

9 Kurven und Flächen

Inhalt

9.1	Parametrisierte kubische Kurven	9-2
9.1.1	Hermite-Kurven	9-6
9.1.2	Bézier-Kurven	9-9
9.1.3	Kubische Splines	9-14
9.1.4	Unterteilung von Kurven	9-23
9.1.5	Zeichnen von Kurven	9-26
9.2	Parametrisierte bikubische Flächen	9-26
9.2.1	Bézier-Flächen	9-28
9.3	Rotationskörper	9-30

Reale Objekte werden often von „glatten“ Kurven und Flächen begrenzt.

Wie lassen sich diese mit wenigen „Kontrollpunkten“ beschreiben?

9.1 Parametrisierte kubische Kurven

Beschreibung von Kurven (Flächen) auf drei Arten möglich:

1. explizit: $y = f(x)$ und $z = g(x)$ (Kurve), $z = f(x, y)$ (Fläche)
2. implizit: $f(x, y, z) = 0$ (z. B. $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ für Kugel)
3. parametrisiert: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [0; 1]$

Eine **parametrisierte kubische Kurve**

$$Q(t) = (x(t), y(t), z(t))^T, \quad t \in [0; 1]$$

wird durch drei kubische Polynome definiert:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ y(t) &= a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \\ z(t) &= a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \end{aligned}$$

Mit $T = (t^3, t^2, t, 1)^T$ und der Koeffizientenmatrix

$$C = \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & c_z & d_z \end{pmatrix}$$

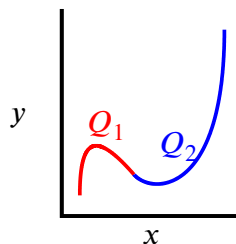
ergibt sich folgende Matrixschreibweise:

$$Q(t) = C \cdot T$$

Tangentialvektor an die Kurve:

$$\frac{d}{dt}Q(t) = Q'(t) = \left(\frac{d}{dt}x(t), \frac{d}{dt}y(t), \frac{d}{dt}z(t) \right)^T = C \cdot \frac{d}{dt}T = C \cdot (3t^2, 2t, 1, 0)^T = \begin{pmatrix} 3a_x t^2 + 2b_x t + c_x \\ 3a_y t^2 + 2b_y t + c_y \\ 3a_z t^2 + 2b_z t + c_z \end{pmatrix}$$

Stetigkeit bei der Verbindung zweier Kurvenstücke Q_1, Q_2 :



- C^0 -/ G^0 -stetig: $Q_1(1) = Q_2(0)$
- G^1 geometrisch stetig: G^0 und gleiche Tangentenrichtung, d. h. $Q'_1(1) = k \cdot Q'_2(0)$ mit $k > 0$
- C^1 stetig: C^0 und gleiche Tangente (Richtung und Betrag), d. h. $Q'_1(1) = Q'_2(0)$
- G^2 geometrisch stetig: G^1 und gleiche Krümmung (2D: $\kappa = \frac{|Q'Q''|}{\|Q'\|^3}$)
- C^2 stetig: C^1 und $Q''_1(1) = Q''_2(0)$

Bemerkung 9.1: C^2 spielt z. B. beim Straßenbau eine gewisse Rolle.

Übergang gerade Straße - Kreisbogen wäre C^1 , aber nicht $C^2 \Rightarrow$ Lenkrad müsste ruckartig bewegt werden

im folgenden Zerlegung der Matrix C in $C = G \cdot M$ mit 4×4-**Basismatrix** M und 3×4-**Geometriematrix** G

$$Q(t) = (G_1, G_2, G_3, G_4) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{14} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{41} & \cdots & m_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad G_i = \begin{pmatrix} g_{ix} \\ g_{iy} \\ g_{iz} \end{pmatrix}$$

M : feste Matrix für bestimmten Kurventyp

G : Lage (z. B. End-/Kontrollpunkte) einer konkreten Kurve

9.1.1 Hermite-Kurven

Charles Hermite
* 1822, Dieuze, Lothringen, FR
† 1901, Paris
Mathematiker

Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Charles_Hermite_circa_1901_edit.jpg



Kurve bestimmt durch: Endpunkte P_1 und P_4 und Tangentialvektoren R_1 und R_4 in Endpunkten

Bestimmung der Hermite-Basismatrix M_H in $Q(t) = G_H \cdot M_H \cdot T$ mit $G_H = (P_1, P_4, R_1, R_4)$:

$$x(t) = G_{H_x} \cdot M_H \cdot \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x'(t) = G_{H_x} \cdot M_H \cdot \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Punkte/Vektoren für $t = 0$ bzw. $t = 1$ gibt:

$$x(0) = P_{1_x} = G_{H_x} \cdot M_H \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(1) = P_{4_x} = G_{H_x} \cdot M_H \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x'(0) = R_{1_x} = G_{H_x} \cdot M_H \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x'(1) = R_{4_x} = G_{H_x} \cdot M_H \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zusammengesetzt:

$$G_{H_x} = (P_{1_x}, P_{4_x}, R_{1_x}, R_{4_x}) = G_{H_x} \cdot M_H \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

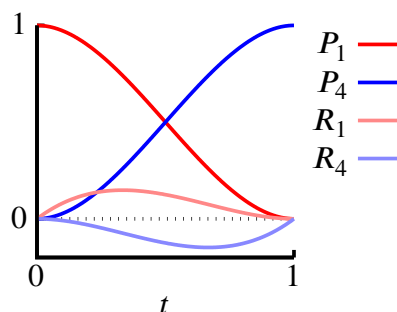
Invertierung obiger Matrix liefert M_H :

$$M_H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ausmultiplizieren des rechten Produkts in $Q(t) = G_H \cdot M_H \cdot T$ gibt eine Darstellung der Kurve in den **Hermite-Basis-Polynomen**:

$$Q(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1) \cdot P_1 + (-2t^3 + 3t^2) \cdot P_4 + (t^3 - 2t^2 + t) \cdot R_1 + (t^3 - t^2) \cdot R_4$$

Darstellung der Basis-Polynome:



Bemerkung 9.2: G^1 -stetiger Übergang zweier Hermite-Kurven, falls die Geometriematrizen die Form (P_1, P_4, R_1, R_4) und (P_4, P_7, kR_4, R_7) mit $k > 0$ haben

9.1.2 Bézier-Kurven

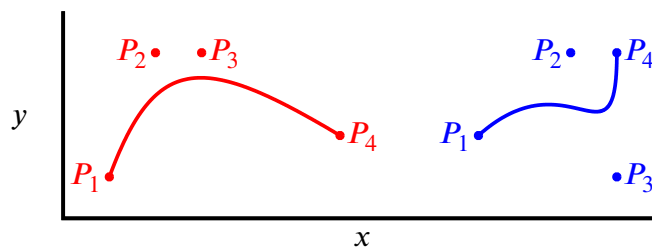
Pierre Étienne Bézier

* 1910, Paris

† 1999, Paris

Bau- und Elektroingenieur, Mathematiker (Renault)

Kurve bestimmt durch: Endpunkte und zwei Kontrollpunkte



Geometriematrix: $G_B = (P_1, P_2, P_3, P_4)$

Zusammenhang Hermite-Bézier: $R_1 = 3(P_2 - P_1)$, $R_4 = 3(P_4 - P_3)$

Übergang zwischen den Geometriematrizen über Matrix M_{HB} :

$$G_H = G_B \cdot M_{HB} \quad \text{mit}$$

$$(P_1, P_4, R_1, R_4) = (P_1, P_2, P_3, P_4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bézier-Basismatrix aus Hermite-Form:

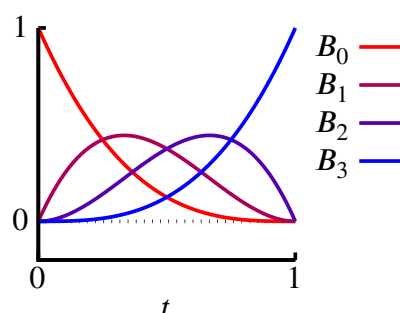
$$Q(t) = G_H \cdot M_H \cdot T = G_B \cdot \underbrace{M_{HB} \cdot M_H}_{=: M_B} \cdot T$$

also:

$$M_B = M_{HB} \cdot M_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basispolynome aus $Q(t) = G_B \cdot M_B \cdot T$ sind die sog. **Bernsteinpolynome**:

$$Q(t) = (1-t)^3 P_1 + 3t(1-t)^2 P_2 + 3t^2(1-t) P_3 + t^3 P_4$$



Sergej Natanovič Bernštejn [Сергей Натанович Бернштейн]

* 1880, Odessa (Одесса, Russisches Reich, heute Ukraine)

† 1968, Moskau (Москва [Moskva])

Mathematiker

Foto: Konrad Jacobs, Erlangen, Titel: „Sergej Natanowitsch Bernstejn“
 Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sergej_Natanowitsch_Bernstejn.jpg
 Lizenz: [CC-BY-SA 2.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/de/legalcode), <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/de/legalcode>



Verbindung zweier Kurvenstücke zu Kontrollpunkten (P_1, P_2, P_3, P_4) bzw. (P_4, P_5, P_6, P_7) über gemeinsamen Punkt P_4

G^1 -stetig falls $P_3 - P_4 = k(P_4 - P_5)$ mit $k > 0$

C^1 -stetig falls $P_3 - P_4 = P_4 - P_5$
bzw. $P_5 = 2P_4 - P_3$

C^2 -stetig falls $P_2 - 2P_3 = P_6 - 2P_5$
bzw. $P_6 = P_2 + 2(P_5 - P_3)$
 $= P_2 + 4(P_4 - P_3)$

Interpolation:

gegeben: l Punkte Q_1, \dots, Q_l

gesucht: C^1 -stetige stückweise kubische Interpolation der Q_i

Ansatz: Bézier-Kurven zu Kontrollpunkten

$(Q_i = P_{3i-2}, P_{3i-1}, P_{3i}, Q_{i+1} = P_{3i+1}), i = 1, \dots, l-1$

Bestimmung der P_i :

für $i = 1, \dots, l$

$$P_{3i-2} := Q_i$$

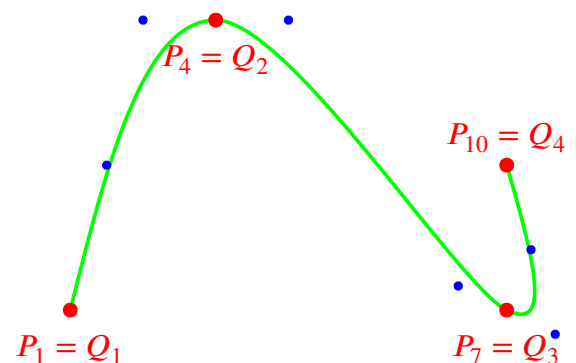
für $i = 2, \dots, l-1$

$$P_{3i-1} := Q_i + \frac{1}{6}(Q_{i+1} - Q_{i-1})$$

$$P_{3i-3} := Q_i - \frac{1}{6}(Q_{i+1} - Q_{i-1})$$

$$P_2 := \frac{1}{2}(Q_1 + P_3)$$

$$P_{3l-3} := \frac{1}{2}(P_{3l-4} + Q_l)$$



Verallgemeinerung: Bézier-Kurven beliebigen Grades

gegeben: Punkte P_1, \dots, P_{n+1}

Bézier-Kurve n -ten Grades:

$$Q(t) = \sum_{i=0}^n P_{i+1} B_{i,n}(t)$$

mit Bernsteinpolynomen

$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Beobachtung: $B_{i,n}(t) \geq 0$ für $t \in [0; 1]$ und $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$

\Rightarrow Bézier-Kurve verläuft in konvexer Hülle der Kontrollpunkte

(nützlich für Clipping-Verfahren)

Rekursive Berechnung der Bernsteinpolynome:

$$\begin{aligned} B_{0,1}(t) &= 1-t, \quad B_{1,1}(t) = t \\ B_{i,n}(t) &= (1-t)B_{i,n-1}(t) + tB_{i-1,n-1}(t) \end{aligned}$$

mit $B_{-1,n-1}(t) = B_{n,n-1}(t) := 0$

9.1.3 Kubische Splines

Ein **kubischer B-Spline** approximiert eine Folge von $m+1$ Kontrollpunkten P_0, \dots, P_m , $m \geq 3$. („B“ steht für Basis.)

Die Kurve besteht aus $m-2$ **Kurvensegmenten** Q_3, \dots, Q_m (kubische Polynome).

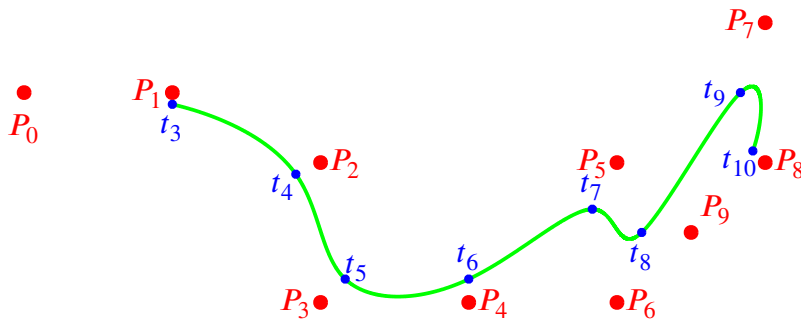
Jedes Segment Q_i ist definiert auf einem Parameterbereich $[t_i; t_{i+1}]$ ($i = 3, \dots, m$).

Bemerkung 9.3: Spezialfall $m = 3$:

4 Kontrollpunkte P_0, \dots, P_3 , ein Polynom Q_3 mit $t_3 \leq t \leq t_4$

Die Verbindungspunkte $Q_{i-1}(t_i) = Q_i(t_i)$ ($i = 4, \dots, m$) sowie Anfangspunkt $Q_3(t_3)$ und Endpunkt $Q_m(t_{m+1})$ heißen **Knotenpunkte**, die t_i **Knotenwerte**.

Der B-Spline heißt **uniform**, falls alle Parameterintervalle gleich lang sind - o. B. d. A. $t_3 = 0$, $t_4 = 1$, ..., $t_m = m-3$.



Geometrievektor zu Segment Q_i :

$$G_{BS_i} = (P_{i-3}, P_{i-2}, P_{i-1}, P_i)$$

- Jedes Segment wird von vier Kontrollpunkten beeinflusst.
- Umgekehrt beeinflusst jeder Kontrollpunkt (bis auf die ersten und letzten drei) jeweils vier Segmente.

Definition der Kurve aus

$$Q_i(t) = G_{BS_i} \cdot M_{BS} \cdot T_i$$

für $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ mit

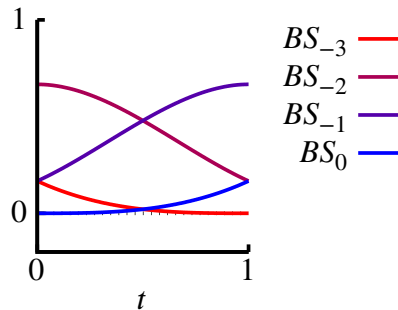
$$T_i = \begin{pmatrix} (t - t_i)^3 \\ (t - t_i)^2 \\ t - t_i \\ 1 \end{pmatrix}$$

und der **Basismatrix**

$$M_{BS} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basispolynome für Intervall $[0; 1]$:

$$\frac{1}{6} [(1-t)^3, 3t^3 - 6t^2 + 4, -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1, t^3]$$



Eigenschaften:

- Summe der vier Basispolynome ist $\equiv 1$
 - Polynome sind ≥ 0
- \Rightarrow Kurve verläuft in konvexer Hülle der Kontrollpunkte

Satz 9.4: B-Splines sind C^2 -stetig.

Beweis: Für x -Komponente am Übergang Q_i/Q_{i+1} und $t \in [0; 1]$:

Kurve in Basisdarstellung:

$$Q_i(t) = G_{BS_i} \cdot M_{BS} \cdot T = \frac{(1-t)^3}{6} P_{i-3} + \frac{3t^3 - 6t^2 + 4}{6} P_{i-2} + \frac{-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1}{6} P_{i-1} + \frac{t^3}{6} P_i$$

C^0 -Stetigkeit:

$$x_i(1) = \frac{1}{6} (P_{i-2_x} + 4P_{i-1_x} + P_{i_x}) = x_{i+1}(0)$$

C^1 -Stetigkeit:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} Q(t) &= \frac{-(1-t)^2}{2} P_{i-3} + \frac{3t^2 - 4t}{2} P_{i-2} + \frac{-3t^2 + 2t + 1}{2} P_{i-1} + \frac{t^2}{2} P_i \\ \frac{d}{dt} x_i(1) &= \frac{1}{2} (-P_{i-2_x} + P_{i_x}) = \frac{d}{dt} x_{i+1}(0) \end{aligned}$$

C^2 -Stetigkeit:

$$\frac{d^2}{dt^2}Q(t) = (1-t)P_{i-3} + (3t-2)P_{i-2} + (-3t+1)P_{i-1} + tP_i$$

$$\frac{d^2}{dt^2}x_i(1) = P_{i-2_x} - 2P_{i-1_x} + P_{i_x} = \frac{d^2}{dt^2}x_{i+1}(0)$$



Bemerkung 9.5: C^2 -Stetigkeit wird erkaufte durch Approximation statt Interpolation.

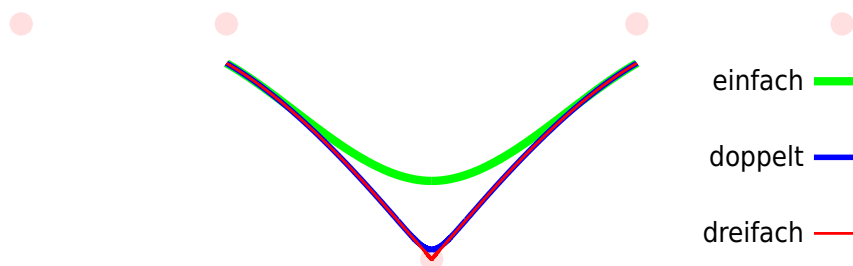
Bessere Annäherung ist möglich durch Doppelung von Kontrollpunkten: $P_{i-2} = P_{i-1}$

Interpolation durch Dreifach-Verwendung von Punkten: $P_{i-2} = P_{i-1} = P_i$

$\Rightarrow Q_i(t) = \frac{(1-t)^3}{6}P_{i-3} + \frac{t^3-3t^2+3t+5}{6}P_i$ ist eine Gerade.

- C^2 -stetig mit Ableitungen 0 für $t = 1$

⊖ nicht G^1 -stetig, Knick!



Nicht-uniforme kubische B-Splines

Definition eines **nicht-uniformen kubischen B-Splines** zur Approximation von Kontrollpunkten P_0, \dots, P_m : benötigt: Knotenfolge t_0, \dots, t_{m+4} mit $t_i \leq t_{i+1}$, z. B. $(0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4)$

Definition des Kurvensegments Q_i zu Kontrollpunkten $P_{i-3}, P_{i-2}, P_{i-1}, P_i$:

$$Q_i(t) = P_{i-3} \cdot B_{i-3,4} + P_{i-2} \cdot B_{i-2,4} + P_{i-1} \cdot B_{i-1,4} + P_i \cdot B_{i,4}$$

mit Gewichtsfunktionen

$$B_{i,1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [t_i; t_{i+1}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$B_{i,k}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} \cdot B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} \cdot B_{i+1,k-1}(t) \quad \text{für } k > 1$$

(Wird der Nenner bei mehrfachen Knoten 0, so wird der Bruch als 0 definiert.)

Vorteil im Vergleich zu uniformen Splines:

- ⊕ Interpolation durch Dreifach-Knoten möglich, ohne dass Geradenstücke entstehen
- ⊕ gilt auch für Anfangs- und Endpunkt

Rationale kubische Kurven

Eine **rationale kubische Kurve** hat die Form

$$Q(t) = \left(x(t) = \frac{X(t)}{W(t)}, y(t) = \frac{Y(t)}{W(t)}, z(t) = \frac{Z(t)}{W(t)} \right)^T$$

mit kubischen Polynomen $X(t), Y(t), Z(t), W(t)$.

Darstellung in homogenen Koordinaten:

$$Q(t) = (X(t), Y(t), Z(t), W(t))^T$$

Bezeichnung für nicht-uniforme rationale B-Splines: **NURBS**

Vorteile rationaler Kurven:

- ⊕ Invarianz unter perspektivischer Projektion
 - ⇒ Die Projektion kann nur auf die Kontrollpunkte angewandt werden; bei anderen Kurven müssen alle Zwischenpunkte projiziert werden.
- ⊕ exakte Darstellung von Kegelschnitten möglich, z. B. Kreis

9.1.4 Unterteilung von Kurven

Frage: Wie lässt sich eine Kurve (ein Segment) durch Hinzunahme weiterer Kontrollpunkte in zwei Teile aufteilen, ohne dass sich das Bild ändert?

Hintergrund: Dies ist sinnvoll

- bei der Modellierung, wenn eine Kurve nur in einem Bereich verändert werden soll,
- beim Zeichnen von Kurven, vgl. Abschnitt 9.1.5.

Bei Bézier-Kurven ist die Unterteilung besonders einfach. Die neuen Kontrollpunkte sind Zwischenergebnisse bei der Ausführung des **Algorithmus von de Casteljau** zur Bestimmung des Kurvenpunktes für einen Parameterwert t .

Algorithmus von de Casteljau

Eingabe Kontrollpunkte P_1, \dots, P_{n+1} , Parameter $t \in [0; 1]$

für $i = 1, \dots, n + 1$

$$P_i^0 := P_i$$

für $r = 1, \dots, n$

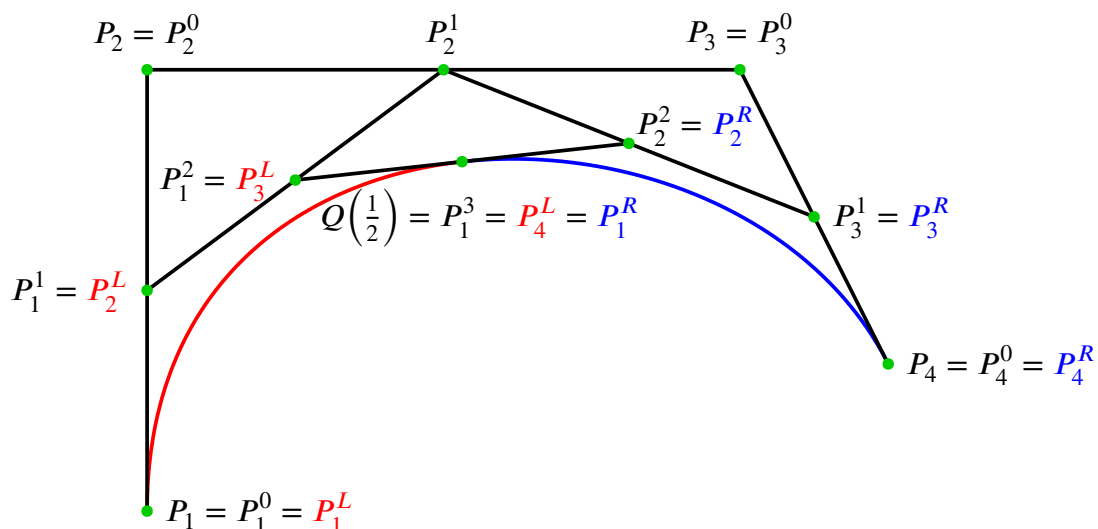
für $i = 1, \dots, n - r + 1$

$$P_i^r := (1 - t)P_i^{r-1} + tP_{i+1}^{r-1}$$

$Q(t) := P_1^n$ // der gesuchte Punkt auf der Kurve

Paul de Faget de Casteljau
* 1930, Besançon, FR
Physiker, Mathematiker (Citroën)

Beispiel 9.6: $n = 3, t = \frac{1}{2}$



Kontrollpunkte für linken (roten) Teil: $P_i^L = P_1^{i-1}$; Kontrollpunkte für rechten (blauen) Teil: $P_i^R = P_i^{n+1-i}$

direkte Berechnung der neuen Kontrollpunkte im Fall einer kubischen Kurve und Unterteilung bei $t = \frac{1}{2}$:

$$G_B^L = (P_1^L, P_2^L, P_3^L, P_4^L) = (P_1, P_2, P_3, P_4) \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_B^R = (P_1^R, P_2^R, P_3^R, P_4^R) = (P_1, P_2, P_3, P_4) \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 9.7: Bei B-Splines ergeben sich aus $(P_{i-3}, P_{i-2}, P_{i-1}, P_i) \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ fünf neue Kontrollpunkte, die zwei Segmente definieren, die mit dem ursprünglichen übereinstimmen.

aber: Die Nachbarsegmente haben noch die alten Kontrollpunkte.

⊖ Verschiebung einzelner Punkte bei Modellierung führt zu Unstetigkeiten

9.1.5 Zeichnen von Kurven

Möglichkeit 1: Zerlegung des Parameterintervalls in kleine Teilintervalle, Annäherung der Kurve durch Geradenstücke auf jedem Teilintervall

Polynomauswertung durch

- Horner-Schema oder
- Vorwärtsdifferenzen (dritter Ordnung) (effizienter)

William George Horner
* 1786, Bristol
† 1837, Bath
Mathematiker, Lehrer

Möglichkeit 2: rekursive Unterteilung der Kurve; wenn Kurve flach genug, Approximation durch Linie

9.2 Parametrisierte bikubische Flächen

Erinnerung: Form einer kubischen Kurve (hier mit s statt t):

$$Q(s) = G \cdot M \cdot S \quad \text{mit } G = (G_1, G_2, G_3, G_4) \text{ und } S = \begin{pmatrix} s^3 \\ s^2 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verändere nun die G_i selbst entlang einer Kurve:

$$G_i(t) = \tilde{G}_i \cdot M \cdot T \quad \text{mit } \tilde{G}_i = (G_{1i}, G_{2i}, G_{3i}, G_{4i})$$

Alle Kurven zusammen ergeben eine Fläche.

Setzt man die transponierte Form $G_i(t)^T = T^T \cdot M^T \cdot \tilde{G}_i^T$ in die Kurvendarstellung ein, ergibt sich die **parametrisierte bikubische Fläche** aus

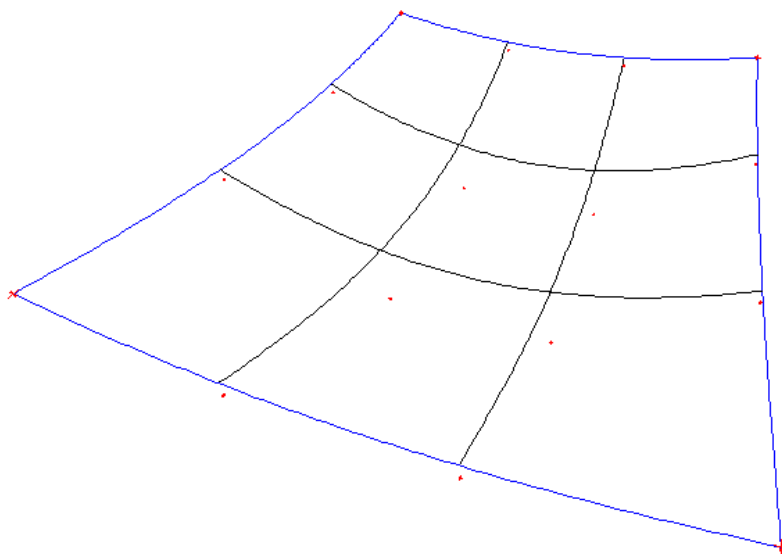
$$Q(s, t) = T^T \cdot M^T \cdot \tilde{G} \cdot M \cdot S \quad \text{mit } \tilde{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{pmatrix}, \quad s, t \in [0; 1]$$

oder koordinatenweise:

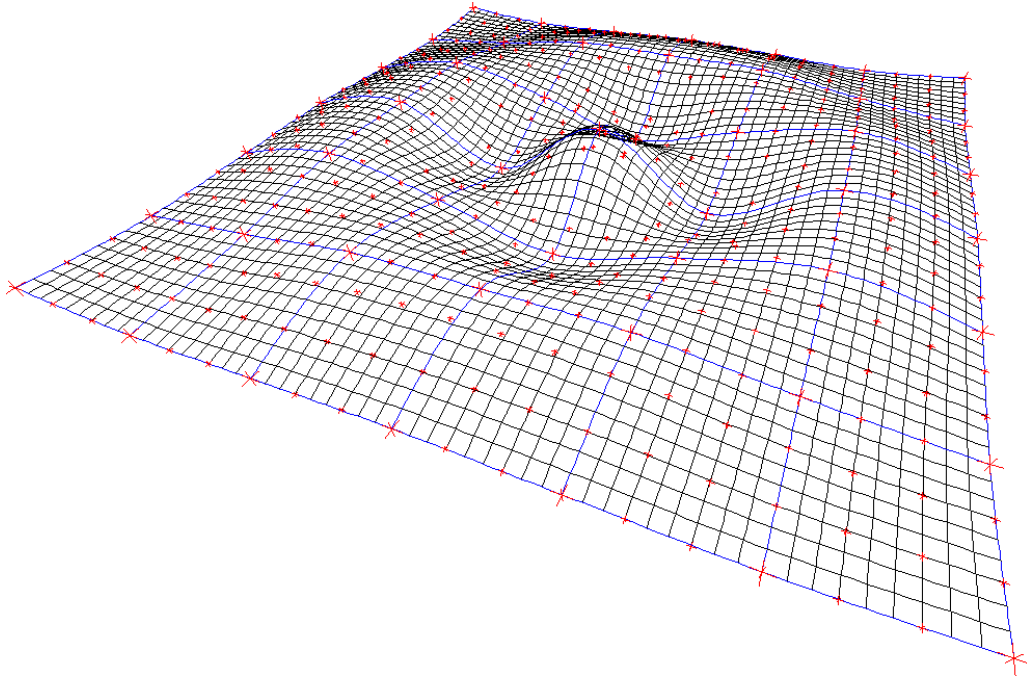
$$x(s, t) = T^T \cdot M^T \cdot \tilde{G}_x \cdot M \cdot S, \quad y(s, t) = T^T \cdot M^T \cdot \tilde{G}_y \cdot M \cdot S, \quad z(s, t) = T^T \cdot M^T \cdot \tilde{G}_z \cdot M \cdot S$$

9.2.1 Bézier-Flächen

G_B enthält $4 \cdot 4 = 16$ Kontrollpunkte; die vier Eckpunkte des Flächenstücks werden interpoliert.



Beispiel 9.8: Bézier-Fläche, die 7×7 gegebene Punkte mit 36 Flächenstücken (**Patches**) interpoliert. Berechnung der inneren Kontrollpunkte ähnlich zum Algorithmus auf 9-12:



9.3 Rotationskörper

Lasse eine (z. B. kubische parametrisierte) Kurve um eine Achse rotieren.

