Relatividad General **Name:** Johan S. Méndez
2017 -2
Tercer Parcial
29/11/2017
Profesor Alexis Larrñaga

La métrica a estudiar será

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(1 - \frac{Q^2}{Mr}\right) \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{1}$$

Lo que se quiere estudiar en particular para esta métrica es:

- Potencial efectivo
- Estudiar el tipo de trayectorias posibles a través de consideraciones en el el potencial efectivo
- Encontrar ecuación de la trayectoria

En primer lugar se plantea el Lagrangiano a partir de la consideración de la métrica (**??**)

$$\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(1 - \frac{Q^2}{Mr}\right) \left(\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2\right)$$

Entonces se encuentran las ecuaciones de movimiento. Se evidencia que el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, entonces se utilizan las ecuaciones de Euler Lagrange, en primer lugar

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial\tau}\left(-2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}\right) &= 0 \\
\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} &= E \quad \text{(cte)}
\end{aligned}$$

Por tanto, la energía es una constante de movimiento, se tiene por lo tanto

$$\dot{t}^2 = \frac{E}{(1 - 2M/r)^2} \tag{2}$$

Para seguir desarrollando el problema se estudia la ecuación de movimiento de la variable θ

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}\right) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} \\
\frac{\partial}{\partial\tau}\left(2r^2\left(1-\frac{Q^2}{Mr}\right)\dot{\theta}\right) &= 2r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 \\
\frac{\partial}{\partial\tau}\left(r^2\left(1-\frac{Q^2}{Mr}\right)\dot{\theta}\right) &= r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2
\end{aligned}
$$

Sí se impone una condición inicial $\theta(0) = \pi/2$ y $\dot{\theta}0$, se tiene que el cuerpo se está moviendo inicialmente en el plano ecuatorial. Por esta razón siempre se puede elegir los ejes coordenados con el eje normal z al plano de movimiento, entonces se asume que $\theta = \pi/2$

Ahora se estudia la variable ϕ, como no se evidencia explicitamente en el Lagrangiano debe conservarse el momento angular

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\right) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \\
\frac{\partial}{\partial\tau}\left(2r^2\left(1-\frac{Q^2}{Mr}\right)\sin^2\theta\dot{\phi}\right) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial\tau}\left(r^2\left(1-\frac{Q^2}{Mr}\right)\sin^2\theta\dot{\phi}\right) &= l \quad (\text{cte})
\end{aligned}
$$

Entonces se tiene

$$
\dot{\phi}^2 = \frac{l^2}{r^4(1-Q^2/Mr)^2} \tag{3}
$$

Entonces el lagraniano toma la siguiente forma, utilizando (**??**), (**??**).

$$
\mathcal{L} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}E + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + \left(1-\frac{Q^2}{Mr}\right)^{-1}\frac{l^2}{r^2}
$$

Del lagrangiano se tienen las siguientes condiciones

$$
\mathcal{L} = -c^2\begin{cases}1 & \text{si son partículas con masa}\\ 0 & \text{si son particulas sin masa}\end{cases} = -c^2\delta \tag{4}
$$

Entonces se tiene que si se despeja la energía se llega a

$$
E = \dot{r}^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[\delta + \left(1-\frac{Q^2}{Mr}\right)^{-1}\frac{l^2}{r^2}\right] \tag{5}
$$

Desde aca se obtiene el potencial efectivo

$$V_{eff} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[\delta + \left(1 - \frac{Q^2}{Mr}\right)^{-1} \frac{l^2}{r^2}\right] \tag{6}$$

A continuación el potencial efectivo para partículas

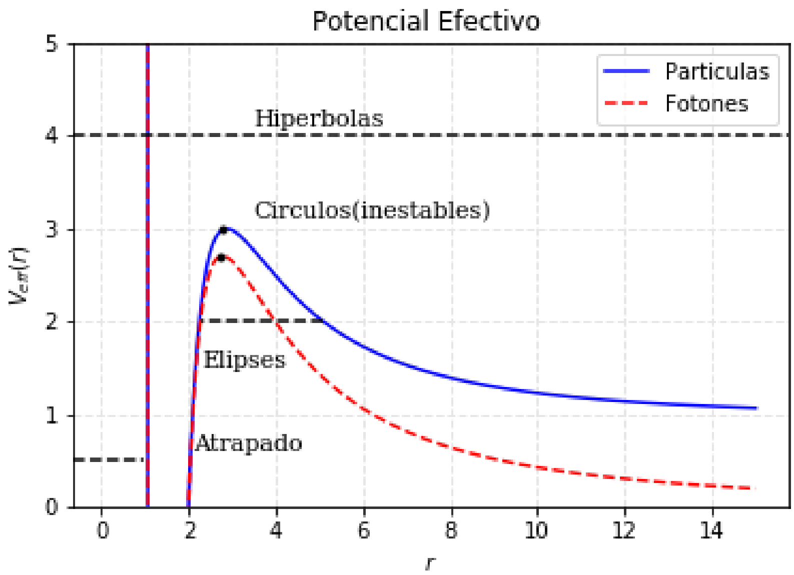

Figura 1: Resultado de graficar el potencial efectivo en función de r, está dada con los siguientes parámetros. $M = 1$, $Q = 1$, $l = 6{,}9$

Para poder deducir la ecuación de la trayectoria ($r = r(\phi)$) se hace el acostumbrado cambio de variable $u = 1/r$, por tanto

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{d\tau} \rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{d\phi}\dot{\phi} \rightarrow \frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} \rightarrow \dot{r}^2 = \dot{\phi}^2 \frac{dr}{d\phi}$$

$$\dot{r}^2 = \frac{l^2}{r^4(1 - Q^2/Mr)^2}\frac{dr}{d\phi}, \qquad \frac{dr}{d\phi} = \frac{d(1/u)}{d\phi} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\phi}$$

Luego de esto se puede reemplazar en (**??**) y obtener

$$E = \frac{Ml^2}{M - Q^2u}\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + \left[(1 - 2Mu)\delta + \frac{Ml^2u^2}{M - Q^2u} - \frac{2M^2l^2u^3}{M - Q^2u}\right]$$

Pongamos por facilidad en la notación $du/d\phi = u_\phi$

$$E = \frac{Ml^2}{M - Q^2u}u_\phi^2 + \left[(1 - 2Mu)\delta + \frac{Ml^2u^2}{M - Q^2u} - \frac{2M^2l^2u^3}{M - Q^2u}\right]$$

Se consigue la forma de la ecuación diferencial con algunos pasos algebráicos

$$u_\phi^2 + \left(1 + \frac{2Q^2\delta}{l^2}\right)u^2 = \frac{E-\delta}{l^2} + \left(\frac{(2M^2+Q^2)\delta}{Ml^2} - \frac{Q^2E}{Ml^2}\right)u + 2Mu^3$$

Derivando respecto de ϕ se obtiene

$$\begin{aligned}
2u_\phi u_{\phi\phi} + 2\left(1 + \frac{2Q^2\delta}{l^2}\right)uu_\phi &= \left(\frac{(2M^2+Q^2)\delta}{Ml^2} - \frac{Q^2E}{Ml^2}\right)u_\phi + 6Mu^2u_\phi \\
u_\phi\left(u_{\phi\phi} + \left(1 + \frac{2Q^2\delta}{l^2}\right)u - \left(\frac{(2M^2+Q^2)\delta}{2Ml^2} - \frac{Q^2E}{2Ml^2}\right) - 3Mu^2\right) &= 0
\end{aligned}$$

Desde acá se tiene que $u_\phi = 0$ lo que nos lleva a $dr/d\phi = 0 \longrightarrow r = \text{cte}$, es decir que las trayectorias podrían tomar órbitas circulares, para las otras posibilidades se debe resolver la ecuación diferencial

$$u_{\phi\phi} - 3Mu^2 + \left(1 + \frac{2Q^2\delta}{l^2}\right)u = \left(\frac{(2M^2+Q^2)\delta}{2Ml^2} - \frac{Q^2E}{2Ml^2}\right) \tag{7}$$

Se hace entonces los dos posibles casos, dada la definición de δ (**??**)

si $\delta = 0$

$$u_{\phi\phi} - 3Mu^2 + u = -\frac{Q^2E}{2Ml^2} \tag{8}$$

Ahora si $\delta = 1$

$$u_{\phi\phi} - 3Mu^2 + \left(1 + \frac{2Q^2}{l^2}\right)u = \left(\frac{(2M^2+Q^2)}{2Ml^2} - \frac{Q^2E}{2Ml^2}\right) \tag{9}$$