Inkrementeller Algorithmus zur Ellipsenzeichnung

a)

$$(bx)^2 + (ay)^2 - (ab)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad y^2 = b^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$$

Region 1

Die Entscheidung basiert darauf, ob der Punkt näher bei SO (Südosten) als bei O (Osten) liegt:

$$\Leftrightarrow \quad y(x+1) < \tilde{y}(x) - \frac{1}{2}$$

Um dies zu prüfen, entwickeln wir den Ausdruck weiter. Zuerst schreiben wir $y^2(x)$ als:

$$y^2(x) = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

Nun für $y^2(x+1)$:

$$y^2(x+1) = b^2 - \frac{b^2}{a^2}(x+1)^2$$

Die Ungleichung wird dann:

$$y^2(x+1) < \tilde{y}^2(x) - \tilde{y}(x) + \frac{1}{4}$$

Dies können wir weiter umformen zu:

$$y^2(x) - 2\frac{b^2}{a^2}x - \frac{b^2}{a^2} < \tilde{y}^2(x) - \tilde{y}(x) + \frac{1}{4}$$

Daraus definieren wir den Fehlerterm:

$$d(x) := y^2(x) - \tilde{y}^2(x) + \tilde{y}(x) - \frac{b^2}{a^2}(2x+1) - \frac{1}{4}$$

Mit der Entscheidung:

$$\text{O, falls } d(x) \geq 0; \quad \text{SO, falls } d(x) < 0$$

Der Fehlerterm für den nächsten Schritt $x+1$ ist dann definiert als:

$$d(x+1) = y^2(x+1) - \tilde{y}^2(x+1) + \tilde{y}(x+1) - \frac{b^2}{a^2}(2(x+1)+1) - \frac{1}{4}$$

Falls wir uns in Richtung O bewegen:

$$d(x+1) = b^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{x+1}{a}\right)^2\right) - \tilde{y}^2(x) + \tilde{y}(x) - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot (2x+3) - \frac{1}{4}$$
$$= \dots$$
$$= d(x) - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot (2x+3)$$

Falls wir uns in Richtung SO bewegen:

$$
\begin{aligned}
d(x+1) = b^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{x+1}{a}\right)^2\right) - (\tilde{y}(x)-1)^2 + \tilde{y}(x) - 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot (2x+3) - \frac{1}{4} \\
= \ldots \\
= d(x) - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot (2x+3) + 2\tilde{y}(x+1)
\end{aligned}
$$

Region 2

Falls wir die Teilfunktion der Ellipse in Region 2 an der Geraden $y = x$ spiegeln, d.h., wenn wir x und y sowie a und b jeweils vertauschen, erhalten wir eine Teilfunktion ähnlich wie in Region 1. Wir können also denselben Algorithmus verwenden, wobei wir die Rollen von x und y sowie a und b vertauschen.

Algorithmus: Scan-Conversion für Ellipsen, inkrementell, reell

// **Region 1:**
$x := 0$ ▷ Startpunkt $(0, b)$
$\tilde{y} := b$
$d1 := b - \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{1}{4}$ ▷ $d1(0)$
while $a^2 y \geq b^2 x$ **do** ▷ Noch in Region 1
  modifiziere die 4 zu $(x, \tilde{y})$ gehörigen Pixel
  $x := x + 1$
  if $d1 \geq 0$ **then**
    $d1 := d1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot (2x+3)$ ▷ O
  else
    $\tilde{y} := \tilde{y} - 1$ ▷ SO
    $d1 := d1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot (2x+3) + 2\tilde{y}$
  end if
end while
// **Region 2:**
$x := a$ ▷ Startpunkt $(a, 0)$
$\tilde{y} := 0$
$d2 := a - \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{1}{4}$ ▷ $d2(0)$
while $b^2 x \geq a^2 y$ **do** ▷ Noch in Region 2
  modifiziere die 4 zu $(x, \tilde{y})$ gehörigen Pixel
  $\tilde{y} := \tilde{y} + 1$
  if $d2 \geq 0$ **then**
    $d2 := d2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot (2\tilde{y}+3)$ ▷ S (Spiegelung beachten!)
  else
    $x := x - 1$ ▷ SO (siehe oben)
    $d2 := d2 - \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot (2\tilde{y}+3) + 2x$
  end if
end while

b)

Skaliere $d1$ mit $4a^2$ und entsprechend $d2$ mit $4b^2$, um den Algorithmus nur mit ganzen Zahlen durchzuführen und somit die Berechnungen zu beschleunigen.