摘要

资产定价的理论发展主要分为两大类，其中一类是基于风险中性对衍生品的潜在价格变化的建模，从而进一步对其定价的理论；而另一类则是基于一般均衡理论而发展得到的现代投资组合理论。本次讲座主要从收益和风险的衡量出发，基于马科维茨模型和现代投资组合理论，对不同的资本资产定价模型进行讨论。同时，在投资组合理论的基础上，考虑不同的假设条件，可以将背景问题刻画为相应的最优化问题。最后，讲座将进一步介绍基本的现代凸优化工具和数值算法思想，对相应的优化问题进行求解，并对求解得到的投资组合进行评价。

通过贴现法计算资产理论价格

我们先定义t时刻的价格为$X(t)$，考虑在连续时间下，某位投资者用1块钱在t时刻购买了一个无分红利率为$r(t)$的资产，假设不存在套利机会，这样的资产在增量dt时间内所产生的收益应该等于无风险利率所产生的收益，那么我们可以写出微分方程：

$$dX(t) = r(t)X(t)dt$$

其中$dX(t)$代表在$(t, t+dt)$期间获得的收益。对于上述方程，我们可以得到

$$\int_t^T \frac{dX(u)}{X(u)} = \int_t^T r(u)du$$

因此

$$\ln(X(T)) - \ln(X(t)) = \int_t^T r(u)du$$

即

$$X(T) = X(t)e^{\int_t^T r(u)du}$$

我们以资产为贴现债券为例，假设我们从t时刻开始购买，T时刻对手方承诺给予我们1元，那我们希望可以计算知道t时刻的理论价格。我们假设t时刻的理论价格为$B(t,T)$元，可知

$$B(t,T) \cdot e^{\int_t^T r(u)du} = 1$$

如果考虑固定利率为r，那么我们可以得到t时刻的理论价格为

$$B(t,T) = e^{-r(T-t)}$$

这样是最直接的定价方法，但是很明显，这样简单的方法并没有考虑到各个资产存在的风险，下面将结合风险和收益进一步结合，并介绍著名的马科维茨均值方差模型。

为什么取对数收益?

- 对数收益的可加性

假设期初总金额为X_0, 存在一个价格序列$\{X_0, X_1, \cdots, X_n\}$, 如果通过线性收益的计算，我们会得到

$$R_t = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} = \frac{X_t}{X_{t-1}} - 1$$

且

$$R_1 + R_2 + \cdots + R_n = \frac{X_1}{X_0} + \frac{X_2}{X_1} + \cdots + \frac{X_n}{X_{n-1}} - n$$

相比下

$$r_t = \ln \frac{X_t}{X_{t-1}}$$

且

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = \ln \frac{X_1}{X_0} + \ln \frac{X_2}{X_1} + \cdots + \ln \frac{X_n}{X_{n-1}} = \ln \frac{X_n}{X_0}$$

这大大方便了实际建模和计算；同时我们可以注意到，通过泰勒展开公式知道,

$$R_t \approx r_t$$

马科维茨均值方差模型

实际建模中，我们不会只考虑一个资产或者一支股票，而是考虑整个市场的所有N个资产。首先定义以下符号:

- $\mathbf{r}_t \in \mathbb{R}^N$: N个资产的对数收益在t时刻所构成的向量;
- 时间t可以是以月周日为周期，或者5分钟作为一个时间;
- $\mathcal{F}_{t-1}$: 历史数据

我们希望通过历史数据来预测t时刻的收益率$\mathbf{r}_t$。

$\mathbf{r}_t$是一个多元随机过程，其中条件均值和协方差矩阵分别为

$$\mu_t = \mathbb{E}[\mathbf{r}_t | \mathcal{F}_{t-1}]$$

和

$$\mathbf{\Sigma}_t = \text{Cov}[\mathbf{r}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[(\mathbf{r}_t - \mu_t)(\mathbf{r}_t - \mu_t)^\top | \mathcal{F}_{t-1}]$$

但是处理这样的随机过程太复杂，为了简化，我们假设对数收益率服从独立同分布，那上述的均值和协方差矩阵就可以简化为一个参数:

$$\mu_t = \mu$$

和

$$\mathbf{\Sigma}_t = \mathbf{\Sigma}$$

虽然这样的形式变得十分简单，但也大大推动了资产定价和金融数学的发展。马科维茨也在此基础上做出了巨大贡献，同时获得了1990年的诺贝尔奖。

考虑这样一个简单的独立同分布模型：

$$\mathbf{r}_t = \mu + \epsilon_t$$

其中μ是均值，ϵ_t是一个服从独立同分布的随机过程，其中均值为0且协方差矩阵为Σ。

在实际应用中，对于这样的随机过程的参数μ和Σ，最简单的方式就是利用样本均值和协方差矩阵：

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\mathbf{r}_t$$

和

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(\mathbf{r}_t - \hat{\mu})(\mathbf{r}_t - \hat{\mu})^\top$$

注意一下，这里的分母用的是$n-1$而不是n，是因为为了得到无偏估计量。

假设投资总金额为M元，记向量$\mathbf{w} \in \mathbb{R}^N$为$N$个资产的投资组合，满足$\mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1$。对于每个资产$i$，它的初始总金额为$Mw_i$，这里先不考虑实际中手续费用等因素，那它的终期收益为

$$Mw_i(\frac{X_{i,t}}{X_{i,t-1}}) = Mw_i(R_{i,t}+1)$$

那么整个投资组合的收益可以表示

$$R_t^p = \frac{\sum_{i=1}^{N} Mw_i(R_{i,t}+1) - M}{M} = \sum_{i=1}^{N} w_i R_{i,t} \approx \sum_{i=1}^{N} w_i r_{i,t} = \mathbf{w}^\top \mathbf{r}_t$$

同理，我们可以得到对于方差的表示，故投资组合的预期收益和方差可以表示为$\mathbf{w}^\top\mu$和$\mathbf{w}^\top\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}$。

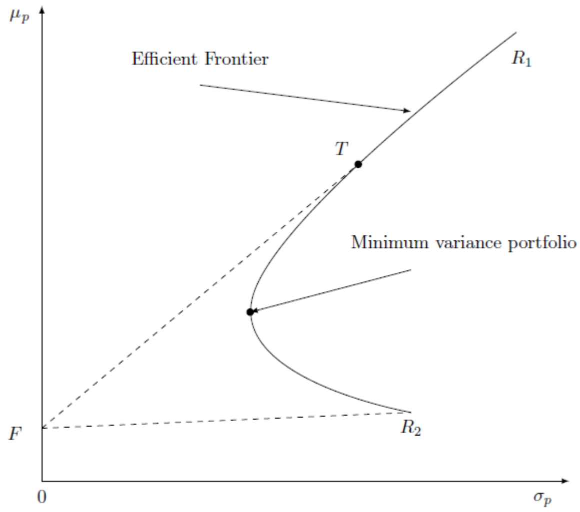
1952年，为了寻找预期收益和风险的平衡，用标准差作为风险的估计，马科维茨构建了均值方差投资组合：

$$\begin{array}{ll} \underset{\mathbf{w}}{\text{maximize}} & \mathbf{w}^\top \boldsymbol{\mu} - \lambda \mathbf{w}^\top \mathbf{\Sigma}\mathbf{w} \\ \text{subject to} & \mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1 \end{array}$$

其中$\mathbf{1}^\top\mathbf{w}=1$是资本总合限制，而$\lambda$则是控制投资者对于风险的偏好程度。

CAPM与资本市场线

但马科维茨仅仅给出了期望收益和风险的估量，以及通过二者关系得到的最有效率的投资组合所构成的有效边界（Efficient Frontier），如下图中实曲线所示：



其中风险最小对应的曲线上的点，即对应最小方差投资组合（Minimum variance portfolio）。

马科维茨的学生威廉夏普进一步考虑了无风险资产的情况。引入一个无风险资产F，它的收益率和预期收益分布记为r_f和μ_f，同时它的方差$\sigma_f^2=0$。存在一个有效投资组合T，假设投资w于有风险的资产组合P，剩余的$1-w$投资于无风险资产，那么投资组合T的收益率为

$$r_T = wr_P + (1-w)r_f$$

记μ_P和μ_T分别为投资组合P和T的预期收益，记σ_P和σ_T分别为投资组合P和T的方差，可得到它的均值和方差分别为

$$\mu_T = w\mu_P + (1-w)\mu_f = \mu_f + w(\mu_P - \mu_f)$$

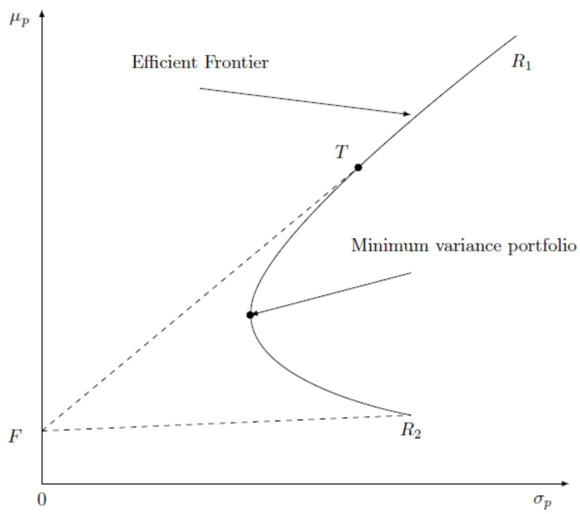
和

$$\sigma_T^2 = w^2\sigma_P^2$$

可以得到

$$\mu_T = \mu_f + \frac{\sigma_T}{\sigma_P}(\mu_P - \mu_f)$$

我们称这条直线为资本市场线（Capital market line）。从几何角度来观察，可以发现这条直线过点$(0,\mu_f)$且其斜率为$\frac{\mu_P-\mu_f}{\sigma_P}$；从金融角度可以发现，斜率同时代表着**每单位风险的预期风险补偿收益**。同时，显然当切线情况下，我们可以得到T这样一个最优风险投资组合。



如何用来定价?

假设某个资本资产i未来$t+1$时刻所发放的红利为D_{t+1}，我们可以得到实际收益率为:

$$r_{it}=\frac{X_{t+1}-X_t+D_{t+1}}{X_t}$$

通过CAPM可知，当市场均衡时，预期收益率应该相等

$$\frac{\mathbb{E}(X_{t+1}+D_{t+1})-X_t}{X_t}=\mu_f+\beta_i(\mu_P-\mu_f)$$

其中$\beta_i=\frac{\mathrm{Cov}(r_{it},r_P)}{\sigma_P}$，可知

$$X_t=\frac{\mathbb{E}(X_{t+1}+D_{t+1})}{1+\mu_f+\beta_i(\mu_P-\mu_f)}$$

假设市场中存在一个投资组合P的预期收益率$\mu_P=8\%$，无风险利率$\mu_f=2\%$，若beta值$\beta_i=1$，$t+1$时刻价格与分红总和期望值为10.8，可以得到理论价格

$$X_t=\frac{10.8}{1+0.02+1\times(0.08-0.02)}=10$$

从CAPM到Black-Scholes PDE

从CAPM我们知道对于资本资产i的期望收益，我们可以通过下式计算得到

$$\mathbb{E}(r_i)=\mu_f+\beta_i(\mathbb{E}(r_P)-\mu_f)$$

其中$\mathbb{E}(r_P)$代表着市场期望收益率，同时

$$\beta_i=\frac{\mathrm{Cov}(r_i,r_P)}{\sigma_P}$$

对应资产i的beta值。

假设X_t是股票价格，dX_t则是股价在无穷小的时间间隔内的变化量，而dX_t/X_t就是这段间隔内的收益率。我们在标准布朗运动Z_t的基础上考虑一个和时间t相关的漂移项μt以及加上参数σ，那么我们可以得到

$$\frac{dX_t}{X_t}=\mu dt+\sigma dZ_t$$

因此X_t的随机微分方程为

$$dX_t=\mu X_t dt+\sigma X_t dZ_t$$

假设$f(X,t)$是一个二次连续可微函数且随机过程V定义为$V=f(X,t)$，则由伊藤公式可以得到

$$dV=\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\mu X\frac{\partial V}{\partial X}+\frac{\sigma^2X^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}\right]dt+\sigma X\frac{\partial V}{\partial X}dZ$$

由上述介绍我们知道，对于资产S和V，

$$\frac{dS_t}{S_t}=r_S dt$$

和

$$\frac{dV_t}{V_t}=r_V dt$$

由CAPM公式，两边都取时间增量dt，我们可以分别得到

$$\mathbb{E}\left[\frac{dS_t}{S_t}\right]=\mathbb{E}(r_S dt)=\mu_f dt+\beta_S(\mathbb{E}(r_P)-\mu_f)dt$$

和

$$\mathbb{E}\left[\frac{dV_t}{V_t}\right]=\mathbb{E}(r_V dt)=\mu_f dt+\beta_V(\mathbb{E}(r_P)-\mu_f)dt$$

对于资产S，我们可以推导得到

$$\begin{aligned}
& dV=\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\mu S\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt+\sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dZ \\
\Rightarrow\quad & \frac{dV}{V}=\frac{1}{V}\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\mu S\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt+\frac{\sigma S}{V}\frac{\partial V}{\partial S}dZ \\
\Rightarrow\quad & \frac{dV}{V}=\frac{1}{V}\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt+\frac{\mu S}{V}\frac{\partial V}{\partial S}dt+\frac{\sigma S}{V}\frac{\partial V}{\partial S}dZ \\
\Rightarrow\quad & \frac{dV}{V}=\frac{1}{V}\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt+\frac{\partial V}{\partial S}\frac{S}{V}(\mu dt+\sigma dZ) \\
\Rightarrow\quad & \frac{dV}{V}=\frac{1}{V}\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt+\frac{\partial V}{\partial S}\frac{S}{V}\frac{dS}{S} \\
\Rightarrow\quad & r_V dt=\frac{1}{V}\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt+\frac{\partial V}{\partial S}\frac{S}{V}r_S dt \\
\Rightarrow\quad & r_V=\frac{1}{V}\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]+\frac{\partial V}{\partial S}\frac{S}{V}r_S
\end{aligned}$$

可以注意到只有等式右边第二项是随机的，结合beta的定义，可得

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Cov}(r_V,r_P)=\frac{\partial V}{\partial S}\frac{S_t}{V_t}\operatorname{Cov}(r_S,r_P) \\
\Rightarrow\quad & \beta_V=\frac{\partial V}{\partial S}\frac{S_t}{V_t}\beta_S
\end{aligned}$$

进一步可得

$$\begin{aligned}
E\left[\frac{dV_t}{V_t}\right] &= rdt+\beta_V\left(E\left[r_M\right]-r\right)dt \\
E\left[\frac{dV_t}{V_t}\right] &= rdt+\frac{\partial V}{\partial S}\frac{S_t}{V_t}\beta_S\left(E\left[r_M\right]-r\right)dt \\
E\left[dV_t\right] &= rV_t dt+\frac{\partial V}{\partial S}S_t\beta_S\left(E\left[r_M\right]-r\right)dt
\end{aligned}$$

结合

$$\mathbb{E}\left[\frac{dS_t}{S_t}\right]=\mathbb{E}(r_S dt)=\mu_f dt+\beta_S(\mathbb{E}(r_P)-\mu_f)dt$$

与

$$dV=\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\mu S\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right]dt+\sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dZ$$

可以推导得

$$E\left[dV_t\right]=\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{\partial V}{\partial S}[rS_t dt+S_t\beta_S\left(E\left[r_M-r\right]\right)dt]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt$$

由上面两式相等可得，

$$\begin{aligned}&rV_t dt+\frac{\partial V}{\partial S}S_t\beta_S\left(E\left[r_M\right]-r\right)dt\\=\quad&\frac{\partial V}{\partial t}dt+\frac{\partial V}{\partial S}[rS_t dt+S_t\beta_S\left(E\left[r_M-r\right]\right)dt]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt\end{aligned}$$

化简便可得到在资产定价领域非常著名的Black-Scholes PDE：

$$rV_t=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial S}rS_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2$$

Black-Sholes定价公式

通过上述推导得到的Black-Scholes PDE：

$$rV_t=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial S}rS_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2$$

我们可以通过求解Black-Scholes PDE可以得到Black-Scholes定价公式。

首先利用费曼－卡茨公式（Feynman-Kac）公式，我们可以得到

$$V_t=\mathbb{E}\left[e^{-r(T-t)}\Psi(S_T)|\mathcal{F}_t\right]=e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\left[\Psi(S_T)|\mathcal{F}_t\right]$$

考虑欧式看涨期权的定价公式，由于欧式看涨期权的终期收益（损失）是

$$\Psi(S_T)=\max(S_T-X,0)$$

其中S_T是期权T时刻的价格，X为执行价格，那么看涨期权的价格为

$$\begin{aligned}c=&e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\max(S_T-X,0)\right]\\=&e^{-r(T-t)}\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T\mathbf{1}_{\{S_T\geq X\}}]-X\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{\{S_T\geq X\}}]\}\end{aligned}$$

进一步求算两部分的期望，令$\tau=T-t$，可得

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{\{S_T\geq X\}}] = & \int_{\ln X}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{\left[y+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau-\xi\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right)d\xi \\
= & N\left(\frac{y+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau-\ln X}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
= & N\left(\frac{\ln\frac{S_t}{X}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T\mathbf{1}_{\{S_T\geq X\}}] = & \int_{\ln X}^{\infty}e^{\xi}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{\left[y+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau-\xi\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right)d\xi \\
= & \exp(y+r\tau)\int_{\ln X}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{\left[y+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau-\xi\right]^2}{2\sigma^2\tau}\right)d\xi \\
= & e^{r\tau}S_tN\left(\frac{\ln\frac{S_t}{X}+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)
\end{aligned}
$$

因此，可得到欧式看涨期权的定价公式

$$
\begin{aligned}
c = & e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\max(S_T-X,0)\right] \\
= & e^{-r(T-t)}\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T\mathbf{1}_{\{S_T\geq X\}}]-X\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbf{1}_{\{S_T\geq X\}}]\} \\
= & e^{-r(T-t)}e^{r\tau}S_tN\left(\frac{\ln\frac{S_t}{X}+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)+e^{-r(T-t)}N\left(\frac{\ln\frac{S_t}{X}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\right) \\
= & S_tN(d_1)+e^{-r(T-t)}N(d_2)
\end{aligned}
$$

其中

$$
d_1=\frac{\ln\frac{S_t}{X}+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},\quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{\tau}
$$

且$N(x)$是标准正态分布变量的累积概率分布函数。

Note：详细推导参考 (Robert A.Jarrow, Continuous-Time Asset Pricing Theory, p99)

均值方差模型的进一步推广

回归到前面介绍的马科维茨均值方差模型：

$$\begin{array}{ll}\underset{\mathbf{w}}{\text{maximize}} & \mathbf{w}^\top\boldsymbol{\mu}-\lambda\mathbf{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}\\ \text{subject to} & \mathbf{1}^\top\mathbf{w}=1\end{array}$$

如果考虑不允许做空的情形，那么再加上非负限制条件：

$$\begin{array}{ll}\underset{\mathbf{w}}{\text{maximize}} & \mathbf{w}^\top\boldsymbol{\mu}-\lambda\mathbf{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}\\ \text{subject to} & \mathbf{1}^\top\mathbf{w}=1\\ & \mathbf{w}\geq\mathbf{0}\end{array}$$

当随着资产数量增加，市场交易手续费也随着增加时，我们会希望找到一个投资组合，其中资产数量尽可能少，即令$\mathbf{w}$中的非零元素尽可能少。假设希望求解得到的投资组合中，资产数量不超过K个，那么可以考虑一下问题

$$\begin{array}{ll}\underset{\mathbf{w}}{\text{maximize}} & \mathbf{w}^\top\boldsymbol{\mu}-\lambda\mathbf{w}^\top\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}\\ \text{subject to} & \mathbf{1}^\top\mathbf{w}=1\\ & \|\mathbf{w}\|_0\leq K\end{array}$$

那么如何求解上面这些优化问题？显然，若不带稀疏限制条件，这类优化问题为二次规划（QP）问题。

从马科维茨均值方差模型知道，我们希望去最大化预期收益并最小化风险。1966年，威廉夏普首次提出了最大化夏普比率的模型：

$$\begin{array}{ll}\underset{\mathbf{w}}{\text{maximize}} & \frac{\mathbf{w}^T\boldsymbol{\mu}-r_f}{\sqrt{\mathbf{w}^T\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}}}\\ \text{subject to} & \mathbf{1}^T\mathbf{w}=1\end{array}$$

其中r_f代表无风险资产收益率，这里的目标函数虽然和马科维茨均值方差模型有差别，但是目的都是希望预期收益最大化而风险最小化。最大化夏普比率模型相比马科维茨的好处在于少了参数$\boldsymbol{\lambda}$的存在，不需要在实际操作中去选择参数。虽然现在目标函数不是凸函数了，但是这样一类问题属于分段规划（FP）问题，有许多现有的方法可以求解这样一类问题。

其他模型

在实际生活中，行业从业人员从未完全接受过马科维茨均值方差投资组合，因为在实际应用中，方差不是实际风险的一个好的估量。其同时惩罚了不想要的高损失以及希望的低损失，对于这个问题的解决方法是使用其他可替代的风险估量，比如VaR和CVaR（McNeil et al. 2005）。

J.P.Morgan首次提出了Value-at-Risk (VaR)来衡量单边风险，其中VaR指的是在特定置信水平下的最大损失。VaR的定义为：

$$\mathrm{VaR}_\alpha=\inf\{\xi_0:\Pr(\xi\leq\xi_0)\geq\alpha\}$$

其中α为置信水平。

条件VaR (CVaR)的定义为

$$\mathrm{CVaR}_\alpha = \mathrm{E}\left[\xi \mid \xi \geq \mathrm{VaR}_\alpha\right]$$

Rockafellar和Uryasev在2000年首次提出最小化CVaR所建立的投资组合：

$$\begin{array}{ll}\underset{\mathbf{w}}{\operatorname{minimize}} & \mathrm{CVaR}_\alpha\left(\mathbf{w}^\top \mathbf{r}\right) \\ \text{subject to} & \mathbf{1}^\top \mathbf{w}=1, \quad \mathbf{w} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

其中

$$\mathrm{CVaR}_\alpha\left(\mathbf{w}^\top \mathbf{r}\right)=\mathbf{E}\left[\mathbf{w}^\top \mathbf{r} \mid \mathbf{w}^\top \mathbf{r} \geq \mathrm{VaR}_\alpha\left(\mathbf{w}^\top \mathbf{r}\right)\right]$$

定义辅助凸函数：

$$F_\alpha(\mathbf{w}, \zeta)=\zeta+\frac{1}{1-\alpha} \mathrm{E}\left[-\mathbf{w}^\top \mathbf{r}-\zeta\right]^{+}$$

其中$[x]^{+}=\max (x, 0)$，Rockafellar和Uryasev证明了

- VaR_α是函数$F_\alpha(\mathbf{w}, \zeta)$对于$\zeta$的一个极小值点：
$$\mathrm{VaR}_\alpha\left(-\mathbf{w}^\top \mathbf{r}\right) \in \arg \min _\zeta F_\alpha(\mathbf{w}, \zeta)$$
- $\mathrm{CVaR}_\alpha\left(\mathbf{w}^T \mathbf{r}\right)$等于$F_\alpha(\mathbf{w}, \zeta)$的最小值点：
$$\mathrm{CVaR}_\alpha\left(-\mathbf{w}^\top \mathbf{r}\right)=\min _\zeta F_\alpha(\mathbf{w}, \zeta)$$

同时， 他们给出了推论：

$$\min _{\mathbf{w}} \mathrm{CVaR}_\alpha\left(-\mathbf{w}^\top \mathbf{r}\right)=\min _{\mathbf{w}, \zeta} F_\alpha(\mathbf{w}, \zeta)$$

即最小化函数$F_\alpha(\mathbf{w}, \zeta)$等价于计算CVaR的最优点。

考虑样本平均作为函数$F_\alpha(\mathbf{w}, \zeta)$的近似：

$$\begin{aligned} F_\alpha(\mathbf{w}, \zeta) & =\zeta+\frac{1}{1-\alpha} \mathrm{E}\left[-\mathbf{w}^\top \mathbf{r}-\zeta\right]^{+} \\ & \approx \zeta+\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T\left[-\mathbf{w}^\top \mathbf{r}_t-\zeta\right]^{+}\end{aligned}$$

进一步考虑哑变量z_t，

$$z_t \geq\left[-\mathbf{w}^\top \mathbf{r}_t-\zeta\right]^{+} \Longrightarrow z_t \geq-\mathbf{w}^\top \mathbf{r}_t-\zeta, z_t \geq 0$$

那原先的CVaR最小化优化问题可以转化为LP问题：

$$\begin{array}{ll}\underset{\mathbf{w},\left\{z_t\right\}, \zeta}{\operatorname{minimize}} & \zeta+\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^\top z_t \\ \text{subject to} & 0 \leq z_t \geq-\mathbf{w}^\top \mathbf{r}_t-\zeta, \quad t=1, \ldots, T \\ & \mathbf{1}^\top \mathbf{w}=1, \quad \mathbf{w} \geq \mathbf{0}\end{array}$$

同理，我们可以考虑将马科维茨均值方差模型中对风险刻画的协方差替换为CVaR，即考虑优化问题：

$$
\begin{array}{ll}
\underset{\mathbf{w},\{z_t\},\zeta}{\text{minimize}} & \mathbf{w}^\top \mu - \lambda(\zeta + \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} z_t) \\
\text{subject to} & 0 \leq z_t \geq -\mathbf{w}^\top \mathbf{r}_t - \zeta, \quad t = 1,\ldots,T \\
& \mathbf{1}^\top \mathbf{w} = 1, \quad \mathbf{w} \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

我们可以通过CVX工具包来进行求解。