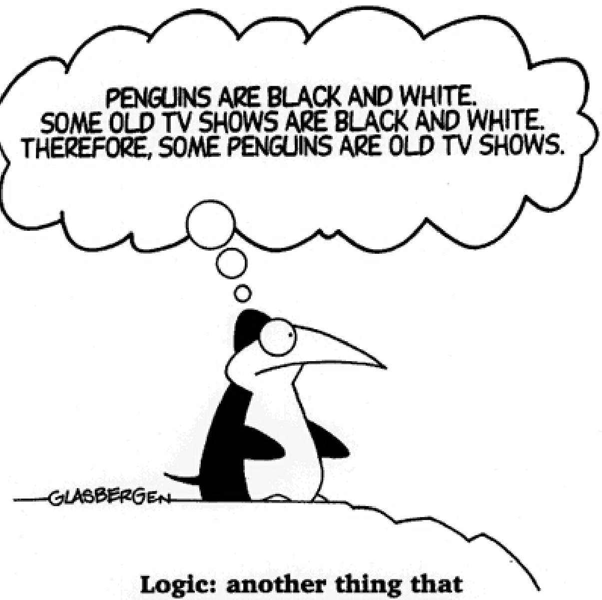
— Lógica —

Fundamentos de Matemática Discreta para Controle e Automação

Jomi F. Hübner

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Automação e Sistemas
http://jomi.das.ufsc.br/das6609/

PGEAS 2020/1



Logic: another thing that penguins aren't very good at.

Conteúdo

Motivação: verificação de argumentos

(ou obtenção de novo conhecimento por raciocínio e dedução)

1
- Se hoje é domingo, então não tem aula
- Hoje é domingo

Motivação: verificação de argumentos

(ou obtenção de novo conhecimento por raciocínio e dedução)

1

- Se hoje é domingo, então não tem aula
- Hoje é domingo

$\therefore$ Portanto, hoje não tem aula

Motivação: verificação de argumentos
(ou obtenção de novo conhecimento por raciocínio e dedução)

1.
   - Se hoje é domingo, então não tem aula
   - Hoje é domingo

   $\therefore$ Portanto, hoje não tem aula

2.
   - Se hoje é domingo, então não tem aula
   - Hoje não tem aula

Motivação: verificação de argumentos

(ou obtenção de novo conhecimento por raciocínio e dedução)

1.
   - Se hoje é domingo, então não tem aula
   - Hoje é domingo

   $\therefore$ Portanto, hoje não tem aula

2.
   - Se hoje é domingo, então não tem aula
   - Hoje não tem aula

   $\therefore$ Portanto, hoje não é domingo (!!!)

Motivação: verificação de argumentos I

Monty Phthon and the Holy Grail, 1977

camponês	Nós encontramos uma bruxa. Devemos queimá-la?
todos	Uma Bruxa! Queimem-na!
Bedevere	Por que você pensa que ela é uma bruxa?
camponês	Ela me transformou em um tritão.
Bedevere	Um tritão?
camponês	É, mas eu vou melhorar...
todos	Queimem ela mesmo assim.
Bedevere	Quietos! Quietos! Existem muitas formas de saber se ela é uma bruxa.
Bedevere	Digam-me ... o que vocês fazem com as bruxas?
todos	As queimamos

(`https://www.youtube.com/watch?v=zrzMhU_4m-g`)

Motivação: verificação de argumentos II

Monty Phthon and the Holy Grail, 1977

Bedevere	E, além de bruxas, o que mais vocês queimam?
camponês	... madeira?
Bedevere	Então, por que as bruxas queimam?
camponês	Porque elas são feitas de madeira?
Bedevere	Bom!
todos	Eu percebo. Sim, claro.

Estrutura do argumento:

- madeira queima ($M \rightarrow Q$)
- bruxa queima ($B \rightarrow Q$)
- portanto, bruxas são de madeira ($B \rightarrow M$)

Motivação: verificação de argumentos III

Monty Phthon and the Holy Grail, 1977

Bedevere	Então, como podemos verificar se ela é feita de madeira?
camponês	Fazendo uma ponte com ela;
Bedevere	Ah.... mas você também pode fazer pontes de pedra?
todos	Sim, claro... hum.... er.....
Bedevere	A madeira afunda na água?
todos	Não, não, ela flutua... Arremessem ela da ponte.
Bedevere	Esperem. Esperem... digam-me, o que mais flutua na água?
todos	Pão? Não, não, ... Maças ... pequenas pedras...
Bedevere	não, não ....

Motivação: verificação de argumentos IV

Monty Phthon and the Holy Grail, 1977

Rei Arthur	um pato! (*todos se viram para Arthur. Bedevere olha para ele muito impressionado)*
Bedevere	Exatamente. Então.... **logicamente**...
camponês	Se ela.... pesar o mesmo que um pato... ela é feita de madeira.
Bedevere	E portanto?
todos	uma bruxa!

Motivação: verificação de argumentos V

Monty Phthon and the Holy Grail, 1977

Estrutura do argumento:

- Madeira flutua ($M \rightarrow F$)
- Patos flutuam ($P \rightarrow F$)
- Bruxas são feitas de madeira ($B \rightarrow M$)

- Se uma pessoa pesa o mesmo que um pato, ela flutua ($U \rightarrow F$)
- Se flutua, é feita de madeira ($F \rightarrow M$)
  (distorceu a premissa anterior que era $M \rightarrow F$)
- Se é feita de madeira, é bruxa ($M \rightarrow B$)
  (novamente distorceu a premissa anterior que era $B \rightarrow M$)

De qualquer forma, se aceitas as últimas três premissas e o fato de que U é verdade, a conclusão é razoável.

Motivação: análise e resolução de problemas

(de forma precisa, correta, computável, ...)

Considere um jogo com cartas, onde cada carta tem em um lado uma letra e no outro um número, que tem apenas uma regra:

> *Se um lado da carta tem a letra "D", o outro lado deve ter o número "3"*.

Supondo que as seguintes cartas estão "sobre a mesa"

```
D  F  3 7
```

Quantas cartas precisam ser viradas para saber se as quatro estão respeirando a regra acima?

Motivação

the study of logic is one of the best ways to refine one's natural ability to reason and argue

— *The power of Logic*

Próximos passos

1. Como representar os problemas $\rightsquigarrow$ linguagem da lógica
2. Como 'encontrar' a solução $\rightsquigarrow$ dedução lógica

Lógica **Proposicional**

- *Linguagem* para falar de proposições
  - Sintaxe
  - Semântica

- *Cálculo* para fazer deduções sobre as proposições
  - Sistemas de prova
    - Dedução Natural
    - Resolução
    - ...

Linguagens para **pensar** em Lógica I

- Língua portuguesa
  - Pequenos cachorros e gatos.
  - Quem é pequeno?
  - João está vendo a casa em cima do morro.
  - Onde está a casa?
  - Vacas não gostam de erva.
  - Que tipo de erva?

  - A língua portuguesa muito expressiva, mas *ambígua*.

Linguagens para **pensar** em Lógica II

- Linguagens de programação
  - Permite descrever algoritmos e estruturas de dados que determinam o estado de um computador e como ele se altera durante a execução do algoritmo

  - Mas não é adequado para escrever conhecimento, verdades, argumentos, ...

Linguagens para **pensar** em Lógica III

- *Linguagens lógicas*: procuram ser expressivas e não ambíguas
  - $P \equiv$ pequenos cachorros
    $Q \equiv$ pequenos gatos
    $P \wedge Q$: indica que ambos são pequenos
  - $\texttt{em\_cima}(\texttt{joao}, \texttt{morro})$
    $\texttt{em\_baixo}(\texttt{casa})$
    $\texttt{vendo}(\texttt{joao}, \texttt{casa})$

Tipos de sentenças

- *Imperativas*: `a := a + 1;`
- *Exclamativas*: Que bolo gostoso!
- *Interrogativas*: Está frio?
- *Declarativas*
  - Está chovendo
  - `a > 3`

  Às frases declarativas pode-se atribuir um valor **verdadeiro** ou **falso**
- A Lógica Proposicional estuda esse tipo de sentenças

Alfabeto

O alfabeto da lógica proposicional é constituído dos seguintes símbolos:

- símbolos de pontuação: *(,)*
- símbolos verdade: $\top$, $\bot$
- símbolos proposicionais: P, Q, R, P_1, ...
- conectivos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

Fórmulas I

- Os símbolos verdade são fórmulas.
- Os símbolos proposicionais são fórmulas.
- Se α (alpha) e β (beta) são fórmulas da Lógica Proposicional, então também são fórmulas

$\neg\alpha$	negação
$\alpha \wedge \beta$	conjunção
$\alpha \vee \beta$	disjunção
$\alpha \oplus \beta$	ou exclusivo
$\alpha \rightarrow \beta$	implicação (α é o antecedente, β é o consequente)
$\alpha \leftrightarrow \beta$	bi-implicação

⏩ pula detalhes

Fórmulas II

Exemplos fórmulas *bem* formadas:

- $(Q \wedge P)$
- $\top$
- $\neg P$ (os parênteses mais externos pode ser omitidos)
- $(Q \wedge P) \to (R \vee (S \wedge Q))$

Exemplos fórmulas *mal* formadas:

- $(QP\wedge)$
- $\top \to$
- $P\neg$

Ordem de **Precedência**

Para simplificar a escrita das fórmulas, utiliza-se a seguinte ordem de precedência entre os conectivos

- (maior precedência) $\neg \ \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$ (menor precedência)
- A fórmula
  - $(((Q \wedge P) \vee (\neg S)) \rightarrow Q)$
- pode ser resumida como
  - $Q \wedge P \vee \neg S \rightarrow Q$

Subfórmulas

- Se α é uma fórmula, então α subfórmula de α
- Se $\alpha = \neg\beta$ é uma fórmula, então β é subfórmula de α
- Se $\alpha = \gamma \wedge \beta$, $\gamma \vee \beta$, $\gamma \rightarrow \beta$ ou $\gamma \leftrightarrow \beta$, então γ e β são subfórmulas de α
- Se β é subfórmula de α, então todas as subfórmulas de β também são subfórmulas de α

Semântica da Lógica Proposicional

- Para cada fórmula da Lógica Proposicional é associado ou o valor v ou o valor f (*princípio do terceiro excluído*)
  - (não confundir com o símbolo sintático $\top$ e $\bot$)

- Nenhuma fórmula é simultaneamente verdadeira e falsa (*princípio da não contradição*)

Função de **Interpretação** I

A associação de um valor verdade (v ou f) a uma fórmula é feita pela função de interpretação

$$I : Formulas \to \{v, f\}$$

- $I(\top) = v$: a interpretação da fórmula $\top$ é v
- $I(\bot) = f$: a interpretação da fórmula $\bot$ é f
- $I(P) =$?
  depende ao que o símbolo P se refere.
  Se $P \equiv$ "está chovendo",
  $I(P) = v$ se for o caso de estar chovendo.

Função de **Interpretação** II

Nos casos de fórmulas com conectivos, a interpretação da fórmula é dada pela interpretação de suas subfórmulas juntamente com a semântica dos conectivos

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \oplus Q$
v	v	f	v	v	v	v	f
v	f	f	f	v	f	f	v
f	v	v	f	v	v	f	v
f	f	v	f	f	v	v	f

$I(P \wedge Q) = v$ se $I(P) = v$ e $I(Q) = v$

pula detalhes

Tipos de implicação

lógica	se Sócrates é homem e todos os homens são mortais, então Sócrates é mortal
definição	se Carlos é solteiro, então ele não é casado
causal	se chover, então o telhado fica molhado
decisão	se o Avaí perder, então eu como o meu chapéu
discurso	se Hitler era um gênio, então eu sou tio de um chimpanzé

O que todas essas implicações têm em comum?

Não pode acontecer de o antencedente ser verdadeiro e o consequente ser falso (*implicação material*)

Implicação **material**

P	Q	$P \to Q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

- As duas últimas linhas não são estranhas?
  Se a lua é feita de queijo, então existe vida em outros planetas

  Se $2 > 5$*, bananas são amarelas*

  (basta P ser falso para a implicação ser verdadeira!)

Implicação **material**

P	Q	$P \to Q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

- As duas últimas linhas não são estranhas?
  Se a lua é feita de queijo, então existe vida em outros planetas

  Se $2 > 5$*, bananas são amarelas*

  (basta P ser falso para a implicação ser verdadeira!)

$\rightsquigarrow$ A implicação material não é a implicação causal, mas a causal é material

`http://www.earlham.edu/~peters/courses/log/mat-imp.htm`

Condições

- em $\alpha \to \beta$
  - α é condição *suficiente* para β
  - β é condição *necessária* para α
- Exemplo: Se x é primo e maior que 2, x é ímpar
  - ser primo maior que 2 é condição *suficiente* para ser ímpar
  - ser ímpar é condição *necessária* para ser primo maior que 2
- Pode se ler $\alpha \to \beta$
  - se α, então β
  - α somente se β

Equivalência lógica

- Se duas fórmulas α e β têm os mesmos valores para qualquer interpretação (têm a mesma tabela verdade)
- Estas fórmulas são equivalentes

$$\alpha \equiv \beta$$

- Exemplo: $\neg P \vee Q \equiv P \rightarrow Q$

Exemplo: **Expressões booleanas**

A expressão booleana (em pascal)

```
(a > 0) or ((a > 0 and (b = 3))
```

Pode ser simplificada

- $P \equiv$ `a > 0`, $Q \equiv$ `b = 3`
- Traduzindo para a lógica proposicional
  $(P \vee (P \wedge Q))$
- Utilizando a equivalência $(P \vee (P \wedge Q)) \equiv P$
- podemos escrever a expressão booleana como
  `(a > 0)`

Tautologias

- Uma fórmula α é uma tautologia (ou é *válida*) se e somente se, para qualquer interpretação I, $I(\alpha) = v$. (denota-se $\models \alpha$)
- Exemplo: a fórmula $P \vee \neg P$ pode ter duas interpretação possíveis (I ou J):
  - Uma onde $I(P) = v$, neste caso $I(P \vee \neg P) = v$
  - outra onde $J(P) = f$, neste caso $J(P \vee \neg P) = v$
- Como cada linha de uma tabela verdade é uma interpretação possível, se uma fórmula tem o valor v em todas as linhas, esta fórmula é uma *tautologia*

Fórmula **contraditória**

- Uma fórmula α é contraditória (ou *insatisfatível*) se e somente se, para qualquer interpretação I, $I(\alpha) = f$
- Exemplo: a fórmula $P \wedge \neg P$ pode ter duas interpretação possíveis (I ou J):
  - Uma onde $I(P) = v$, neste caso $I(P \wedge \neg P) = f$
  - outra onde $J(P) = f$, neste caso $J(P \wedge \neg P) = f$
- Como cada linha de uma tabela verdade é uma interpretação possível, se uma fórmula tem o valor f em todas as linhas, esta fórmula é uma *contradição*

Fórmula **satisfatível**

- Uma fórmula α é satisfatível (ou *factível*) se e somente se existir pelo menos uma interpretação I tal que $I(\alpha) = v$ (denota-se $\models_I \alpha$)
- Sendo que cada linha de uma tabela verdade é uma interpretação possível, se uma fórmula tem o valor v em pelo menos uma das linhas, esta fórmula é *satisfatível*
- Para qualquer fórmula α é possível construir uma tabela verdade e portanto verificar suas propriedades (apesar deste processo ser tedioso)

Exemplos

Fórmula	**Tautologia**	**I** para não ser tautologia
$Fumar \rightarrow Fumar$		

Exemplos

Fórmula	**Tautologia**	**I** para não ser tautologia
$Fumar \to Fumar$	sim	
$Fumar \vee \neg Fumar$		

Exemplos

Fórmula	**Tautologia**	**I** para não ser tautologia
$Fumar \rightarrow Fumar$	sim	
$Fumar \vee \neg Fumar$	sim	
$Fumar \rightarrow Fogo$		

Exemplos

Fórmula	**Tautologia**	**I** para não ser tautologia
$Fumar \rightarrow Fumar$	sim	
$Fumar \vee \neg Fumar$	sim	
$Fumar \rightarrow Fogo$	satisfatível	I(Fumar) = v e I(Fogo) = f
$(S \rightarrow P) \rightarrow (\neg S \rightarrow \neg P)$		

Exemplos

Fórmula	**Tautologia**	**I** para não ser tautologia
$Fumar \to Fumar$	sim	
$Fumar \vee \neg Fumar$	sim	
$Fumar \to Fogo$	satisfatível	I(Fumar) = v e I(Fogo) = f
$(S \to P) \to (\neg S \to \neg P)$	satisfatível	I(S) = f e I(P) = v
$P \vee Q \vee \neg P \vee \neg Q$		

Exemplos

Fórmula	**Tautologia**	**I** para não ser tautologia
$Fumar \rightarrow Fumar$	sim	
$Fumar \vee \neg Fumar$	sim	
$Fumar \rightarrow Fogo$	satisfatível	I(Fumar) = v e I(Fogo) = f
$(S \rightarrow P) \rightarrow (\neg S \rightarrow \neg P)$	satisfatível	I(S) = f e I(P) = v
$P \vee Q \vee \neg P \vee \neg Q$	sim	

Relações entre as propriedades

- Se uma fórmula **é** uma tautologia então ela

Relações entre as propriedades

- Se uma fórmula **é** uma tautologia então ela
  - é satisfatível
- Se uma fórmula **não é** tautologia então ela

Relações entre as propriedades

- Se uma fórmula **é** uma tautologia então ela
  - é satisfatível
- Se uma fórmula **não é** tautologia então ela

Relações entre as propriedades

- Se uma fórmula **é** uma tautologia então ela
  - é satisfatível
- Se uma fórmula **não é** tautologia então ela
  - pode ser satisfatível ou
  - pode ser contraditória

Relações entre as propriedades

- Se uma fórmula **é** uma tautologia então ela
  - é satisfatível
- Se uma fórmula **não é** tautologia então ela
  - pode ser satisfatível ou
  - pode ser contraditória
- Se uma fórmula **é** satisfatível então ela

Relações entre as propriedades

- Se uma fórmula **é** uma tautologia então ela
  - é satisfatível
- Se uma fórmula **não é** tautologia então ela
  - pode ser satisfatível ou
  - pode ser contraditória
- Se uma fórmula **é** satisfatível então ela
  - não é uma contradição
  - pode ser tautologia

Relações entre as propriedades

- Se uma fórmula **é** uma tautologia então ela
  - é satisfatível
- Se uma fórmula **não é** tautologia então ela
  - pode ser satisfatível ou
  - pode ser contraditória
- Se uma fórmula **é** satisfatível então ela
  - não é uma contradição
  - pode ser tautologia
- Se uma fórmula **não é** satisfatível então ela

Relações entre as propriedades

- Se uma fórmula **é** uma tautologia então ela
  - é satisfatível
- Se uma fórmula **não é** tautologia então ela
  - pode ser satisfatível ou
  - pode ser contraditória
- Se uma fórmula **é** satisfatível então ela
  - não é uma contradição
  - pode ser tautologia
- Se uma fórmula **não é** satisfatível então ela
  - é uma contradição

Relações entre as propriedades

- Se uma fórmula **é** uma tautologia então ela
  - é satisfatível
- Se uma fórmula **não é** tautologia então ela
  - pode ser satisfatível ou
  - pode ser contraditória
- Se uma fórmula **é** satisfatível então ela
  - não é uma contradição
  - pode ser tautologia
- Se uma fórmula **não é** satisfatível então ela
  - é uma contradição
  - não é tautologia

Relações entre as propriedades

- Se uma fórmula **é** contraditória ela

Relações entre as propriedades

- Se uma fórmula **é** contraditória ela
  - não é satisfatível e
  - não é tautologia

Relações entre as propriedades

- Se uma fórmula **é** contraditória ela
  - não é satisfatível e
  - não é tautologia
- Se uma fórmula **não é** contraditória ela

Relações entre as propriedades

- Se uma fórmula **é** contraditória ela
  - não é satisfatível e
  - não é tautologia
- Se uma fórmula **não é** contraditória ela
  - é satisfatível e
  - pode ser tautologia

Relações entre as propriedades

- Se uma fórmula **é** contraditória ela
  - não é satisfatível e
  - não é tautologia
- Se uma fórmula **não é** contraditória ela
  - é satisfatível e
  - pode ser tautologia
- Se uma fórmula não é tautologia nem contraditória então ela

Relações entre as propriedades

- Se uma fórmula **é** contraditória ela
  - não é satisfatível e
  - não é tautologia
- Se uma fórmula **não é** contraditória ela
  - é satisfatível e
  - pode ser tautologia
- Se uma fórmula não é tautologia nem contraditória então ela
  - é satisfatível

Método da **Refutação**

- O método da refutação permite verificar se uma fórmula é **tautologia**
- Baseado em provas por *contra-exemplo* – não precisa fazer toda a tabela verdade, só achar um contra exemplo

Algoritmo para o Método da Refutação

- Para verificar se a fórmula α é tautologia,
  - nega-se α
  - são utilizadas deduções sobre α para concluir um fato absurdo
  - se se chegar a um absurdo em **todas** as possibilidades de encaminhamento das deduções, a negação de α é um absurdo, logo α é uma tautologia
  - senão, não é tautologia

Verificar se $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ é válido

	$((P$	$\rightarrow$	$Q)$	$\wedge$	$(Q$	$\rightarrow$	$R))$	$\rightarrow$	$(P$	$\rightarrow$	$R)$
1.								f			
2.				v						f	
3.		v				v			v		f
4.	v						f				
5.			v								
6.					f						

Chegou-se a um absurdo, pois $I(Q)$ não pode ser v e ao mesmo tempo f (princípio da não contradição)

Outros exemplos

- $P \vee \neg P$
- Ausência de absurdo:
  - $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\neg P) \rightarrow (\neg Q))$
  - $(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

Método da refutação para provar a **contradição** de uma fórmula

- O método da refutação é usado para provar que α é uma tautologia mostrando que é impossível uma interpretação $I(\alpha) = f$
- De forma análoga, o método da refutação pode ser usado para provar que α é uma contradição mostrando que é impossível uma interpretação $I(\alpha) = v$
- Se o fato de α ter valor v implicar em um absurdo, então α não pode ter esse valor, portanto é uma contradição

Exemplos I

Verificar se $(P \wedge \neg P)$ é uma contradição

	$(P$	$\wedge$	$\neg$	$P)$
1.		v		
2.	v		v	
3.				f

Chegou-se a um absurdo, pois $I(P)$ não pode ser v e ao mesmo tempo f (princípio da não contradição)

	$\neg$	$((P$	$\vee$	$(P$	$\wedge$	$Q))$	$\leftrightarrow$	$P)$	
1.	v								
2.							f		
3.1			v					f	1.possibilidade
3.2		f		f					
3.3					v				
3.4				v		v			absurdo
4.1			f					v	2.possibilidade
4.2		v							absurdo

Como avaliar argumentos?

1. - Se um lado da carta tem a letra "D", o outro lado deve ter o número "3" ($D \to T$)
   - Estou vendo um "D" (D)

   $\therefore$ Portanto, tem que ter um três do outro lado dessa carta (T)

2. - Se um lado da carta tem a letra "D", o outro lado deve ter o número "3" ($D \to T$)
   - Estou vendo um "F" (F)

   $\therefore$ Portanto, tem um três do outro lado dessa carta (T)

   $\therefore$ Portanto, não tem um três do outro lado dessa carta ($\neg T$)

Identificar as proposições e suas relações *não* é suficiente para saber se o 'pensamento tem lógica'

O que a **Lógica** estuda?

Tentativa sistemática de distinguir argumentos válidos de inválidos

O que a **Lógica** estuda?

Tentativa sistemática de distinguir argumentos válidos de inválidos

- Mas o que são *argumentos*?
- o que é um argumento *válido*?

Argumento = Premissas + conclusão

- Argumento:
  - Marcos tirou 5 em programação I.
    Portanto, Marcos não pode fazer programação II.

Argumento = Premissas + conclusão

- Argumento:
  - Marcos tirou 5 em programação I.
    Portanto, Marcos não pode fazer programação II.
- Premissa explícita:
- Premissas implícitas:

Argumento = Premissas + conclusão

- Argumento:
    - Marcos tirou 5 em programação I.
      Portanto, Marcos não pode fazer programação II.
- Premissa explícita:
    - Marcos tirou 5 em programação I
- Premissas implícitas:
    - para fazer programação II, precisa ter passado em Programação I
    - para passar em programação I, precisa de nota maior que 5,99.

Argumento = Premissas + conclusão

- Argumento:
  - Marcos tirou 5 em programação I.
    Portanto, Marcos não pode fazer programação II.
- Premissa explícita:
  - Marcos tirou 5 em programação I
- Premissas implícitas:
  - para fazer programação II, precisa ter passado em Programação I
  - para passar em programação I, precisa de nota maior que 5,99.
- Conclusão: Marcos não pode fazer programação II.

Argumento **válido**

1

- Se hoje é domingo, então não tem aula (premissa)
- Hoje é domingo (premissa)

Argumento **válido**

1

- Se hoje é domingo, então não tem aula (premissa)
- Hoje é domingo (premissa)

$\therefore$ Portanto, hoje não tem aula (conclusão)

Argumento **válido**

1. - Se hoje é domingo, então não tem aula (premissa)
   - Hoje é domingo (premissa)
   - ∴ Portanto, hoje não tem aula (conclusão)

2. - Todos os estudantes da UFSC são inteligentes (premissa)
   - Marcos é um estudante da UFSC (premissa)

Argumento **válido**

1.
   - Se hoje é domingo, então não tem aula (premissa)
   - Hoje é domingo (premissa)
   - $\therefore$ Portanto, hoje não tem aula (conclusão)

2.
   - Todos os estudantes da UFSC são inteligentes (premissa)
   - Marcos é um estudante da UFSC (premissa)
   - $\therefore$ Portanto, Marcos é inteligente (conclusão)

Argumento **inválido**

1

- Se hoje é domingo, então não tem aula (premissa)
- Hoje não tem aula (premissa)

Argumento **inválido**

1

- Se hoje é domingo, então não tem aula (premissa)
- Hoje não tem aula (premissa)

$\therefore$ Portanto, hoje é domingo (conclusão)

Argumento **inválido**

1.
   - Se hoje é domingo, então não tem aula (premissa)
   - Hoje não tem aula (premissa)

   $\therefore$ Portanto, hoje é domingo (conclusão)

2.
   - Marcos é um aluno inteligente (premissa)
   - Marcos também é um aluno da UFSC (premissa)

Argumento **inválido**

1.
   - Se hoje é domingo, então não tem aula (premissa)
   - Hoje não tem aula (premissa)
   - $\therefore$ Portanto, hoje é domingo (conclusão)

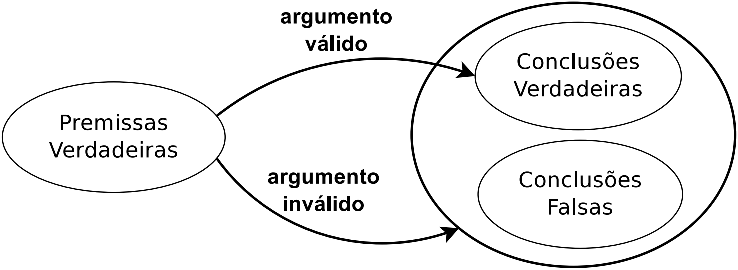
2.
   - Marcos é um aluno inteligente (premissa)
   - Marcos também é um aluno da UFSC (premissa)
   - $\therefore$ Portanto, todos os alunos da UFSC são inteligentes (conclusão)

Argumento **válido**

Definição

- Sempre que as premissas forem verdadeiras, a conclusão também é

$\therefore$ Preserva a verdade das premissas



Argumento e **verdade**

O argumento não está relacionado ao fato das premissas serem ou não verdadeiras

- Exemplo:
  - Marcos é rico. (premissa)
  - Todo rico é feliz. (premissa)
  - Marcos é feliz. (conclusão)
- As premissas são verdadeiras? O argumento é válido?

Argumento e **verdade**

O argumento não está relacionado ao fato das premissas serem ou não verdadeiras

- Exemplo:
  - Marcos é rico. (premissa)
  - Todo rico é feliz. (premissa)
  - Marcos é feliz. (conclusão)
- As premissas são verdadeiras? O argumento é válido?
- Exemplo:
  - O céu é azul ou a grama é verde. (premissa)

  $\therefore$ Portanto, o céu é azul. (conclusão)
- As premissas são verdadeiras? O argumento é válido?

Validade e **forma** I

- Se hoje é domingo, então não tem aula.
  Hoje é domingo.

$\therefore$ Portanto, hoje não tem aula.

- Se dinheiro é tempo, então tempo é dinheiro.
  Dinheiro é tempo.

$\therefore$ Portanto, tempo é dinheiro.

- Se os femiões tem um *spin* de $1/2$, então os piões tem um *spin* de $-1/2$.
  Os femiões tem um *spin* de $1/2$.

$\therefore$ Portanto, os piões tem um *spin* de $-1/2$.

Validade e **forma** II

Forma geral do argumento

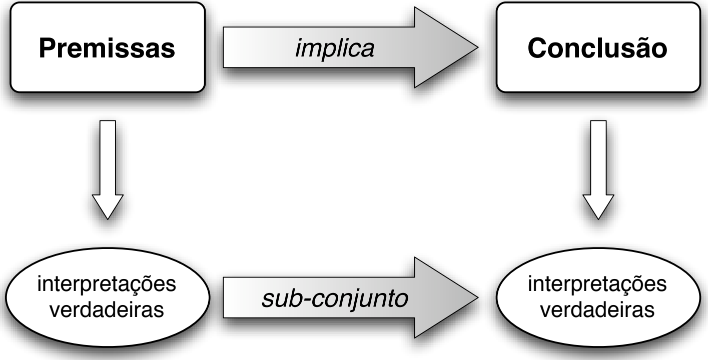
- Se x, então y.
- x.

$\therefore$ Portanto, y.

A validade de um argumento está relacionado
à sua forma e não ao seu conteúdo!

Implicação lógica

- Como verificar se um argumento é válido



- Um argumento com as premissas $P_1, P_2, ...$ e a conclusão S será representado por

$$P_1, P_2, ... \models S$$

- Para verificar se o argumento é válido, podemos montar e tabela verdade e conferir se o argumento é válido.

Definition (argumento válido — $P_1, P_2, ... \models S$)

Toda interpretação que satisfaz as premissas, deve satisfazer a conclusão.

Verificação da validade de um argumento II

método semântico

Exemplo: $P, P \to Q \models Q$.

	P	Q	P	$P \to Q$	$\models$	Q	
1	v	v	v	v		v	**
2	v	f	v	f		f	
3	f	v	f	v		v	
4	f	f	f	v		f	

- Interpretações que satisfazem as premissas: $\{1\}$.
- Interpretações que satisfazem a conclusão: $\{1\}$.
- Como $\{1\} \subset \{1\}$, o argumento é válido.

Verificação da validade de um argumento III

método semântico

- Outra forma de saber a validade de um argumento é verificar se

$$P_1 \wedge P_2 \wedge .... \rightarrow S$$

  é uma tautologia.
- Para verificar se a fórmula é tautologia, pode-se usar refutação, dispensando a construção da tabela verdade.

Exemplos de verificação de argumentos I

com **método semântico**

1
- Se hoje é domingo, então não tem aula ($D \to \neg A$)
- Hoje é domingo (D)

$\therefore$ Portanto, hoje não tem aula ($\neg A$)

2
- Se hoje é domingo, então não tem aula ($D \to \neg A$)
- Hoje não tem aula ($\neg A$)

$\therefore$ Portanto, hoje é domingo (D)

3
- Marcos estuda Computação **ou** gosta de matemática (premissa).
- Marcos não estuda Computação (premissa).

$\therefore$ Logo, Marcos gosta de matemática (conclusão).

pula detalhes

4

- Eu pagarei minhas contas se hoje for o quinto dia do mês.
- Meus credores não ficarão felizes se hoje não for o quinto dia do mês.
- Portanto, eu pagerei minhas contas ou meus credores não ficarão felizes.

Exemplo **D3**

- Estou vendo um “D” e sei que a regra é respeitada (se tem um D num lado, tem um 3 do outro lado).

$\therefore$ tem um “3” do outro lado.

$\therefore$ não tem um “3” do outro lado.

- Não estou vendo um “D” e sei que a regra é respeitada.

$\therefore$ tem um “3” do outro lado.

$\therefore$ não tem um “3” do outro lado.

Exemplo **D3**

- Estou vendo um "3" e sei que a regra é respeitada.

$\therefore$ tem um "D" do outro lado.

$\therefore$ não tem um "D" do outro lado.

Exemplo **D3**

- Estou vendo um “3” e sei que a regra é respeitada.

$\therefore$ tem um “D” do outro lado.

$\therefore$ não tem um “D” do outro lado.

- Não estou vendo um “3” e sei que a regra é respeitada.

$\therefore$ tem um “D” do outro lado.

$\therefore$ não tem um “D” do outro lado.

Exemplo do Marcos

- Imagine que
  - se hoje é domingo, então Marcos está feliz ($D \to F$)
  - se Marcos está feliz, ele dará uma boa aula ($F \to A$)
  - hoje é domingo (D)
- Pode-se concluir que a aula será boa?

Exemplo: **Detetives**

Premissas:

- **Se não** há sangue na cena do crime (S), o matador é um profissional (P). $\neg S \to P$
- **Ou** houve poucos ruídos no momento do crime (R) **ou** o matador **não** é um profissional. $(R \oplus \neg P)$
- **Não** há sangue na cena do crime. $\neg S$

Conclusões:

- É possível concluir que o *matador é profissional* ($(\neg S \to P), (R \oplus \neg P), (\neg S) \models P$)?
- É possível concluir que *houve poucos ruídos*? ($(\neg S \to P), (R \oplus \neg P), (\neg S) \models R$)

Exemplo: **Ana***

Se Anelise não for cantora ou Anamélia for pianista, então Anaís será professora. Se Ana for atleta, então Anamélia será pianista. Se Anelise for cantora, então Ana será atleta. Ora, sabe-se que Anamélia não será pianista.
É possível concluir que Anaís é professora?

Exemplo: **Socrátes e Platão**

Dado que

- Sócrates está em tal situação que ele estaria disposto a visitar Platão se Platão estivesse disposto a visitá-lo;
- Platão está em tal situação que ele não estaria disposto a visitar Sócrates se Sócrates estivesse disposto a visitá-lo;
- Platão está em tal situação que ele estaria disposto a visitar Sócrates se Sócrates não estivesse disposto a visitá-lo.

Pergunta-se: Sócrates está disposto a visitar Platão ou não?

Exemplo: **Porco voador**

- A rainha é rica (R)
- A rainha é pobre ($\neg R$)

$\therefore$ Os porcos voam (V)

Exemplo: **Porco voador**

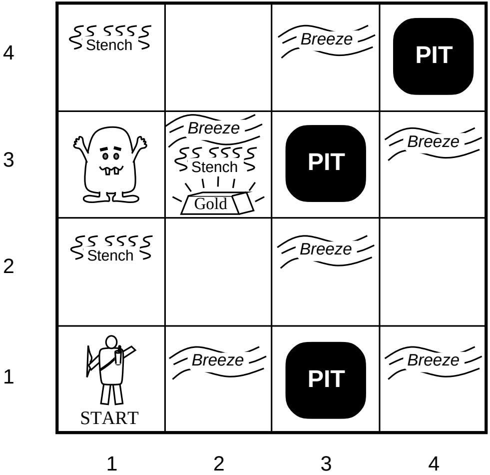
- A rainha é rica (R)
- A rainha é pobre ($\neg R$)

$\therefore$ Os porcos voam (V)

mas faria sentido:

- A rainha é rica (R), portanto a rainha é rica ou os porcos voam
- A rainha é rica ou os porcos voam e a rainha não é rica ($\neg R$), portanto os porcos voam (V)
- Por meio de uma conclusão intermediária, se chega razoavelmente na conclusão!

Wumpus World (Russel & Norvig)

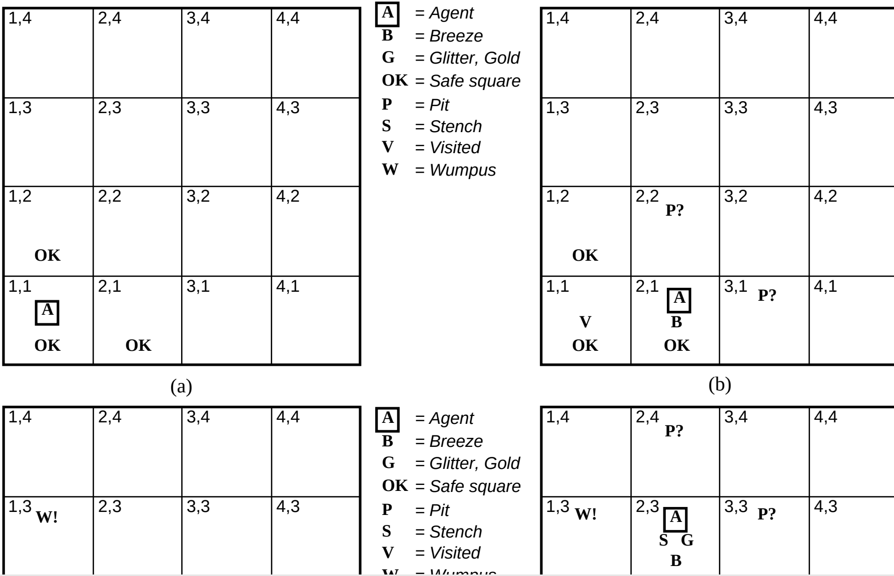


Ambiente do Wumpus

- Se o agente estiver em uma sala diretamente (não diagonalmente) ao lado da sala do Wumpus, perceberá um fedor (Stench).
- Em salas ao lado de uma sala com precipício (Pit), passa uma brisa (Breeze).
- Na sala com ouro, o agente percebe um brilho.
- O jogador tem apenas um tiro para tentar matar o Wumpus.
- Se o Wumpus for morto, dará um berro que será escutado em toda a caverna.
- O Jogador morre miseravelmente se ficar em uma sala com o Wumpus vivo ou entrar em uma sala com precipício.

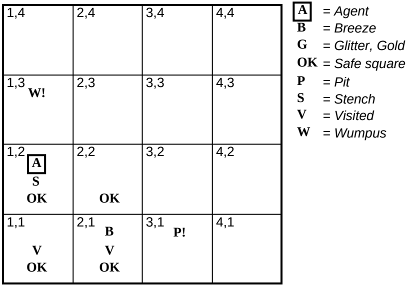
O **Agente** Wumpus

- *Objetivo*: entrar na caverna, pegar o ouro e sair o mais rápido possível.
- *Percebe* em cada sala: fedor, brisa, brilho do ouro, se está batendo em uma parede e o berro da morte do Wumpus.
- Pode *agir* da seguinte forma: virar 90 graus para direita ou esquerda, ir em frente, atirar no Wumpus, sair da caverna (só funciona na posição 1,1).


A = Agent
B = Breeze
G = Glitter, Gold
OK = Safe square
P = Pit
S = Stench
V = Visited
W = Wumpus
1,4 2,4 3,4 4,4
1,3 2,3 3,3 4,3
1,2 2,2 3,2 4,2
OK
1,1 2,1 3,1 4,1
A
OK OK
(a)
P?
OK
V B
OK OK
P?
(b)
W!
P?
W!
A
S G
B
P?

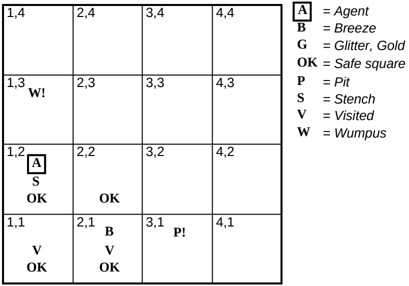
Formalização do problema

$\neg S11$, $\neg S21$, $S12$
$\neg S11 \rightarrow (\neg W11 \wedge \neg W12 \wedge \neg W21)$
$\neg S21 \rightarrow (\neg W11 \wedge \neg W21 \wedge \neg W22 \wedge \neg W31)$
$S12 \rightarrow (W13 \vee W12 \vee W22 \vee W11)$
$\vdots$
$\models W13$



Formalização do problema

$\neg S11, \neg S21, S12$
$\neg S11 \to (\neg W11 \wedge \neg W12 \wedge \neg W21)$
$\neg S21 \to (\neg W11 \wedge \neg W21 \wedge \neg W22 \wedge \neg W31)$
$S12 \to (W13 \vee W12 \vee W22 \vee W11)$
$\vdots$
$\models W13$



(qual o tamanho da tabela verdade para verificar o argumento?)

Decidibilidade

- A lógica proposicional é decidível: dado um argumento é possível dizer se ele é válido ou não
- Basta fazer a tabela verdade

- Complexidade (upper bound): 2^N
  (N é o número de proposições)

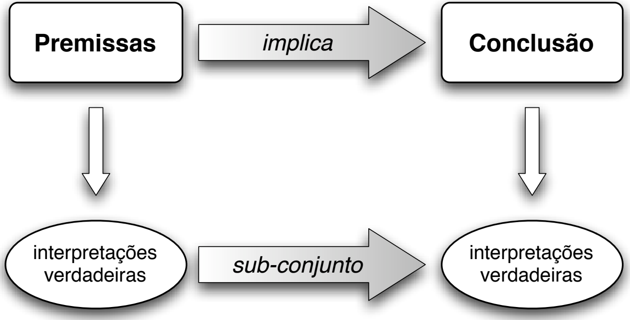
NP-Completo

Lógica **Proposicional**

- *Linguagem* para falar de proposições
  - Sintaxe
  - Semântica
- *Cálculo* para fazer deduções sobre as proposições
  - Sistemas de prova
    - **Dedução Natural**
    - **Resolução**
    - ...

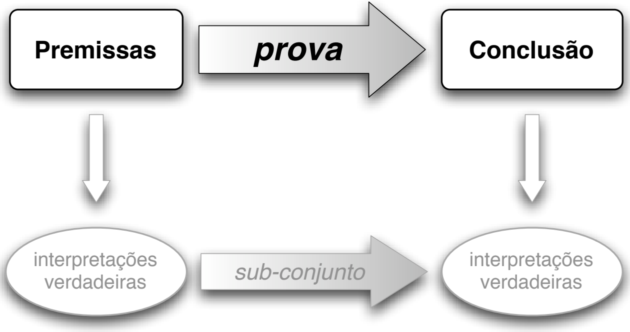
Implicação lógica

- Até agora, para verificar a implicação lógica ($\models$) entre fórmulas foram feitas referências à interpretação destas fórmulas.



- a quantidade de interpretações pode ser muito grande!

Prova



- Uma prova permite verificar, de forma *correta*, se as premissas implicam na conclusão sem a necessidade de recorrer a todas as interpretações.

Prova $\vdash$

- Seja α uma fórmula e Γ um conjunto de premissas.
- Um prova de α a partir de Γ é uma seqüência de fórmulas α_1, α_2, ..., α_n onde
  - $\alpha = \alpha_n$,
  - α_i é
    - uma fórmula de Γ ou
    - uma fórmula deduzida por uma *regra de inferência*
- Se existe uma prova para α a partir de Γ, então α é conseqüência lógica de Γ ($\Gamma \vdash \alpha$).

Regras de **Inferência**

- Dado um conjunto de premissas, uma regra de inferência permite *deduzir* novas informações. Notação:

$$\frac{\text{premissas}}{\text{conclusão}}\text{regra}$$

- Exemplo: *Modus Ponens*

$$\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}\text{MP}$$

A conclusão β é obtida sem referência aos valores verdade das fórmulas (mera manipulação sintática).

Exemplo I

- Dado que
  - se hoje é domingo, então Marcos está feliz ($S \rightarrow H$)
  - se Marcos está feliz, ele dará uma boa aula ($H \rightarrow G$)
  - hoje é domindo (S)

Exemplo II

- Prova para $S \to H, H \to G, S \vdash G$

1	$S \to H$	
2	$H \to G$	
3	S	
4	H	E$\to$ (MP), 1, 3
5	G	E$\to$ (MP), 2, 4

- Deduziu-se que será uma boa aula sem uso de tabelas verdade (sem recorrer à semântica).

Dedução Natural

- É um conjunto de regras de inferência que permite o *cálculo* das conseqüências de um conjunto de premissas.
- Procura formalizar a forma humana de "tirar conclusões", evitando o trabalho tedioso e mecânico das tabelas verdade.

Regras de inferência: **I**$\wedge$ e **E**$\wedge$

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \ \wedge \ \beta}\ I\wedge \qquad\qquad \frac{\alpha \ \wedge \ \beta}{\alpha}\ E\wedge \quad \frac{\alpha \ \wedge \ \beta}{\beta}\ E\wedge$$

- Exemplo: $P \wedge Q, R \vdash Q \wedge R$

1	$P \wedge Q$	
2	R	
3	Q	E$\wedge$, 1
4	$Q \wedge R$	I$\wedge$, 2, 3

- Exercício: $(P \wedge Q) \wedge R, S \wedge T \vdash Q \wedge S$

Regras de inferência: **I**$\neg\neg$ e **E**$\neg\neg$

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}\ I\neg\neg \qquad \frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}\ E\neg\neg$$

- Exemplo: $P, \neg\neg(Q \wedge R) \vdash \neg\neg P \wedge R$

1	P	
2	$\neg\neg(Q \wedge R)$	
3	$\neg\neg P$	I$\neg\neg$, 1
4	$Q \wedge R$	E$\neg\neg$, 2
5	R	E$\wedge$, 4
6	$\neg\neg P \wedge R$	I$\wedge$, 3, 5

Regras de inferência: **I**$\leftrightarrow$ e **E**$\leftrightarrow$

$$\frac{\alpha \to \beta \quad \beta \to \alpha}{\alpha \leftrightarrow \beta}\ I \leftrightarrow \qquad\qquad \frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha \to \beta}\ E \leftrightarrow$$

Regras de inferência: **E**$\rightarrow$

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta} \text{ (MP)} \qquad \frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \neg\beta}{\neg\alpha} \text{ (MT)}$$

- Exemplo: $P, P \rightarrow \neg Q, S \rightarrow Q \vdash \neg S$

1	P	
2	$P \rightarrow \neg Q$	
3	$S \rightarrow Q$	
4	$\neg Q$	E$\rightarrow$(MP), 1, 2
5	$\neg S$	E$\rightarrow$(MT), 4, 3

Exemplo: **Detetives**

Premissas:

- **Se não** há sangue na cena do crime (S), o matador é um profissional (P). $\neg S \rightarrow P$
- **Ou** houve poucos ruídos no momento do crime (R) **ou** o matador **não** é um profissional. $\neg(R \leftrightarrow \neg P)$
- **Não** há sangue na cena do crime. $\neg S$

Conclusões:

- É possível concluir que o *matador é profissional* ($(\neg S \rightarrow P), (\neg(R \leftrightarrow \neg P)), (\neg S) \vdash P$)?

Prova para o exemplo dos **Detetives**

1	$\neg S \to P$	
2	$\neg(R \leftrightarrow \neg P)$	
3	$\neg S$	
4	P	E$\to$(MP), 1, 3

Prova para o exemplo dos **Detetives**

1	$\neg S \to P$	
2	$\neg(R \leftrightarrow \neg P)$	
3	$\neg S$	
4	P	E$\to$(MP), 1, 3

Imagine um conectivo para o ou exclusivo $\oplus$, quais seriam as regras de inferência para ele? Utilize essas regras para provar que houve poucos ruídos R.

Exercícios com **E**$\rightarrow$

- $(\neg P \wedge Q), (\neg P \wedge Q) \rightarrow (R \vee \neg P) \vdash R \vee \neg P$
- $P \rightarrow (Q \rightarrow R), P \rightarrow Q, P \vdash R$
- $P \rightarrow (P \rightarrow Q), P \vdash Q$
- $(Q \vee S \vee T) \rightarrow P, \neg P \vdash \neg(Q \vee S \vee T)$
- $P \wedge Q, P \leftrightarrow \neg S, T \rightarrow S \vdash \neg T$

Regras de inferência: **I**$\vee$ e **E**$\vee$ I

$$\frac{\alpha}{\alpha \ \vee \ \beta}\ I\vee \qquad \frac{\alpha \ \vee \ \beta \quad \alpha \rightarrow \gamma \quad \beta \rightarrow \gamma}{\gamma}\ E\vee$$

- Exemplo: hoje é terça ou quarta, terça tem aula Lógica, quarta também tem aula de Lógica. Portanto tem aula de Lógica

1	$T \vee Q$	
2	$T \rightarrow L$	
3	$Q \rightarrow L$	
4	L	E$\vee$, 1, 2, 3

Exemplo: **Ana***

Premissas:

- **Se** Anelise **não** for cantora (P) **ou** Anamélia for pianista (Q), então Anaís será professora (R). $(\neg P \vee Q) \rightarrow R$
- **Se** Ana for atleta (S), então Anamélia será pianista (Q). $S \rightarrow Q$
- **Se** Anelise for cantora (P), então Ana será atleta (S). $P \rightarrow S$
- Anamélia **não** será pianista (Q). $\neg Q$

Conclusão:

- É possível concluir que Anaís é professora (R)? $(\neg P \vee Q) \rightarrow R, S \rightarrow Q, P \rightarrow S, \neg Q \vdash R$

Prova do exemplo **Ana***

1	$(\neg P \vee Q) \to R$	
2	$S \to Q$	
3	$P \to S$	
4	$\neg Q$	
5	$\neg S$	E$\to$ (MT), 4, 2
6	$\neg P$	E$\to$ (MT), 5, 3
7	$\neg P \vee Q$	I$\vee$, 6
8	R	E$\to$, 1, 7

Raciocínio **hipotético** I

$$\dfrac{\begin{matrix}[\alpha] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\neg\alpha}\ I\neg \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}[\neg\alpha] \\ \vdots \\ \bot\end{matrix}}{\alpha}\ E\neg$$

$$\dfrac{\alpha \quad \neg\alpha}{\bot}\ I\bot \qquad\qquad \dfrac{\bot}{\alpha}\ E\bot$$

Raciocínio **hipotético** II

- Exemplo: Se sou rico, sou feliz. Se sou feliz não sou rico. Portanto não sou rico.

1	$R \to F$	
2	$F \to \neg R$	
3	$\quad R$	suposição
4	$\quad F$	E$\to$ (MP), 3, 1
5	$\quad \neg R$	E$\to$ (MP), 4, 2
6	$\quad \bot$	I$\bot$, 3, 5
7	$\neg R$	I$\neg$, 3–6

Exemplo: **Socrátes e Platão**

Premissas

- Sócrates está em tal situação que ele estaria disposto a visitar Platão (S), só **se** Platão estivesse disposto a visitá-lo (P); $P \rightarrow S$
- Platão está em tal situação que ele **não** estaria disposto a visitar Sócrates, **se** Sócrates estivesse disposto a visitá-lo; $S \rightarrow \neg P$
- Platão está em tal situação que ele estaria disposto a visitar Sócrates, **se** Sócrates **não** estivesse disposto a visitá-lo. $\neg S \rightarrow P$

Conclusão:

- Pergunta-se: Sócrates está disposto a visitar Platão ou não? $(P \rightarrow S), (S \rightarrow \neg P), (\neg S \rightarrow P) \vdash S$

Prova do exemplo **Socrátes e Platão**

1	$P \to S$	
2	$S \to \neg P$	
3	$\neg S \to P$	
4	$\quad \neg S$	suposição
5	$\quad P$	E$\to$, 4, 3
6	$\quad S$	E$\to$, 5, 1
7	$\quad \bot$	I$\bot$, 4, 6
8	S	E$\neg$, 4–7

Regras de inferência: I→

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha] \\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}\ I\to$$

$$P \to Q, Q \to R \vdash P \to R$$

1	$P \to Q$	
2	$Q \to R$	
3	$\quad P$	suposição
4	$\quad Q$	E→, 3, 1
5	$\quad R$	E→, 4, 2
6	$P \to R$	I→, 3–5

Exemplo: $\neg(P \leftrightarrow Q) \vdash P \rightarrow \neg Q$

1	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	
2	$\quad P$	suposição
3	$\quad\quad Q$	suposição
4	$\quad\quad P \rightarrow Q$	I$\rightarrow$, 2, 3
5	$\quad\quad P$	copia, 2
6	$\quad\quad Q \rightarrow P$	I$\rightarrow$, 3, 5
7	$\quad\quad P \leftrightarrow Q$	I$\leftrightarrow$, 4, 6
8	$\quad\quad \bot$	I$\bot$, 7, 1
9	$\quad \neg Q$	I$\neg$, 3–8
10	$P \rightarrow \neg Q$	I$\rightarrow$, 2–9

Exemplo: $\neg(P \leftrightarrow Q) \vdash \neg Q \rightarrow P$

1	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	
2	$\neg Q$	suposição
3	$\neg P$	suposição
4	$\neg Q \rightarrow \neg P$	I$\rightarrow$, 2, 3
5	$\neg P \rightarrow \neg Q$	I$\rightarrow$, 3, 2
6	$\neg P \leftrightarrow \neg Q$	I$\leftrightarrow$, 4, 5
7	$P \leftrightarrow Q$	subprova equivalência, 6
8	$\perp$	I$\perp$, 1, 7
9	P	I$\neg$, 3–8
10	$\neg Q \rightarrow P$	I$\rightarrow$, 2–9

Premissas:

- **Se não** há sangue na cena do crime (S), o matador é um profissional (P). $\neg S \rightarrow P$
- **Ou** houve poucos ruídos no momento do crime (R) **ou** o matador **não** é um profissional. $\neg(R \leftrightarrow \neg P)$
- **Não** há sangue na cena do crime. $\neg S$

Conclusões:

- É possível concluir que *houve poucos ruídos*? ($(\neg S \rightarrow P), (\neg(R \leftrightarrow \neg P)), (\neg S) \vdash R$)

Prova para o exemplo dos Detetives

inclusão de sub-prova — IP

1	$\neg S \rightarrow P$	
2	$\neg(R \leftrightarrow \neg P)$	
3	$\neg S$	
4	P	E$\rightarrow$, 1, 3
5	$P \rightarrow R$	IP $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta) \vdash \neg\beta \rightarrow \alpha$, 2
6	R	E$\rightarrow$, 4, 7

Regras de inferência: **resolução**

$$\frac{\alpha \vee \beta \quad \neg\alpha}{\beta}\ E\vee$$

Regra "Redundante", pois sempre pode ser substituída pela prova ao lado.

1	$\alpha \vee \beta$	
2	$\neg\alpha$	
3	$\quad \neg\beta$	
4	$\quad \neg\alpha \wedge \neg\beta$	I$\wedge$, 1, 3
5	$\quad \neg(\alpha \vee \beta)$	IP, 4
6	$\quad \bot$	I$\bot$, 1, 5
7	β	E$\neg$, 3, 6

Propriedades da Dedução Natural

- *Correto*: o sistema de prova permite somente a dedução de fórmulas que são implicação lógica das premissas.
  Se existe uma prova $\Gamma \vdash \alpha$ então $\Gamma \models \alpha$.
- *Completo*: todas as fórmulas que são implicação lógica das premissas são deduzidas pelo sistema de prova.
  Se $\Gamma \models \alpha$ então existe uma prova $\Gamma \vdash \alpha$.
- Serve para provar a *validade* de um argumento
- Não serve para provar a invalidade!

Motivação para Resolução

- O mecanismo de prova da dedução natural não tem implementação muito eficiente.
  - Várias regras de inferência precisam ser "tentadas"
- Propriedades do sistema de provas *Resolução*
  - Correto e Completo
  - Tem uma única regra de inferência!
  - Não é muito "natural", as fórmulas precisam estar em um formato apropriado.

Forma normal conjuntiva (**FNC**)

Uma fórmula está na FNC sss está na forma

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n$$

e cada α_i, chamado de *cláusula*, está na forma

$$\beta_1 \vee \beta_2 \vee ... \vee \beta_m$$

e β_i é um *literal* (símbolo proposicional ou sua negação).
Exemplos:

- P, $\neg P$, $\neg P \vee Q$, $(P \vee Q \vee R) \wedge (R \vee T)$
- $(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg R \vee T) \wedge (T \vee S)$

Forma normal conjuntiva (**FNC**)

Para toda fórmula existe uma FNC equivalente, que pode ser obtida assim:

1. Eliminação das implicações
   $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$
   $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)$
   $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
2. Distribuição da negação:
   $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$
   $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
   $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
3. Distribuição da disjunção:
   $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

Resolução I

A prova por resolução utiliza uma *única* regra de inferência:

$$\frac{\alpha \vee \Phi \qquad \neg\alpha \vee \Psi}{\Phi \vee \Psi}\ R$$

Exemplos:

$$\begin{array}{r|ll}
1 & P \vee Q & \\
2 & \neg P \vee R & \\
\hline
3 & Q \vee R & \text{R}(\alpha = P),\ 1,\ 2
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|ll}
1 & P \vee Q & \\
2 & \neg P \vee Q & \\
\hline
3 & Q & \text{R}(\alpha = P),\ 1,\ 2
\end{array}$$

Resolução II

1	P	
2	$\neg P$	
3	$\emptyset$ ou $\perp$	R($\alpha = P$), 1, 2

A cláusula vazia representa uma contradição ($\perp$)!

Exercício: quais as cláusulas derivadas de $\{P, \neg P \vee Q, \neg Q \vee R, \neg R\}$ por resolução?

Refutação por Resolução

Dado um conjunto de cláusulas Γ, para verificar se $\Gamma \vdash \alpha$ utilizando refutação deve-se

- utilizar a regra de resolução sobre o conjunto $\Gamma \cup \neg\alpha$ procurando gerar uma contradição.
- Se for gerada uma contradição, é porque $\neg\alpha$ não pode ser verdade, logo α é verdade.
- Se não for gerada uma contradição, nada se pode dizer.

Exemplo: $P \vee Q, P \to R, Q \to R \vdash R$

1	$P \vee Q$		primeira premissa
2	$\neg P \vee R$		FNC da segunda premissa
3	$\neg Q \vee R$		FNC da terceira premissa
4		$\neg R$	negação da conclusão
5		$\neg P$	R, 4, 2
6		Q	R, 5, 1
7		R	R, 6, 3
8		$\perp$	R, 7, 4
9	R		refutação

Exemplo: **Socrátes e Platão** I

Premissas

- Sócrates está em tal situação que ele estaria disposto a visitar Platão (S), só **se** Platão estivesse disposto a visitá-lo (P); $P \rightarrow S$
- Platão está em tal situação que ele **não** estaria disposto a visitar Sócrates, **se** Sócrates estivesse disposto a visitá-lo; $S \rightarrow \neg P$
- Platão está em tal situação que ele estaria disposto a visitar Sócrates, **se** Sócrates **não** estivesse disposto a visitá-lo. $\neg S \rightarrow P$

Conclusão:

- Pergunta-se: Sócrates está disposto a visitar Platão ou não? $(P \rightarrow S), (S \rightarrow \neg P), (\neg S \rightarrow P) \vdash S$

Exemplo: **Socrátes e Platão** II

Transformação de $(P \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow \neg P) \wedge (\neg S \rightarrow P)$ em forma clausal:

- $P \rightarrow S$
  $\equiv \neg P \vee S$
- $S \rightarrow \neg P$
  $\equiv \neg S \vee \neg P$
- $\neg S \rightarrow P$
  $\equiv \neg\neg S \vee P$
  $\equiv S \vee P$

Prova do exemplo Socrátes e Platão

1	$\neg P \lor S$	
2	$\neg S \lor \neg P$	
3	$S \lor P$	
4	$\quad \neg S$	negação da conclusão
5	$\quad P$	R, 4, 3
6	$\quad \neg P$	R, 4, 1
7	$\quad \bot$	R, 5, 6

Exemplo: **Ana*** I

Premissas:

- **Se** Anelise **não** for cantora (P) **ou** Anamélia for pianista (Q), então Anaís será professora (R). $(\neg P \vee Q) \rightarrow R$
- **Se** Ana for atleta (S), então Anamélia será pianista (Q). $S \rightarrow Q$
- **Se** Anelise for cantora (P), então Ana será atleta (S). $P \rightarrow S$
- Anamélia **não** será pianista (Q). $\neg Q$

Conclusão:

- É possível concluir que Anaís é professora (R)? $(\neg P \vee Q) \rightarrow R, S \rightarrow Q, P \rightarrow S, \neg Q \vdash R$

Exemplo: **Ana*** II

Transformação de $(\neg P \vee Q) \rightarrow R, S \rightarrow Q, P \rightarrow S, \neg Q$ em forma clausal:

- $(\neg P \vee Q) \rightarrow R$
  $\equiv \neg(\neg P \vee Q) \vee R$
  $\equiv (\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee R$
  $\equiv (P \wedge \neg Q) \vee R$
  $\equiv (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee R)$
- $S \rightarrow Q$
  $\equiv \neg S \vee Q$
- $P \rightarrow S$
  $\equiv \neg P \vee S$

Prova do exemplo **Ana***

1	$P \lor R$	
2	$\neg S \lor Q$	
3	$\neg P \lor S$	
4	$\neg Q$	
5	$\neg R$	negação da conclusão
6	P	R, 5, 1
7	S	R, 6, 3
8	Q	R, 7, 2
9	$\bot$	R, 8, 4

Exemplo: **Detetives I**

Premissas:

- **Se não** há sangue na cena do crime (S), o matador é um profissional (P). $\neg S \rightarrow P$
- **Ou** houve poucos ruídos no momento do crime (R) **ou** o matador **não** é um profissional. $\neg(R \leftrightarrow \neg P)$
- **Não** há sangue na cena do crime. $\neg S$

Conclusões:

- É possível concluir que o *matador é profissional*? $((\neg S \rightarrow P), (\neg(R \leftrightarrow \neg P)), (\neg S) \vdash P)$
- É possível concluir que *houve poucos ruídos*? $((\neg S \rightarrow P), (\neg(R \leftrightarrow \neg P)), (\neg S) \vdash R)$

Exemplo: **Detetives** II

Transformação de $(\neg S \to P) \wedge (\neg(R \leftrightarrow \neg P)) \wedge (\neg S)$ em forma clausal:

- $(\neg S \to P)$
  $\equiv S \vee P$

- $(\neg(R \leftrightarrow \neg P))$
  $\equiv (\neg((\neg R \vee \neg P) \wedge (R \vee P)))$
  $\equiv \neg(\neg R \vee \neg P) \vee \neg(R \vee P)$
  $\equiv (R \wedge P) \vee (\neg R \wedge \neg P)$
  $\equiv ((R \wedge P) \vee \neg R) \wedge ((R \wedge P) \vee \neg P)$
  $\equiv (R \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (R \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg P)$

  Cláusulas que são tautologia podem ser removidas.

- $(\neg S)$

Prova para o exemplo dos **Detetives** I

1	$S \vee P$	
2	$\neg R \vee P$	
3	$R \vee \neg P$	
4	$\neg S$	
5	$\quad \neg P$	negação da conclusão
6	$\quad S$	R, 5, 1
7	$\quad \bot$	R, 6, 4

Prova para o exemplo dos **Detetives** II

1	$S \vee P$	
2	$\neg R \vee P$	
3	$R \vee \neg P$	
4	$\neg S$	
5	$\neg R$	negação da conclusão
6	$\neg P$	R, 5, 3
7	S	R, 6, 1
8	$\perp$	R, 7, 4

Propriedades da Resolução

- *Correto*: o sistema de prova permite somente a dedução de fórmulas que são implicação lógica das premissas.
  Se existe uma prova $\Gamma \vdash \alpha$ então $\Gamma \models \alpha$.
- *Completo* (com refutação): todas as fórmulas que são implicação lógica das premissas são deduzidas pelo sistema de prova.
  Se $\Gamma \models \alpha$ então existe uma prova $\Gamma \vdash \alpha$.
- *Decidível*: Utilizando resolução, refutação e lógica proposicional, existe um *algoritmo* que, em tempo finito, decide se um argumento é válido *ou não*.

Motivação

- Considerando o seguinte raciocínio
  - Todo aluno da UFSC é inteligente
  - Luciano é aluno da UFSC
  - Portanto, Luciano é inteligente
- Como representar essa inferência com a Lógica Proposicional?

Alfabeto

O alfabeto da lógica de predicados é constituído dos seguintes símbolos:

- símbolos de pontuação: *(,)*
- símbolos verdade: $\top$, $\bot$
- variáveis: $x, y, z, w, x, ...$
- predicados: `p`, `q`, `r`, ...
- conectivos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$

Termos

Os termos fazem referência a *objetos* do mundo

Termo	Tipo
$marcos$	constante
x	variável
5	constante

Átomos

- Os átomos fazem referências às *propriedades* ou *relações* dos objetos do mundo
- Sintaxe:
  - os símbolos verdade e os predicados são átomos
  - os argumentos de um predicados devem ser termos

Átomo	Tipo
$\perp$	símbolo verdade
`chove`	predicado de aridade 0 – proposição
$\texttt{aluno}(marcos)$	predicado de aridade 1 – propriedade
$\texttt{mae}(maria, carlos)$	predicado de aridade 2 – relação

Literais

- Um literal é
  - um átomo ou
  - a negação de um átomo
- Exemplos:
  - $\bot$
  - $\neg\bot$
  - $\texttt{aluno}(marcos)$
  - $\neg\texttt{aluno}(marcos)$

Fórmulas I

- Os literais são fórmulas
- Se ϕ e ψ são fórmulas e x é uma variável, então também são fórmulas
  - $(\neg\phi)$ (*negação*)
  - $(\phi \wedge \psi)$ (*conjunção*)
  - $(\phi \vee \psi)$ (*disjunção*)
  - $(\phi \rightarrow \psi)$ (*implicação*)
  - $(\phi \leftrightarrow \psi)$ (*bi-implicação*)
  - $(\forall_x\ \phi)$ (*quantificador universal*)
  - $(\exists_x\ \phi)$ (*quantificador existencial*)

Fórmulas II

Exemplos fórmulas *bem* formadas:

- $q \wedge p$
- $\top$
- $\neg p$
- $\forall_x \; p(x)$
- $\forall_x \forall_y \; p(x, y)$
- $\forall_x \; aluno(x) \rightarrow inteligente(x)$

pula detalhes

Ordem de **Precedência**

Para simplificar a escrita das fórmulas, utiliza-se a seguinte ordem de precedência entre os conectivos

- (maior precedência)
  $\neg \;\; \wedge \;\; \vee \;\; \rightarrow \leftrightarrow \;\; \exists \, \forall$
  (menor precedência)

Escopo dos quantificadores

- O escopo determina a abrangência de um quantificador
- Na fórmula $\mathtt{p}(x, y) \land (\forall_x\ \mathtt{q}(x) \to \mathtt{u}(x, y))$
  - O escopo do $\forall_x$ é $\mathtt{q}(x) \to \mathtt{u}(x, y)$
  - A variável x dos predicados $\mathtt{q}(x)$ e $\mathtt{u}(x, y)$ está *ligada* ao escopo do $\forall_x$
  - Como as variáveis x e y de $\mathtt{p}(x, y)$ e a variável y do $\mathtt{u}(x, y)$ não possuem quantificadores, são ditas variáveis *livres*

Interpretação dos quantificadores

- A fórmula $\forall_x \; \phi$
  - é verdade sss ϕ é verdade para *todos* os valores de x
  - é falsa quanto existir *um* valor para x tal que ϕ é falso

- A fórmula $\exists_x \; \phi$
  - é verdade sss ϕ é verdade para pelo menos *um* valor de x
  - é falsa sss ϕ é falso para *todos* os valores de x

pula detalhes

Algumas **equivalências**

- $(\forall_x \ \phi) \equiv (\neg\exists_x \ \neg\phi)$
  - Todo aluno é inteligente
  - Não é verdade que existe um aluno que não é inteligente
- $(\exists_x \ \phi) \equiv (\neg\forall_x \ \neg\phi)$
  - Existe um aluno bonito.
  - Não é verdade que todos os alunos não são bonitos

1. Identificar indivíduos e objetos

   `bob`

2. Identificar seus *tipos*

   `pessoa(bob)`

3. Identificar seus *atributos*

   `chato(bob)`

4. Identificar suas *relações*

   `gosta(bob, vinho)`

- Todo ... é ....

$$\forall x\ \texttt{bebado}(\texttt{x}) \rightarrow \texttt{chato}(\texttt{x})$$
$$\forall x\ \texttt{bebida}(\texttt{x}) \rightarrow \texttt{temagua}(\texttt{x})$$

- Todo ... é ...., menos ...

$$\forall x\ \texttt{bebado}(\texttt{x}) \wedge \texttt{x} \neq \texttt{zeca} \rightarrow \texttt{chato}(\texttt{x})$$

- Incerteza

$$\texttt{bebado}(\texttt{zeca}) \vee \texttt{chato}(\texttt{zeca})$$
$$\exists x\ \texttt{chato}(\texttt{x})$$

- Disjunção $\forall x$ `sobrio(x)` $\leftrightarrow \neg$`bebado(x)`
- Subtipos $\forall x$ `vinho(x)` $\rightarrow$ `bebida(x)`

  (o que se pode inferir para bebida se infere também para vinho)
- Tipos $\forall x$ `bebida(x)` $\rightarrow$ `vinho(x)` $\vee$ `agua(x)`
- Simetria $\forall x, y$ `casado(x, y)` $\rightarrow$ `casado(y, x)`
- Inversão $\forall x, y$ `filhode(x, y)` $\rightarrow \neg$`paide(x, y)`
- Restrição de tipo $\forall x$ `pai(x)` $\rightarrow$ `homem(x)`

  $\forall x, y$ `filhode(x, y)` $\rightarrow$ `homem(x)` $\wedge$ `pessoa(y)`

- Reflexividade $\forall x\ \mathtt{r}(\mathtt{x},\mathtt{x})$
- Irreflexividade $\forall x\ \neg\mathtt{r}(\mathtt{x},\mathtt{x})$
- Simetria $\forall x, y\ \mathtt{r}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \rightarrow \mathtt{r}(\mathtt{y},\mathtt{x})$
- Assimetria $\forall x, y\ \mathtt{r}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \rightarrow \neg\mathtt{r}(\mathtt{y},\mathtt{x})$
- Não-simetria: nem simétrica, nem assimétrica
- Anti-simetria $\forall x, y\ \mathtt{r}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \wedge x \neq y \rightarrow \neg\mathtt{r}(\mathtt{y},\mathtt{x})$
  $\forall x, y\ \mathtt{r}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \wedge \mathtt{r}(\mathtt{y},\mathtt{x}) \rightarrow x = y$
- Transitividade $\forall x, y, z\ \mathtt{r}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \wedge \mathtt{r}(\mathtt{y},\mathtt{z}) \rightarrow \mathtt{r}(\mathtt{x},\mathtt{z})$
- Intransitividade $\forall x, y, z\ \mathtt{r}(\mathtt{x},\mathtt{y}) \wedge \mathtt{r}(\mathtt{y},\mathtt{z}) \rightarrow \neg\mathtt{r}(\mathtt{x},\mathtt{z})$
- Não-transitividade: nem transitiva, nem intransitiva

Uma fórmula é interpretada por um *modelo* $\mathcal{M}$ formado por:

- Um universo $\mathcal{U}$ de valores
- Uma função $\mathcal{F}$ que mapeia termos da linguagem para os valores de $\mathcal{U}$
- Para cada símbolo-predicado p de aridade n é associado um conjunto $\mathcal{P}_p \subseteq \mathcal{U}^n$

Exemplo

- Símbolo funcional: `ana` (constante)
- Símbolo predicativo: `ama` (binário)
- Modelo $\mathcal{M}$ é
  - $\mathcal{U} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{F}(ana) = a$
  - $\mathcal{P}_{ama} = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$

Satisfatibilidade

$\mathcal{M} \models \phi$ (o modelo $\mathcal{M}$ satisfaz ϕ) sss

- $\mathcal{M} \models p(t_1, t_2, ..., t_n)$ sss $(\mathcal{F}(t_1), \mathcal{F}(t_2), ..., \mathcal{F}(t_n)) \in \mathcal{P}_p$
  - p é um predicado e $\mathcal{P}_p$ sua interpretação
  - $\mathcal{F}$ é a função que interpreta os termos (constantes)
- $\mathcal{M} \models \forall_x\ \phi$ sss $\mathcal{M} \models \phi[x/c]$ para todos os valores $c \in \mathcal{U}$
- $\mathcal{M} \models \exists_x\ \phi$ sss $\mathcal{M} \models \phi[x/c]$ para pelo menos um $c \in \mathcal{U}$
- $\mathcal{M} \models \neg\phi$ sss $\mathcal{M} \not\models \phi$
- $\mathcal{M} \models \phi \rightarrow \psi$ sss $\mathcal{M} \models \psi$ sempre que $\mathcal{M} \models \phi$
- $\mathcal{M} \models \phi \wedge \psi$ sss $\mathcal{M} \models \psi$ e $\mathcal{M} \models \phi$
- $\mathcal{M} \models \phi \vee \psi$ sss $\mathcal{M} \models \psi$ ou $\mathcal{M} \models \phi$

Exemplo

- Símbolo funcional: `ana` (constante)
- Símbolo predicativo: `ama` (binário)
- Modelo $\mathcal{M}$ é
  - $\mathcal{U} = \{a, b, c\}$
  - $\mathcal{F}(ana) = a$
  - $\mathcal{P}_{ama} = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$
- Nesse modelo, podemos concluir que todos amam a Ana? ($\forall_x \ ama(x, ana)$)

Exemplo

$\mathcal{U} = \{a, b, c\}$; $\mathcal{F}(ana) = a$; $\mathcal{P}_{ama} = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$

$$\mathcal{M} \models \forall_x \; ama(x, ana)$$

Exemplo

$\mathcal{U} = \{a, b, c\}$; $\mathcal{F}(ana) = a$; $\mathcal{P}_{ama} = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$

$\mathcal{M} \models \forall_x \; ama(x, ana)$
$\mathcal{M} \models ama(a, ana)$ e $\mathcal{M} \models ama(b, ana)$ e ...

Exemplo

$\mathcal{U} = \{a, b, c\}$; $\mathcal{F}(ana) = a$; $\mathcal{P}_{ama} = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$

$\mathcal{M} \models \forall_x \; ama(x, ana)$
$\mathcal{M} \models ama(a, ana)$ e $\mathcal{M} \models ama(b, ana)$ e ...

$\mathcal{M} \models ama(a, ana)$

Exemplo

$\mathcal{U} = \{a, b, c\}$; $\mathcal{F}(ana) = a$; $\mathcal{P}_{ama} = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$

$\mathcal{M} \models \forall_x \; ama(x, ana)$
$\mathcal{M} \models ama(a, ana)$ e $\mathcal{M} \models ama(b, ana)$ e ...

$\mathcal{M} \models ama(a, ana)$
$\mathcal{M} \models ama(a, a)$

Exemplo

$\mathcal{U} = \{a, b, c\}$; $\mathcal{F}(ana) = a$; $\mathcal{P}_{ama} = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$

$\mathcal{M} \models \forall_x \; ama(x, ana)$
$\mathcal{M} \models ama(a, ana)$ e $\mathcal{M} \models ama(b, ana)$ e ...

$\mathcal{M} \models ama(a, ana)$
$\mathcal{M} \models ama(a, a)$
$(a, a) \in \mathcal{P}_{ama}$

Exemplo

$\mathcal{U} = \{a, b, c\}$; $\mathcal{F}(ana) = a$; $\mathcal{P}_{ama} = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$

$\mathcal{M} \models \forall_x \; ama(x, ana)$
$\mathcal{M} \models ama(a, ana)$ e $\mathcal{M} \models ama(b, ana)$ e ...

$\mathcal{M} \models ama(a, ana)$
$\mathcal{M} \models ama(a, a)$
$(a, a) \in \mathcal{P}_{ama}$

$\mathcal{M} \models ama(b, ana)$

Exemplo

$\mathcal{U} = \{a, b, c\}$; $\mathcal{F}(ana) = a$; $\mathcal{P}_{ama} = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$

$\mathcal{M} \models \forall_x \; ama(x, ana)$
$\mathcal{M} \models ama(a, ana)$ e $\mathcal{M} \models ama(b, ana)$ e ...

$\mathcal{M} \models ama(a, ana)$
$\mathcal{M} \models ama(a, a)$
$(a, a) \in \mathcal{P}_{ama}$

$\mathcal{M} \models ama(b, ana)$
$\mathcal{M} \models ama(b, a)$

Exemplo

$\mathcal{U} = \{a, b, c\}$; $\mathcal{F}(ana) = a$; $\mathcal{P}_{ama} = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$

$\mathcal{M} \models \forall_x \ ama(x, ana)$
$\mathcal{M} \models ama(a, ana)$ e $\mathcal{M} \models ama(b, ana)$ e ...

$\mathcal{M} \models ama(a, ana)$
$\mathcal{M} \models ama(a, a)$
$(a, a) \in \mathcal{P}_{ama}$

$\mathcal{M} \models ama(b, ana)$
$\mathcal{M} \models ama(b, a)$
$(b, a) \in \mathcal{P}_{ama}$

Exemplo

$\mathcal{U} = \{a, b, c\}$; $\mathcal{F}(ana) = a$; $\mathcal{P}_{ama} = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$

$\mathcal{M} \models \forall_x \; ama(x, ana)$
$\mathcal{M} \models ama(a, ana)$ e $\mathcal{M} \models ama(b, ana)$ e ...

$\mathcal{M} \models ama(a, ana)$
$\mathcal{M} \models ama(a, a)$
$(a, a) \in \mathcal{P}_{ama}$

$\mathcal{M} \models ama(b, ana)$
$\mathcal{M} \models ama(b, a)$
$(b, a) \in \mathcal{P}_{ama}$

.... (para os outros valores de $\mathcal{U}$)

Definições

satisfatível $\mathcal{M} \models \phi$

uma formula é satisfatível se houver um modelo para ela

validade (tautologia) $\models \phi$

uma formula é válida se for conseqüência de qualquer modelo

insatisfatível ou inválida $\not\models \phi$

não há modelo que satisfaça a fórmula

conseqüência lógica $\Gamma \models \phi$

$\Gamma \models \phi$ sss todos os modelos que satisfazem Γ ($\mathcal{M} \models \psi$ para todos $\psi \in \Gamma$), também devem satisfazer ϕ ($\mathcal{M} \models \phi$)

Problemas com a conseqüência lógica

$$\Gamma \models \phi$$

todos os modelos que satisfazem Γ,
também devem satisfazer ϕ

- Verificar em todos os modelos, quantos são?
- Não é possível "mecanizar" o processo como ocorria na lógica proposicional por meio de tabelas-verdade (mesmo com complexidade exponencial)
- A lógica de predicados é *indecidível*!
  - Não há um procedimento que responda sim ou não para a pergunta $\Gamma \models \phi$?
- Para verificar argumentos, o único mecanismo é um sistema de provas.

Regras de **inferência**

$$\boxed{\dfrac{\forall_x\ \alpha}{\alpha[x/c]}\ E\forall}$$

$$\boxed{\dfrac{\alpha}{\exists_x\ \alpha[c/x]}\ I\exists}$$

x não existe em α.

pelo menos uma ocorrência de c

precisa ser substituída

$$\boxed{\dfrac{\alpha}{\forall_x\ \alpha[c/x]}\ I\forall}$$

c não pode aparecer nas premissas

ou suposições.

x não existe em α.

$$\boxed{\dfrac{\exists_x\ \alpha \qquad \begin{matrix}[\alpha[x/c]] \\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\beta}\ E\exists}$$

c não pode aparecer em α, β e nem

nas premissas ou hipóteses.

Exemplo

1	$\forall x\ \texttt{pai(x)} \rightarrow \texttt{homem(x)}$	
2	$\forall x\ \texttt{homem(x)} \rightarrow \texttt{mortal(x)}$	
3	$\texttt{pai(bob)}$	
4	$\texttt{pai(bob)} \rightarrow \texttt{homem(bob)}$	$E\forall$ [x/bob], 1
5	$\texttt{homem(bob)} \rightarrow \texttt{mortal(bob)}$	$E\forall$ [x/bob], 2
6	$\texttt{homem(bob)}$	MP, 3, 4
7	$\texttt{mortal(bob)}$	MP, 6, 5

$\forall_x \forall_y\ \texttt{gosta}(x, y) \rightarrow \neg\texttt{gosta}(y, x) \vdash \forall_x \neg\texttt{gosta}(x, x)$

1	$\forall_x \forall_y\ \texttt{gosta}(x, y) \rightarrow \neg\texttt{gosta}(y, x)$	
2	$\quad \texttt{gosta}(a, a)$	suposição de que a gosta
3	$\quad \texttt{gosta}(a, a) \rightarrow \neg\texttt{gosta}(a, a)$	$E\forall$, 1
4	$\quad \neg\texttt{gosta}(a, a)$	$E \rightarrow$, 2, 3
5	$\quad \bot$	$I\bot$, 2, 4
6	$\neg\texttt{gosta}(a, a)$	$I\neg$, 2–5
7	$\forall_x \neg\texttt{gosta}(x, x)$	$I\forall$, 6

Exemplo: $\neg\exists_x\ \texttt{fam}(x) \vdash \neg\texttt{fam}(a)$

1	$\neg\exists_x\ \texttt{fam}(x)$	
2	$\quad \texttt{fam}(a)$	
3	$\quad \exists_x \texttt{fam}(x)$	$I\exists$, 2
4	$\quad \perp$	$I\perp$, 1, 3
5	$\neg\texttt{fam}(a)$	$I\neg$, 2–4

Exemplo: $\exists_x \neg\texttt{fam}(x) \vdash \neg\forall_x\ \texttt{fam}(x)$

1	$\exists_x \neg\texttt{fam}(x)$	
2	$\quad \neg\texttt{fam}(a)$	suposição de que x é a, 1
3	$\quad\quad \forall_x\texttt{fam}(x)$	suposição para $I\neg$
4	$\quad\quad \texttt{fam}(a)$	$E\forall$, 3
5	$\quad\quad \bot$	$I\bot$, 2, 4
6	$\quad \neg\forall_x\texttt{fam}(x)$	$I\neg$, 3–5
7	$\neg\forall_x\texttt{fam}(x)$	$E\exists$, 2–6

Material de **consulta**

- NEWTON-SMITH, W.H. **Lógica: um curso introdutório**. Gradiva, 1998.
- SOUZA, João Nunes. **Lógica para Ciência da Computação**. Campus, 2002.
- HUTH, M.; RYAN, M. **Logic in Computer Science**: modelling and reasoning about systems. Cambridge University Press. 2004.
- LAYMAN. **The power of logic**. McGraw-Hill, 2004.
- GENESERETH; NILSON. **Logical Foundations of Artificial Intelligence**. Morgan Kaufmann, 1987.
- BRACHMAN; LEVESQUE. **Knowledge Representation and Reasoning**. Elsevier, 2004.

Sumário I

Sumário II

- Representação de Conhecimento
- Semântica
- Cálculo