资产定价的数学模型

胡耀华

深圳大学

数学与统计学院

资产定价的数学模型

1. 资本定价的概念与理论基础
2. 债券定价– 时间价值
3. 股票定价– 风险价值
    - Markowitz投资组合模型
    - Capital Asset Pricing Model (CAPM)
    - 从CAPM到Black-Scholes模型
4. 投资组合模型的推广

资产的定义

- 美国会计理论发展的四种观点:

1. 未消逝成本
   - 资产是依然现实存在的成本(生成/存在的成本投入)
2. 借方余额
3. 经济资源
   - 资产是可用于有益于未来经营的服务潜力的总量
4. 未来经济利益
   - 资产具有产生未来收益的潜力

资产的分类

- 有形资产 vs 无形资产
  - 有形资产：汽车、设备、住房···
  - 无形资产：股票、期权、知识产权···
- 金融资产 vs 非金融资产
  - 金融资产：无形、未来收益权、不确定性大
  - 非金融资产：有形、不确定性(风险)较低
- 风险资产 vs 无风险资产
  - 风险资产：股票、期权···
  - 无风险资产：现金、国债···

在市场经济条件下，调节经济活动的价格是经济学的核心问题，任何商品都需要定价.

资产定价的理论基础

- 一般均衡理论 (L. Walras)

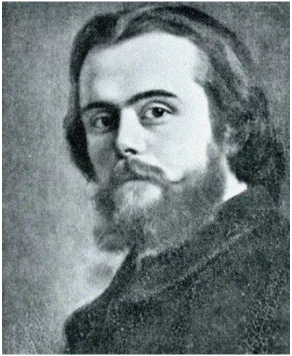


Figure: Léon Walras (1834 - 1910)

资产定价的理论基础

- 一般均衡理论 (L. Walras)
  - 消费者: 追求在收入一定的情况下, 消费效用最大化
  - 生产者: 追求在既定成本的条件下, 利润最大化
  - 市场通过价格调节商品供求关系, 最终使市场的供求达到平衡状态, 并形成一般均衡价格体系

资产定价的理论基础

- 一般均衡理论 (L. Walras)
  - 消费者: 追求在收入一定的情况下, 消费效用最大化
  - 生产者: 追求在既定成本的条件下, 利润最大化
  - 市场通过价格调节商品供求关系, 最终使市场的供求达到平衡状态, 并形成一般均衡价格体系
  - Walrasian Rule:

$$\text{所有商品的供应总价值} \quad = \quad \text{所有商品的需求总价值}$$

  - 在均衡价格体系下, 每个消费者实现了效用最大化, 每个生产者实现了利润最大化

资产定价的理论基础

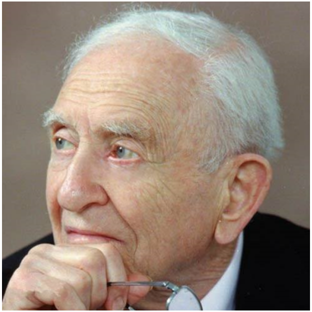
- 一般均衡理论 (L. Walras)
  - 消费者: 追求在收入一定的情况下, 消费效用最大化
  - 生产者: 追求在既定成本的条件下, 利润最大化
  - 市场通过价格调节商品供求关系, 最终使市场的供求达到平衡状态, 并形成一般均衡价格体系
  - Walrasian Rule:

$$\text{所有商品的供应总价值} = \text{所有商品的需求总价值}$$

  - 在均衡价格体系下, 每个消费者实现了效用最大化, 每个生产者实现了利润最大化
  - 1972年诺奖: K. J. Arrow (1921 -) - 一般经济均衡理论
  - 1983年诺奖: G. Debreu (1921 - 2004) - 均衡价格体系的存在性

资产定价的理论基础

- 无套利假设公理 (F. Modigliani and M. H. Miller)



(a) Franco Modigliani (1918 - 2003，1985年诺贝尔经济学奖)

(b) Merton H. Miller (1923 - 2000，1990年诺贝尔经济学奖)

资产定价的理论基础

- 无套利假设公理 (F. Modigliani and M. H. Miller)
  - 根据一般均衡理论，当市场处于均衡状态时，消费者与生产者都达到了理想状态，因而他们没有机会、也没有必要通过价格差异来获利
  - 无套利假设 (现代金融经济学的公理):

无货币投入就无货币产出; 在完善的金融市场中不存在套利机会

资产定价的理论基础

- 无套利假设公理 (F. Modigliani and M. H. Miller)
  - 根据一般均衡理论, 当市场处于均衡状态时, 消费者与生产者都达到了理想状态, 因而他们没有机会、也没有必要通过价格差异来获利
  - 无套利假设 (现代金融经济学的公理):

    无货币投入就无货币产出; 在完善的金融市场中不存在套利机会

  - 期权定价: 每一种(未来价值不确定的)期权都有其(当前确定的)价格
  - 组合证券定价: 线性定价法则

资产定价的基本思想

- 金融资产的价格等于其市场均衡时的价格
- 资产价格等于未来收益的贴现值，再加上表示风险溢价的误差因子
- 资本价值$+$ 时间价值$+$ 风险价值

资产定价的研究方法

1. 基于均衡理论的资产定价理论

2. 基于投资者偏好的相关假设得到资产定价(效用函数与风险偏好)

经典的资产定价理论

1. Markowitz的最优投资组合理论
   - 期望效用最大化的资产定价与消费选择模型(均值-方差模型)
2. 资产资产定价模型(CAPM)
   - 投资组合理论的拓展，研究证券与市场证券组合的超额回报率的关系
3. Black-Scholes的期权定价理论
   - 衍生品定价的经典理论，本质上是均衡定价理论的体现
4. 最有消费与投资策略
   - 拓展到life cycle，将时间变量的效用函数引入投资组合模型
5. 套利定价理论(APT)

货币的时间价值

- 货币的时间价值:
  - 实质上是指货币经历一定时间的投资和再投资所增加的价值.
- 利率:
  - 在市场均衡条件下反映货币时间价值的资本均衡价格
  - 对债券持有人因承担一定风险而进行的风险补偿. （期望）

货币的终值

- 本金P
- 利率i

1. 单利计息

$$P_t = P \cdot (1 + ti)$$

2. 复利计息

$$P_t = P \cdot (1 + i)^t$$

3. 连续复利计息

$$P_t = \lim_{n \to \infty} P \cdot (1 + \frac{i}{n})^{nt} = P \cdot e^{ti}$$

贴现

1. 单利贴现

$$P = P_t \cdot \frac{1}{1+ti}$$

2. 复利贴现

$$P = P_t \cdot \frac{1}{(1+i)^t}$$

3. 连续复利贴现

$$P = P_t \cdot e^{-ti}$$

- 发行者: 以最小的成本（即利率）筹集到一定数量的资金;
- 投资者: 取得最大的收益.
- 在均衡市场条件下, 债券的定价原则:

$$\text{债券的真实价值} = \text{债券未来现金流的现值}$$

债券定价

- 市场利率i
- 债券的面值P (无风险)
- 利息c, 到期年限T, 每年利息c按m次发放
- 债券的价格V

1. 零息债券定价(c=0)

$$V = \frac{P}{(1+i)^T}$$

2. 每年派息m次的付息债券定价

$$V = \sum_{t=1}^{mT} \frac{\frac{c}{m}}{(1+\frac{i}{m})^t} + \frac{P}{(1+\frac{i}{m})^{mT}}$$

债券定价

债券价格与市场利率的关系

- m=1

$$V=\sum_{t=1}^{T}\frac{c}{(1+i)^t}+\frac{P}{(1+i)^T}$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}i}=-\sum_{t=1}^{T}\frac{tc}{(1+i)^{t+1}}-\frac{TP}{(1+i)^{T+1}}<0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}i^2}=\sum_{t=1}^{T}\frac{t(t+1)c}{(1+i)^{t+2}}+\frac{T(T+1)P}{(1+i)^{T+2}}>0$$

债券定价

债券价格与市场利率的关系

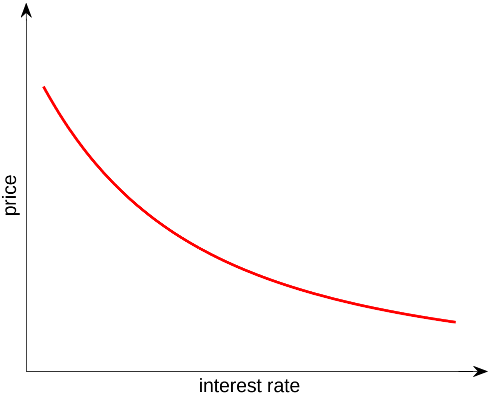


Figure: 债券价格vs 利率

股票定价

- 股票的投资价值，基础是公司的实际经营业绩
- 时间价值(股息贴现模型)
- 风险价值

Example (单一风险资产+单一无风险资产)

- 无风险资产: 没有任何风险或者风险非常小的资产, 它的标准差为0
- 投资组合=无风险资产f+风险资产p

投资组合的预期回报=无风险资产收益+投资组合的风险补偿

$$\mathbb{E}(r_c) = w\mathbb{E}(r_p) + (1-w)r_f = r_f + w(\mathbb{E}(r_p) - r_f)$$

风险$\sigma_c^2 = w^2\sigma_p^2$.

$$\mathbb{E}(r_c) = r_f + \frac{\mathbb{E}(r_p) - r_f}{\sigma_p}\sigma_c$$

风险的市场价格: 每增加一单位的风险所增加的收益.

资本市场线CML

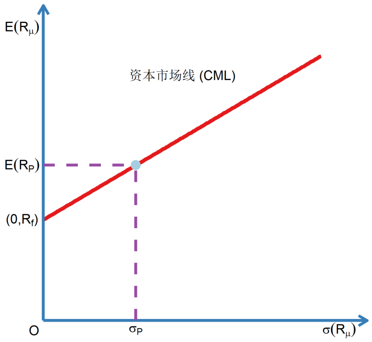


Figure: 风险的市场价格=斜率，越陡越好.

Markowitz投资组合模型

Markowitz均值-方差模型

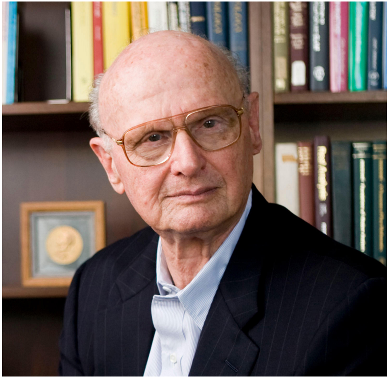


Figure: Harry Max Markowitz (1927 - , 1990年诺贝尔经济学奖)

Markowitz均值-方差模型

1952年，为了寻找预期收益和风险的平衡，用方差作为风险的估计，Markowitz均值构建了均值方差投资组合：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & w^\top \Sigma w - \lambda w^\top \mathbb{E}(r) \\
\text{s.t.} \quad & \mathbf{1}^\top w = 1.
\end{aligned}
$$

- 市场上有n种风险资产$X_1, \ldots, X_n$.
- 单期收益率为$r_1, \ldots, r_n$ (随机变量), $r := (r_1, \ldots, r_n)^\top$.
- $\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(r_i, r_j)$, $\Sigma = (\sigma_{ij})$.
- 各风险资产的投资比重为$w := (w_1, \ldots, w_n)^\top$.
- 投资组合的预期收益率(随机变量) $r_X := \sum w_i r_i$

- 市场上有n种风险资产$X_1, \ldots, X_n$.
- 单期收益率为$r_1, \ldots, r_n$ (随机变量), $r := (r_1, \ldots, r_n)^\top$.
- $\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(r_i, r_j)$, $\Sigma = (\sigma_{ij})$.
- 各风险资产的投资比重为$w := (w_1, \ldots, w_n)^\top$.
- 投资组合的预期收益率(随机变量) $r_X := \sum w_i r_i$

投资组合的期望(收益)

$$\mathbb{E}(r_X) := \sum w_i \mathbb{E}(r_i) = w^\top \mathbb{E}(r).$$

投资组合收益率的方差(风险):

$$\sigma_X^2 := \mathbb{E}\left(\sum w_i r_i - \sum w_i \mathbb{E}(r_i)\right)^2 = \sum_i \sum_j w_i w_j \sigma_{ij} = w^\top \Sigma w.$$

有效投资组合的组合曲线

- Markowitz投资组合模型

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} w^\top \Sigma w \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}^\top w = 1 \\ & w^\top \mathbb{E}(r) = \mu \end{aligned}$$

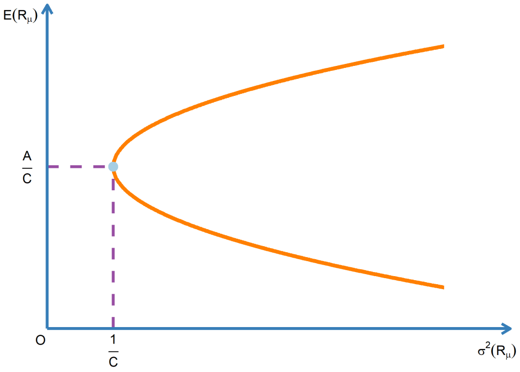
- 最优决策

$$w_\mu = \Sigma^{-1} \left(\frac{B - \mu A}{D} \mathbf{1} + \frac{\mu C - A}{D} \mathbb{E}(r) \right).$$

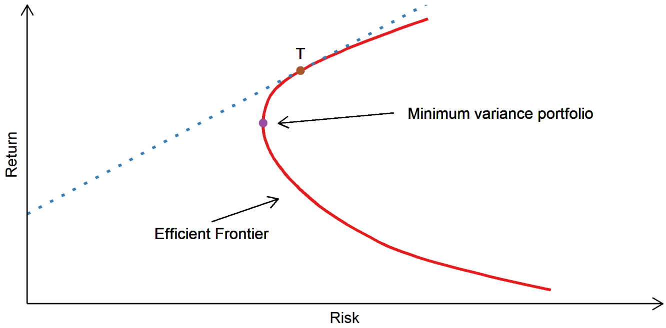
- 最小方差

$$\sigma_\mu^2 = w_\mu^\top \Sigma w_\mu = \frac{C}{D} \left(\mu - \frac{A}{C} \right)^2 + \frac{1}{C}.$$

最小方差组合的收益vs方差



Markowitz与资本市场线



- 切点组合：风险价格最高，收益最大

Proof.

Lagrangean乘子式

$$\mathcal{L}(w,\lambda_1,\lambda_2) := \frac{1}{2}w^\top \Sigma w + \lambda_1(1-\mathbf{1}^\top w) + \lambda_2(\mu - w^\top \mathbb{E}(r)).$$

最优性条件

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = \Sigma w - \lambda_1 \mathbf{1} - \lambda_2 \mathbb{E}(r) = 0.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 1 - \mathbf{1}^\top w = 0.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = \mu - w^\top \mathbb{E}(r) = 0.$$

通常假设$\Sigma \succ 0$, 可逆 $\Rightarrow$ 最优组合

$$w_\mu = \Sigma^{-1}(\lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 \mathbb{E}(r))$$

□

TBC.

- $A := \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbb{E}(r)$
- $B := \mathbb{E}(r)^\top \Sigma^{-1} \mathbb{E}(r)$
- $C := \mathbf{1}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{1}$
- $D := BC - A^2$

$$w_\mu = \Sigma^{-1} \left(\frac{B - \mu A}{D} \mathbf{1} + \frac{\mu C - A}{D} \mathbb{E}(r) \right).$$

最小方差

$$\sigma_\mu^2 = w_\mu^\top \Sigma w_\mu = \frac{C}{D} \left(\mu - \frac{A}{C} \right)^2 + \frac{1}{C}.$$

$\square$

两基金分离定理

- 最小方差投资组合

$$w_\mu = \lambda_1 \Sigma^{-1}\mathbf{1} + \lambda_2 \Sigma^{-1}\mathbb{E}(r) = \lambda_1 C w_s + \lambda_2 A w_d = \alpha_\mu w_s + (1-\alpha_\mu) w_d$$

$$w_s := \frac{\Sigma^{-1}\mathbf{1}}{C}, \quad w_d := \frac{\Sigma^{-1}\mathbb{E}(r)}{A}, \quad \alpha_\mu := \lambda_1 C = \frac{C}{D}(B - \mu A).$$

全局最小方差投资组合

$$\mathbb{E}(r)^\top w_s = \frac{A}{C} \qquad [w_s = w_{\frac{A}{C}}]$$

分散化投资组合

$$\mathbb{E}(r)^\top w_d = \frac{B}{A} \qquad [w_d = w_{\frac{B}{A}}]$$

- 不要把鸡蛋放在一个篮子里

Theorem (两基金分离定理)

任意最小方差投资组合都可以唯一地表示成全局最小方差投资组合w_s与分散化投资组合w_d的组合:

$$w_\mu = \alpha_\mu w_s + (1 - \alpha_\mu) w_d.$$

- 有效边界是线性的;
- 先确定最佳风险资产组合, 后考虑无风险资产和最佳风险资产组合的理想组合;
- 最佳风险资产组合的确定独立于投资者的风险偏好;
- 投资与融资分离的决策理论被称作分离定理.

包含无风险资产的投资组合

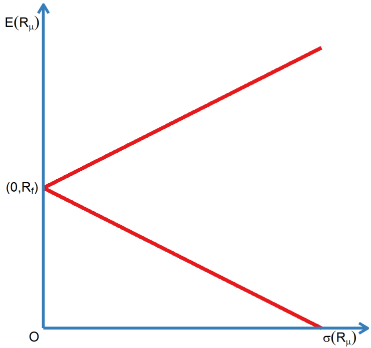
- w: 各风险资产的投资比重
- 无风险资产X_0, 收益率r_f, 投资比重$w_0 := 1 - \mathbf{1}^\top w$
- 风险资产与无风险资产组合的期望收益$\mu = \mathbb{E}(r)^\top w + (1 - \mathbf{1}^\top w) r_f$
- 最小方差资产组合模型

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} w^\top \Sigma w \\ \text{s.t.} \quad & \mu = \mathbb{E}(r)^\top w + (1 - \mathbf{1}^\top w) r_f. \end{aligned}$$

- 最小方差

$$\sigma_\mu^2 = w_\mu^\top \Sigma w_\mu = (\mu - r_f)^2 (B - 2Ar_f + Cr_f^2)^{-1}.$$

- $(0, r_f)$出发, 斜率为$\pm\sqrt{H}$的射线.


E(Rμ)
(0,Rf)
O
σ(Rμ)

Proof.

Lagrangean乘子式

$$\mathcal{L}(w,\lambda) := \frac{1}{2}w^\top \Sigma w + \lambda(\mu - \mathbb{E}(r)^\top w - (1-\mathbf{1}^\top w)r_f).$$

最优性条件

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} = \Sigma w - \lambda(\mathbb{E}(r) - r_f \mathbf{1}) = 0.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \mu - \mathbb{E}(r)^\top w - (1-\mathbf{1}^\top w)r_f = 0.$$

最优组合:

$$w_\mu = \lambda \Sigma^{-1}(\mathbb{E}(r) - r_f \mathbf{1}),$$

$$w_0 = 1 - \mathbf{1}^\top w = 1 - \lambda(A - Cr_f).$$

最小方差

$$\sigma_\mu^2 = w_\mu^\top \Sigma w_\mu = (\mu - r_f)^2 (B - 2Ar_f + Cr_f^2)^{-1}.$$

- w_t为CML与有效投资组合的切点组合. 任意资产收益率r_i

$$\mathbb{E}(r_i) - r_f = \frac{\operatorname{cov}(r_i, r_t)}{\operatorname{var}(r_t)}(\mathbb{E}(r_t) - r_f).$$

- w_t为CML与有效投资组合的切点组合. 任意资产收益率r_i

$$\mathbb{E}(r_i) - r_f = \frac{\mathrm{cov}(r_i, r_t)}{\mathrm{var}(r_t)}(\mathbb{E}(r_t) - r_f).$$

Proof.

切点组合:

$$w_t = \frac{\Sigma^{-1}(\mathbb{E}(r) - r_f\mathbf{1})}{A - Cr_f}$$

$$\mathrm{cov}(r, r_t) = \Sigma w_t = \frac{\mathbb{E}(r) - r_f\mathbf{1}}{A - Cr_f}$$

$$\sigma_t^2 = w_t^\top \Sigma w_t = \frac{\mathbb{E}(r_t) - r_f}{A - Cr_f}$$

$$\mathbb{E}(r) - r_f\mathbf{1} = \frac{\mathrm{cov}(r, r_t)}{\sigma_t^2}(\mathbb{E}(r_t) - r_f).$$

□

Capital Asset Pricing Model (CAPM)

CAPM的假设

1. 个人行为的假设
   - 投资者是理性的，采用均值-方差效用函数
   - 单周期决策
   - 投资者有同质化的期望
2. 市场结构的假设
   - 所有信息都是公开的
   - 市场上存在无风险资产
   - 允许卖空
   - 无税收、交易成本、红利分配
   - 无通胀、利率变化

Capital Asset Pricing Model (CAPM)

- 一般均衡理论 $\Rightarrow$ 市场投资组合等于切点组合

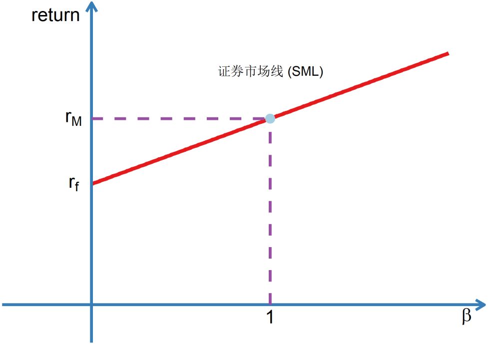
Theorem (Sharp-Lintner CAPM)

当市场存在无风险资产时，任意风险资产的超额收益率可表示为

$$\mathbb{E}(r_i) - r_f = \beta_{iM}(\mathbb{E}(r_M) - r_f) = \frac{\mathrm{cov}(r_i, r_M)}{\mathrm{var}(r_M)}(\mathbb{E}(r_M) - r_f).$$

- $\beta > 1$ 激进资产
- $\beta < 1$ 防御资产

证券市场线SML



Theorem (Black CAPM)

当市场不存在无风险资产时，则

$$\mathbb{E}(r_i)=\mathbb{E}(r_z)+\beta_{iM}(\mathbb{E}(r_M)-\mathbb{E}(r_z))=\mathbb{E}(r_z)+\frac{\mathrm{cov}(r_i,r_M)}{\mathrm{var}(r_M)}(\mathbb{E}(r_M)-\mathbb{E}(r_z)).$$

- w_z是w_M零β相关的投资组合

Example

1. 投资者预测股票A在未来1年的价格上涨为1000元的概率是50%；下降为800元的概率是50%.
2. 股票A的收益率与市场收益率的协方差为0.045，市场组合的标准差为0.3，无风险利率为10%，市场组合的预期收益率为20%.
3. 股票A目前的理论价格是多少？

Example

1. 投资者预测股票A在未来1年的价格上涨为1000元的概率是50%；下降为800元的概率是50%.
2. 股票A的收益率与市场收益率的协方差为0.045，市场组合的标准差为0.3，无风险利率为10%，市场组合的预期收益率为20%.
3. 股票A目前的理论价格是多少？

$$\beta_M = \frac{\operatorname{cov}(r_A, r_M)}{\sigma_M^2} = \frac{0.045}{0.3^2} = 0.5.$$

股票A的预期收益率(CAPM):

$$\mathbb{E}(r_A) = r_f + \beta_M(\mathbb{E}(r_M) - r_f) = 0.1 + 0.5 * (0.2 - 0.1) = 0.15.$$

股票A一年后的期望价格

$$\mathbb{E}(P_1) = 1000 * 0.5 + 800 * 0.5 = 900.$$

目前的贴现价格

$$P_0 = \frac{\mathbb{E}(P_1)}{1 + \mathbb{E}(r_A)} = \frac{900}{1 + 0.15} = 783.$$

单因素模型

1. 证券数量太多时, CAPM面临估计众多证券的协方差的计算困难.

单因素模型

1. 证券数量太多时, CAPM面临估计众多证券的协方差的计算困难.

- 回归方程

$$R_i(t) = \alpha_i + \beta_i R_M(t) + \epsilon_i(t).$$

- t: 时间观察样本;
- R_M: 市场的超额收益率, $R_M = r_M - r_f$;
- α_i: 市场超额收益率为0时, 证券i的预期超额收益率;
- β_i: 证券i对市场指数的敏感度;
- ϵ_i: 残差;

多因素模型

1. 两因素模型: GPD $\&$ R_M
2. Fama-French 三因素模型: SMB (公司规模) $+$ HML (账面价格/市值) $+$ R_M
3. Hwang and Satcheel (2000) 14因素模型
4. $\cdots$

Robert C. Merton (1944 - , 1997年诺贝尔经济学奖)

Inter-temporal Capital Asset Pricing Model (ICAPM)

1. CAPM单期决策的假设
2. 利率下降风险
3. 通货膨胀风险

Inter-temporal Capital Asset Pricing Model (ICAPM)

1. CAPM单期决策的假设
2. 利率下降风险
3. 通货膨胀风险

ICAPM

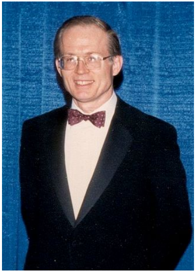
- 放松了CAPM单期决策的假设，考虑life cycle的投资组合优化
- 假设能够识别K种非市场风险，并且找到K种对应的对冲组合.
- 跨期资产资本定价模型:

$$\mathbb{E}(R_i) = \beta_{iM}\mathbb{E}(R_M) + \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik}\mathbb{E}(R_k)$$

$$\beta_{ik} = \frac{\text{cov}(R_i, R_k)}{\text{var}(R_k)}$$

从CAPM到Black-Scholes模型

Black-Scholes PDE



(a) Fischer Black (1935 - 1995)

(b) Robert C. Merton (1944 - , 1997年诺贝尔经济学奖)

(c) Myron Samuel Scholes (1941 - , 1997年诺贝尔经济学奖)

CAPM

- 对于资本资产i的期望收益，可知

$$\mathbb{E}(r_i) = \mu_f + \beta_i(\mathbb{E}(r_M) - \mu_f)$$

- $\mathbb{E}(r_M)$代表着市场期望收益率
- $\beta_i = \frac{\mathsf{Cov}(r_i, r_M)}{\mathsf{Var}(r_M)}$

从CAPM到Black-Scholes PDE

- 标准布朗运动 和 几何布朗运动
  - 记X_t是股票价格
  - dX_t为股价在无穷小的时间间隔内的变化量
  - dX_t/X_t则为这段间隔内的收益率
  - 在标准布朗运动Z_t的基础上考虑加上漂移项μ和参数σ
  - 几何布朗运动:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dZ_t$$

从CAPM到Black-Scholes PDE

- 假设标的资产 (如股票) 价格S 服从几何布朗运动:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t \tag{1}$$

- 假定衍生品 (如期权) 的价格是标的资产价格的函数
- 记$V = f(S, t)$ (二次连续可微函数), 由伊藤公式得

$$dV_t = \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} dZ \tag{2}$$

- 由CAPM公式, 两边都取时间增量dt, 可得

$$\mathbb{E}\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] = \mathbb{E}(r_S dt) = rdt + \beta_S(\mathbb{E}(r_M) - r)dt \tag{3}$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{dV_t}{V_t}\right] = \mathbb{E}(r_V dt) = rdt + \beta_V(\mathbb{E}(r_M) - r)dt \tag{4}$$

从CAPM到Black-Scholes PDE

- 由(1) - (4), 对于资产S, 可得

$$r_V = \frac{1}{V}\left[\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] + \frac{\partial V}{\partial S}\frac{S}{V}r_S$$

- 对两边求与r_M的协方差, 根据β的定义, 可得

$$\beta_V = \frac{\partial V}{\partial S}\frac{S_t}{V_t}\beta_S$$

从CAPM到Black-Scholes PDE

- 并由(4), 可得

$$E\left[dV_t\right] = rV_t dt + \frac{\partial V}{\partial S} S_t \beta_S \left(\mathbb{E}(r_M) - r\right) dt$$

- 由(2)和(3), 对dV_t取期望, 可得

$$E\left[dV_t\right] = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S}\left[rS_t dt + S_t \beta_S \left(E\left[r_M - r\right]\right) dt\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt$$

- 以上两式相等, 化简可得Black-Scholes PDE:

$$rV_t = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} rS_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2$$

Black-Scholes定价公式

- Black-Scholes PDE

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial S} r S_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 - r V_t = 0$$

- 利用费曼—卡茨公式(Feynman-Kac) 公式, 可得

$$V_t = \mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}\Psi(S_T)|\mathcal{F}_t\right] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[\Psi(S_T)|\mathcal{F}_t\right]$$

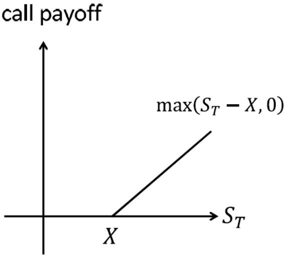
  - S_T为标的资产的终期(即T时刻) 价格
  - $\mathcal{F}_t$表示t时刻信息

Black-Scholes定价公式

- 以看涨期权为例
  - 给予期权合约拥有者(买方)权力在未来特定时间以预定价格购买对手方的标的资产
    - ★ 可选择购买
    - ★ 可选择不购买
  - 欧式期权只能在截止日期执行
  - 美式期权允许在截止日期前任意时间执行.

Black-Scholes定价公式

- 以欧式看涨期权为例
  - 记S_T为标的资产T时刻的价格，X为执行价格
    - ★ 若$S_T > X$：期权拥有者选择购买；此时收益为$S_T - X$.
    - ★ 若$S_T < X$：期权拥有者选择不购买；此时收益为0.
  - 终期收益(损失)：$\Psi(S_T) = \max(S_T - X, 0)$



Black-Scholes定价公式

- 以欧式看涨期权为例
  - 终期收益(损失)也可表示为

$$\Psi(S_T) = S_T \mathbb{I}(S_T \geq X) - X \mathbb{I}(S_T \geq X)$$

  - 指示函数:

$$\mathbb{I}(a \geq b) := \begin{cases} 1 & \text{if } a \geq b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Black-Scholes定价公式

- 欧式看涨期权的价格为(Feynman-Kac)

$$
\begin{aligned}
V_t = & \; e^{-r(T-t)}\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T\mathbb{I}(S_T \geq X)] - X\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{I}(S_T \geq X)]\} \\
= & \; S_t N(d_1) + e^{-r(T-t)} N(d_2)
\end{aligned}
$$

其中

$$
d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{X} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}
$$

且$N(x)$是标准正态分布变量的累积概率分布函数.

非负投资组合

- 马科维茨均值方差模型:

$$\begin{aligned} \min_{w} \quad & w^\top \Sigma w - \lambda w^\top \mu \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}^\top w = 1 \end{aligned}$$

- 如果考虑不允许做空的情形, 那么再加上非负限制条件:

$$\begin{aligned} \min_{w} \quad & w^\top \Sigma w - \lambda w^\top \mu \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}^\top w = 1 \\ & w \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

稀疏投资组合

- Naive portfolio: $w = \frac{1}{n}\mathbf{1}$
  - 资产数量过多
  - 交易手续费高
  - 不便管理

- 希望资产数量尽可能少, 即令w中的非零元素尽可能少.

$$
\begin{aligned}
\min_{w} \quad & w^\top \Sigma w - \lambda w^\top \mu \\
\text{s.t.} \quad & \mathbf{1}^\top w = 1 \\
& \|w\|_0 \le K
\end{aligned}
$$

  - $\|w\|_0 := \mathrm{card}(w)$

稀疏投资组合

- 求解带L_0限制的优化问题: 组合优化; NP难问题.
- 由于L_1正则化是L_0正则化的最优凸近似, 用L_1正则化替代L_0正则化:

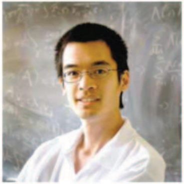
$$\begin{aligned} \min_{w} \quad & w^\top \Sigma w - \lambda w^\top \mu + \tau \|w\|_1 \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{1}^\top w = 1 \end{aligned}$$

  - $\|w\|_1 := \sum_i |w_i|$
- 2009年Joshua Brodie等学者首次将L_1正则化应用到马科维茨投资组合模型上[1].

[1] Brodie, J., Daubechies, I., De Mol, C., Giannone, D., & Loris, I. (2009). Sparse and stable Markowitz portfolios. Proceedings of the National Academy of Sciences, 106(30), 12267-12272.

2004年，几位大牛证明，如果信号是稀疏的，那么它可以由远低于采样定理要求的采样点重建恢复，并于2007年正式提出了“压缩感知”（Compressed Sensing）这个概念。

压缩感知



陶哲轩

Emmanuel Candes

David Donoho

William Forsyth Sharpe (1934 - , 1990年诺贝尔经济学奖)

夏普比率

- 马科维茨均值方差模型: 最大化预期收益并最小化风险.
- 1966年, 威廉夏普首次提出了最大化夏普比率的模型:

$$\max_{w} \quad \frac{w^T\mu - r_f}{\sqrt{w^T\Sigma w}}$$

$$\text{s.t.} \quad \mathbf{1}^T w = 1$$

- 夏普比率: $SR = \frac{R_P - r}{\sigma_P}$ (市场的风险价格)
  - R_P: 资产收益率
  - r: 无风险收益率
  - σ_P: 资产收益标准差
- 夏普比率越大, 说明资产单位风险的超额收益越高.

不同的风险测度

- 马科维茨均值方差模型的理论非常完善
- 然而，在实际应用中，方差不是实际风险的一个好的估量.
- 因为其同时惩罚了不想要的高损失以及希望的低损失.
- 提出新的风险测度[2]
  - VaR
  - CVaR

[2] McNeil, A. J., Frey, R., & Embrechts, P. (2015). Quantitative risk management: concepts, techniques and tools-revised edition. Princeton university press.

Value at Risk (VaR)

Figure: J. P. Morgan公司1996年在Risk Metrics Technical Document中提出了Value-at-Risk (VaR)来衡量单边风险

Value at Risk (VaR)

- VaR指的是在特定置信水平$1-\alpha$下的最大可能损失

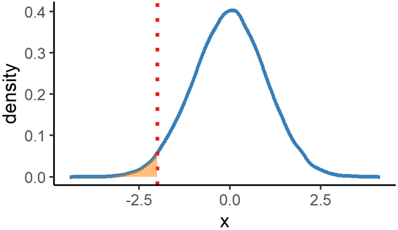
$$\mathrm{VaR}_{\alpha}(\xi)=\inf\left\{X: P\left(\xi\leq X\right)\geq\alpha\right\}=\inf\left\{X: F_{\xi}\left(X\right)\geq\alpha\right\}$$

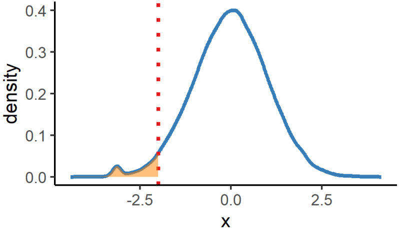
其中$F_{\xi}\left(X\right)$为关于随机变量X的累积分布函数.

- 假定一个投资组合在6个月内收益服从正态分布, 均值为μ, 标准差为σ. 假定置信水平为99%, 易知:
  - $P(r\leq R^*)=1\% \quad \Rightarrow \quad N(\frac{R^*-\mu}{\sigma})=1\% \quad \Rightarrow \quad \frac{R^*-\mu}{\sigma}=-2.33$
  - $R^*=\mu-2.33*\sigma$
  - 其中R^*为最糟糕的收益, 即最大损失.

Value at Risk (VaR)

- 优点:
  - 使用数理统计度量，更具客观性
  - 具有直观性
  - 提出最简单的问题：“最坏情况会怎样？”
- 缺点:
  - 没有考虑尾部风险





Conditional Value at Risk (CVaR)

(a) Ralph Tyrrell Rockafellar (1935 - ，冯诺依曼奖及丹茨格奖双项获得者)

(b) Stan Uryasev

Conditional Value at Risk (CVaR)

- Rockafellar和Uryasev在2000年提出了CVaR的风险计量[3]

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\xi) = \mathrm{E}\left[X \mid X \leq \mathrm{VaR}_\alpha(\xi)\right]$$

- 给出市场条件变遭而触发损失时，损失的期望有多大

[3] Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. Journal of Risk, 2, 21-42.

- 最小化CVaR的投资组合:

$$\begin{aligned}
\min_{w} \quad & \mathrm{CVaR}_\alpha\left(w^\top r\right) \\
\text{s.t.} \quad & \mathbf{1}^\top w = 1, \quad w \geq \mathbf{0} \\
& w^\top \mathbb{E}(r) \geq \mu
\end{aligned}$$

- 辅助凸函数:

$$F_\alpha(w,\zeta) = \zeta + \frac{1}{1-\alpha}\mathrm{E}\left[-w^\top r - \zeta\right]^+ = \zeta + \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left[-w^\top r_t - \zeta\right]^+$$

- Rockafellar和Uryasev证明了等价于LP问题

$$\min_{w\in W} \mathrm{CVaR}_\alpha\left(-w^\top r\right) = \min_{w\in W,\zeta} F_\alpha(w,\zeta)$$

求解最小化CVaR投资组合模型

- 引入哑变量z_t

$$z_t \geq \left[-w^\top r_t - \zeta\right]^+ \Longrightarrow z_t \geq -w^\top r_t - \zeta, z_t \geq 0$$

- CVaR最小化优化问题可以转化为LP问题

$$\begin{aligned} \min_{w,\{z_t\},\zeta} \quad & \zeta + \tfrac{1}{1-\alpha}\tfrac{1}{T}\textstyle\sum_{t=1}^{T} z_t \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq z_t \geq -w^\top r_t - \zeta, \quad t = 1, \ldots, T \\ & \mathbf{1}^\top w = 1, \quad w \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

Thank You for Your Attention.

Dr. Yaohua HU (mayhhu@szu.edu.cn)