Parcial 1 Señales y Sistemas Johan Sebastian Mendieta Dilbert

① Se tiene que $x(t) = 20\,sen(7t - \frac{\pi}{2}) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$ debe ser digitalizada por un conversor con entradas de entre -3.3 y 5 V, siendo un sistema de 5 bits.

Por propiedades trigonométricas se tiene que $20\,sen(7t - \frac{\pi}{2}) = -20\cos(7t)$.
Esto se hace para facilitar el análisis.

$x(t) = -20\cos(7t) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$

Se sacan los valores de ω, F, T y A para cada coseno y poder realizar un análisis adecuado

$\omega_1 = 7$	$T_1 = \frac{2\pi}{7}$	$F_1 = \frac{7}{2\pi}$	$A_1 = -20$	$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q}$
$\omega_2 = 5$	$T_2 = \frac{2\pi}{5}$	$F_2 = \frac{5}{2\pi}$	$A_2 = -3$	$\frac{\omega_1}{\omega_3} \in \mathbb{Q}$
$\omega_3 = 10$	$T_3 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$	$F_3 = \frac{5}{\pi}$	$A_3 = 2$	$\frac{\omega_2}{\omega_3} \in \mathbb{Q}$

Se halla el M.C.M. de los periodos para saber el tiempo que tardan en encontrarse los tres cosenos ($T_0 = .3s$)

Ahora, el valor máximo y mínimo puede aproximarse mediante la suma de la amplitud de los cosenos.

$x_{max} \approx |A_1| + |A_2| + |A_3| = 20 + 3 + 2 = 25\,V$ $\qquad y_{max} = 5\,V$

$x_{min} \approx -x_{max} = -25\,V$ $\qquad y_{min} = -3.3\,V$

Ahora se hace el proceso de escalamiento por cero y pendiente para adaptar la señal al rango de trabajo del conversor AD.

$m = \frac{5-(-3.3)}{25-(-25)} = \frac{8.3}{50} = 0.166$

Ahora para encontrar el punto de corte se hace uso de la ecuación $y = mx + b$

$-3.3 = 0.166(-25) + b \Rightarrow b = 0.85 \Rightarrow \tilde{x}(t) = 0.166\,x(t) + 0.85$

Ahora para saber los niveles de cuantización y la resolución del sistema de conversión se hace uso de lo siguiente:

$Niveles = 2^{bits} = 2^5 = 32$

$Resolución = \frac{y_{max} - y_{min}}{Niveles} = \frac{5-(-3.3)}{32} = \frac{8.3}{32} = 0.2594\,V$

Ahora, para hacer un buen proceso de muestreo y se cumpla el teorema de Nyquist, se hace uso de la frecuencia más alta de la señal de entrada como la referencia mínima para la conversión.

$F_S \geqslant 2F_{máx} \quad \therefore F_{máx} = F_3 = \frac{5}{\pi}$

$F_S \geqslant 2 \times \frac{5}{\pi} \Rightarrow F_S \geqslant \frac{10}{\pi} \Rightarrow F_S \geqslant 3.184\,Hz$

Para la simulación se hará uso de un $F_S = 35\,Hz$ ya que cumple el teorema de Nyquist y no hace uso de muchos recursos, lo que conlleva a una menor pérdida de datos.

2) Se quiere saber si un sistema de ADC con una $F_S = 5000\,Hz$ puede convertir adecuadamente la señal

$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\operatorname{sen}(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$

Se sacan los datos de ω, F, T y A de cada función trigonométrica para hacer su respectivo análisis.

$\omega_1 = 1000\pi \qquad T_1 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{500} \qquad F_1 = 500\,Hz \qquad \frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q} \qquad A_1 = 3$

$\omega_2 = 2000\pi \qquad T_2 = \frac{2}{2000} = \frac{1}{1000} \qquad F_2 = 1000\,Hz \qquad \frac{\omega_2}{\omega_3} \in \mathbb{Q} \qquad A_2 = 5$

$\omega_3 = 11000\pi \qquad T_3 = \frac{2}{11000} = \frac{1}{5500} \qquad F_3 = 5500\,Hz \qquad \frac{\omega_1}{\omega_3} \in \mathbb{Q} \qquad A_3 = 10$

Para comprobar el teorema de Nyquist, se hará uso de la mayor frecuencia (F_3)

$F_S \geqslant 2F_{máx} \quad \therefore F_{máx} = F_3 = 5500\,Hz$

$5000\,Hz \geq 2 \times 5500\,Hz \Rightarrow 5000\,Hz \geq 11000\,Hz$

Con esto, se puede observar que la Fs dada no cumple el teorema de Nyquist, lo que conlleva un rediseño del sistema para eliminar el aliasing que aparece por el valor seleccionado de Fs. ($F_s \geq 11000\,Hz$)

Ahora, para realizar la simulación se usó un sistema ADC con entradas entre -5 y 5[V] con 5bits.

$x_{max} \approx |A_1| + |A_2| + |A_3| = 3 + 5 + 10 = 18\,V$ $\qquad y_{max} = 5V$

$x_{min} = -x_{max} = -18\,V$ $\qquad y_{min} = -5V$

$$m = \frac{y_{max} - y_{min}}{x_{max} - x_{min}} = \frac{5-(-5)}{18-(-18)} = \frac{10}{36} = 0.2\overline{7}$$

Ahora, se encuentra el punto de corte de la nueva recta para el sistema ADC

$$y = mx + b \Rightarrow 5 = \frac{10}{36}(18) + b \Rightarrow b = 0 \Rightarrow \tilde{x}(t) = \frac{10}{36}x(t)$$

Ahora se calculan los niveles de cuantización y la resolución del sistema ADC

$$Niveles = 2^{bits} = 2^5 = 32$$

$$Resolución = \frac{y_{max} - y_{min}}{Niveles} = \frac{5-(-5)}{32} = \frac{10}{32} = 0.3125\,V$$

Con esta información, y el uso de una $F_s = 300000\,Hz$, se simula y se observa que desaparece el aliasing; haciendo que la señal digitalizada sea más cercana a la original

③ Se tiene $x_1(t) = A\cos(\omega_0 t)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $T, A \in \mathbb{R}^+$,

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \frac{T}{4} \\ -1 & \text{si } \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{2T}{4} \\ 1 & \text{si } \frac{3T}{4} \leq t < T \end{cases}$$

Hallar $d(x_1, x_2) = \overline{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt$

Primero se evalúa la integral y se separan los límites dependiendo de los valores de las funciones a integrar en esos rangos del periodo.

$$\overline{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |A\cos(\omega_0 t) - x_2(t)|^2 \, dt = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/4} |A\cos(\omega_0 t) - 1|^2 dt + \int_{T/4}^{3T/4} |A\cos(\omega_0 t) - (-1)|^2 dt \right.$$
$$\left. + \int_{3T/4}^{T} |A\cos(\omega_0 t) - 1|^2 dt \right]$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/4} A^2\cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - 2A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + 1 \, dt + \int_{T/4}^{3T/4} A^2\cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + 2A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + 1 \, dt \right.$$
$$\left. + \int_{3T/4}^{T} A^2\cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - 2A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + 1 \, dt \right]$$

$$u = \frac{4\pi t}{T} \Rightarrow du = \frac{4\pi}{T} dt$$

$$\int_a^b A^2\cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = A^2 \int_a^b \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(2 \times \frac{2\pi t}{T}\right) dt = A^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi t}{T}\right)}{\frac{4\pi}{T}} \right]_{t=a}^{t=b}$$

$$\int_c^d \pm 2A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \pm 2A \int_c^d \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) dt = \pm 2A \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}{\frac{2\pi}{T}} \right]_{t=c}^{t=d}$$

$$u = \frac{2\pi t}{T} \Rightarrow du = \frac{2\pi}{T} dt$$

$$\int_e^f 1 \, dt = t \Big|_e^f$$

Con esto la Potencia Media queda:

$$\overline{P}_{x_1-x_2}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left\{A^2\left[\frac{T}{4\times 2}+\frac{1}{2}\times\frac{\cancel{\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi T}{T\times 4}\right)}}{\frac{4\pi}{T}}-\left(0+\cancel{\frac{\operatorname{sen}(0)}{\frac{4\pi}{T}}}\right)\right]-2A\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi T}{T\times 4}\right)^{\nearrow 1}}{\frac{4\pi}{T}}-\cancel{\frac{\operatorname{sen}(0)}{\frac{4\pi}{T}}}\right]\right.$$

$$+\frac{T}{4}-0+A^2\left[\frac{3T}{4\times 2}+\frac{1}{2}\times\cancel{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{T}\times\frac{3T}{4}\right)}{\frac{4\pi}{T}}}-\left(\frac{T}{4}+\frac{1}{2}\times\cancel{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi T}{T\times 4}\right)}{\frac{4\pi}{T}}}\right)\right]+2A\left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\times\frac{3T}{4}\right)^{-1}}{\frac{4\pi}{T}}-\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{4}\right)^{1}}{\frac{4\pi}{T}}\right]$$

$$+\frac{3T}{4}-\frac{T}{4}+A^2\left[\frac{T}{2}+\frac{1}{2}\times\cancel{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi T}{T}\right)}{\frac{4\pi}{T}}}-\left(\frac{3T}{4\times 2}+\frac{1}{2}\times\cancel{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{T}\times\frac{3T}{4}\right)}{\frac{4\pi}{T}}}\right)\right]+2A\left[\cancel{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi T}{T}\right)}{\frac{4\pi}{T}}}-\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\times\frac{3T}{4}\right)^{-1}}{\frac{4\pi}{T}}\right]$$

$$\left.+T-\frac{3T}{4}\right\}$$

$$\overline{P}_{x_1-x_2}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\frac{A^2T}{2}-\frac{4AT}{\pi}+T\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\times T\left[\frac{A^2}{2}-\frac{4A}{\pi}+1\right]=\lim_{T\to\infty}\left\{\frac{A^2}{2}-\frac{4A}{\pi}+1\right\}$$

$$\overline{P}_{x_1-x_2}=\frac{A^2}{2}-\frac{4A}{\pi}+1$$

4) Demostrar el cálculo de C_n con $x''(t)$ en $t\in[t_i,t_f]$

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{t_i}^{t_f}x(t)e^{-j\omega_0 t}dt \quad \therefore x(t)=\sum_n C_n e^{jn\omega_0 t} \qquad x'(t)=\frac{\partial}{\partial t}x(t);\ x''(t)=\frac{\partial}{\partial t}x'(t)$$

$$x'(t)=\sum_n C_n jn\omega_0 e^{jn\omega_0 t}\ ;\ x''(t)=\sum_n C_n jn\omega_0 jn\omega_0 e^{jn\omega_0 t}=\sum_n C_n(jn\omega_0)^2 e^{jn\omega_0 t}$$

$$\tilde{C}_n=\frac{\langle x''(t)\cdot e^{jn\omega_0 t}\rangle}{\|e^{jn\omega_0 t}\|}=\frac{\int_{t_i}^{t_f}x''(t)e^{-jn\omega_0 t}dt}{T}=C_n(jn\omega_0)^2$$

↓

Valor del C_n para $x''(t)$

Se despeja C_n desde $\tilde{C}_n$

$$C_n=\frac{1}{(t_f-t_i)(jn\omega_0)^2}\int_{t_i}^{t_f}x''(t)e^{-j\omega_0 t}dt \quad \text{pero } j^2=-1$$

$$C_n=\frac{1}{-1(t_f-t_i)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f}x''(t)e^{-j\omega_0 t}dt \Rightarrow C_n=\frac{1}{(t_i-t_f)n^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f}x''(t)e^{-j\omega_0 t}dt$$

Calcular a_n y b_n desde $x''(t)$ en la serie trigonométrica

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega_0 t) + j b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

$c_0 \downarrow$ Nivel DC

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n (n\omega_0)(-\operatorname{sen}(n\omega_0 t)) + j b_n (n\omega_0)\cos(n\omega_0 t)$$

$$x''(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n (-n\omega_0)(n\omega_0)\cos(n\omega_0 t) + j b_n (n\omega_0)(-n\omega_0)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{T}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt \;;\; \tilde{b}_n = \frac{2}{T}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt$$

$\tilde{a}_n$ y $\tilde{b}_n$ son los valores de a_n y b_n para $x''(t)$

Despejando a_n y b_n $[a_n(-n^2\omega_0^2) = \tilde{a}_n$ y $b_n(-n^2\omega_0^2) = \tilde{b}_n]$

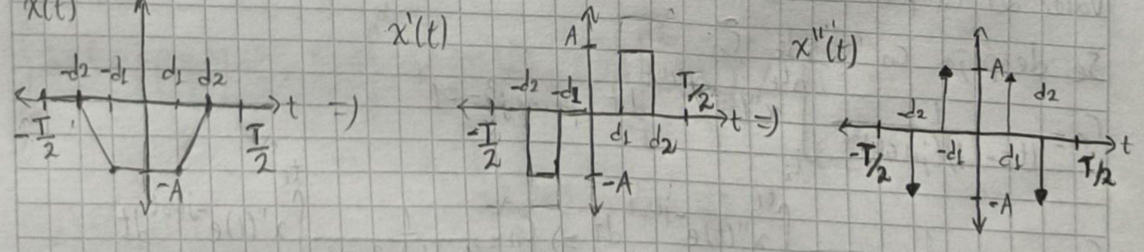
$$a_n(-n^2\omega_0^2) = \frac{2}{T}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{-Tn^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$b_n(-n^2\omega_0^2) = \frac{2}{T}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{-Tn^2\omega_0^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt$$

Ahora se calcula el espectro de Fourier y el error relativo para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$ a partir de $x''(t)$ para la señal $x(t)$:



$$x''(t) = -A\,\delta(t+d_2) + A\,\delta(t+d_1) + A\,\delta(t-d_1) - A\,\delta(t-d_2)$$

$$C_n = \frac{1}{-Tn^2\omega_0^2}\int_{-T/2}^{T/2} x''(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$C_n = -\frac{1}{Tn^2\omega_0^2}\int_{-T/2}^{T/2} A\left[-\delta(t+d_2)+\delta(t+d_1)+\delta(t-d_1)-\delta(t-d_2)\right] e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

$$C_n = -\frac{A}{Tn^2\omega_0^2}\left[-e^{-jn\omega_0(-d_2)} + e^{-jn\omega_0(-d_1)} + e^{-jn\omega_0 d_1} - e^{-jn\omega_0 d_2}\right]$$

$$C_n = -\frac{A}{Tn^2\omega_0^2}\left[e^{-jn\omega_0 d_1} + e^{jn\omega_0 d_1} - \left(e^{-j\omega_0 d_2} + e^{j\omega_0 d_2}\right)\right] = -\frac{A}{Tn^2\omega_0^2}\left[2\cos(n\omega_0 d_1) - 2\cos(n\omega_0 d_2)\right]$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$C_n = -\frac{2A}{Tn^2\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}\left[\cos\left(n\frac{2\pi}{T}d_1\right) - \cos\left(n\frac{2\pi}{T}d_2\right)\right]$$

$$C_n = -\frac{AT}{2\pi^2 n^2}\left[\left(\cos n\frac{2\pi}{T}d_1\right) - \cos\left(n\frac{2\pi}{T}d_2\right)\right]$$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\, dt = \frac{1}{T}\left[\int_{-d_2}^{-d_1}\frac{-A}{d_2-d_1}(t+d_2)dt - \int_{-d_1}^{d_1} A\, dt + \int_{d_1}^{d_2}\frac{A}{d_2-d_1}(t-d_2)dt\right]$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{-A}{d_2-d_1}\left(\frac{t^2}{2}+d_2 t\right)\Bigg|_{-d_2}^{-d_1} - At\Bigg|_{-d_1}^{d_1} + \frac{A}{d_2-d_1}\left(\frac{t^2}{2}-d_2 t\right)\Bigg|_{d_1}^{d_2}\right]$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{-A}{d_2-d_1}\left(\frac{d_1^2}{2} - d_1 d_2 - \frac{d_2^2}{2} + d_2 d_2\right) - A(d_1+d_1) + \frac{A}{d_2-d_1}\left(\frac{d_2^2}{2} - d_2 d_2 - \frac{d_1^2}{2} + d_1 d_2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{-2A}{d_2-d_1}\left(\frac{d_1^2}{2} - d_1 d_2 - \frac{d_2^2}{2} + d_2 d_2\right) - 2Ad_1\right]$$

$$= -\frac{1}{T}\left[\frac{2A}{d_2-d_1}\left(\frac{d_1^2}{2} - d_1 d_2 - \frac{d_2^2}{2} + d_2 d_2\right) + 2Ad_1\right]$$

Ahora para la simulación se suponen los valores: $A=1$, $d_1=1$, $d_2=2$, $T=2d_2=4$

$$C_n = -\frac{1\times4}{2\pi^2 n^2}\left[\cos\left(n\frac{2\pi}{4}\times1\right) - \cos\left(n\frac{2\pi}{4}\times2\right)\right]$$

$$C_n = \frac{-2}{\pi^2 n^2}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right]$$

$$C_0 = -\frac{1}{4}\left[\frac{2\times1}{2-1}\left(\frac{1^2}{2} - 2\times1 - \frac{2^2}{2} + 2\times2\right) + 2\times1\times1\right] = -\frac{1}{4}\left[2\left(\frac{1}{2}\right)+2\right] = -\frac{1}{4}(3) = -\frac{3}{4}$$

$$P_x = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2\,dt = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{0}|x(t)|^2\,dt = \frac{2}{T}\int_{-d_2}^{-d_1}\left(\frac{-A}{d_2-d_1}\right)^2(t+d_2)^2\,dt + \frac{2}{T}\int_{-d_1}^{0}(-A)^2\,dt$$

$u = t+d_2$

$du = dt$

$$P_x = \frac{2}{T}\left(\frac{-A}{d_2-d_1}\right)^2 \frac{(t+d_2)^3}{3}\Bigg|_{-d_2}^{-d_1} + \frac{2A^2}{T}\,t\Bigg|_{-d_1}^{0}$$

$$P_x = \frac{2}{T}\left(\frac{-A}{d_2-d_1}\right)^2\left[\frac{(-d_1+d_2)^3}{3} - \cancelto{0}{\frac{(-d_2+d_2)^3}{3}}\right] + \frac{2A^2}{T}[0-(-d_1)]$$

Ahora reemplazando con los valores de la simulación:

$$P_x = \frac{2}{4}\left(\frac{-1}{2-1}\right)^2\left[\frac{(-1+2)^3}{3}\right] + \frac{2\times1^2}{4}\times1 = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}+\frac{1}{2}$$

$$P_x = \frac{2}{3}$$

Ahora se calcula el $e_r[\%]$ para cada cantidad de armónicos solicitados

$$C_1 = \frac{-2}{\pi^2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(\pi)\right] = -\frac{2}{\pi^2}[0-(-1)] = -\frac{2}{\pi^2} \Rightarrow C_1^2 = \frac{4}{\pi^4} \quad ; \quad C_0^2 = \frac{9}{16}$$

$$C_{-1} = \frac{-2}{\pi^2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos(-\pi)\right] = \frac{-2}{\pi^2}[0-(-1)] = -\frac{2}{\pi^2} \Rightarrow C_{-1}^2 = \frac{4}{\pi^4}$$

$$e_{r1}[\%] = 1 - \frac{\sum_{n=-1}^{1}|C_n|^2}{P_x}\times100[\%] = \left[1 - \frac{\frac{4}{\pi^4}+\frac{9}{16}+\frac{4}{\pi^4}}{\frac{2}{3}}\right]\times100[\%] = 3.305821294\% \text{ (1 armónico)}$$

$$C_2 = \frac{-2}{4\pi^2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) - \cos(2\pi)\right] = \frac{-2}{4\pi^2}[-1-1] = \frac{1}{\pi^2} \Rightarrow C_2^2 = \frac{1}{\pi^4}$$

$$C_{-2} = \frac{-2}{4\pi^2}\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{2}\right) - \cos(-2\pi)\right] = \frac{-2}{4\pi^2}[-1-1] = \frac{1}{\pi^2} \Rightarrow C_{-2}^2 = \frac{1}{\pi^4}$$

$$e_{r2}[\%] = \left[1 - \frac{\sum_{n=-2}^{2} |C_n|^2}{P_x}\right] \times 100[\%] = 0.226026618\% \text{ (2 armónicos)}$$

$$C_3 = \frac{-2}{9\pi^2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \cos(3\pi)\right] = \frac{-2}{9\pi^2}[0-(-1)] = \frac{-2}{9\pi^2} \Rightarrow C_3^2 = \frac{4}{81\pi^4}$$

$$C_{-3} = \frac{-2}{9\pi^2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - \cos(-3\pi)\right] = \frac{-2}{9\pi^2}[0-(-1)] = \frac{-2}{9\pi^2} \Rightarrow C_{-3}^2 = \frac{4}{81\pi^4}$$

$$e_{r3}[\%] = \left[1 - \frac{\sum_{n=-3}^{3} |C_n|^2}{P_x}\right] \times 100[\%] = 0.07393799198\% \text{ (3 armónicos)}$$

$$C_4 = \frac{-2}{16\pi^2}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{2}\right) - \cos(4\pi)\right] = \frac{-2}{16\pi^2}[1-1] = 0 \Rightarrow C_4^2 = 0$$

$$C_{-4} = \frac{-2}{16\pi^2}\left[\cos\left(-\frac{4\pi}{2}\right) - \cos(-4\pi)\right] = \frac{-2}{16\pi^2}[1-1] = 0 \Rightarrow C_{-4}^2 = 0$$

Como $C_4 = C_{-4} = 0$ entonces $e_{r4} = e_{r3} = 0.07393799198\%$ (4 armónicos)

$$C_5 = \frac{-2}{25\pi^2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) - \cos(5\pi)\right] = \frac{-2}{25\pi^2}[0-(-1)] = \frac{-2}{25\pi^2} \Rightarrow C_5^2 = \frac{4}{625\pi^4}$$

$$C_{-5} = \frac{-2}{25\pi^2}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) - \cos(-5\pi)\right] = \frac{-2}{25\pi^2}[0-(-1)] = \frac{-2}{25\pi^2} \Rightarrow C_{-5}^2 = \frac{4}{625\pi^4}$$

$$e_{r5}[\%] = \left[1 - \frac{\sum_{n=-5}^{5} |C_n|^2}{P_x}\right] \times 100[\%] = 0.05422730605\% \text{ (5 armónicos)}$$