Parcial 2 Señales y Sistemas Johan Sebastian Mendieta Dilbert

① Para el sistema Masa-Resorte-Amortiguador se busca la función de transferencia. La función de transferencia es la relación entre la salida y la entrada, que en este caso son fuerzas. Esto se modela por medio de la Segunda Ley de Newton.

Para ello hay que identificar las fuerzas que actúan sobre la masa, que son:

- Fuerza externa (Entrada): $F_E(t)$. Actúa en la dirección positiva de y.
- Fuerza del resorte: Se opone al desplazamiento y sigue la Ley de Hooke $F_k(t) = -k\, y(t)$
- Fuerza del amortiguador: Se opone a la velocidad y está descrito por $F_c(t) = -c \dfrac{dy(t)}{dt}$

Se sabe que por la Segunda Ley de Newton se tiene que $\Sigma F = m \dfrac{d^2 y(t)}{dt^2}$

y reemplazando las fuerzas se tiene que:

$$F_E(t) + F_k(t) + F_c(t) = m \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2}$$

Reorganizando y reemplazando se tiene:

$$m \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial y(t)}{\partial t} + k\, y(t) = F_E(t)$$

Ahora se aplica la Transformada de Laplace asumiendo condiciones iniciales cero ($y(0)=0$, $y'(0)=0$)

$$\mathcal{L}\left\{m \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2}\right\} = m s^2 Y(s) \; ; \; \mathcal{L}\left\{c \frac{\partial y(t)}{\partial t}\right\} = c s Y(s) \; ;$$

$$\mathcal{L}\{k\, y(t)\} = k Y(s) \; ; \; \mathcal{L}\{F_E(t)\} = F_E(s)$$

Al reemplazar se tiene la ecuación

$$m s^2 Y(s) + c s Y(s) + k Y(s) = F_E(s)$$

Como se busca la función de transferencia se busca hacer $H(s) = \dfrac{Y(s)}{F_E(s)}$

Entonces: $Y(s)[m s^2 + c s + k] = F_E(s)$

$$\frac{Y(s)}{F_E(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = H(s) \quad \therefore a_0 = k;\ a_1 = c;\ a_2 = m$$

Ahora se busca llevar a $H(s)$ a su forma canónica: $\left(H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\right)$

$$H(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Entonces: $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$;

$K\omega_n^2 = \frac{1}{m} \Rightarrow K\frac{k}{m} = \frac{1}{m} \Rightarrow K = \frac{1}{k}$; $\xi = \frac{c}{m}\frac{1}{2\omega_n}$

$$\Rightarrow \xi = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}} \Rightarrow \xi = \frac{c}{2\sqrt{km}}$$

Ahora se hace el mismo análisis para la red eléctrica:

Se realiza LVK en las 2 mallas:

- Malla 1: $v_i(t) - L\frac{di_1(t)}{dt} - v_c(t) = 0 \qquad \therefore v_c(t) = \frac{1}{C}\int i_c(t)\,dt$

$\therefore i_c(t) = i_1(t) - i_2(t)$

$$\Rightarrow v_i(t) = L\frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int [i_1(t) - i_2(t)]\,dt$$

- Malla 2: $v_c(t) - Ri_2(t) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{C}\int [i_1(t) - i_2(t)]\,dt = Ri_2(t)$$

Se tiene que la salida del sistema está dada por la tensión en el resistor ($v_0(t) = Ri_2(t)$)

Se aplica la Transformada de Laplace a todo lo anterior (condiciones iniciales cero):

$$\mathcal{L}\{\text{Malla 1}\} = \mathcal{L}\left\{v_i(t) = L\frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int [i_1(t) - i_2(t)]\,dt\right\}$$

$$\Rightarrow V_i(s) = sLI_1(s) + \frac{1}{sC}[I_1(s) - I_2(s)] \quad \text{(Malla 1)}$$

$$\mathcal{L}\{\text{Malla 2}\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{C}\int [i_1(t) - i_2(t)]\,dt = Ri_2(t)\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{sC}[I_1(s) - I_2(s)] = RI_2(s) \quad \text{(Malla 2)}$$

$$\mathcal{L}\{v_0(t)\} = \mathcal{L}\{Ri_2(t)\} = RI_2(s) = V_0(s) \Rightarrow I_2(s) = \frac{V_0(s)}{R}$$

De la ecuación de la malla 2 se despeja $I_1(s)$:

$$I_1(s) - I_2(s) = sCR\,I_2(s)$$

$$\Rightarrow I_1(s) = I_2(s)(1+sCR)$$

Se sustituye este resultado en la ecuación de la malla 1:

$$V_i(s) = sL\left[I_2(s)(1+sCR)\right] + \frac{1}{sC}\left[I_2(s)(1+sCR) - I_2(s)\right]$$

$$V_i(s) = I_2(s)\left[sL(1+sCR) + \frac{1}{sC}sCR\right]$$

$$\Rightarrow V_i(s) = I_2(s)\left[sL + s^2LCR + R\right]$$

Se sustituye $I_2(s) = \frac{V_0(s)}{R} \Rightarrow V_i(s) = \left(\frac{V_0(s)}{R}\right)\left[s^2LCR + sL + R\right]$

Se busca la función de transferencia $H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)}$

$$\Rightarrow \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = H(s) = \frac{R}{s^2LCR + sL + R} \quad \therefore a_0 = R,\ a_1 = L;\ a_2 = LCR$$

Se lleva a su forma canónica:

$$H(s) = \frac{\frac{R}{LCR}}{s^2 + \frac{L}{LCR}s + \frac{R}{LCR}}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \quad \text{Entonces: } \omega_n^2 = \frac{1}{LC};\ K = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{R};\ \xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}}$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{L}{2\sqrt{LCR^2}} = \frac{L}{2R\sqrt{LC}}$$

Entonces la equivalencia entre el sistema eléctrico y el mecánico se da al comparar la forma canónica de cada función de transferencia:

$$\frac{k}{m} \cong \frac{1}{LC};\quad \frac{c}{m} \cong \frac{1}{RC}$$

Estas equivalencias implican que:
- $m \cong L$ (Masa análoga a la inductancia)
- $c \cong R$ (Coeficiente de amortiguamiento análogo al resistor)
- $k \cong \frac{1}{C}$ (Constante del resorte análogo a la capacitancia)

② El objetivo de la modulación en banda lateral única (SSB) es transmitir una señal de información m(t) de la manera más eficiente posible. Esta modulación parte de la modulación de amplitud con doble banda lateral y portadora suprimida (DSB-SC), cuya expresión en el tiempo es:

$s_{DSB}(t) = m(t)\cos(2\pi \omega_c t)$ Donde ω_c es la frecuencia de la portadora.

Al aplicar la Transformada de Fourier:

$$S_{DSB}(\omega) = \frac{1}{2}\left[M(\omega-\omega_c) + M(\omega+\omega_c)\right]$$

Esta ecuación revela la redundancia al tener el espectro del mensaje $M(\omega)$ duplicado, centrado en $+\omega_c$ (Banda superior - USB) y en $-\omega_c$ (Banda inferior - LSB). Ambas bandas tienen la misma información, entonces la modulación SSB elimina esta redundancia al transmitir sólo una de las dos bandas, logrando reducir el ancho de banda necesario y concentrar la potencia de transmisión **en** la información útil.

- Filtrado en el Dominio de la Frecuencia:

Este método es un enfoque teórico que aprovecha la FT para la creación de filtros perfectos, que tienen una utilidad en la simulación y el entendimiento conceptual.

A. Proceso de Modulación:

1. Transformación al Dominio de la Frecuencia: $M(\omega) = F\{m(t)\}$

2. Generación del espectro de Doble Banda Lateral (DSB): $S_{DSB}(\omega) = \frac{1}{2}\left[M(\omega-\omega_c) + M(\omega+\omega_c)\right]$

3. Diseño de una máscara de filtrado $H(\omega)$ que define las frecuencias que se conservan (1) y las que se eliminan (0)

3.1. Para USB se usa un filtro pasa altas y elimina todo debajo de ω_c:

$$H_{USB}(\omega) = 1 - \left[u(\omega+\omega_c) - u(\omega-\omega_c)\right] = u(\omega-\omega_c) + u(-\omega-\omega_c)$$

Esta función vale 1 para $|\omega| > \omega_c$ y 0 en cualquier otro caso.

3.2. Para LSB se usa un filtro pasa bajas y elimina todo encima de ω_c:

$$H_{LSB}(\omega) = u(\omega+\omega_c) - u(\omega-\omega_c)$$

Esta función vale 1 para $|\omega| < \omega_c$ y 0 en caso contrario.

4. Aplicación del filtro: Se filtra el espectro del DSB por medio del siguiente diagrama:

$$S_{DSB}(\omega) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow S_{SSB}(\omega)$$

Que matemáticamente es: $S_{SSB}(\omega) = S_{DSB}(\omega)\,H(\omega)$ y este espectro contiene únicamente la banda lateral deseada.

5. Retorno al dominio del tiempo: Se aplica $s_{SSB}(t) = F^{-1}\{S_{SSB}(\omega)\}$ para regresar al dominio del tiempo.

B. Proceso de Demodulación:

1. Multiplicación coherente: $s_{SSB}(t)$ se multiplica por la portadora local $2\cos(2\pi\omega_c t)$

$$v(t) = s_{SSB}(t) \cdot 2\cos(2\pi\omega_c t)$$

Usando la identidad de Euler $(2\cos(\theta) = e^{j\theta} + e^{-j\theta})$ nos muestra que en el dominio de la frecuencia ocurre un doble desplazamiento:

$$V(\omega) = F\{v(t)\} = S_{SSB}(\omega - \omega_c) + S_{SSB}(\omega + \omega_c)$$

Esta operación traslada el espectro de la banda lateral recibida a dos nuevas posiciones: una copia en banda base (centrada en 0 Hz) que es el mensaje original, y otra en alta frecuencia (centrada en $\pm 2\omega_c$)

2. Filtrado pasa bajas ideal: Se busca aislar la componente en banda base, teniendo un ancho de banda del mensaje W, el filtro se define como:

$$H_{LPF}(\omega) = \mathrm{rect}_W\left(\frac{\omega}{2W}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq W \\ 0 & \text{si } |\omega| > W \end{cases}$$

En la práctica se suele usar una frecuencia de corte ligeramente mayor a W.

3. Recuperación del espectro del mensaje: Se filtra el espectro de tal forma que:

$$V(\omega) \longrightarrow \boxed{H_{LPF}(\omega)} \longrightarrow M_{demod}(\omega)$$

Matemáticamente: $M_{demod}(\omega) = V(\omega)\,H_{LPF}(\omega)$

4. Retorno al dominio del tiempo: $F^{-1}\{M_{demod}(\omega)\} = m_{demod}(t)$

- Filtrado en el Dominio del Tiempo (Filtros IIR):

Este método simula la implementación de un sistema SSB con componentes analógicos o sus equivalentes digitales directos (Filtros IIR/FIR).

A. Proceso de Modulación:

1. Generación de la DSB: Idéntico al método anterior:

$s_{DSB}(t) = m(t)\, 2\cos(2\pi \omega_c t)$

2. Diseño de un filtro pasa bandas (BPF) realizable: Debido a que las dos bandas laterales son adyacentes, con una separación idealmente nula en ω_c, el filtro debe tener una pendiente muy pronunciada para separar las bandas.

En este caso se utilizan filtros de Respuesta Impulsional Infinita (IIR) de orden alto como los Butterworth o Chevyshev.

La función de transferencia de un filtro IIR digital es:

$$H(j\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\omega}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-jk\omega}}$$

Con a_k y b_k como los coeficientes del filtro.

Un N mayor produce una pendiente más pronunciada

Esta función de transferencia en términos de la Transformada Z puede ser:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Y este modelo es muy utilizado para los filtros digitales

3. Se filtra la señal $s_{DSB}(t)$ por el filtro digital diseñado. En el dominio del tiempo esto corresponde a una convolución, pero al ser un sistema digital se calcula mediante la ecuación en diferencias:

$$s_{SSB}[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, s_{DSB}[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, s_{SSB}[n-k]$$

Esta operación la realiza la función lfilter de la librería SciPy.

El resultado es una aproximación de la señal SSB ideal, pero se filtrará una pequeña porción de la banda no deseada.

B. Proceso de Demodulación:

El proceso es similar al anterior, pero con filtros IIR.

1. Multiplicación coherente: $v(t) = s_{SSB}(t)\, 2\cos(2\pi \omega_c t)$ y como antes se genera una componente en banda base y otra en $\pm 2\omega_c$

2. Diseño y aplicación de un LPF realizable: Debido a que 0Hz y $2\omega_c$ no están extremadamente cerca, el orden del filtro no tiene que ser tan alto.

Se diseña el filtro IIR con el modelo anterior y se le ponen las frecuencias de corte tal que: $\omega_{corte} > W$ y $\omega_{corte} << 2\omega_c$

3. Recuperación del mensaje: Esto se logra mediante la convolución, que en tiempo discreto es la ecuación de diferencias entre $v(t)$ y el filtro, dándonos lo siguiente:

$$m_{demod}[n] = \sum_{k=0}^{M} b_{LPF_k}\, v[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_{LPF_k}\, m_{demod}[n-k]$$