Inkrementelle Scan Conversion für Ellipsen

– Alte Version –

Region 1

Wir starten in Region 1 am Punkt $(x, y) = (0, b)$ und stellen fest, dass

$$\begin{aligned} F(x,y) &= b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 \\ &= a^2b^2 - a^2b^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir müssen untersuchen, ob

$$\begin{aligned} F(x+1, y-\frac{1}{2}) &= b^2(x+1)^2 + a^2(y-\frac{1}{2})^2 - a^2b^2 \\ &= b^2x^2 + 2b^2x + b^2 + a^2y^2 - a^2y + \frac{1}{4}a^2 - a^2b^2 \\ &=: d_1 \end{aligned}$$

≤ 0, > 0 oder $= 0$ ist. Da wir an Punkt $(x, y) = (0, b)$ starten, können wir d_1 also mit

$$d_1 = b^2 - a^2b + \frac{1}{4}a^2$$

initialisieren. Die Frage ist nun, wie sich d_1 ändert, wenn wir die Entscheidung $d_1 \leq 0$ (Punkt in Ellipse), also nach *Osten* treffen, bzw. die Entscheidung zu $d_1 > 0$ (Punkt außerhalb Ellipse), also nach *Südosten*, ausfällt. Dafür untersuchen wir im Fall *Ost* die Differenz

$$\begin{aligned} d_{1,O}(x,y) &= F(x+2, y-\frac{1}{2}) - F(x+1, y-\frac{1}{2}) \\ &= (b^2x^2 + 4b^2x + 4b^2 + a^2y^2 - a^2y + \frac{1}{4}a^2 - a^2b^2) \\ &\quad - (b^2x^2 + 2b^2x + b^2 + a^2y^2 - a^2y + \frac{1}{4}a^2 - a^2b^2) \\ &= 2b^2x + 3b^2. \end{aligned}$$

Im Fall *Südost* müssen wir die Differenz

$$\begin{aligned} d_{1,SO}(x,y) &= F(x+2, y-\frac{3}{2}) - F(x+1, y-\frac{1}{2}) \\ &= (b^2x^2 + 4b^2x + 4b^2 + a^2y^2 - 3a^2y + \frac{9}{4}a^2 - a^2b^2) \\ &\quad - (b^2x^2 + 2b^2x + b^2 + a^2y^2 - a^2y + \frac{1}{4}a^2 - a^2b^2) \\ &= 2b^2x + 3b^2 - 2a^2y + 2a^2 \end{aligned}$$

berechnen. Um einen ganzzahligen Algorithmus zu erhalten müssen wir einfach $d_1, d_{1,O}(x, y)$ und $d_{1,SO}(x, y)$ mit 4 multiplizieren. Wir müssen also im Fall *Ost* $d_1 \leftarrow d_1 + d_{1,O}(x, y)$ und im Fall *Südost* $d_1 \leftarrow d_1 + d_{1,SO}(x, y)$ setzen.

Region 2

Während des Zeichnens von Region 1 wird geprüft, ob die Bedingung

$$a^2y > b^2x$$

erfüllt ist. Sobald sie nicht mehr erfüllt ist, findet der Übergang in Region 2 statt. Nun muss neu initialisiert werden. Dafür setzen wir

$$\begin{aligned} F(x+\frac{1}{2}, y-1) &= b^2(x+\frac{1}{2})^2 + a^2(y-1)^2 - a^2b^2 \\ &=: d_2 \end{aligned}$$

und für den Punkt (x, y) wählen wir den zuletzt gesetzten Punkt. Danach muss eine Entscheidung für *Südost* oder *Süd* getroffen werden. Im Fall *Südost* bilden wir die Differenz

$$\begin{aligned} d_{2,SO}(x,y) &= F(x+\frac{3}{2}, y-2) - F(x+\frac{1}{2}, y-1) \\ &= (b^2x^2 + 3b^2x + \frac{9}{4}b^2 + a^2y^2 - 4a^2y + 4a^2 - a^2b^2) \\ &\quad - (b^2x^2 + b^2x + \frac{1}{4}b^2 + a^2y^2 - 2a^2y + a^2 - a^2b^2) \\ &= 2b^2x + 2b^2 - 2a^2y + 3a^2. \end{aligned}$$

Für die Entscheidung *Süd* untersuchen wir die Differenz

$$\begin{aligned} d_{2,S}(x,y) &= F(x+\frac{1}{2}, y-2) - F(x+\frac{1}{2}, y-1) \\ &= (b^2x^2 + b^2x + \frac{1}{4}b^2 + a^2y^2 - 4a^2y + 4a^2 - a^2b^2) \\ &\quad - (b^2x^2 + b^2x + \frac{1}{4}b^2 + a^2y^2 - 2a^2y + a^2 - a^2b^2) \\ &= -2a^2y + 3a^2. \end{aligned}$$

Genau wie in Region 1 können $d_2, d_{2,SO}$ und $d_{2,S}$ mit 4 multipiziert werden, um einen ganzzahligen Algorithmus zu erhalten.

Differenzen 2. Ordnung

Die Differenzen $d_{1,O}, d_{1,SO}, d_{2,SO}$ und $d_{2,S}$ sind noch von x bzw. y abhängig. Dies kann aber vermieden werden, wenn die Änderung dieser Größen untersucht wird. Man muss ausrechnen, wie sich z.B. $d_{1,O}$ ändert, wenn die Entscheidung nach *Ost* ($(x,y) \to (x+1, y)$) oder *Südost* ($(x,y) \to (x+1, y-1)$) getroffen wird. In Region 1 erhält man dann

$$\begin{aligned} d_{1,O,O} &:= d_{1,O}(x+1,y) - d_{1,O}(x,y) = 2b^2 \\ d_{1,SO,O} &:= d_{1,SO}(x+1,y) - d_{1,SO}(x,y) = 2b^2 \\ d_{1,O,SO} &:= d_{1,O}(x+1,y-1) - d_{1,O}(x,y) = 2b^2 \\ d_{1,SO,SO} &:= d_{1,SO}(x+1,y-1) - d_{1,SO}(x,y) = 2b^2 + 2a^2. \end{aligned}$$

Analog dazu erhält man in Region 2

$$\begin{aligned}
d_{2,SO,SO} &:= d_{2,SO}(x+1, y-1) - d_{2,SO}(x,y) = 2b^2 + 2a^2 \\
d_{2,S,SO} &:= d_{2,S}(x+1, y-1) - d_{2,S}(x,y) = 2a^2 \\
d_{2,SO,S} &:= d_{2,SO}(x, y-1) - d_{2,SO}(x,y) = 2a^2 \\
d_{2,S,S} &:= d_{2,S}(x, y-1) - d_{2,S}(x,y) = 2a^2.
\end{aligned}$$

Um einen ganzzahligen Algorithmus zu erhalten, müssen auch diese Werte alle mit 4 multipliziert werden. Man könnte nun also $d_1, d_{1,O}$ und $d_{1,SO}$ initialisieren und je nach Richtungsentscheidung setzt man z.B.

$$\begin{aligned}
d_1 &\leftarrow d_1 + d_{1,O} \\
d_{1,O} &\leftarrow d_{1,O} + d_{1,O,O} \\
d_{1,SO} &\leftarrow d_{1,SO} + d_{1,SO,O}
\end{aligned}$$

nach der Entscheindung *Ost* oder

$$\begin{aligned}
d_1 &\leftarrow d_1 + d_{1,SO} \\
d_{1,O} &\leftarrow d_{1,O} + d_{1,O,SO} \\
d_{1,SO} &\leftarrow d_{1,SO} + d_{1,SO,SO}
\end{aligned}$$

nach der Entscheindung *Südost* in Region 1.