Dinámica de Fluidos Computacional

Ecuaciones de DFC (Versión: 1.0)

José Miguel Pérez **josemiguel.perez@upm.es**

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Aeronáutica y del Espacio. Universidad Politécnica de Madrid
Profesores de DFC: Roque Corral y José Miguel Pérez

12 de septiembre de 2024

Tabla de contenidos

Acrónimos

Acrónimo	Significado	Acrónimo	Significado
DFC	Dinámica de fluidos computacional	OC	Onda de choque
EDP	Ecuaciones en derivadas parciales	DT	Discontinuidad tangencial
CC	Condiciones de contorno	NS	Navier-Stokes
CI	Condiciones iniciales	VA	Viscosidad artificial
EVP	Problema de valor inicial	IP	Problema de valor inicial

Navier Stokes

Introducción

- DFC: Campo multidisciplinar; mecánica de fluidos, análisis numérico y ciencia computacional,... cuyo objetivo es la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes (NS) con ordenadores
- Ecuaciones de estudio: NS, Euler, Ecuación del Calor, Ecuación acústica,...
- Las ecuaciones de NS son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales, no lineal, acoplado que se deriva de los principios de conservación de la masa, momento y energía
- Estas ecuaciones se complican más en DFC debido a que se tienen que añadir: (1) términos de viscosidad artificial (VA) y (2) ecuaciones utilizadas al modelizar la turbulencia
- Objetivo de la clase: Revisión de las ecuaciones que se estudiaran durante el curso y simplificación de las mismas reteniendo la física fundamental

Ecuaciones de Navier-Stokes

- Las ecuaciones de Navier-Stokes (para flujo compresible) son un sistema de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs), acoplado y no-lineal que expresan la conservación de la masa, momento y energía:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v}\mathbf{v} + p\overline{\overline{I}}\right) = \nabla \cdot \overline{\overline{\tau}} + \mathbf{f}_m\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} H) = \nabla \cdot \left(k\overline{\nabla} T\right) + \nabla \cdot \left(\overline{\overline{\tau}} \cdot \mathbf{v}\right) + \mathbf{f}_m \cdot \mathbf{v}\,, \tag{3}$$

- Ecuaciones de estado: $p = \rho R_g T$ y $e = c_V T$ donde, $R_g = c_p - c_v$, $E = e + \frac{1}{2}V^2$ y $H = E + \frac{p}{\rho}$
- Variables conservativas: Correcta resolución de las discontinuidades; OC, DCT,...
- Formulación basada en la densidad

Aproximaciones utilizadas en DFC

- Computacionalmente es más complicado resolver los términos convectivos que los viscosos, por lo que los esquemas numéricos se centran en resolver los primeros
- Los términos convectivos son no lineales, generan soluciones tipo onda y son responsables de; ondas de choque y cascada de energía (Kolmogorov)
- Los términos viscosos implican un incremento de coste computacional, pero no introducen una complejidad adicional
- Desarrollaremos los algoritmos de DFC centrándonos en los términos convectivos y despreciando (en primera aproximación) los viscosos
- Las ecuaciones de Euler son interesantes per sec
- Cuidado; las ecuaciones de Euler 1D y 2D son muy distintas debido a la acústica

Euler linealizadas

- Aproximación de gas ideal ($\overline{\overline{\tau}}' = \mathbf{q} = 0$ donde $\overline{\overline{\tau}} = -p\bar{\bar{I}} + \tau'$)

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho u H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

- Def. variables conservativas: $u_1 = \rho$, $u_2 = \rho u$ y $u_3 = \rho E$ y el vector de variables conservativas: $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)^T$ se tiene que:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{0}\,, \tag{5}$$

- donde $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)^T$ es el vector de flujos conservativos tal que,

$$\begin{aligned} f_1 &= u_2\,, \\ f_2 &= \frac{u_2^2}{u_1} + (\gamma - 1)\, u_3 - \frac{1}{2}(\gamma - 1)\frac{u_2^2}{u_1}\,, \\ f_3 &= u_2\left(\gamma\frac{u_3}{u_1} - \frac{1}{2}(\gamma - 1)\frac{u_2^2}{u_1^2}\right)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

- Forma cuasi-lineal

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{0}\,. \tag{7}$$

- Definiendo $A = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$ y utilizando (6)

$$A = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & (3-\gamma)\frac{u_2}{u_1} & \gamma - 1 \\ -\gamma \frac{u_2 u_3}{u_1^2} + (\gamma - 1)\left(\frac{u_2}{u_3}\right)^3 & \gamma \frac{u_3}{u_1} - \frac{3}{2}(\gamma - 1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 & \gamma \frac{u_2}{u_1} \end{pmatrix} \tag{8}$$

- En variables conservativas y utilizando $a = \sqrt{\gamma R_g T}$ se tiene que:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)\, u^2 & (3-\gamma)\, u & \gamma - 1 \\ \frac{1}{2}(\gamma - 2)\, u^3 - \frac{a^2 u}{\gamma - 1} & \frac{3 - 2\gamma}{2} u^2 + \frac{a^2}{\gamma - 1} & \gamma u \end{pmatrix}$$

- Suponeos que $\mathbf{U}(x,t) = \mathbf{U}_0 + \mathbf{u}'(x,t)$, con $||\mathbf{u}'|| \ll ||\mathbf{U}_0||$, donde:
  - $\mathbf{U}_0 = (\rho_0, \rho_0 u_0, \rho_0 E_0)$ es una solución uniforme y estacionaria
  - $\mathbf{u}'(x,t) = (\rho', \rho' u', \rho' E')$ es una perturbación general
  - Por componentes:

$$\begin{aligned} \rho(x,t) &= \rho_0 + \rho'(x,t)\,, \\ u(x,t) &= u_0 + u'(x,t)\,, \\ p(x,t) &= p_0 + p'(x,t)\,, \end{aligned} \tag{9}$$

- Sustituyendo la descomposición anterior en (7), se tiene que,

$$\frac{\partial\left(\mathbf{U}_0 + \mathbf{u}'\right)}{\partial t} + A(\mathbf{U}_0 + \mathbf{u}')\frac{\partial\left(\mathbf{U}_0 + \mathbf{u}'\right)}{\partial x} = \mathbf{0}\,. \tag{10}$$

- Aplicando Taylor; $A(\mathbf{U}_0 + \mathbf{u}') = A(\mathbf{U}_0) + \left.\frac{\partial A}{\partial \mathbf{U}}\right|_{\mathbf{U}_0} \mathbf{u}' + O(\mathbf{u}'^2) \Rightarrow$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + A(\mathbf{U}_0)\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial x} = \mathbf{0}\,. \tag{11}$$

- Notar que $\partial_t \mathbf{U}_0 = \partial_x \mathbf{U}_0 = 0$

- (11) es un sistema hiperbólico si los autovalores de $A(\mathbf{U}_0)$ son reales
- Es decir, dado el EVP $A\left(\mathbf{U}_0\right)\mathbf{u}_i^R = \lambda_i \mathbf{u}_i^R$ se tiene que:
- Autovalores:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u_0 \\ \lambda_2 &= u_0 + a_0 \\ \lambda_3 &= u_0 - a_0 \end{aligned} \tag{12}$$

- donde $a_0 = \sqrt{\gamma R_g T_0} = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$
- Autovectores derechos

$$\mathbf{u}_1^R = \begin{pmatrix} 1 \\ u_0 \\ \dfrac{u_0^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2^R = \begin{pmatrix} 1 \\ u_0 + a_0 \\ \dfrac{u_0^2}{2} + \dfrac{a_0^2}{\gamma - 1} + a_0 u_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3^R = \begin{pmatrix} 1 \\ u_0 - a_0 \\ \dfrac{u_0^2}{2} + \dfrac{a_0^2}{\gamma - 1} - a_0 u_0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

- Ejercicio: Autovalores izquierdos

- Definiendo la matriz $T_0 = \left(\mathbf{u}_1^R, \mathbf{u}_2^R, \mathbf{u}_3^R\right)$ (los autovectores derechos definen cada una de las columnas de la matriz), se tiene que,

$$T_0^{-1} A_0 T_0 = \Lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

- Multiplicando la ecuación lineal (11) por la matriz $T_0^{-1} \Rightarrow$

$$\frac{\partial \left(T_0^{-1}\mathbf{u}'\right)}{\partial t} + T_0^{-1} A(\mathbf{U}_0) T_0 \frac{\partial \left(T_0^{-1}\mathbf{u}'\right)}{\partial x} = \mathbf{0}$$

- Definiendo en vector de variables características $\mathbf{w} = T_0^{-1}\mathbf{u}' \Rightarrow$

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \Lambda_0 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \mathbf{0} \tag{15}$$

- donde (se demuestra más adelante)

$$\begin{aligned} w_1 &= p' - a_0^2 \rho' \\ w_2 &= p' + \rho_0 a_0 u' \\ w_3 &= p' - \rho_0 a_0 u' \end{aligned} \tag{16}$$

- Las Euler 1D se desacoplan en 3 ecuaciones de onda independientes

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} s' \\ p'+\rho_0 a_0 u' \\ p'-\rho_0 a_0 u' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 & 0 & 0 \\ 0 & u_0+a_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0-a_0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} s' \\ p'+\rho_0 a_0 u' \\ p'-\rho_0 a_0 u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- donde $s' = w_1 = p' - a_0^2\rho'$. Demostración:

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_0+p'}{(\rho_0+\rho')^\gamma} \approx (p_0+p')\left(\frac{1}{\rho_0^\gamma} - \gamma\frac{\rho'}{\rho_0^{\gamma+1}} + O(\rho'^2)\right) =$$
$$\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} - \gamma p_0\frac{\rho'}{\rho_0^{\gamma+1}} + \frac{p'}{\rho_0^\gamma} + O(\rho'^2) + O(p'\rho')$$

- $s' = p' - a_0^2\rho'$ se mantiene constante sobre la onda de entropía que se mueve con velocidad u_0; mismo razonamiento para las ondas acústicas
- CC en un dominio $[0, L]$:
  - $M_0 < 1$: 2 CC en $x = 0$ correspondientes ondas que se propagan aguas abajo (entropía y acústica) y 1. CC en $x = L$ en la onda que se propaga aguas arriba
  - $M_0 > 1$: 3 CC en $x = 0$ en las tres ondas

Navier-Stokes linealizadas

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\begin{array}{c}\rho\\ \rho u\\ \rho E\end{array}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\begin{array}{l}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uH\end{array}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\begin{array}{c}0\\ \mu u_x\\ \mu u u_x+\kappa T_x\end{array}\right) \tag{17}$$

- O de forma compacta,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{U})}{\partial x}=\frac{\partial \mathbf{f_v}(\mathbf{U})}{\partial x}$$

- $\mathbf{f}$ es el flujo convectivo y $\mathbf{f_v}$ el flujo viscoso.
- Para un estudio analítico, mejor cambiar a variables primitivas:

$$\mathbf{V}=\left(\begin{array}{c}\rho\\ \\ u\\ \\ p\end{array}\right) \tag{18}$$

- Realizando este cambio de variables,...

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ u\\ p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u & \rho & 0\\ 0 & u & \frac{1}{\rho}\\ 0 & \gamma p & u\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho\\ u\\ p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ (\mu u_x)_x\\ (\gamma-1)\left((kT_x)_x+\mu u_x^2\right)\end{pmatrix} \tag{19}$$

Linealizamos el sistema; $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p' = \rho' R_g T_0 + \rho_0 R_g T'$,...

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho'\\ u'\\ p'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_0 & \rho_0 & 0\\ 0 & u_0 & \frac{1}{\rho_0}\\ 0 & \gamma p_0 & u_0\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho'\\ u'\\ p'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \mu_0 u'_{xx}\\ \frac{(\gamma-1)k_0}{\rho_0 R_g}\left(p'_{xx}-\frac{p_0}{\rho_0}\rho'_{xx}\right)\end{pmatrix} \tag{20}$$

Definiendo la matriz $A_0 = A(\mathbf{U}_0)$ como,

$$A_0 = \begin{pmatrix}u_0 & \rho_0 & 0\\ 0 & u_0 & \frac{1}{\rho_0}\\ 0 & \gamma p_0 & u_0\end{pmatrix}$$

- Los valores propios de A_0 son los de antes, mientras que los vectores propios son las columnas de Q_0;

$$Q_0 = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{\rho_0}{2a_0} & -\dfrac{\rho_0}{2a_0} \\ 0 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ 0 & \dfrac{\rho_0 a_0}{2} & -\dfrac{\rho_0 a_0}{2} \end{pmatrix}, \quad Q_0^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{1}{a_0^2} \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{\rho_0 a_0} \\ 0 & 1 & -\dfrac{1}{\rho_0 a_0} \end{pmatrix} \tag{21}$$

- Nota: Multiplicando la matriz Q_0^{-1} por $\mathbf{V}' = (\rho', u', p')$ se obtiene las expresiones (16) (variables características)
- Multiplicando la ecuación (20) por la matriz $Q_0^{-1} \Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 + a_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 - a_0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = B\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

- donde $A_0 = Q_0 \Lambda_0 Q_0^{-1}$

- Adimensionalizando las ecuaciones con los valores del campo base; $\overline{u} = u'/a_0$, $\overline{p} = p'/(\rho_0 a_0^2)$, $\overline{t} = t/(L_c/a_0)$, $\overline{x} = x/L_c$

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \overline{w}_1 \\ \overline{w}_2 \\ \overline{w}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{u}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{u}_0 + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{u}_0 - 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} \overline{w}_1 \\ \overline{w}_2 \\ \overline{w}_3 \end{pmatrix} = \overline{B}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\begin{pmatrix} \overline{w}_1' \\ \overline{w}_2' \\ \overline{w}_3' \end{pmatrix} \tag{22}$$

- siendo B,

$$B = \frac{1}{Re}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{RePr}\begin{pmatrix} 1 & \frac{\gamma-1}{2} & \frac{\gamma-1}{2} \\ 1 & \frac{\gamma}{2} & \frac{\gamma-2}{2} \\ 1 & \frac{\gamma-2}{2} & \frac{\gamma}{2} \end{pmatrix} \tag{23}$$

- $Re = \rho_0 u_0 L_c/\mu_0$ y $Pr = c_p \mu_0/\kappa_0$
- y $\overline{w}_1 = \overline{p}' - \overline{\rho}'$, $\overline{w}_2 = \overline{p}' + \overline{u}'$ y $\overline{w}_3 = \overline{p}' - \overline{u}'$

Ec Navier-Stokes 1D - 5/5

- Conclusiones:
  - si $\kappa_0 = 0$ la ecuación de la entropía se desacopla, conservándose s' a lo largo de las trayectorias
  - Si $Re \gg 1$ las ondas se desacoplan conservándose las variables características del campo perturbado a lo largo de las trayectorias, con una pequeña amortiguación debido a los efectos viscosos
- Ecuación de la entropía:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\kappa \boldsymbol{\nabla} T) + \Phi_v + Q$$

- Ecuación de la entropía linealizada:

$$\rho_0 T_0 \left(\partial_t s' + u_0 \partial_x s'\right) = \kappa_0 \partial_x^2 T' + \cancel{\Phi_v'}$$

- Ecuación de la vorticidad ($\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{u}$) para flujo isentrópico, ideal y sin fuerzas másicas:

$$\frac{D(\boldsymbol{\omega}/\rho)}{Dt} = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{V}$$

- Ecuación utilizada en los contornos (input/output)

Ecuación acústica

- Introduciendo la siguiente descomposición en las ecuaciones de Euler

$$\begin{aligned} u &= u' \,, \\ \rho &= \rho_0 + \rho' \,, \\ p &= p_0 + p' \,. \end{aligned}$$

- Se tiene:

$$\partial_t \left(\rho_0 + \rho'\right) + \partial_x \left[(\rho_0 + \rho')u'\right] = 0 \tag{24}$$

$$\partial_t \left[(\rho_0 + \rho')u'\right] + \partial_x \left[(\rho_0 + \rho')u'u' + p_0 + p'\right] = 0 \tag{25}$$

- Nota: ρ_0 y p_0 (con $u_0 = 0$) también verifica las ecuaciones Euler:

$$\partial_t \rho_0 = 0 \text{ y } \partial_x p_0 = 0 \,.$$

- Introduciendo estas expresiones en (24) y (25) respectivamente se tiene que,

$$\partial_t \rho' + \partial_x \left[(\rho_0 + \rho')u'\right] = 0 \,, \tag{26}$$

$$\rho_0 \partial_t u' + \partial_t \left(\rho' u'\right) + \partial_x \left[(\rho_0 + \rho')u'u'\right] + \partial_x p' = 0 \,. \tag{27}$$

- Despreciando los términos cuadráticos en las perturbaciones; $\rho' u'$ y $u' u'$ (buscamos la solución lineal), se tiene que,

$$\partial_t \rho' + \partial_x \left(\rho_0 u'\right) = 0 \,, \tag{28}$$

$$\rho_0 \partial_t u' + \partial_x p' = 0 \,. \tag{29}$$

- Relación entre p' y ρ'

$$p(\rho) \approx p(\rho_0) + \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\rho_0} \rho'$$

- comparando con $p = p_0 + p'$, entonces:

$$p' = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{s_0, \rho_0} \rho' = a_0^2 \rho' \tag{30}$$

Ecuación acústica 3/4

- Introduciendo (30) en la ecuación (28) y recordando que ρ_0 es uniforme se tiene:

$$\frac{1}{a_0^2}\partial_t p' + \rho_0 \partial_x u' = 0\,, \tag{31}$$

- que junto con (29)

$$\rho_0 \partial_t u' + \partial_x p' = 0\,, \tag{32}$$

- nos da un sistema de dos ecuaciones linealizadas y dos incógnitas; ρ' y u'
- Ecuación reducida: Derivando la primera ecuación con respecto al tiempo y la segunda con x se tiene que:

$$\frac{1}{a_0^2}\partial_{tt} p' + \rho_0 \partial_{tx}\left(u'\right) = 0 \tag{33}$$

$$\rho_0 \partial_{xt} u' + \partial_{xx} p' = 0 \tag{34}$$

- Despejando $\partial_{xt} u'$ en la ecuación (34) y sustituyendo la expresión en (33) se tiene que,...

Ecuación acústica 4/4

$$\frac{1}{a_0^2}\partial_{tt}p' = \partial_{xx}p' \tag{35}$$

Esta es la ecuación del campo de presión de la perturbación (ecuación acústica). En el caso 2D sería:

$$\frac{1}{a_0^2}\partial_{tt}p' = \nabla^2 p' \tag{36}$$

donde $\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$

Ejercicio: demostrar que (31) y (32)
define un sistema hiperbólico con autovalores $\pm a_0$ y variables características (o invariantes de Riemann) $p' \pm \rho_0 a_0 u'$

Ecuación acústica generalizada - 1/2

- Consideramos la ecuación acústica cuando el flujo base tiene velocidad $u_0 \neq 0$. Linealizando las ecuaciones de Euler anteriores (en el caso 1D) se llega a,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_0^2}\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{u_0}{a_0^2}\frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x} + u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{37}$$

- o escrito en forma matricial,

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} p' \\ u' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 & \rho_0 a_0^2 \\ \frac{1}{\rho_0} & u_0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} p' \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

- Es fácil demostrar, combinando ambas expresiones, que

$$\frac{1}{a_0^2}\frac{D_0^2 p'}{Dt^2} = \nabla^2 p' \tag{39}$$

- donde

$$\frac{D_0}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \nabla \tag{40}$$

Ecuación acústica generalizada - 2/2

- La ecuación (39) se puede escribir también como un sistema matricial,

- Utilizando (40) en (39) se tiene que,

$$\frac{1}{a_0^2}\left(\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + 2u_0\frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} + u_0^2\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2}$$

- Ahora pasamos de una ecuación con derivada temporal segunda a dos ecuaciones con derivada temporal primera,

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (a_0^2 - u_0^2)(\partial^2/\partial x^2) & -2u_0(\partial/\partial x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}. \tag{41}$$

- donde $p_1 = p'$ y $p_2 = \dot{p}'$

Resumen

Resumen: Ecuaciones utilizadas en DFC

- Ecuación de ondas lineal: $\partial_t u + a\partial_x u = 0$
- Ecuación de ondas lineal viscosa: $\partial_t u + a\partial_x u = \nu\partial_x^2 u$
- Ecuación de Burgers: $\partial_t u + u\partial_x u = 0$
- Ecuación de Burgers viscosa (o ecuación convección-difusión): $\partial_t u + u\partial_x u = \nu\partial_x^2 u$
- Ecuación del calor: $\partial_t u = \alpha\partial_x^2 u$
- Ecuación del calor estacionaria (Poisson): $\partial_x^2 u = 0$
- Ecuación de onda lineal con término fuente: $\partial_t u + a\partial_x u = \alpha u$
- Ecuación de ondas lineal 2D: $\partial_t u + A\partial_x u + B\partial_y u = 0$
- Ecuaciones de Euler 1D: vistas antes