



UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

# DINÁMICA DE FLUÍDOS: DESCRIPCIONES EULERIANA Y LAGRANGIANA

*Trabajo de especialización- Mecánica Teórica*

Autor:

Jon Mañueco Rubio

Noviembre de 2022

# Índice

<b>1. Motivación</b>	<b>2</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>3. Formulación matemática</b>	<b>2</b>
3.1. Formulación lagrangiana . . . . .	2
3.2. Principio de conservación de la masa . . . . .	3
3.3. Principio de conservación del momento . . . . .	4
<b>4. El método de las características y la ecuación de Burgers</b>	<b>5</b>
4.1. Introducción al método . . . . .	5
4.2. Invertibilidad . . . . .	6
4.3. Ecuación de Burgers . . . . .	6
<b>5. Comentarios finales</b>	<b>8</b>
5.1. Ventajas y desventajas de la formulación lagrangiana frente a la euleriana . . . . .	8
5.2. Una breve conclusión . . . . .	9
<b>6. Bibliografía</b>	<b>10</b>

## 1. Motivación

El objetivo del trabajo es el planteamiento y la comparación de las descripciones de la mecánica de fluidos desde los puntos de vista lagrangiano y euleriano. Para ello, se planteará la descripción lagrangiana desde una perspectiva matemáticamente rigurosa, las ventajas e inconvenientes de cada método, el estudio de algunas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales conocidas y cómo el método de las características se puede interpretar como un método de resolución lagrangiano para algunas ecuaciones especiales dentro de las ecuaciones de transporte.

## 2. Introducción

La mecánica de fluidos es la rama de la física comprendida dentro de la mecánica de medios continuos que estudia el movimiento de los fluidos, así como las fuerzas que lo provocan y su interacción con el medio que lo rodea, y que se caracteriza por la incapacidad para recibir esfuerzos cortantes, lo que tiene como consecuencia que no tenga una forma definida. [4] Durante este trabajo trataremos con dos posibles descripciones de esta rama, y veremos sus similitudes y diferencias, así como sus ventajas e inconvenientes en la resolución de problemas.

Por un lado se tiene a la formulación tradicional de la dinámica de fluidos: la formulación euleriana, que intuitivamente se basa en medir lo que sucede en puntos fijos del espacio, y por otro lado se tiene la lagrangiana, que consiste en hacer un seguimiento de las partículas materiales, pero de una forma más individual. Un ejemplo cotidiano que puede ayudar a entender la situación es el estudio de los artículos de los clientes de un supermercado: un *supermercado lagrangiano* pondría una etiqueta mental a cada cliente, de manera que en todo momento se puede saber dónde está y qué artículos lleva. Por otro lado, en un *supermercado euleriano* nos quedaríamos en un punto fijo, por ejemplo las cajas, y veríamos qué artículos se ponen en cada cinta transportadora. Otro ejemplo que podría ser aplicable es el curso de un río, el *individuo lagrangiano* iría en una piragua surcándolo, mientras que el *euleriano* se quedaría observando el curso del río desde la orilla.

## 3. Formulación matemática

### 3.1. Formulación lagrangiana

En primer lugar es necesario fijar ciertos objetos matemáticos e hipótesis que nos permitirán desarrollar la teoría de a continuación. En primer lugar debemos establecer que nos encontramos en mecánica de medios continuos, esto es, un agregado que se mueve en el tiempo de manera continua. De manera que consideramos un dominio  $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$  una variedad diferenciable, y una familia de transformaciones:

$$\Phi_t : \Omega_0 \longrightarrow \Omega_t \subset \mathbb{R}^n \quad t \in I[1] \quad (1)$$

con  $I$  un intervalo que empieza en 0. De manera que  $\Phi_t(x) = \Phi(x, t)$  es una aplicación  $C^k$  y un difeomorfismo  $\forall t \in I$ . Nótese que  $\Phi_0 = Id_{\Omega_0}$ . Además, los elementos de esta variedad serán las células, continentes de muchas moléculas, pero despreciamos su estructura molecular, y suponemos que cada una de estas células es tan pequeña que se puede tratar a la variedad como un continuo.

Por lo tanto, podemos estudiar la evolución de una partícula dada su posición inicial  $\mathbf{x} \in \Omega_0$ , esto es  $\mathbf{y} = \Phi_t(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}, t)$ ;  $\mathbf{y} \in \Omega_t$ . Esto permite definir la matriz de la diferencial de la aplicación fijado  $t \in I$ , esto es:

$$J \equiv d\Phi_t = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \quad |J| = |d\Phi_t| \neq 0 \forall t \in I^1 \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>2 Donde que el determinante de la diferencial sea distinto de 0 se sigue de que  $\Phi_t$  es un difeomorfismo para todo  $t \in I$

Podemos representar esta evolución temporal de la variedad mediante la figura:

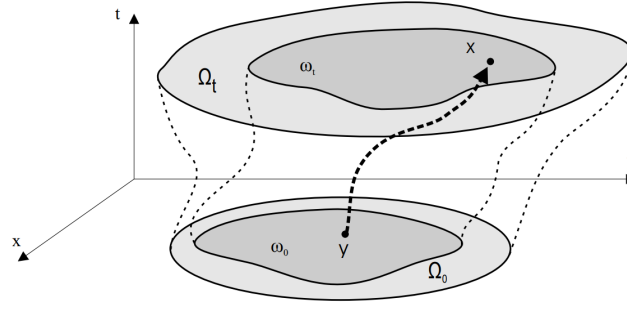


Figura 1: Evolución de la variedad en el tiempo [1]

De esta manera, podemos identificar a toda partícula de la variedad sabiendo su posición inicial o momento de etiquetado [2], puesto que, aunque en este trabajo la construcción se realiza utilizando posiciones, se puede hacer fijando a la partícula mediante sus características físicas o termodinámicas.

Dada la construcción realizada, es trivial demostrar el teorema de etiquetado (*Labeling Theorem*), puesto que si tomamos como valor inicial otro  $t' \in I$   $t' \neq 0$ , la aplicación:

$$\Phi'_t : \Omega_{t'} \longrightarrow \Omega_t \subset \mathbb{R}^n \quad t \in I \quad (3)$$

es un difeomorfismo, pues fijado  $t_0 \in I$ , se tiene  $\Phi'_{t_0} = \Phi_{t_0} \circ \Phi_{t'}^{-1}$ , que es una composición de difeomorfismos, y un difeomorfismo por tanto. Como último comentario añadimos lo evidente: las trayectorias que seguirá cada partícula será la imagen la función  $\Phi$ , fijado  $y \in \Omega_0$ , moviendo  $t \in I$ .

### 3.1.1. Derivada lagrangiana de una función y derivada material

Las derivadas se calculan diferente en función del sistema elegido, veámoslo. Dada una función arbitraria  $f$  en un sistema euleriano, esta tiene su equivalente lagrangiano, fijando notación esto es:

$$f(x, t) = f(\Phi(y, t), t) \equiv F(y, t) \quad (4)$$

De esta manera, en coordenadas eulerianas tenemos la derivada parcial usual  $\frac{\partial f}{\partial t}$ , mientras que en lagrangianas tenemos sin más que aplicar la regla de la cadena a (4):

$$\frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y} \text{ fijo}} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x} \text{ fijo}} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{t \text{ fijo}} \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y} \text{ fijo}} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \mathbf{u}[1] \quad (5)$$

Donde  $\mathbf{u}$  no es más que la velocidad de la partícula que en el momento de ser etiquetada estaba en  $y \in \Omega_0$ , en el momento  $t$ . La ecuación anterior es conocida como derivada material[5], y relaciona las derivadas de las funciones en coordenadas eulerianas y lagrangianas cuando existe una deformación continua de la variedad sobre la que se define.

## 3.2. Principio de conservación de la masa

En esta subsección vamos a probar el principio de conservación de la masa en coordenadas lagrangianas. Para ello, podríamos partir del principio de conservación de la masa en coordenadas eulerianas como hacen en ???. Sin embargo, vamos a probarlo desde un punto de vista puramente lagrangiano:

**Teorema 1** (Principio de conservación de la masa[1]). *Sea una familia de variedades diferenciables  $\Omega_t$  de manera que para cada  $t \in I$  existe una medida  $m_t$  y una  $\sigma$ -álgebra  $\Sigma_t$  definida sobre  $\Phi_t(\Omega_0)$  de manera que para todo  $\omega_0 \subset \Omega_0$  medible y  $\omega_t = \Phi_t(\omega_0)$  se verifica :*

$$m_t(\omega_t) = m_0(\omega_0) \iff \text{La masa ni se crea ni se destruye}$$

Donde además suponemos que existe una función  $\rho(\mathbf{x}, t)$  que verifica  $dm_t = \rho(\mathbf{x}, t)d\mathbf{x}$

*Demostración.* Como  $\omega_t$  contiene exactamente las mismas partículas que  $\omega_0$ , se tiene que la masa es constante en  $\omega_t$  para todo  $t \in I$ , esto es, aplicando la definición de medida de un conjunto :

$$m(\omega_t) = m(\omega_0) \iff \int_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\omega_0} \rho(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} \quad \forall t \in I$$

Por otro lado, tenemos que aplicando el cambio de variable  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}, t)$ , cuyo jacobiano hemos calculado antes en 2 tenemos:

$$\int_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\omega_0} \rho(\Phi(\mathbf{y}, t), t) |J| d\mathbf{y}$$

Por lo que juntando ambas igualdades se obtiene:

$$\int_{\omega_0} (\rho(\Phi(\mathbf{y}, t), t) |J| - \rho(\mathbf{y}, 0)) d\mathbf{y} = 0$$

Pero como esto se cumple para todo  $\omega_0 \in \Sigma_0$ , solo se puede concluir que:

$$\rho(\Phi(\mathbf{y}, t), t) |J| = \rho(\mathbf{y}, 0) \quad \forall t \in I$$

Obteniendo el principio de conservación de la masa lagrangiano, como queríamos ver.  $\square$

Un comentario acerca de esta prueba es que la medida utilizada no es otra que la medida de la masa de un fluido, lo que le da sentido a la proposición en sí. De hecho, la densidad de un conjunto se puede obtener mediante el cociente de la medida de la masa y de la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^3$ . Otra forma de probar este principio es imponiendo que como la masa es constante en cada  $\omega_t$ , la derivada de la integral de la masa es 0, y aplicando el *Teorema de derivación bajo signo de integral* obtenemos la igualdad buscada. Por supuesto, todo este desarrollo se basa en la no existencia de fuentes de masa, en ese caso el desarrollo sería distinto, aunque si esta es una función dependiente de la posición del volumen, el resultado es sencillo.

### 3.3. Principio de conservación del momento

De igual manera que en el apartado anterior, vamos a obtener la relación para el principio de conservación del momento, para ello nos encontramos en las hipótesis del teorema anterior, a lo que añadimos que solo consideramos la presión normal sobre la superficie del volumen como fuerza sobre el fluido, en ausencia de fuerzas externas.

**Teorema 2** (Principio de conservación del momento). *En las hipótesis mencionadas anteriormente se conserva en momento, e.d. se verifica la relación:*

$$\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} u_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial x_i}{\partial y_k} = - \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial y_k}$$

*Demostración.* Aplicando la segunda ley de Newton se tiene la igualdad:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = - \int_{\partial\omega_t} p(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(t) d\mathbf{x}$$

Donde  $\mathbf{n}(t)$  denota el vector normal unitario a la superficie  $\partial\omega_t$ . Ahora, aplicando el *Teorema de derivación bajo signo integral* y el cambio de variable del apartado anterior en el lado izquierdo podemos imponer:

$$\frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} (\rho(\Phi(\mathbf{y}, t), t) \mathbf{u}(\Phi(\mathbf{y}, t), t) |J|) d\mathbf{y} = \int_{\omega_0} \rho(\Phi(\mathbf{y}, t), t) |J| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\Phi(\mathbf{y}, t), t) d\mathbf{y}$$

Donde hemos aplicado el principio de conservación de la masa en la última igualdad. Por otro lado, en el lado derecho convertimos la intergral de volumen en una integral de superficie:

$$- \int_{\partial\omega_t} p(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}(t) d\mathbf{x} = - \int_{\omega_t} \nabla p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = - \int_{\omega_0} \nabla p(\phi(\mathbf{y}, t), t) |J| d\mathbf{y}$$

Por último, basta igualar las dos últimas expresiones para darnos cuenta de que, componente a componente se tiene:

$$\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} u_i(\mathbf{x}, t) = - \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

Donde se ha utilizado que dos funciones que integran lo mismo en cualquier recinto son iguales en casi todo punto. Para terminar hay que multiplicar por la inversa de  $J$  para obtener el resultado deseado:

$$\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial t} u_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial x_i}{\partial y_k} = - \frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial y_k}$$

□

Para terminar esta primera parte se podría dar el teorema de conservación de la energía. Sin embargo, la demostración de esta es poco ilustrativa, y el resultado tiene una forma un tanto extraña, por lo que simplemente lo exponemos y pasamos a otros temas más interesantes:

**Teorema 3** (Principio de conservación de la energía). *En las hipótesis de los teoremas anteriores, se tiene la conservación de la energía, esto es[2]:*

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho(\mathbf{x}, t) |J| (K + U)] = - |J| \frac{\partial y_j}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_j} (u_k(\mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t),)$$

Donde  $K, U$  denotan las energía cinética e interna, respectivamente.

## 4. El método de las características y la ecuación de Burgers

### 4.1. Introducción al método

En general, vamos a tratar en esta sección 3 ámbitos de estudio que viven en general en espacios distintos ciencia, pero que convergen en algunos puntos. Estos son las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de transporte, los flujos de campos vectoriales en variedades diferenciables y la dinámica de fluidos lagrangiana. Para ello, vamos a emplear un método de resolución general de ecuaciones de transporte, conocido como el método de las características.

El método de las características es un método de resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para cierto tipo de ecuaciones: las conocidas como ecuaciones de transporte, que se caracterizan por tener en su argumento tan solo las derivadas parciales respecto del tiempo y del espacio. Un ejemplo de una ecuación de transporte que solo depende el espacio en  $\mathbb{R}^n$  podría ser:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}^0(\tau)) = \mathbf{u}_0(\tau) \end{cases}$$

Donde lo que hemos hecho es ponerle la etiqueta al dato inicial mediante el punto  $\tau$  de una variedad. El método de resolución por características consiste en general en encontrar unas curvas en la variedad de la forma  $(x(s), t(s))$  donde sepamos cuánto vale la solución  $\mathbf{z}(s) = \mathbf{u}(x(s), t(s))$ , de manera que verifica:

$$\mathbf{z}'(s) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}(\mathbf{x}(s)) x_i'(s) \quad (6)$$

Y lo natural es elegir:

$$\begin{aligned} x_i'(s) &= a_i(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(\mathbf{x}(s))) = a_i(\mathbf{x}(s), \mathbf{z}(s)) \\ \mathbf{z}'(s) &= b(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(\mathbf{x}(s))) = b(\mathbf{x}(s), \mathbf{z}(s)) \end{aligned}$$

Al sistema anterior se le conoce como sistema característico. Basta darse cuenta de que, en general, como las funciones que aparecen en esta clase de ecuaciones son  $C^1$ , se nos garantiza la existencia y unicidad de soluciones vía el *Teorema de Picard-Lindelöf*. Ahora bien, si nos fijamos en la asignación de los  $x_i'(s)$  nos

daremos cuenta de que estos coinciden con los coeficientes<sup>2</sup> de los elementos de la base del plano tangente (las derivaciones) en la imagen de la variedad vía  $\mathbf{u}$ . Y de hecho  $(\mathbf{x}(s))$  no es más que un flujo (una curva integrable) que tiene como tangente a este campo vectorial del que hablamos.

## 4.2. Invertibilidad

Otro factor que debe ser considerado es la invertibilidad, esto es encontrar, si existen,  $\tau \in \Omega, s \in \mathbb{R}$  tales que  $\mathbf{x}(s, \tau) = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  dado. En definitiva, dado un punto hay que encontrar la curva característica que pasa por él, de esta existir. Nótese que en este caso, las curvas características sí que se pueden cortar, pues el *Teorema de Picard-Lindelöf* aplicado a un sistema de EDO's nos da la existencia y unicidad de soluciones para el sistema, es decir para la  $n+1$ -tupla  $(\mathbf{x}(s, z), \mathbf{z}(s))$ , pero no para las  $n$  primeras coordenadas<sup>3</sup>. De manera que la tarea ahora es invertir la correspondencia:

$$\begin{aligned} F : \Omega \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\tau, s) &\longrightarrow \mathbf{x}(\tau, s) \end{aligned}$$

Para ello queremos aplicar el *Teorema de la función inversa*, para lo que calculamos :

$$\begin{aligned} DF(\tau_0, 0) &= \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau_1}(\tau_0, 0), \dots, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \tau_{n-1}}(\tau_0, 0), \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}(\tau_0, 0) \right)_{N \times N} \\ &= \left( \frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial \tau_1}(\tau_0), \dots, \frac{\partial \mathbf{x}^0}{\partial \tau_{n-1}}(\tau_0), a(\mathbf{x}^0(\tau_0), \mathbf{u}_0(\tau_0)) \right)_{N \times N} \end{aligned}$$

Pues bien, las  $n-1$  primeras columnas son exactamente los vectores de la base del plano tangente a la variedad en el punto. De manera que el determinante será distinto de 0, y la matriz por lo tanto invertible, si y solo si  $a \notin T_{\mathbf{x}^0(\tau_0)}M$ .

## 4.3. Ecuación de Burgers

### 4.3.1. Resolución de la ecuación

En esta subsección vamos a presentar la ecuación de Burgers, que es una ecuación muy importante y conocida en la dinámica de fluidos. Particularmente la vamos a presentar en el caso en el que tratamos con un fluido en el que no aparece el término de difusión, es decir, con  $\nu = 0$  se tiene el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Aplicamos el método de las características, para lo que buscamos curvas de la forma  $(x(s), t(s))$  sobre las que conozcamos la solución  $z(s) = u(x(s), t(s))$ , de manera que utilizando la regla de la cadena obtenemos:

$$z'(s) = u_x(x(s), t(s))x'(s) + u_t(x(s), t(s))t'(s)$$

Ahora estamos en condiciones de plantear el sistema característico:

$$\begin{cases} x'(s) = z(s), x(0) = x_0 \\ t'(s) = 1, t(0) = 0 \\ z'(s) = 0, z(0) = u_0(x_0) \end{cases}$$

Que es un sistema fácil de resolver, obteniendo:

$$\begin{cases} t(s) = s = t \\ z(s) = u_0(x_0) \\ x(s) = u_0(x_0)s + x_0 \equiv x \end{cases}$$

<sup>2</sup>4.1 Aunque los llamemos coeficientes, realmente no lo son, son funciones diferenciables.

<sup>3</sup>4.2 Se hace notar este comentario en particular porque cuando abordemos la ecuación de Burgers, este concepto volverá a salir

De manera que obtenemos:

$$u(x, t) = u_0(x_0) = u_0(x - u(x, t)t)$$

#### 4.3.2. Caso de invertibilidad

En general, no siempre va a ser posible invertir, sin embargo, vamos a plantear un caso en el que sí que va a ser posible, que es cuando  $u'_0 \geq 0$ . De manera que, dados  $(x, t), t > 0$ : ¿podemos conseguir  $(x_0, s)$ ? Para resolver este problema vamos a considerar la función:

$$x = u_0(x_0)t + x_0 \equiv F(x_0)$$

Como para cada  $x, \exists! x_0 \iff F(x_0)$  es biyectiva. Consideremos la derivada de la función:

$$F'(x_0) = u'_0(x_0)t + 1 \geq 1$$

Por lo que  $F$  es estrictamente creciente, pues por hipótesis  $u'_0 \geq 0$ . Para ver ahora la sobreyectividad, observamos que  $\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} F(x_0) = -\infty$ , pues esta cantidad es distinta de infinito si y solo si  $u_0(x_0) \rightarrow \infty$  conforme  $x_0$  tiende a menos infinito, pero  $u'_0 \geq 0$ , por lo que esto no puede ocurrir. Además es claro que  $\lim_{x_0 \rightarrow \infty} F(x_0) = \infty$ , por lo que  $F$  es una biyección. De manera que en este caso podremos invertir.

#### 4.3.3. Desaparición de las soluciones

Para terminar, supongamos que existen dos puntos en  $t = 0$ ,  $x_0$  y  $x_1$  que cumplen que  $u_0(x_0) > u_0(x_1)$ , con  $x_1 > x_0$  y veamos que la solución deja de existir. Si representamos la ecuación de cada curva característica, es claro que la solución debe dejar de existir:

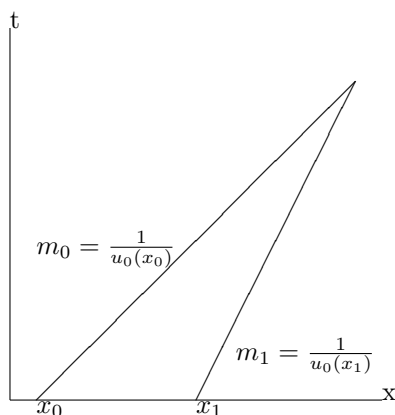


Figura 2: Fin de la existencia de soluciones

Un par de comentarios acerca del diagrama: son rectas pues la solución es constante sobre ellas, y se cortan porque la pendiente de la segunda es mayor que la de la primera. Pero claro, si nos fijamos en el sistema característico, nos damos cuenta de que las dos primeras ecuaciones forman un sistema en sí mismo (pues la ecuación en  $z$  está desacoplada), por lo que el *Teorema de Picard-Lindelöf* nos dice que la solución del sistema es única (es claro que las funciones son localmente Lipschitz), dado un dato inicial, lo que tiene como consecuencia que las soluciones no se pueden cortar (dejan de existir), que es exactamente lo que pasa en el caso mencionado.

#### 4.3.4. Comentario sobre el método de las características y las ondas de choque

Para cerrar esta sección es preciso comentar que el método de las características es un método puramente lagrangiano, pues el proceso es fijar un dato inicial en un tiempo (que tomamos s.p.d.g como  $t_0 = 0$ ) y estudiar la evolución de ese dato inicial (esa partícula en el fluido) con el tiempo, mientras conocemos la evolución del campo de velocidades por la trayectoria de la partícula. En este caso, como la ecuación es homogénea, el valor de  $u$  sobre estas trayectorias es constante, nótese que en el ejemplo anterior este no era el caso.

Como último comentario damos una posible razón física por la que las soluciones no se pueden cortar, pues si este fuera el caso, habría dos partículas que colapsarían (ocuparían la misma posición en el espacio-tiempo),



y su interacción es lo que provoca que desaparezca la solución clásica de la ecuación. Esa es la razón por la que si se impone que  $u'_0 \geq 0$  el sistema se puede invertir y todo punto del espacio-tiempo está ocupado por una sola partícula, pues ninguna de las curvas características se corta, y las soluciones existen para todo  $t > 0$ .

El fenómeno físico asociado a la desaparición de la solución clásica conduce a lo que se conoce como onda de choque, de hecho, el tiempo crítico en el que el frente de onda de la solución se vuelve vertical (esto es  $u_x$  tiende a infinito), y esto se produce cuando se alcanza el tiempo crítico:

$$t_c = -\frac{1}{u'_0}$$

lo que genera una discontinuidad provocada por el fenómeno mencionado anteriormente. Aunque con otras palabras y argumentos, esto es exactamente a lo que se refieren como onda de choque en el José y Salletán[3]. Gráficamente se ve claramente a lo que nos referimos con que el frente de onda se vuelve vertical:

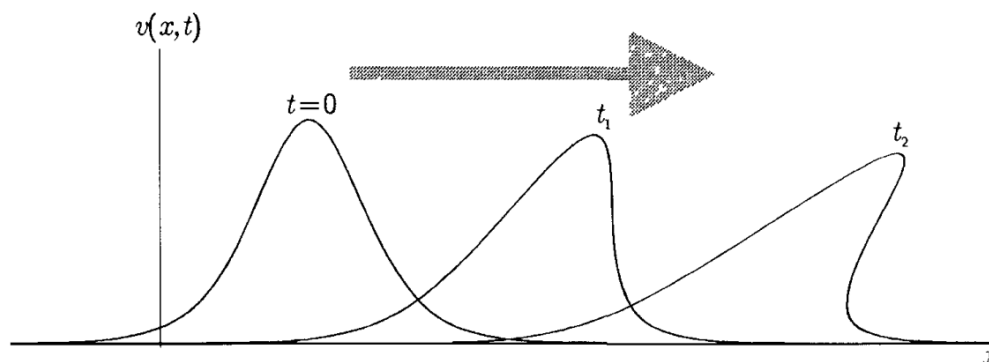


FIGURE 9.15

Formation of a shock wave. The wave moves to the right:  $0 < t_1 < t_2$ . The wave front at  $t_1$  is just about vertical.

Figura 3[3]: Formación de onda de choque en  $t = t_1$

Donde  $v(x, t) \equiv u(x, t)$ .

## 5. Comentarios finales

### 5.1. Ventajas y desventajas de la formulación lagrangiana frente a la euleriana

La formulación euleriana también es conocida como la formulación tradicional, y es la más utilizada en dinámica de fluidos, pues la mayoría de escritos acerca del tema están formulados de esta forma, y es la que se enseña en la mayoría de universidades. Una de las ventajas es que tiene es que es la formulación (en general) a la que más habituados estamos al estudiar la física; frente a la lagrangiana, que es menos común y por lo tanto menos sencilla de entender a priori. Además, la euleriana es, en general más útil en la mayoría de casos y aplicaciones, entre otras cosas porque en ocasiones ciertas expresiones que son sencillas y físicamente interpretables desde un punto de vista euleriano, son más complejas y menos intuitivas si las estudiamos desde un punto de vista lagrangiano.

Una descripción lagrangiana puede ser atractiva si se trata de un número pequeño de partículas, si las partículas se mueven como un sólido rígido o si las partículas se desplazan solamente un poco de su posición inicial o de equilibrio. Sin embargo, en un fluido en movimiento, identificar y seguir el rastro de varias partículas es virtual y computacionalmente muy complicado. Por estas razones, en la mecánica de fluidos la descripción Lagrangiana no es muy útil.[7] Sin embargo, es por esas mismas razones que sí que lo es en el estudio de la teoría de plasticidad de deformación finita.

## 5.2. Una breve conclusión

Para la primera parte del trabajo intenté en primera instancia leer directamente el libro de *Andrew Bennett* sobre dinámica de fluidos, pero lo cierto es que la notación me desbordó en primera instancia. Buscando ideas acerca de hacia donde orientar el trabajo, me topé con un documento publicado por un profesor de la facultad de matemáticas sobre la formalización de la notación y entonces decidí que la primera parte del trabajo la dedicaría a intentar resolver desde un punto de vista riguroso los aspectos más básicos de la dinámica de fluidos: las leyes de conservación, desde un punto de vista lagrangiano. La idea de realizar la segunda parte del trabajo vino de que al hacer una lectura rápida de la bibliografía, me di cuenta de que la ecuación de Burgers con  $\nu = 0$  es una ecuación de transporte, y por lo tanto es susceptible de ser resuelta por el método de las características. Además, el hecho de que cuando cursé la asignatura de *Teoría clásica de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales* no había comenzado a cursar la asignatura de *Variedades Diferenciables*, no había caído en que en algunos casos este método se podía interpretar como la búsqueda de flujos de un campo sobre una variedad. Además, al haberme informado de la primera parte del trabajo (utilizando el libro de *Andrew Bennett* sobre mecánica de fluidos en descripción lagrangiana principalmente), me motivó a reflexionar acerca de este método y terminé por darme cuenta de que era puramente lagrangiano y casaba bastante bien con el concepto de trabajo de especialización y la formulación de la mecánica teórica que hemos visto este curso.

El trabajo no ha sido desarrollado desde un punto de vista bibliográfico per se, en la primera parte porque el documento del que saqué la información contenía algunas erratas y no incluía la mayoría de las proposiciones expuestas, por lo que una parte del mismo es de cosecha propia, aunque por supuesto se ha comprobado que los resultados son correctos. Sin embargo, ha sido en la segunda parte del trabajo cuando la bibliografía desaparece casi por totalidad, salvo al final, cuando se hace el comentario sobre las ondas de choque, aunque el cómo llegar a ellas a partir del método de las características tampoco ha sido sacado de ningún documento.

## 6. Bibliografía

### Referencias

- [1] SHMAREV. Mecánica de fluidos, Coordenadas de Lagrange. 2006. Disponible en:<http://www.mat.ucm.es/imi/documents/20062007Shmarev.pdf>
- [2] BENNETT, Andrew. 3 Lagrangian dynamics. En: Andrew BENNETT. *Lagrangian fluid dynamics*. Disponible en:<https://mobt3ath.com/uplode/books/book-51057.pdf>
- [3] JOSE, Jorge. SALETAN, Eugene. 9.5 Fluid dynamics. En: Jorge V. JOSE. Eugene J SALETAN. *Classical dynamics, a contemporary approach*: Cambridge University press
- [4] WIKIPEDIA, Mecánica de fluidos, [https://es.wikipedia.org/wiki/Mecanica\\_de\\_fluidos](https://es.wikipedia.org/wiki/Mecanica_de_fluidos)
- [5] WIKIPEDIA, Derivada material, [https://es.wikipedia.org/wiki/Derivada\\_material](https://es.wikipedia.org/wiki/Derivada_material)
- [6] WIKIPEDIA, Plasticidad (mecánica de sólidos),[https://es.wikipedia.org/wiki/Plasticidad\\_\(mecanica\\_de\\_solidos\)](https://es.wikipedia.org/wiki/Plasticidad_(mecanica_de_solidos))
- [7] Serch JIMENEZ, Enfoque lagrangiano del movimiento de los fluidos, <https://www.hidraulicafacil.com/2015/09/Enfoqueshidraulica.html>