{\mu}{a_2}$$



$$\Delta V_A = \left(\frac{\mu}{a_1}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{2a_2}{a_1 + a_2}\right)^{1/2} - 1 \right]$$

$$\Delta V_B = - \left(\frac{\mu}{a_1}\right)^{1/2} \left[1 - \left(\frac{2a_1}{a_1 + a_2}\right)^{1/2} \right]$$





looking southwest after sunset
December 1, 2008

