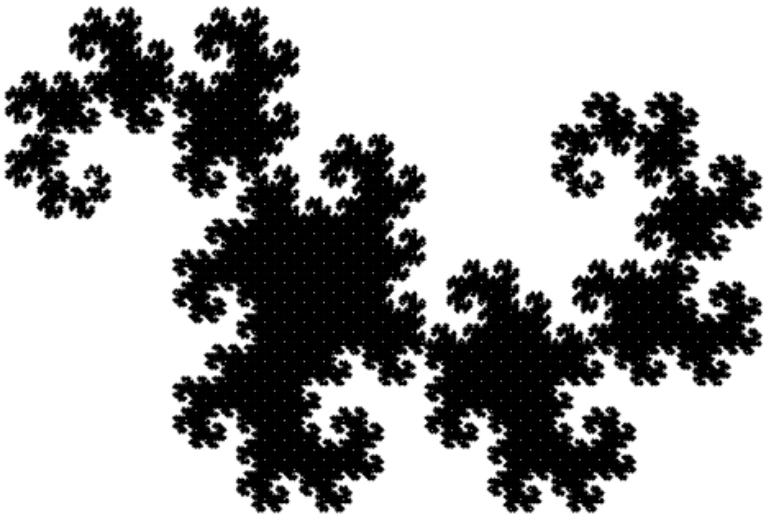
ANNÄHERUNGEN VON MONSTERKURVEN

Portfolioarbeit

Von Jonah Sebright

Klasse 6A



Gymnasium Kirschgarten Basel 2021 EF-Lehrer: PD Dr. Victor Yakhontov

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1 Was sind Monsterkurven und Fraktale?

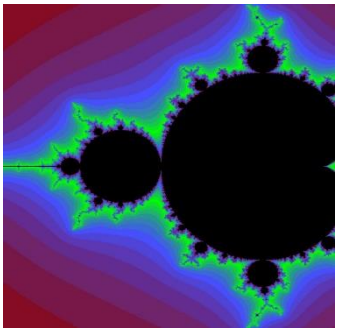


Abb. 1 Mandelbrot Fraktal (WELT, 2010)

Monsterkurve sind im Gegensatz zu Fraktalen eindimensionale geometrische Gebilde. Sie besitzen eine unendliche Länge und decken eine endliche Fläche ab. Für die Annäherung der Monsterkurve wird das Muster durch Rekursion mit endlich langen Kurven stufenweise verfeinert. Diese Annäherung wird dann rekursive Kurve genannt.

Fraktale sind geometrische Gebilde, die sich in nicht ganzzahligen („fraktalen“) Dimensionen befinden. Benoît Mandelbrot zeigte erstmals, dass Fraktale überall in der Natur existieren. Fraktale werden beispielsweise verwendet, um Längen von Küsten zu berechnen (vgl. Radons, kein Datum). Fraktale helfen, Monsterkurven zu erstellen.

1.2 Ziele des Projekts

Das Hauptziel dieses Projekts ist, mit den gelernten Fähigkeiten und dem erworbenen Wissen ein konkretes Informatik-Problem zu lösen. Das in diesem Projekt untersuchte Problem soll bestimmte Monsterkurven, wie die „Schneeflocke“, die „Pfeilspitze“ und die „Drachenkurve“, visuell darstellen. Das Vorgehen beim Lösen des Problems wird ebenfalls in dieser Portfolioarbeit dargestellt.

Zu diesem Problem soll ein Programm erstellt werden, das dem Benutzer eine Annäherung der ausgewählten Monsterkurve bis zu einer gewünschten Stufe grafisch wiedergibt. Zur Zeichnung der Kurve soll die Zeichnungs-Bibliothek „StdDraw“ verwendet werden. Sobald die Darstellung vollendet ist, wird der Benutzer gefragt, ob er die Zeichnung als PDF-Datei speichern möchte. Dabei kann der Benutzer den Dateinamen selbst eingeben.

Für die grafische Darstellung der Monsterkurven müssen die Algorithmen der einzelnen Kurven geschrieben werden, die alle das Basisprinzip der Rekursion implementieren. Zudem verwenden alle Algorithmen die Hilfs-Klasse *Schildkroete* (siehe 2.4.1 Schildkroete).

Ausserdem werden in diesem Projekt die Effizienz der Algorithmen gemessen und in der Diskussion nach Optimierungsmöglichkeiten gesucht. Bei der Drachenkurve wird auch die Fläche der Kurve programmatisch gemessen und mit mathematischen Erkenntnissen. Die unendlich lange Drachenkurve sollte eine endliche Fläche von einem Viertel der Gesamtfläche bedecken.

1.3 Vorschau Resultate

Die Zeichnungen des Programms sind zum Staunen schön! Das Haupt-Programm läuft ohne Fehler und beinhaltet alle oben beschrieben Funktionen und erfüllt somit dessen Ziele. Die einzelnen Algorithmen der Kurven funktionieren ebenfalls einwandfrei bei beliebiger Stufe. Oben sind ein paar

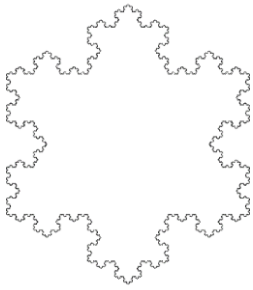


Abb. 4 Schneeflocke bei Stufe 7

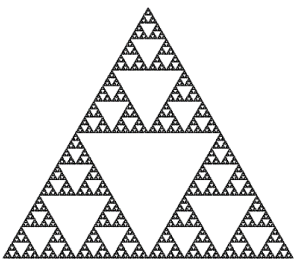


Abb. 3 Pfeilspitze bei Stufe 9

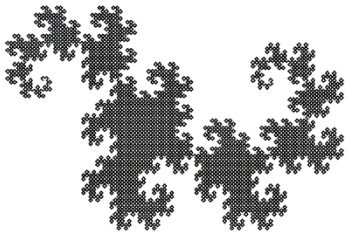


Abb. 2 Drachenkurve bei Stufe 13

grafische Resultate der verschiedenen Monsterkurven.

Das Programm besteht aus den Modulen *Main, Schildkroete*, *Monsterkurve, Input* und den Bibliotheken *StdDraw* und *Flanagan* (siehe Abb. 5 Modularisierung des Programms). Ihre Abhängigkeiten werden in 2.3 Reduktion des Problems erklärt.

Insgesamt wurden 13 Klassen erstellt mit ca. 500 Linien Quellcode. Eine Gesamtübersicht der Klassen und ihren Beziehungen ist im Anhang in Abb. 28 Gesamtübersicht der Klassen und ihren Abhängigkeiten ersichtlich.

2. Hauptteil (Material und Methoden)

Eine Java-Applikation ist sehr komplex und kann durch falsche Entscheidungen schnell zu Problemen führen. Geschicktes Vorgehen ist daher sehr wichtig und die Grundstrukturen müssen stimmen, bevor Details implementiert werden können. Besonders mit zunehmendem Umfang des Programms ist die Architektur umso wichtiger.

Begonnen wird mit der konkreten Definition des Programms, was schon in der Einleitung gemacht wurde. Danach findet die Reduktion des Problems statt, wobei die Module und deren Beziehungen und der Grobalgorithmus skizziert werden. Anschliessend können die einzelnen Module und Algorithmen konkret implementiert werden. Möglicherweise werden dafür Bibliotheken verwendet (siehe 2.2.1 StdDraw). Erst in diesem Schritt wird der Quellcode verfasst.

Damit das Programm stabil und sicher ist, wurde es mit den erwarteten sowie auch unerwarteten Eingabewerten des Benutzers getestet. Dies ist wichtig, da Benutzer nicht immer die erwarteten Werte eingeben und Fehler des Programms zu vermeiden sind. Zudem muss auch die Effizienz getestet werden, sodass ein langsames Programm bemerkt und möglicherweise optimiert werden kann.

Für die Verwendung des Programms muss zunächst eine Verbindung zwischen dem Benutzer und dem Programm hergestellt werden. Dies wird durch ein GUI (graphical user interface) gemacht, was die Interaktion erlaubt. In diesem Programm müssen lediglich ein paar Fenster zum Einlesen und zur Resultat-Ausgabe geöffnet werden. Die Bibliothek „Flanagan“ (siehe 2.2.2 Flanagan) erfüllt diese Anforderungen.

2.1 Programmiersprache

Wie für die Arbeit vorgegeben wurde das Programm ausschliesslich mit Java programmiert. Java ist eine objekt-orientierte Programmiersprache von Oracle und bietet so viele Vorteile, wie unter anderem Polymorphie (vgl. Ullenboom 2012, p .50).

2.2 Bibliotheken

Bibliotheken sind eine Sammlung von Unterprogrammen, die von anderen Programmen genutzt werden können. Oft werden die Bibliotheken zur Vereinfachung von Problemen geschrieben.

2.2.1 StdDraw

Für das Programm wurde eine Zeichnungsbibliothek namens „StdDraw“ vom *Computer Science Department* der Universität Princeton verwendet (vgl. Princeton University, 2021). Die Bibliothek bietet sowohl eine Zeichenfläche als auch Methoden an, mit denen die Zeichenfläche manipuliert werden kann. Die wichtigsten Methoden für dieses Projekt sind *line, setPenColor, setPenRadius, clear*. Eine weitere nützliche Funktion ist *save*, mit der die Zeichenfläche als Bild-Datei gespeichert werden kann.

2.2.2 Flanagan

Für das Einlesen der gewünschten Kurve, der Stufe und des Dateinamens des zu speichernden Bildes wurde die Flanagan-Bibliothek (Flanagan, 2010) implementiert. Mit dieser können einfache Eingabe-Fenster geöffnet werden. Die wichtigsten Methoden für dieses Projekt sind *optionBox*, *readInt*, *yesNo* und *readLine*, um die notwendige Information von dem Benutzer zu erhalten.

2.3 Reduktion des Problems

Komplexe Systeme können in kleinere Aufgaben geteilt und so einfacher gelöst werden. Dieses Aufteilen heisst **Modularisierung**. Jede einzelne Aufgabe kann für sich gelöst werden.

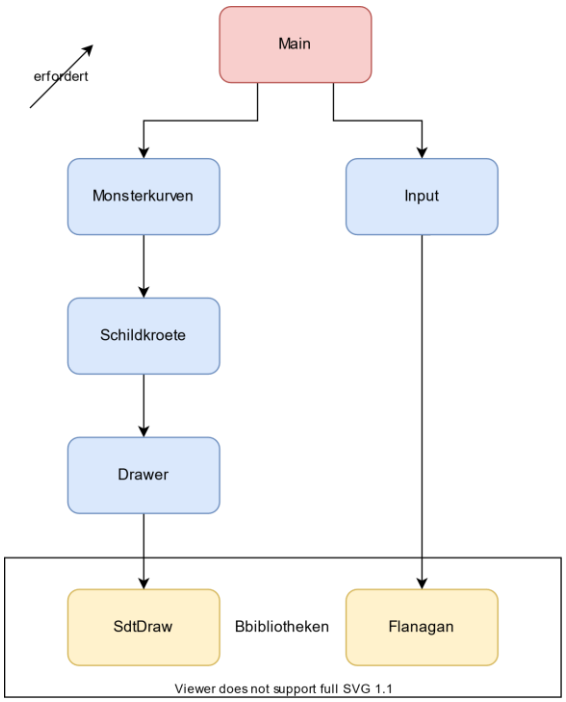


Abb. 5 Modularisierung des Programms

Dieses Programm habe ich folgendermassen modularisiert:

Main erfordert das Hilfsmodul *Input*, welches auf die Bibliothek *Flanagan* angewiesen ist. Zudem erfordert *Main* die *Monsterkurven* (Schneeflocke, Pfeilspitze, Drachenkurve), die das Modul *Schildkroete* verwenden.
Schildkroete erfordert das Modul *Drawer*, welches unter anderem die Methode *drawLine(Point from, Point to)* bietet. Ausserdem verwendet *Drawer* die Bibliothek *StdDraw*.

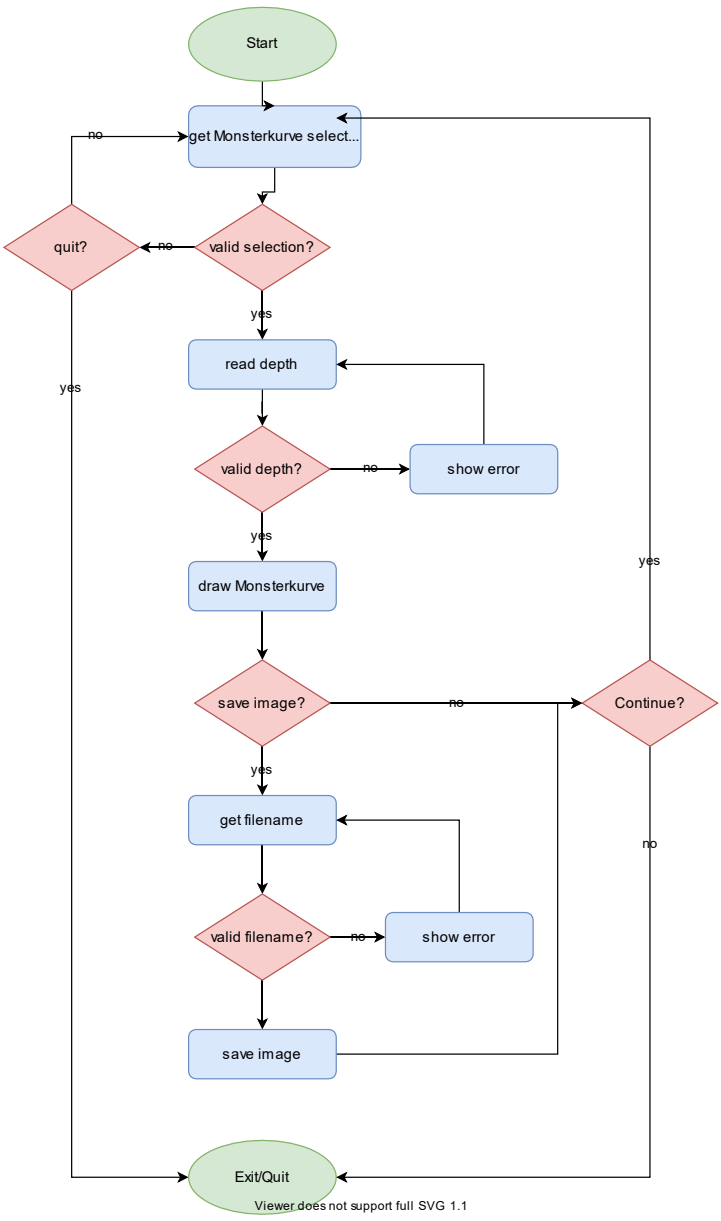


Abb. 6 Grobalgorithmus des Main Programms

Nachdem die Module entworfen wurden, können sie und ihr Zusammenspiel implementiert werden. Dabei muss zunächst ein **Grobalgorithmus** entworfen werden. Der Grobalgorithmus des Main-Programmes ist in Abb. 6 ersichtlich.

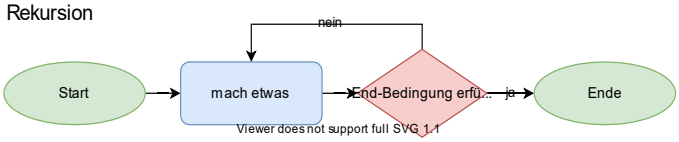


Abb. 7 Ablaufsprinzip der Rekursion

Bei allen drei Fraktalen beruht der Grobalgorithmus auf dem allgemeinen Prinzip der Rekursion. Dies bedeutet, dass eine Methode sich selbst immer wieder aufruft, bis eine End-Bedingung erfüllt ist (siehe Abb. 7 Ablaufsprinzip der Rekursion).

2.4 Entwicklung der Module

Das Modul *Main* wurde schon beschrieben, weshalb nicht darauf eingegangen wird. Für das Modul *Input* gilt dasselbe, weil es lediglich Methoden der *flanagan*-Bibliothek aufruft und nicht besonders spannend. Das interessanteste Modul ist *Schildkroete*. Die Monsterkurven werden in 2.5 Entwicklung der Algorithmen beschrieben.

2.4.1 Schildkroete

Die Schildkroete ist ein bekanntes Prinzip: Von einer Startposition aus hinterlässt sie eine kontinuierliche Strecke, die aus kleineren geraden Strecken besteht. Dabei kann die Richtung und Länge der einzelnen Strecken definiert werde. Der Schildkroete können also zwei Befehlen gegeben werden um diese Funktionalität zu gewährleisten:

1) sich eine gegebene Strecke geradeaus zu bewegen, wobei sie eine Spur hinterlässt.
2) sich um einen gegebenen Winkel zu drehen, wobei positive Winkel eine Gegenuhrzeiger-Richtung bedeuten. Bei null Grad zeigt die Schildkröte nach rechts.

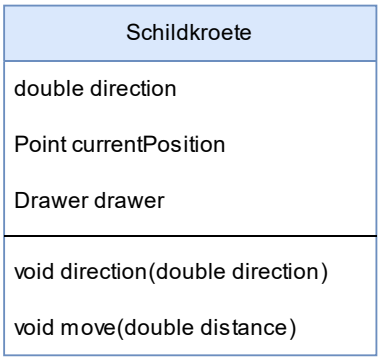


Abb. 8 UML Diagramm der Klasse Schildkroete

Um diese Eigenschaften zu implementieren, benötigt die Klasse *Schildkroete* die Felder *direction*, *currentPosition* und *drawer*, wie in Abb. 8 UML Diagramm der Klasse Schildkroete ersichtlich.

Wenn die Methode *direction* aufgerufen wird, wird der Wert des Parameters zum Feld *direction* dazuaddiert. Beim Aufruf von *move* ist der Ablauf etwas komplizierter. Zunächst wird mit Hilfe von Sinus und Cosinus berechnet, wie weit sich die Schildkroete in x- und y-Richtung bewegen muss:

```
double dx = Math.sin(Math.toRadians(-direction + 90)) * distance;
double dy = Math.cos(Math.toRadians(-direction + 90)) * distance;
```

Quellcode 1 Berechnung von dx und dy in der Methode move()

Danach müssen die Punkte, zwischen denen die Linie gezeichnet werden muss, definiert werden:

```
Point original = currentPos.getLocation();
currentPos.translate(dx, dy);
```

Quellcode 2 Initialisierung und Bearbeitung der Punkte zwischen denen die Linie gezeichnet werden muss in der Methode move()

Schliesslich muss nur noch die Linie gezeichnet werden, wo endlich der *drawer* ins Spiel kommt:

```
drawer.drawLine(original, currentPos);
```

Quellcode 3 Befehl für den Drawer eine Linie zwischen zwei Punkten zu zeichnen

2.4.2 StdDrawer

Die Klasse *StdDrawer* implementiert das Interface *Drawer*, dass unter anderem die Methode *drawLine(Point from, Point to*) aufweist. Diese Implementierung ist relativ banal:

```
@Override
public void drawLine(Point from, Point to){
    StdDraw.line(from.getX(), from.getY(), to.getX(), to.getY());
}
```

Quellcode 4 Methode drawLine() in der Klasse "StdDraw"

2.5 Entwicklung der Algorithmen

Wie erwähnt, wird zu Konstruktion aller drei Kurven die Rekursion verwendet. Bei den drei Algorithmen sind die Parameter *depth (int)* und *length (double)* gegeben. Jene manipulieren die Richtung der

Schildkroete und rufen ihre eigene Methode wieder mit veränderten Parametern auf. Die Stufe (*depth*) wird um eins verkleinert und die Strecke (*length*) durch einen konstanten Faktor dividiert. Wenn die Stufe den Wert null erreicht, wird die gegebene Strecke gezeichnet und die Methode ruft sich nicht mehr auf. Die End-Bedingung wurde also erfüllt und die Methode beendet.

Das Grundprinzip ist, dass der *Initiator* (anfängliche Strecke) bei jeder Iteration durch den *Generator* ersetzt wird. Der *Generator* ersetzt also eine gerade Strecke durch eine komplexere Kurve, die eine grössere Anzahl, dafür aber kürzere gerade Strecken aufweist. Diese Strecken werden in der nächsten Stufe wiederum durch den *Generator* ersetzt. So wird dies für jede Stufe wiederholt, bis im Unendlichen die richtige Kurve erreicht wurde.

2.5.1 Schneeflocke

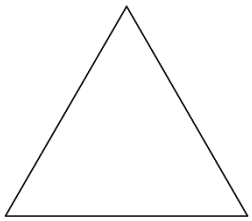


Abb. 11 Schneeflocke 0

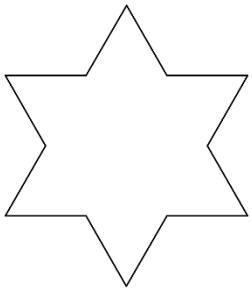


Abb. 10 Schneeflocke 1

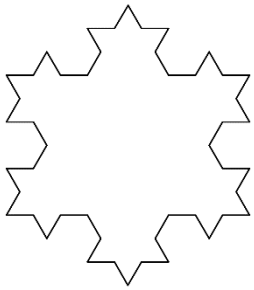


Abb. 9 Schneeflocke 2

Die Schneeflockenkurve ist eine der simpelsten und schönsten Kurven, die rekursiv definierbar sind. Ihr *Initiator* ist in diesem Fall eine gerade Strecke oder ein gleichseitiges Dreieck. Die nächste Stufe entsteht dadurch, dass jede gerade Strecke der vorherigen Stufe durch drei geteilt und der mittlere Drittel durch zwei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks ersetzt wird (siehe Abb. 11, Abb. 10, Abb. 9).

Dieses Verhalten lässt sich mit Quellcode 5 Die Methode *schneeflockeRecursive* (für eine Strecke) beschreiben, allerdings nur für eine Strecke und kein Dreieck.

```
public void schneeflockeRecursive(int depth, double sideLength) {
    if (depth == 0) {
        schildkroete.move(sideLength);
        ...
    } else {
        depth--;
        double dividedSideLength = sideLength / 3;
        schneeflockeRecursive(depth, dividedSideLength);
        schildkroete.direction(60);
        schneeflockeRecursive(depth, dividedSideLength);
        schildkroete.direction(-120);
        schneeflockeRecursive(depth, dividedSideLength);
        schildkroete.direction(60);
        schneeflockeRecursive(depth, dividedSideLength);
    }
}
```

Quellcode 5 Die Methode schneeflockeRecursive *(für eine Strecke)*

Um ein Dreieck zu erhalten, muss *schneeflockeRecursive* dreimal aufgerufen werden, jedes mal mit einem angepassten Winkel (siehe Quellcode 6 Die Methode *schneeflockeTriangle* (für ein Dreieck)).

```
public void schneeflockeTriangle(int depth, double sideLength) {
    ...
    schildkroete.direction(60);
    schneeflockeRecursive(depth, sideLength);
    schildkroete.direction(-120);
```

```
    schneeflockeRecursive(depth, sideLength);
    schildkroete.direction(-120);
    schneeflockeRecursive(depth, sideLength);
    ...
}
```

Quellcode 6 Die Methode schneeflockeTriangle *(für ein Dreieck)*

2.5.2 Pfeilspitze

Abb. 14 Pfeilspitze 0

Abb. 13 Pfeilspitze 1

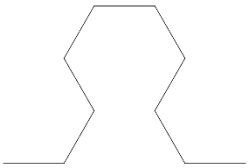


Abb. 12 Pfeilspitze 2

Die Pfeilspitzenkurve (auch Sierpinski-Dreieck genannt) hat eine gerade Strecke als *Initiator*. Ihr *Generator* ist eine dachförmige Figur mit 60 Grad Winkeln, wobei alle Seiten die gleiche Länge haben. Man könnte sagen, es ist die obere Hälfte eines Sechsecks. Allerdings wechselt die Richtung des *Generators* ab, um den gewünschten Effekt zu erhalten (siehe Abb. 14, Abb. 13, Abb. 12). Deshalb wird der zusätzlicher Parameter *richtung (boolean)* für die Funktion eingebaut, der von Stufe zu Stufe seinen Wert umkehrt. Die Pfeilspitze kann mit Quellcode 7 Die Methode *pfeilspitze* erstellt werden.

```
public void pfeilspitze(int level, double length, boolean direction) {
    if (level == 0) {
        schildkroete.move(length);
        incrementMoveCount();
    } else {
        length /= 2;
        level--;
        int degree = direction ? 60 : -60;
        schildkroete.direction(degree);
        pfeilspitze(level, length, !direction);
        schildkroete.direction(-degree);
        pfeilspitze(level, length, direction);
        schildkroete.direction(-degree);
        pfeilspitze(level, length, !direction);
        schildkroete.direction(degree);
    }
}
```

Quellcode 7 Die Methode pfeilspitze

2.5.3 Drachenkurve

Abb. 17 Drachenkurve 0

Abb. 16 Drachenkurve 1

Abb. 15 Drachenkurve 2

Die Drachenkurve ist besonders speziell. Zum Beispiel deckt die unendlich lange Kurve einen Viertel der Gesamtfläche ab. Sie entsteht so, als würde man einen Streifen Papier beliebig oft

zusammenfalten, wieder aufmachen, und bei jedem Falt einen 90 Grad Winkel platzieren. Man könnte sie auch so beschreiben, dass die Kurve der nächsten Stufe die Kurve der vorherigen klont und in einem 90 Grad Winkel daran hängt. Mit Quellcode 8 Die *Methode drache* erhält man dieses Phänomen.

```
public void drache(int level, double length, boolean direction) {
    if (level == 0) {
        schildkroete.move(length);
        ...
    }else {
        int degreeLeft = direction ? -45 : 45;
        int degreeRight = direction ? 90 : -90;
        length /= SQRT_2;
        level--;
        schildkroete.direction(degreeLeft);
        drache(level, length, false);
        schildkroete.direction(degreeRight);
        drache(level, length, true);
        schildkroete.direction(degreeLeft);
    }
}
```

Quellcode 8 Die Methode drache

2.6 Testen

Testen ist für jede Applikation essentiell, um geringe als auch signifikante Fehler zu vermeiden. Dabei ist es wichtig, nicht nur die optimalen Eingabe-Werte des Benutzers zu erwarten, sondern auch die ungewöhnlichsten Werte. Diese App wurde mit diversen Werten getestet und so gebaut, dass sie dem Benutzer im Falle falscher Eingaben sowohl konstruktive Fehlermeldungen anzeigt als auch Korrekturmöglichkeiten anbietet.

Ebenfalls wichtig ist die Effizienz der Algorithmen. Diese wurde gemessen und die Resultate werden in 3.2 Effizienz aufgezeigt und analysiert. Dafür wurden die Laufzeit und die Anzahl der Bewegungen der *Schildkroete* in Betracht gezogen.

3. Resultate

3.1 Grafisches Resultate der Monsterkurven

Die grafischen Resultate der Fraktale bei verschieden Stufen werden im folgenden Abschnitt präsentiert:

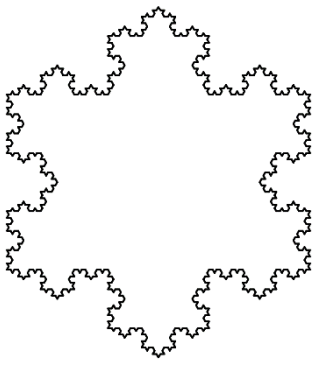


Abb. 20 Schneeflocke 4

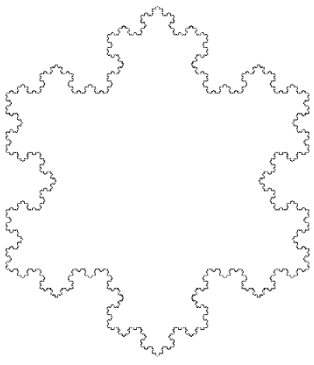


Abb. 18 Schneeflocke 6

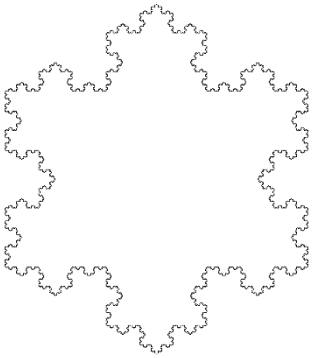


Abb. 19 Schneeflocke 8

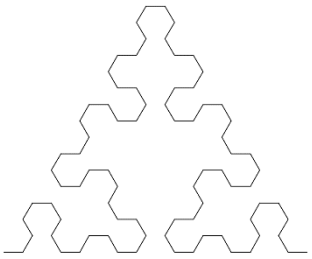


Abb. 25 Pfeilspitze 4

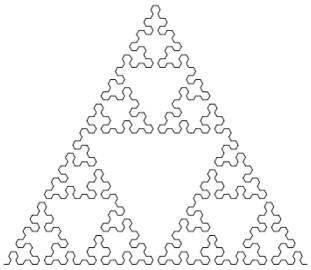


Abb. 21 Pfeilspitze 6

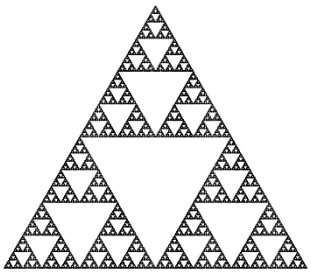


Abb. 26 Pfeilspitze 9

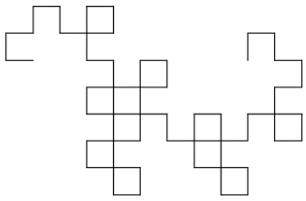


Abb. 24 Drachenkurve 6

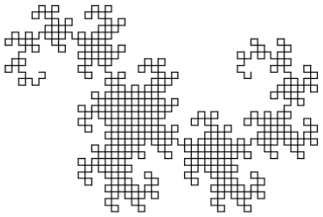


Abb. 23 Drachenkurve 10

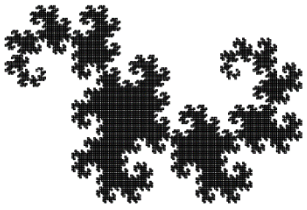


Abb. 22 Drachenkurve 14

3.2 Effizienz

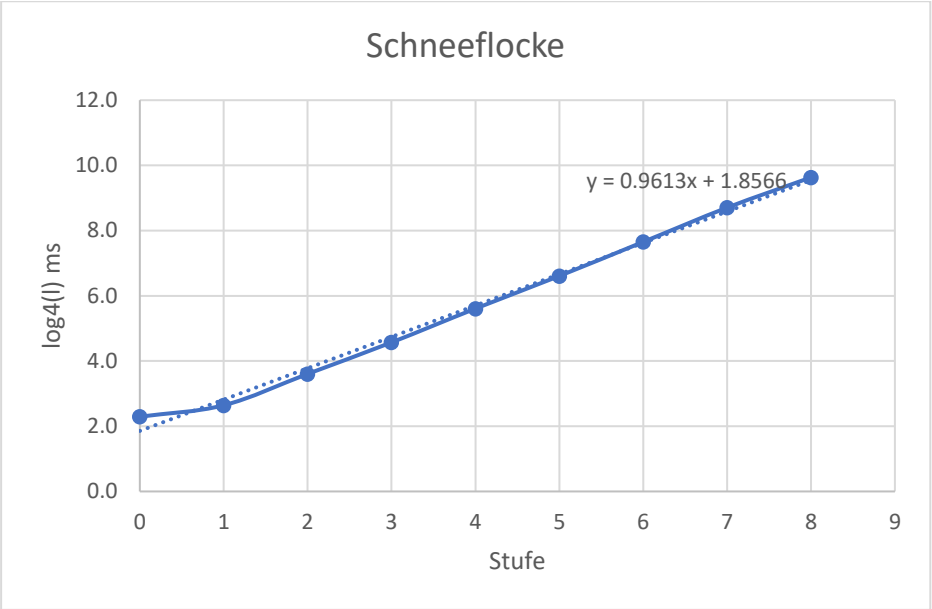
Bei vielen Applikationen spielt die Effizienz eine kleine Rolle. Ob das Programm 20 oder 50 Millisekunden beansprucht, ist für den Benutzer von geringer Bedeutung. Wenn es aber eine ganze Sekunde oder gar mehrere Minuten dauert, muss auf die Effizienz/Laufzeit geachtet werden. Bei meinem Programm ist dies der Fall: Schon bei einer Stufe 5 bemerkt man eine deutlich erhöhte Laufzeit, was zwar in einer schönen Animation der Kurve resultiert aber nicht erwünscht ist. Bei einer Stufe von acht bei der Schneeflockenkurve werden sogar einige Minuten benötigt, um die Grafik zu vollenden.

Hier sind die Resultate der Effizienz-Messungen, wobei *s* die Anzahl der Bewegungen der Schildkröte ist und *l* die Laufzeit.

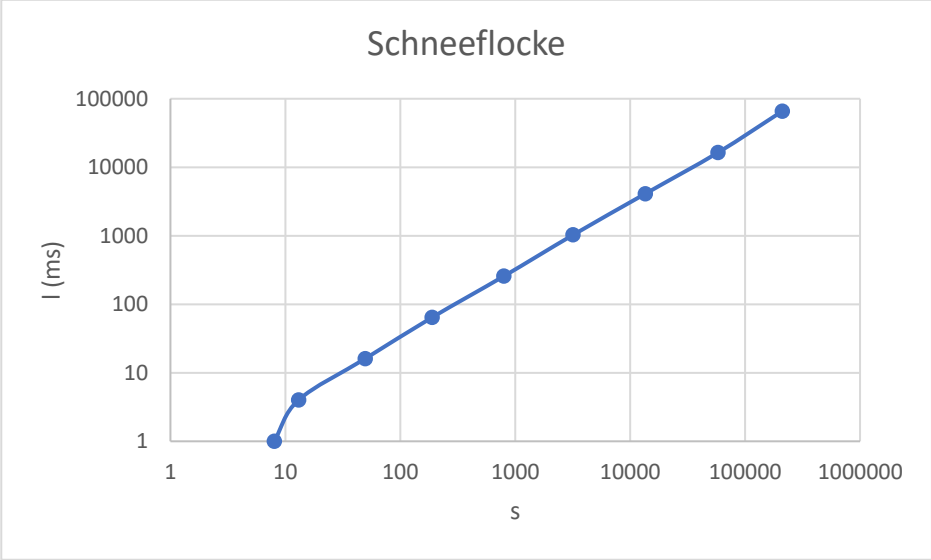
Schneeflocke

Stufe	l (ms)	s	log4(l)	log4(s)	l/s
0	8	1	2.3	0	24.00
1	13	4	2.6	1	9.75
2	49	16	3.6	2	9.25
3	188	64	4.6	3	8.83
4	793	256	5.6	4	9.29
5	3171	1024	6.6	5	9.29
6	13510	4096	7.7	6	9.90
7	58065	16384	8.7	7	10.63
8	209928	65536	9.6	8	9.61

Tabelle 1 Effizienz-Messungen Schneeflocke



Figur 1 log4(Laufzeit) zur Stufe von Schneeflocke



Figur 2 Laufzeit zu s mit logarithmischen Skalen von Schneeflocke

In Tabelle 1 Effizienz-Messungen Schneeflocke kann man einen exponentiellen Zuwachs der Laufzeit mit der Stufe erkennen. Dies sieht man auch daran, dass der Log4(l) proportional zu Stufe ist. In Figur 1 log4(Laufzeit) zur Stufe von Schneeflocke hat die Regressionsgerade fast eine Steigung $a = 1$, was vermuten lässt, dass $l \sim 4^n$, wenn *n* die Stufe ist.

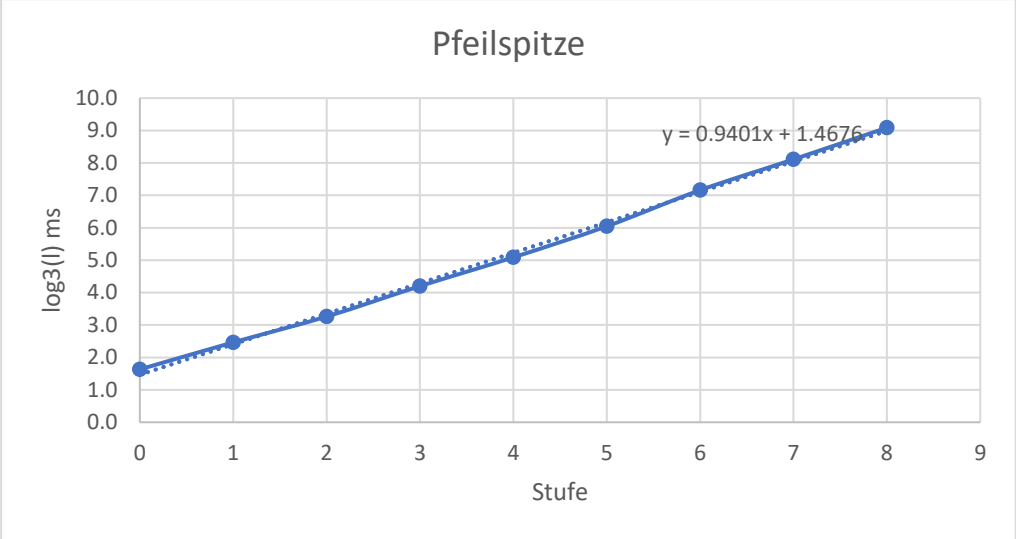
Ebenfalls ersichtlich ist, dass die Laufzeit proportional zu Anzahl Bewegungen der Schildkroete ist, obwohl die Strecken der Schildkroete kleiner sind. Offensichtlich spielt beim Zeichnen einer Linie die Länge der Linie keine Rolle.

Pfeilspitze

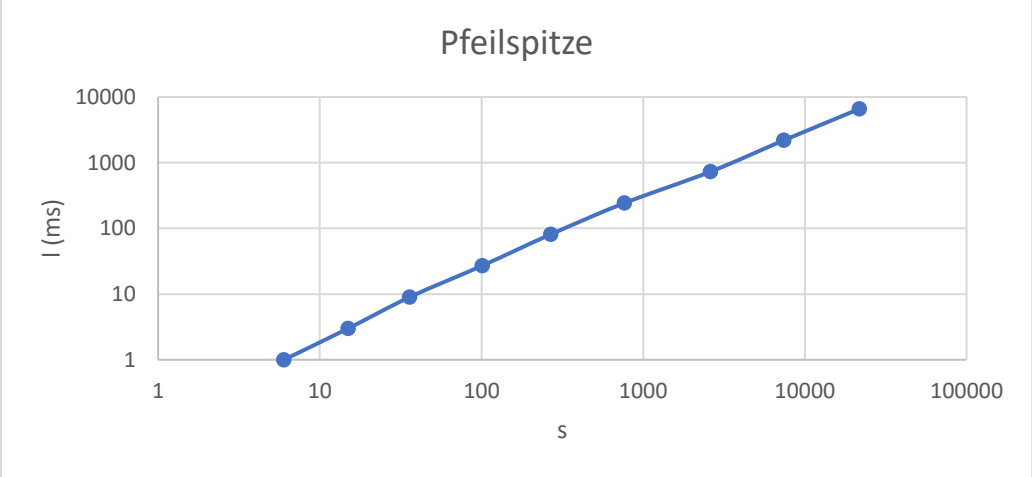
Stufe	l (ms)	s	log3(l)	log3(s)	l/s
0	6	1	1.6	0	6.00
1	15	3	2.5	1	5.00
2	36	9	3.3	2	4.00
3	101	27	4.2	3	3.74
4	268	81	5.1	4	3.31

5	767	243	6.0	5	3.16
6	2608	729	7.2	6	3.58
7	7408	2187	8.1	7	3.39
8	21683	6561	9.1	8	3.30

Tabelle 2 Effizienz-Messungen Pfeilspitze



Figur 3 log3(Laufzeit) zur Stufe von Pfeilspitze



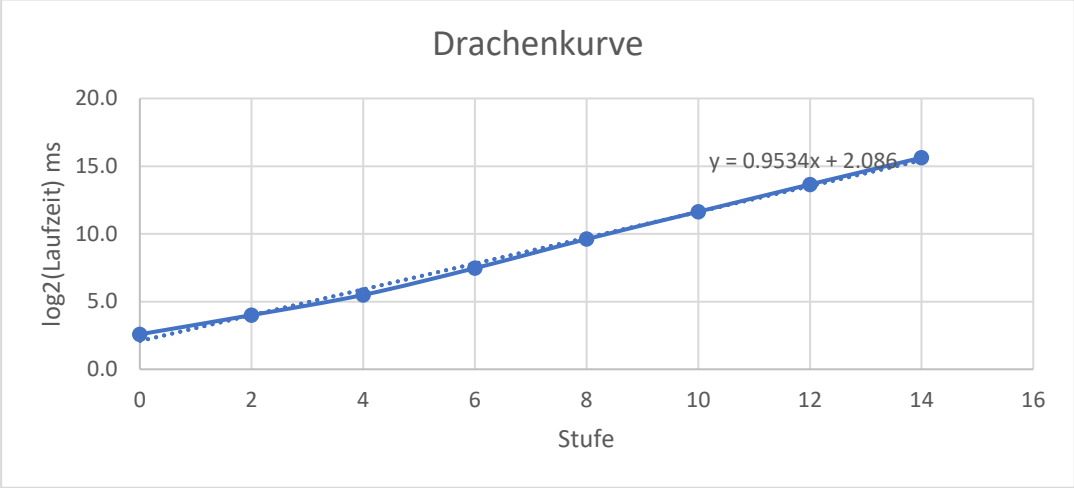
Figur 4 Laufzeit zu s mit logarithmischen Skalen von Pfeilspitze

Bei der Pfeilspitze sind die Ergebnisse sehr ähnlich zu denen der Schneeflocke. Allerdings ist hier log3(l) proportional zur Stufe was das Verhältnis $l \sim 3^n$ vermuten lässt.

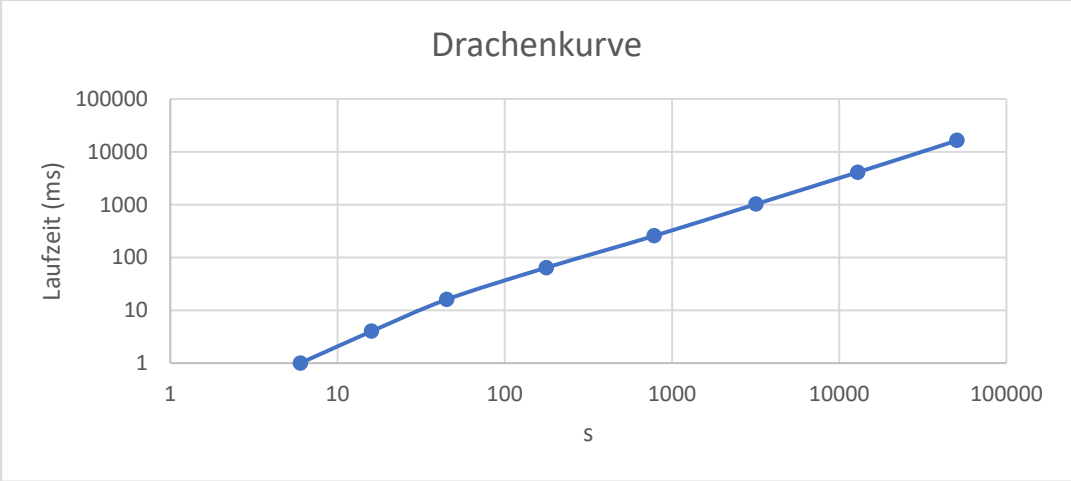
Drachenkurve

Stufe	Laufzeit l (ms)	s	log2(Laufzeit)	log2(s)	Laufzeit/s
0	6	1	2.6	0	6.00
2	16	4	4.0	2	4.00
4	45	16	5.5	4	2.81
6	177	64	7.5	6	2.77
8	783	256	9.6	8	3.06
10	3182	1024	11.6	10	3.11
12	12902	4096	13.7	12	3.15
14	50729	16384	15.6	14	3.10

Tabelle 3 Effizienz-Messungen Drachenkurve



Figur 5 Log2(Laufzeit) zur Stufe von Drachenkurve



Figur 6 Laufzeit zu s mit logarithmischen Skalen von Drachenkurve

Bei der Drachenkurve sind die Ergebnisse wieder ähnlich zu den oberen. Allerdings ist hier log2(l) proportional zur Stufe was das Verhältnis $l \sim 2^n$ vermuten lässt.

3.3 Funktionen des Main-Programms

Beim Ausführen des Programms wird der Benutzer gefragt, welche Monsterkurve (Schneeflocke, Pfeilspitze oder Drachenkurve) er gezeichnet haben möchte. Darauf hin, kann er die gewünschte Stufe eingeben. Sollte dies kleiner als null sein, wird er auf diesen Fehler hingewiesen und kann die Stufe neu eingeben. Danach beginnt das Programm mit der Zeichnung der Kurve und fragt den Benutzer nach der Vollendung, ob er das Bild speichern möchte. Falls ja, wird ein neues Eingabe-Fenster gezeigt, in dem der Dateiname eingegeben werden kann. Jetzt beginnt der Vorgang wieder von vorne und der Benutzer kann eine neue Kurve auswählen.

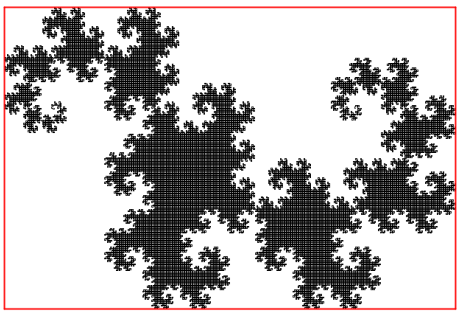


Abb. 27 Die Drachenkurve und ihr Rechteck

3.4 Fläche der Drachenkurve

Um die Fläche der Drachenkurve programmatisch zu approximieren, habe ich die Flächen der einzelnen Strecken zusammengezählt. Auf den ersten Blick scheint dies unsinnig, denn eine Strecke hat ja gar keine Fläche. Mathematisch gesehen stimmt das auch. Doch der Computer zeichnet eine Strecke mit einer Breite namens

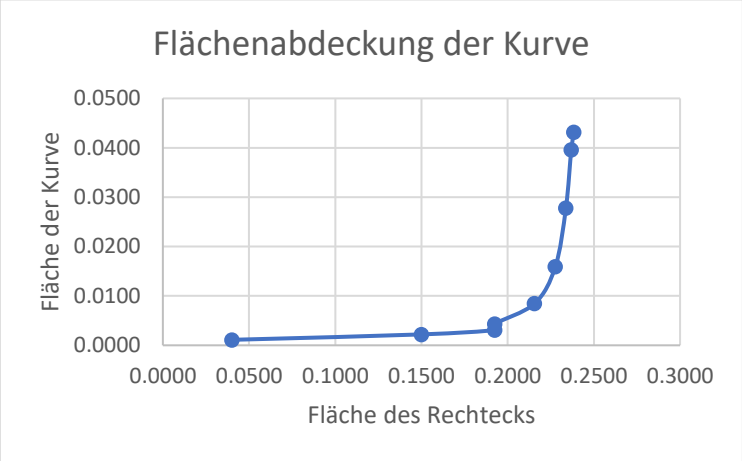
penRadius, die ich bei der StdDraw-Bibliothek definieren kann. Die Fläche F einer Strecke ist also die Strecke mal den *penRadius*. Weil sich die Strecken bei einem 90 Grade Winkel überlappen, habe ich die Formel verfeinert zu $F = (Strecke - penRadius) * penRadius$.

Um das Verhältnis zwischen Kurvenfläche und Gesamtfläche herauszufinden, habe ich ein Rechteck um die Kurve gezeichnet und dessen Fläche $F = Höhe * Breite$ berechnet.

Die Ergebnisse bei einem *penRadius* von 0.0014 waren:

Stufe	Fläche des Rechtecks	Fläche der Kurve	Verhältnis
2	0.0400	0.0011	0.0278
4	0.1500	0.0022	0.0147
5	0.1925	0.0031	0.0161
6	0.1925	0.0044	0.0226
8	0.2156	0.0085	0.0392
10	0.2277	0.0159	0.0699
12	0.2338	0.0278	0.1190
14	0.2369	0.0396	0.1670
15	0.2384	0.0431	0.1809

Tabelle 4 Verhältnis der Fläche der Kurve zum Rechteck pro Stufe



Figur 7 Verhältnis zwischen Fläche der Drachenkurve und ihrem Rechteck

Man kann klar ein asymtotisches Verhalten des Verhältnisses zwischen der Fläche der Kurve und des Rechtecks erkennen. Der Wert nähert sich dem mathematisch bewiesenen Verhältnis von 0.25. in der Tabelle ist dies auch ersichtlich, denn das Verhältnis nähert sich 0.25 bei erhöhter Stufe.

4. Diskussion

4.1 Optimierungsmöglichkeiten

Die Resultate der Effizienz (siehe 3.2 Effizienz) zeigen eine drastische Erhöhung der Laufzeit mit einer erhöhten Stufe. Genauer gesagt, verhält sie sich exponentiell zur Stufe. *n* die Stufe, so ist bei der Schneeflocke $l \sim 4^n$, bei der Pfeilspitze $l \sim 3^n$ und bei der Drachenkurve $l \sim 2^n$. Die Laufzeit ist proportional zur Anzahl Bewegungen der Schildkroete, bzw. zur Anzahl Strecken.

Dieses exponentielle Verhalten lässt sich erklären: Bei der **Schneeflocke** beispielsweise besteht der Generator aus vier Seiten. Mit jeder Erhöhung der Stufe müssen also viermal mehr Strecken gezeichnet werden, deshalb die Formel $s = 4^n$. Bei der **Pfeilspitze** besteht der Generator aus drei Strecken, also müssen pro Stufe dreimal so viele Strecken gezeichnet werden, deshalb die Formel $s = 3^n$. Bei der **Drachenkurve** ist es gleich, nur ersetzt der Generator eine durch zwei Strecken. Und weil $s \sim l$, muss $l = k * 4^n$ für die Schneeflocke, $l = k * 3^n$ für die Pfeilspitze und $l = k * 2^n$ für die Drachenkurve gelten.

Logisch gesehen ist es folglich unmöglich, den Exponentiellen Wachstum der Laufzeit zu ändern. Somit kann die Effizienz wenig gesteigert werden, um eine geringere Laufzeit zu erhalten. Dieses Phänomen muss man leider hinnehmen.

4.2 Rückblick auf das Problem

Die Problemstellung schien am Anfang sehr komplex, doch bald merkte ich, dass die Rekursion sehr simpel ist und die Implementierung der Algorithmen wenig Quellcode benötigt. Programmatische Rekursion war für die Annäherung der Monsterkurven sehr geeignet, weil die Kurven selbst

geometrisch rekursiv sind. Auch die anderen Module, wie *Schildkroete* konnte ich ohne Schwierigkeiten erstellen.

Das Projekt hat Spass gemacht und ich habe einiges über Monsterkurven und Fraktale gelernt. Besonders ihre Schönheit hat mich fasziniert.

6. Quellenverzeichnis

Kürzel: o.T.= ohne Tag, o.M.= ohne Monatsangabe , o.J.= ohne Jahr

Text

Flanagan, M.: „Michael Thomas Flanagan's Java Scientific Library". 25.06.2020, URL: https://www.ee.ucl.ac.uk/~mflanaga/java/ (abgerufen 14.05.2021)

Princeton University: "Department of Computer Science". o.T., o.M., 2021, URL: https://www.cs.princeton.edu/ (abgerufen 14.05.2021)

Radons, G.: „Fraktale". o.T., o.M., o.J., URL: https://www.spektrum.de/lexikon/physik/fraktale/5252 (abgerufen 14.5.2021)

Ullenboom, C.: Java ist eine insel. Das umfassende Handbuch. Bonn: Rheinwerk Computing, 2012 (10th edition).

Abbildungen

Welt: „Mandelbrot bewies die Schönheit der Mathematik". 17.10.2010, URL: https://www.welt.de/wissenschaft/article10361079/Mandelbrot-bewies-die-Schoenheit-der-Mathematik.html (abgerufen 14.5.2021)

7. Abbildungsverzeichnis

8. Figurenverzeichnis

9. Tabellenverzeichnis

10. Quellcodeverzeichnis

11. Anhang

11.1 Gesamte Übersicht der Klassen

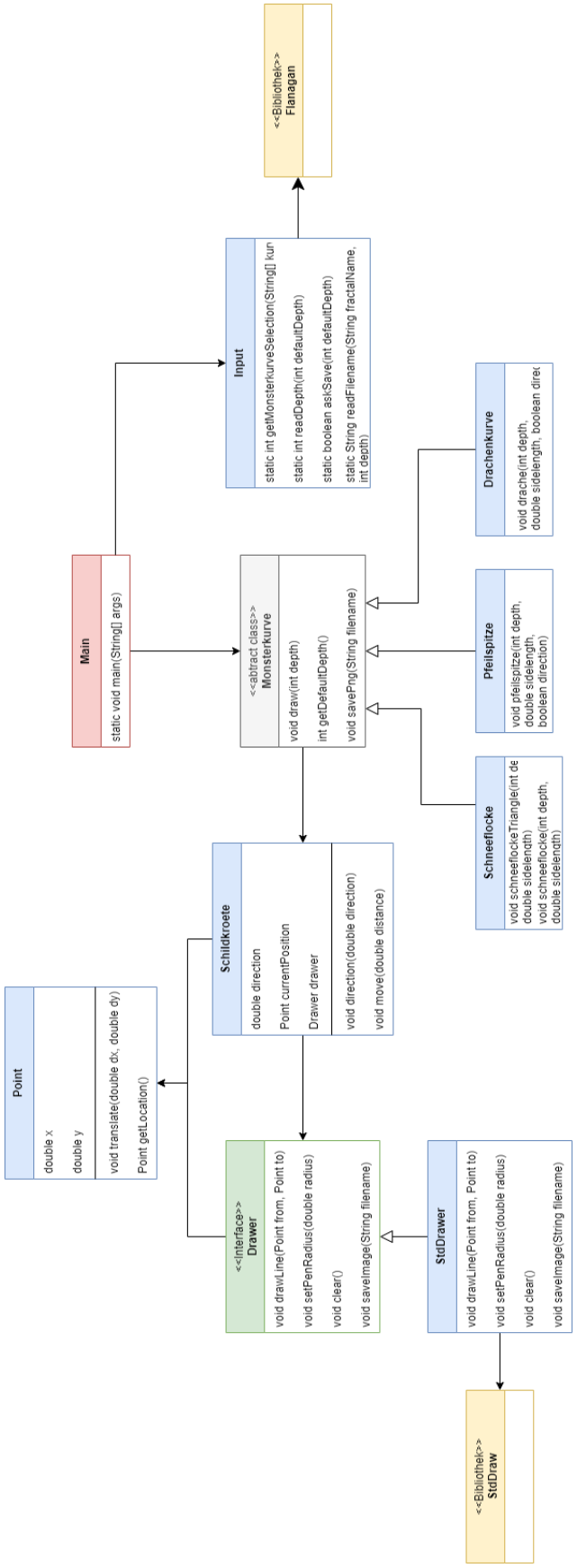


Abb. 28 Gesamtübersicht der Klassen und ihren Abhängigkeiten

11.2 Gesamter Quellcode

Der gesamte Quellcode befindet sich in den angehängten Dateien.