Optimal Stopping and Free-Boundary Problems — Peskir, Shiryaev

1.1. Acercamiento de martingala (super)

Sea $(G_n)_{n\geq 0}$ un proceso estocástico discreto definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P})$ y adaptado a $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

G_n se interpreta como la ganancia obtenida al parar la observación G al tiempo n.

Paro óptimo: Detener $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tal manera que se maximice la ganancia esperada $\longrightarrow$ $V_* = \sup_\tau \mathbb{E}(G_\tau)$.

Necesitamos suponer $\mathbb{E}\left(\sup_{n\leq k\leq N} |G_k|\right) < \infty$.

Horizonte finito

Para $0 \leq n \leq N < \infty$ se define recursivamente

$$\left.\begin{aligned} S_n^N &= G_n \quad \text{si } n = N, && (1.1.6)\\ S_n^N &= \max\{G_n, \mathbb{E}(S_{n+1}^N | \mathcal{F}_n)\}. && (1.1.7)\end{aligned}\right\} \text{supermartingala}$$

Denotamos $\tau_n^N = \inf\{n \leq k \leq N : S_k^N = G_k\}$.

Teorema 1.2 (Horizonte finito)

(i) $$\begin{cases} S_n^N \geq \mathbb{E}(G_\tau | \mathcal{F}_n), \quad \tau \text{ tdp } 0 \leq n \leq N & (1.1.9), \\ S_n^N = \mathbb{E}(G_{\tau_n^N} | \mathcal{F}_n). & (1.1.10) \end{cases}$$

Dem

(1.1.9) Procedemos por inducción hacia atrás.

Si $n=N$, $S_N^N = G_N = \mathbb{E}(G_N | \mathcal{F}_N)$.

Supongamos que (1.1.9) se satisface para $n=N, N-1, \dots, k$ con $k \geq 1$, y probemos para $n=k-1$.

Sean $k-1 \leq \tau \leq N$ y $\bar{\tau} = \tau \vee k$ tdp, de modo que $k \leq \bar{\tau} \leq N$.

$$\mathbb{E}(G_\tau | \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{1}_{\{\tau = k-1\}} \mathbb{E}(G_{k-1} | \mathcal{F}_{k-1}) + \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}} \mathbb{E}(G_{\bar{\tau}} | \mathcal{F}_{k-1})$$
$$= \mathbb{1}_{\{\tau = k-1\}} G_{k-1} + \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}(G_{\bar{\tau}} | \mathcal{F}_k) | \mathcal{F}_{k-1}\right].$$

Por h.d.i. $\mathbb{E}(G_{\bar{\tau}} | \mathcal{F}_k) \leq S_k^N$,

$$\therefore \mathbb{E}(G_\tau | \mathcal{F}_{k-1}) \leq \mathbb{1}_{\{\tau = k-1\}} S_{k-1}^N + \mathbb{1}_{\{\tau \geq k\}} \underbrace{\mathbb{E}(S_k^N | \mathcal{F}_{k-1})}_{\leq S_{k-1}^N}.$$
$$\leq S_{k-1}^N.$$

(1.1.10) En el paso inductivo se usan $G_{k-1} = S_{k-1}^N$ en $\{\tau_{k-1}^N = k-1\}$ ($\tau_{k-1}^N = \inf\{k-1 \leq m \leq N : S_m^N = G_m\}$) y $\mathbb{E}(S_k^N | \mathcal{F}_{k-1}) = S_{k-1}^N$ en $\{\tau_{k-1}^N \geq k\}$ para probar

$$\mathbb{E}(G_{\tau_{k-1}^N} | \mathcal{F}_{k-1}) = \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1}^N = k-1\}} G_{k-1} + \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1}^N \geq k\}} \mathbb{E}(\mathbb{E}(G_{\tau_k^N} | \mathcal{F}_k) | \mathcal{F}_{k-1})$$
$$= \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1}^N = k-1\}} S_{k-1}^N + \mathbb{1}_{\{\tau_{k-1}^N \geq k\}} \mathbb{E}(S_k^N | \mathcal{F}_{k-1})$$
$$= S_{k-1}^N. \quad \blacksquare$$

Cap 1.2: Acercamiento Markoviano

Sea (X_n) una cadena de Markov homogénea en el tiempo definida sobre $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}, \mathbb{P}_x)$ y que toma valores en $(E, \mathcal{B})$, con $E = \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

S.p.g. supongamos $(\Omega, \mathcal{F}) = (E^{\mathbb{N}_0}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}_0})$, de modo que el mapeo canónico $\theta_n : E^{\mathbb{N}_0} \to E^{\mathbb{N}_0}$, $\theta_n(\omega)(k) = \omega(n+k)$ está bien definido.

Suponemos $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$ y que el mapeo $x \mapsto \mathbb{P}_x(F)$ es medible $\forall F \in \mathcal{F}$ ($x \mapsto \mathbb{E}_x(Z)$, con Z v.a. integrable también).

Sea $G : E \to \mathbb{R}$ medible t.q.

- $\mathbb{E}_x\left(\sup_{0\leq n\leq N} |G(X_n)|\right) < \infty \quad \forall x \in E \qquad (1.2.1)$
- $G(X_N) = 0$ si $N = \infty$.

Problema de paro óptimo:

$$V^N(x) = \sup_{0 \leq \tau \leq N} \mathbb{E}_x G(X_\tau) \qquad (1.2.2)$$

con $x \in E$ y τ tdp c.r. $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Analogía con el caso 1.1.

Sea $G_n = G(X_n)$, $n \geq 0$.
$\hookrightarrow$ ganancia al tiempo n

Recuperando la notación de la sección 1.1.,

$$S_n^N = G_n = G(X_n) \text{ si } n = N$$

$$S_n^N = \max\{G_n, \mathbb{E}(S_{n+1}^N \mid \mathcal{F}_n)\} \quad \text{si } n \in \{N-1, \dots, 0\}.$$

$$\tau_n^N = \inf\{n \le k \le N : S_k^N = G_k\}.$$

P.D. $S_n^N = V^{N-n}(X_n) = \sup_{0 \le \tau \le N-n} \mathbb{E}_{X_n}(G(X_\tau))$

Denotemos

$$C_n = \{x \in E : V^{N-n}(x) > G(x)\}, \quad 0 \le n \le N.$$
$$D_n = \{x \in E : V^{N-n}(x) = G(x)\}$$
$$\tau_D = \inf\{0 \le n \le N : X_n \in D_n\}.$$

Fijar N, figura al revés se desarrolla la región. Detener cuando se toca la región D_n. D_n vs D_{2n}. Ver que hay algo que se regresa en el tiempo

Operador de transición T de X:

$$TF(x) = \mathbb{E}_x F(X_1), \quad x \in E,$$

donde $F : E \to \mathbb{R}$ es una función medible tal que $F(X_1)$ es integrable c.r. $\mathbb{P}_x$ $\forall x \in E$.

Teorema 1.7. (Horizonte finito: Caso homogéneo en el tiempo)

Suponiendo $\mathbb{E}\left(\sup_{0 \le n \le N} |G(X_n)|\right) < \infty$ (1.2.1) tenemos que V^n dada por $V^n(x) = \sup_{0 \le \tau \le n} \mathbb{E}_x(G_\tau)$ satisface

(WB) $\quad V^n(x) = \max\{G(x), TV^{n-1}(x)\} \quad (x \in E) \quad$ (1.2.9)

para $n = 1, \dots, N$ y $V^0 = G$. Más aún,

(i) El tdp τ_D es óptimo $(\mathbb{E}_x(G_{\tau_D}) = V^n(x))$

(ii) Si τ_* es un tdp óptimo, $\tau_D \le \tau_*$ $\mathbb{P}_x$-c.s.

(iii) $(V^{N-n}(X_n))_{0 \le n \le N}$ es la supermartingala más pequeña que domina a $(G(X_n))_{0 \le n \le N}$ bajo $\mathbb{P}_x$ para $x \in E$ fija.

(iv) El proceso detenido $(V^{N-n \wedge \tau_D}(X_{n \wedge \tau_D}))_{0 \le n \le N}$ es una martingala bajo $\mathbb{P}_x$ p.t. $x \in E$.

Dem $0 \le n \le N$

1. (WB) Recordemos de (1.1.10) que $S_n^N = \mathbb{E}_x(G(X_{\tau_n^N}) | \mathcal{F}_n) \cdots (*)$

Como $S_k^{N-n} \circ \theta_n = S_{n+k}^N$, $S_k^{N-n} = f(X_k, X_{k+1}, \dots, X_{N-n})$, $S_k^{N-n} \circ \theta_n = f(X_{k+n}, \dots, X_N)$

$S_n^N = \begin{cases} G_n & si \quad n = N \\ \max\{G_n, \mathbb{E}(S_{n+1}^N | \mathcal{F}_n)\} \end{cases}$

$\tau_n^N = n + \tau_0^{N-n} \circ \theta_n \cdots (**)$

$\tau_n^N = \inf\{n \le k \le N : S_k^N = G_k\}$

Pues $\tau_0^{N-n} \circ \theta_n = \inf\{0 \le k \le N-n : S_k^{N-n} \circ \theta_n = G(X_k) \circ \theta_n\}$
$= \inf\{k : 0 \le k \le N-n,\ S_{k+n}^N = G(X_{k+n})\}$
$= \inf\{k' : n \le k' \le N,\ S_{k'}^N = G(X_{k'})\} - n$

Combinando (*) y (**),

$$S_n^N = \mathbb{E}_x(G(X_{n+\tau_0^{N-n} \circ \theta_n}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_x(G(X_{\tau_0^{N-n}}) \circ \theta_n | \mathcal{F}_n)$$
$$= \mathbb{E}_{X_n}(G(X_{\tau_0^{N-n}})) = \mathbb{E}_{X_n}(G_{\tau_0^{N-n}}).$$

En el Teo 1.2. se prueba

$\mathbb{E}_x(G_{\tau_0^{N-n}}) = \mathbb{E}(G_{\tau_0^{N-n}} | X_0 = x) \ge \mathbb{E}(G_\tau | X_0 = x) = \mathbb{E}_x(G_\tau) \quad \forall\, 0 \le \tau \le N-n$ tdp.

$$\mathbb{E}(G_{\tau_0^{N-n}} | \mathcal{F}_0) = S_0^{N-n} \ge \mathbb{E}(G_\tau | \mathcal{F}_0)$$

$\Rightarrow \mathbb{E}_{X_n}(G_{\tau_0^{N-n}}) = V^{N-n}(X_n)$. $\quad \therefore S_n^N = V^{N-n}(X_n)$.

Por un lado $V^{N-n}(X_n) = S_n^N = \max\{G(X_n), \mathbb{E}_x(\underbrace{S_{n+1}^N}_{V^{N-n-1}(X_n)} | \mathcal{F}_n)\}$.

Aplicando la prop. de Markov

$$\mathbb{E}_x(V^{N-n-1}(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}_x(V^{N-n-1}(X_1) \circ \theta_n | \mathcal{F}_n)$$
$$= \mathbb{E}_{X_n}(V^{N-n-1}(X_1)).$$
$$= TV^{N-n-1}(X_n)$$

$\Rightarrow V^{N-n}(X_n) = \max\{G(X_n), TV^{N-n-1}(X_n)\} \quad \forall\, 1 \le n \le N$.

Como $X_0 = x$ bajo $\mathbb{P}_x$, (WB) se sigue tomando $n = 0$. $\rightarrow V^N(x) = \max\{G(x), TV^{N-1}(x)\}$

$k \le n \le N$, $N-n$
$n-k$

2. (i) $\tau_D = \inf\{0 \le k \le N : X_k \in D_k\}$ es óptimo $\quad x \in E : V^{N-n}(x) = G(x)$

no es aleatorio

Se sigue directamente de $V^N(x) = S^N = \mathbb{E}_x(G(X_{\tau^N}))$

$\mathbb{E}_{X_n}(G_{\tau_0^{N-n}}) = V^{N-n}(X_n)$. $\longrightarrow$ $n=0$, $X_0 = x$ bajo $\mathbb{P}_x$

$\Rightarrow \mathbb{E}_x(G_{\tau_0^N}) = V^N(x)$ $\hookrightarrow$ bajo $\mathbb{P}_x$

$\tau_D = \inf\{0 \le n \le N : X_n \in D_n\}$

$\tau_0^N = \inf\{0 \le n \le N : S_n^N = G_n\}$. $\rightarrow \tau_D = \tau_0^N$

$\therefore \mathbb{E}_x(G_{\tau_D}) = V^N(x)$

(ii) Hay que probar $\tau_D \le \tau_*$ $\forall$ τ_* óptimo.

Af: $S_{\tau_*}^N = G_{\tau_*}$. De cualquier manera $S_k^N \ge G_k$ $\forall\, 0 \le k \le N$, así que $S_{\tau_*}^N \ge G_{\tau_*}$. Pero si $\mathbb{P}(S_{\tau_*}^N > G_{\tau_*}) > 0$, entonces $\mathbb{E}_x(G_{\tau_*}) < \mathbb{E}_x(S_{\tau_*}^N) \le \mathbb{E}_x(S_0^N)$ por el teo. de muestreo opcional y la propiedad de submartingala de $(S_k^N)_{n \le k \le N}$ (iii). Como $\mathbb{E}_x(S_0^N) = \mathbb{E}_x(G_{\tau_0^N}) = V^N(x) = \sup_{0 \le \tau \le N} \mathbb{E}_x(G_\tau)$, tendríamos $\mathbb{E}_x(G_{\tau_*}) < V^N(x)$ y se contradeciría la optimalidad de τ_*. $\therefore S_{\tau_*}^N = G_{\tau_*}$ y dado que $\tau_0^N = \tau_D$ es el tiempo más pequeño en que esto ocurre, se sigue el resultado. $\rightarrow \tau_D \le \tau_*$

$$\mathbb{E}_x(G_{\tau_*}) = \mathbb{E}_x(1_{G_{\tau_*} = S_{\tau_*}^N} G_{\tau_*}) + \mathbb{E}_x(1_{G_{\tau_*} < S_{\tau_*}^N} G_{\tau_*})$$
$$< \mathbb{E}_x(1_{G_{\tau_*} = S_{\tau_*}^N} S_{\tau_*}) + \mathbb{E}_x(1_{G_{\tau_*} < S_{\tau_*}^N} G_{\tau_*})$$

$(S_k^N)_{0 \le k \le N}$

(iii) $(V^{N-k}(X_k))_{0 \le k \le N}$ es la supermartingala más pequeña que domina a $(G(X_k))_{0 \le k \le N}$ bajo $\mathbb{P}_x$.

Por definición $S_k^N \ge \mathbb{E}_x(S_{k+1}^N \mid \mathcal{F}_k)$ y $S_k^N \ge G_k$ $\forall\, 0 \le k \le N$.
$\therefore (S_k^N)_{0 \le k \le N}$ es una supermartingala que domina a $(G_k)_{0 \le k \le N}$.

Si $(\tilde{S}_k)_{0 \le k \le N}$ es otra supermartingala que domina a $(G_k)_{0 \le k \le N}$, entonces $\tilde{S}_k \ge S_k^N$ $\mathbb{P}_x$-c.s. se puede verificar por inducción sobre $k = N, N-1, \dots$,

Si $k = N$, $S_N^N = G_N \le \tilde{S}_N$.

Supongamos $\tilde{S}_k \ge S_k^N$ $\forall\, l \le k \le N$, $l \ge 1$, y probemos para $l-1$.

Dado que $S_{l-1}^N = \max\{G_{l-1}, \mathbb{E}_x(S_l^N \mid \mathcal{F}_{l-1})\}$

y $\mathbb{E}_x(S_l^N \mid \mathcal{F}_{l-1}) \le \mathbb{E}_x(\tilde{S}_l \mid \mathcal{F}_{l-1})$, se sigue $S_l^N \le \tilde{S}_l$

$S_{l-1}^N \le \max\{G_{l-1}, \mathbb{E}_x(\tilde{S}_{l-1} \mid \mathcal{F}_{l-1})\} \le \tilde{S}_{l-1}$.

(iv) $\left(V^{N-k\wedge\tau_0}(X_{k\wedge\tau_0})\right)_{0\le k\le N}$ es una martingala bajo $\mathbb{P}_x$.

Usamos $V^{N-k\wedge\tau_0}(X_{k\wedge\tau_0}) = S^N_{k\wedge\tau_0}$ y $\tau_0 = \tau_0^N$ para calcular

$$\mathbb{E}_x(S^N_{(k+1)\wedge\tau_0} \mid \mathcal{F}_k) = \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{\{\tau_0^N\le k\}} S^N_{k\wedge\tau_0} \mid \mathcal{F}_k\right) + \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{\{\tau_0^N\ge k+1\}} S^N_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right)$$

τ_0^N

$$= \mathbb{1}_{\{\tau_0^N\le k\}} S^N_{k\wedge\tau_0} + \mathbb{1}_{\{\tau_0^N\ge k+1\}} S^N_k = S^N_{k\wedge\tau_0^N},$$

dado que $S^N_k = \mathbb{E}_x(S^N_{k+1}\mid\mathcal{F}_k)$ en $\{\tau_0^N \ge k+1\} \in \mathcal{F}_k$. ∎

$\tau_0^N = \inf\{0\le n\le N : S^N_k = G_k\}$, $\tau_0^N \ge k+1 =$

Método iterativo para calcular W-B.

No-lineal

Se define $QF(x) = \max\{G(x), TF(x)\}$, siempre que $F: E \to \mathbb{R}$ sea medible y $F(X_1)$ integrable c.r. a $\mathbb{P}_x$ $\forall x\in E$.

Luego
$$V^n(x) = \max\{G(x), TV^{n-1}(x)\}$$
$$= QV^{n-1}$$

y se puede deducir $V^n(x) = Q^n G$ dado que $V^0 = G$.

Problemas no lineales

$$\overbrace{V^n - V^{n-1} = \max\{0, TV^{n-1}(x) - V^{n-1}\}}^{\Delta_n}$$

$TF = \mathbb{E}_x(F(X_1))$

ecs del valor no lineal

Camargo: $V^n(x) = \max\{V^{n-1}(x), TV^{n-1}(x)\}$, $1\le n\le N$, $N\in\mathbb{N}$

En primer lugar, $(V^n(x))_{0\le n\le N}$ es no decrec. para cada $x\in E$, pues

$(*)$ $V^n(x) = \sup_{0\le\tau\le n} \mathbb{E}_x(G(X_\tau)) \ge \sup_{0\le\tau\le m} \mathbb{E}_x(G(X_\tau)) = V^m(x)$,
$\forall\ 0\le m\le n\le N$.

En particular, si $m = n-1$, $V^n(x) \geq V^{n-1}(x)$.
Por W-B, $V^n(x) = \text{máx}\{G(x), TV^{n-1}(x)\} \geq TV^{n-1}(x)$,
así que $V^n(x) \geq \text{máx}\{V^{n-1}(x), TV^{n-1}(x)\}$.

Como $V^0(x) = G(x)$, de W-B también se sigue $V^{n-1}(x) \geq G(x)$ $\forall\, 1 \leq n \leq N$,
por lo que $\text{máx}\{G(x), TV^{n-1}(x)\} \leq \text{máx}\{V^{n-1}(x), TV^{n-1}(x)\}$.
$\therefore\ \text{máx}\{G(x), TV^{n-1}(x)\} = V^n(x)$.

Pend = Sols no lineal
Con Control óptimo
¿No es monótona V?

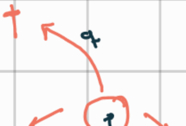
Caso E finito

La matriz de transición de $(X_n)_{n\geq 0}$
$P \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $P = (p_{ij})$.
Supongamos $E = \{1, 2, \dots, N\}$.

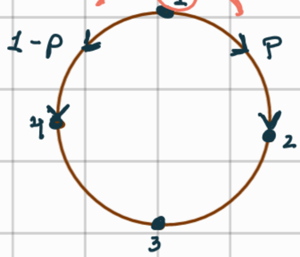
$$\Rightarrow TF(x) = \mathbb{E}_x(F(X_1)) = \sum_k F(k)\, \mathbb{P}_x(X_1 = k)$$
$$= \sum_k F(k)\, p_{xk}$$
$$= (P \cdot \bar{F})_{x,\cdot}\,, \longrightarrow \text{x-ésimo renglón de } P \cdot \vec{F}$$

donde $\bar{F} = (F(1), F(2), \dots, F(N)) \in \mathbb{R}^N$.

¿Qué pasa si matamos a $(X_n)_{n\geq 0}$ en un tiempo geométrico?
$q \in (0,1)$
Sean $T_1, T_2, \dots$ v.a. i.i.d. t.q. $T_i \sim \text{Unif}(0,1)$
Sup. $(T_n) \perp\!\!\!\perp (X_n)$.



Añadimos el estado 0.



$$\hat{X}_k = \begin{cases} X_k & \text{si } T_i < q \ \forall i \in \{1,\dots,k\} \\ 0 & \text{si } \max\{T_1,\dots,T_k\} \geq q \end{cases}$$

¿Cómo se refleja esto en la matriz de transición?

Sea $\hat{P} \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$ definida por $\hat{p}_{ij} = \mathbb{P}(\hat{X}_1 = j \mid \hat{X}_0 = i)$

- Si $i = 0 \Rightarrow \hat{p}_{0j} = \mathbb{P}(\hat{X}_1 = j \mid \hat{X}_0 = 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } j > 0 \end{cases}$
- Si $j = 0$ e $i > 0 \Rightarrow \hat{p}_{i0} = \mathbb{P}(\hat{X}_1 = 0 \mid \hat{X}_0 = i)$
  $= \mathbb{P}(T_1 \geq q) = 1 - q$
- $i > 1, j > 1 \Rightarrow \hat{p}_{ij} = \mathbb{P}(\hat{X}_1 = j \mid \hat{X}_0 = i)$
  $= \mathbb{P}(X_1 = j, T_1 < q \mid X_0 = i)$
  $= \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)\,\mathbb{P}(T_1 < p)$
  $= p_{ij} \cdot q$.
- Si $i > 0$, $\sum_j \hat{p}_{i,j} = 1 - q + q \sum_j p_{ij} = 1$.
  $i = 0 \Rightarrow \sum_j \hat{p}_{0,j} = 1$.

Laplaciano en el círculo

Sea $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

$\rightarrow \quad \Delta u(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in S^1 \setminus \{($

$\hookrightarrow \quad u_{xx} = f \quad \{$ E

$u(0) = u(T) = g$ } Fórmula de Green

La solución fundamental de la ecuación de Laplace en una dimensión $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por $\Phi(x) = \frac{1}{2}|x|$.

Función de Green $\begin{cases} -\Delta G = \delta_x & \text{en } U \\ G = 0 & \text{en } \partial U \end{cases}$

$$\frac{d^2 G}{dx^2} = 0 \Rightarrow G(x,y) = \begin{matrix} ax + b, & 0 < x < y \\ cx + d, & y < x < 1. \end{matrix}$$

$\to G(0) = G(1)$ y

$b = 0, \quad d = -c$

$$\to \varphi(y) = \int_0^1 \frac{d^2 G(x,y)}{dx^2} \varphi \, dx$$

$$= \int_0^1 G(x,y) \varphi'' dx$$

$$= \int_0^y ax \varphi'' dx + \int_y^1 c(x-1)\varphi'' dx.$$

$\therefore a = y-1, \; c = y$

$$\to G(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & 0 < x < y \\ y(x-1), & y < x < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, \qquad u(0) = u(1) = 0$$

$$\to u(x) = \int_0^1 f(y) G(x,y) dy = \int_0^x f(y)(x(1-y)) dy + \int_x^1 f(y) y(x-1) dy$$

Cómo Peng liga que sus pruebas no usuales resuelven ec. parabólica no lineal

La func de valor del MB resuelve

$\partial v_t = \max \{0, \Delta\} \varphi$

P

Procesos estables → no hay sols. de viscosidad !

Artículo de Peskir: Conjetura Gapeev - Shiryaev
Monotonía entre la deriva y varianza afecta.
⇒ Monotonía de la función valor.

El laplaciano discreto

Motivación: La ruina del jugador

Sean $N > 0$ y $E = \{0, 1, \ldots, N\}$.
Sea (S_n) una CA en E.
$T = \min\{n : S_n = 0 \vee S_n = N\}$.
Definimos $F : E \to \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \mathbb{P}(S_T = N \mid S_0 = x).$$

Sabemos que $F(0) = 0$, $F(N) = 1$ y

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(F(x+1) + F(x-1)\right) \cdots (*)$$

Se puede probar $F(x) = x/N$.

En general, si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces la única función $F : E \to \mathbb{R}$ que satisface $(*)$ → Laplace
$F(0) = a$, $F(N) = b$, es

$$F(x) = a + x(b-a)/N.$$

La idea es extender este resultado a d dimensiones, $d \geq 1$.

Sea $F : \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ cualquier función.
y (S_n) una CA en $\mathbb{Z}^d$.

Operador de transición:

$$TF(x) = \mathbb{E}_x(F(S_1))$$

$$= \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} F(y)\,\mathbb{P}_x(S_1 = y)$$

$$= \sum_{|x-y|=1} F(y)\,\frac{1}{2d}$$

De esta manera podemos definir el laplaciano discreto

$$\mathcal{L}F(x) := (T - I)F(x) = \frac{1}{2d}\sum_{|x-y|=1}(F(y) - F(x))$$

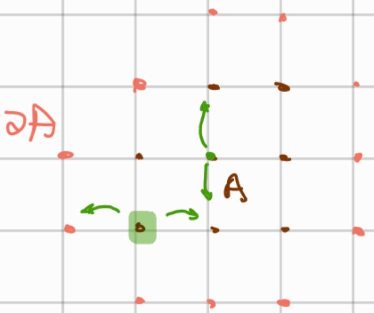
- $$\mathcal{L}F(x) = \mathbb{E}_x[F(S_1)] - F(x)$$
$$= \mathbb{E}_x[F(S_1) - F(S_0)]$$

Problema de Dirichlet para funciones armónicas

Sea $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ finito.

Definimos $\partial A = \{ z \in \mathbb{Z}^d \setminus A : \operatorname{dist}(z, A) = 1 \}$

$$\bar{A} := A \cup \partial A$$



Problema de Dirichlet

Dada $F : \partial A \to \mathbb{R}$, buscamos una extensión $\bar{F} : \bar{A} \to \mathbb{R}$ y que satisfaga

$$\mathcal{L}\bar{F}(x) = 0 \quad \forall\, x \in A \quad \ldots (1)$$

(I) se conoce como la ecuación de Laplace. Cualquier función F que la satisfaga como una función armónica.

$$T_A = \inf\{ n \geq 0 : S_n \notin A \}$$

Teorema 1 Si $A \subseteq \mathbb{R}^d$ es finito, entonces para toda función $F : \partial A \to \mathbb{R}$, la única extensión de F a $\bar{A}$ que satisface (I) es

(2) .... $$F(x) = \mathbb{E}[F(S_{T_A}) \mid S_0 = x] = \sum_{y \in \partial A} \mathbb{P}(S_{T_A} = y \mid S_0 = x) F(y)$$

$\to T_A < \infty$ desde el inicio $\Leftrightarrow |A| < \infty$

Dem. Sean $x \in A$, $y \in \partial A$ y notemos que

$$\mathbb{P}(S_{T_A} = y \mid S_0 = x) = \sum_{|x-z|=1} \mathbb{P}(S_{T_A} = y, S_1 = z \mid S_0 = x)$$

$$= \sum_{|x-z|=1} \mathbb{P}(S_{T_A} = y \mid S_1 = z, S_0 = x) \mathbb{P}(S_1 = z \mid S_0 = x)$$

$$= \sum_{|x-z|=1} \mathbb{P}(S_{T_A} = y \mid S_0 = z) \frac{1}{2d}$$

$S_0 = x \in A$, $T_A = \inf\{ n \geq 1 : S_n \notin A \}$.

Por definición $T_A = \inf\{ n \geq 0 : S_n \notin A \}$

$\Rightarrow T_A + 1 = \inf\{ n \geq 1 : S_{n-1} \notin A \}$

$T_A \circ \theta_1 + 1 = \inf\{ n \geq 1 : S_n \notin A \} = T_A$

} Bajo $S_0 = x$

$$\mathbb{P}(S_{T_A} = y \mid S_1 = z) = \mathbb{P}(S_{T_A \circ \theta_1 + 1} = y \mid S_1 = z)$$
$$= \mathbb{P}(S_{T_A} = y \mid S_0 = z)$$

Entonces

$$\mathbb{E}[F(S_1) \mid S_0 = x] = \frac{1}{2d} \sum_{|x-z|=1} F(z)$$

$$= \frac{1}{2d} \sum_{|x-z|=1} \mathbb{E}[F(S_{T_A}) \mid S_0 = z]$$

$$= \frac{1}{2d} \sum_{|x-z|=1} \sum_{y \in \partial A} \mathbb{P}(S_{T_A} = y \mid S_0 = z) F(y)$$

$$= \sum_{y \in \partial A} F(y) \sum_{|x-z|=1} \frac{1}{2d} \mathbb{P}(S_{T_A} = y \mid S_0 = z)$$

$$= \sum_{y \in \partial A} F(y)\, \mathbb{P}(S_{T_A} = y \mid S_0 = x)$$

$$= \mathbb{E}[F(S_{T_A}) \mid S_0 = x] = F(x)$$

$\therefore\ \mathcal{L}F(x) = \mathbb{E}[F(S_1) \mid S_0 = x] - F(x) = 0.$

$\therefore$ F es armónica.

Falta probar que F es única

Sea $\hat{F}$ una extensión armónica de $F : \partial A \to \mathbb{R}$ y definamos $M_n = \hat{F}(S_{n \wedge T_A})$.

Por la propiedad de Markov,

$$\to \mathbb{E}[M_{n+1} \mid S_0, \dots, S_n]$$

$$\mathbb{E}[\hat{F}(S_{(n+1)\wedge T_A}) \mid S_0, \dots, S_n]$$

$$= \mathbb{E}[I(T_A \le n) \hat{F}(S_{T_A}) \mid S_0, \dots, S_n]$$

$$+ \mathbb{E}[I(T_A > n) \hat{F}(S_{n+1}) \mid S_0, \dots, S_n]$$

$$= I(T_A \le n) \hat{F}(S_{T_A}) + I(T_A > n) \mathbb{E}_{S_n}[\hat{F}(S_1)]$$

$$= I(T_A \le n) \hat{F}(S_{T_A}) + I(T_A > n) \hat{F}(S_n)$$

$$= \hat{F}(S_{T_A \wedge n}) = M_n$$

$\therefore$ (M_n) es una martingala

Por muestreo opcional, $\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_0]$.
Si $S_0 = x \in \bar{A}$, entonces

$$\hat{F}(x) = \hat{F}(S_0) = \mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_n] = \sum_{y \in \bar{A}} \mathbb{P}(S_{n \wedge T_A} = y)\hat{F}(y).$$

Como siempre podemos conectar dos puntos de $\bar{A}$ por medio de (S_n), entonces $T_A < \infty$ ($|A| < \infty$) y tomando límite

$$\hat{F}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{y\in\bar{A}} \mathbb{P}(S_{n\wedge T_A} = y)\hat{F}(y) = \sum_{y\in\partial A} \mathbb{P}(S_{T_A} = y)F(y).$$
$$= F(x)$$

$\therefore \hat{F} = F$ ■

Peskir - Opciones Americanas

Recursión Camargo

Probar equivalencia

$$V^n(x) = \max\{V^{n-1}(x), TV^{n-1}(x)\}$$

G

$\hat{Q}^F = \max\{F, TF\}$ $F = G$

$Q^F = \max\{G, TF\}$

$\forall x \in E$ la sucesión $(V^n(x))_{0\leq n\leq N}$ es no decreciente.

En particular $V^n(x) \geq V^{n-1}(x)$. Por W-B,
$$V^n(x) = \max\{G(x), TV^{n-1}(x)\} \geq TV^{n-1}(x)$$
$$\therefore V^n(x) \geq \max\{V^{n-1}(x), TV^{n-1}(x)\}.$$

Como $V^0(x) = G(x)$, se sigue por esto y por W-B que $V^{n-1}(x) \geq G(x)$ $\forall\ 1 \leq n \leq N$, y por tanto

$$\max\{G(x), TV^{n-1}(x)\} \leq \max\{V^{n-1}(x), TV^{n-1}(x)\}$$

$\max\{C(x), TV^{n-1}(x)\} = \max\{V^{n-1}(x), TV^{n-1}(x)\}.$

$$\therefore\ V^n(x) = \max\{V^{n-1}(x),\ TV^{n-1}(x)\},\quad 1 \leq n \leq N.$$

Ecuación del Calor

Sea $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ finito con frontera ∂A. Denotamos por $P_n(x)$ la temperatura en $x \in A$ al tiempo n.

Fijamos la temperatura en ∂A como cero:

$$P_n(x) = 0 \quad \forall\ x \in \partial A.$$

Condición inicial: $P_0(x) = f(x)$.

$$\to P_{n+1}(x) = \frac{1}{2d}\sum_{|x-y|=1} P_n(y). \quad \cdots (*)$$

Introduciendo $\partial_n P_n^{(x)} = P_{n+1}(x) - P_n(x)$,

$$\partial_n P_n(x) = \frac{1}{2d}\sum_{|x-y|=1} P_n(y) - P_n(x)$$

$$= \mathcal{L} P_n(x). \quad \cdots (*)$$

Ecuación del calor discreta

Si $f(x) = 1$ y $f(y) = 0$ $\forall\ y \neq x$,

$$P_n(y) = \mathbb{P}(S_{n \wedge T_A} = y \mid S_0 = x) \longrightarrow \text{Backward Forward}\ \Big\}\ \text{caso continuo}$$

$S_{(n-1)\wedge T_A}$

$$P_{n+1}(y) = \frac{1}{2d}\sum_{|y-z|=1} \mathbb{P}(S_{n \wedge T_A} = y \mid S_0 = x)$$

Para construir soluciones más generales a la ecuación de calor conviene analizar

$$\boxed{p_n(x) = \lambda^n \phi(x)} \cdots (**) \rightarrow p_0(x) = \phi(x)$$

$$\rightarrow \mathcal{L}p_n(x) = \partial_n p_n(x) = \lambda^{n+1}\phi(x) - \lambda^n\phi(x) = \underline{(\lambda-1)\lambda^n\phi(x)}.$$

Si $n=0$, $\mathcal{L}p_0(x) = (T-I)\phi(x) = (\lambda-1)\phi(x)$.

Nos interesa encontrar λ, ϕ t.q.

$$T\phi(x) = \lambda\phi(x). \quad \boxed{\phi \equiv 0 \text{ en } \partial A.}$$

$\phi(0)=\phi(N)=0$

$\lambda \rightarrow$ valor propio, $\phi \rightarrow$ función propia.

Si $d=1$, $A=\{1,2,\dots,N-1\}$ se pueden explícitamente las funciones propias (y valores).

$$\sin((x\pm 1)\theta) = \sin(x\theta)\cos(\theta) \pm \cos(x\theta)\sin(\theta).$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ T\sin(\theta\,\cdot)(x)}}{\mathbb{E}[\sin(\theta\cdot S_1)\mid S_0=x]} = \frac{1}{2}[\sin((x+1)\theta) + \sin((x-1)\theta)]$$
$$= \cos(\theta)\sin(x\theta)$$

$$T\cdot[\sin(\theta i)]_{i\in\{1,\dots,N-1\}} = \cos(\theta)[\sin(\theta i)]_{i\in\{1,\dots,N-1\}}$$

$\therefore$ $(\sin(\theta), \sin(\theta 2), \dots, \sin(\theta(N-1)))$ es una función propia con valor propio $\lambda_\theta = \cos(\theta)$.

Escogiendo $\theta_j = \pi j/N$, $j \in \{1,\dots,N-1\}$, obtenemos $\phi_j(x) = \sin(\pi j x/N)$, que satisface $\phi_j(0) = \phi_j(N) = 0$ y $\lambda_\theta = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right)$.

Obs Vistos como vectores en $\mathbb{R}^{N-1}$, $\{\phi_j\}_{j=1}^{N-1}$ son ortogonales, pues T es simétrico. $\therefore$ $\{\phi_j\}_{j=1}^{N-1}$ es una base de $\mathbb{R}^{N-1}$.

→ Toda $f: A \to \mathbb{R}$ se puede representar

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N-1} c_j \sin\left(\frac{\pi j x}{N}\right).$$

En este caso,

$$\boxed{P_n(y) = \sum_{j=1}^{N-1} c_j \left[\cos\left(\frac{j\pi}{N}\right)\right]^n \phi_j(y).}$$

Queremos calcular explícitamente los c_j. Para esto notemos que

$$\underbrace{\sum_{x=1}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi j x}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi k x}{N}\right)}_{\langle \phi_j, \phi_k \rangle} = 0 \quad \text{si} \quad j \neq k$$

Por ortogonalidad de $\{\phi_j\}_{j=1}^{N-1}$

Además, $\sum_{j=1}^{N-1} \sin\left[\frac{\pi j x}{N}\right]^2 = N/2$. $\left(\int_0^L \sin\left(\frac{\pi j x}{N}\right) dx \overset{?}{=} L/2 \right)$

Sean $\zeta_1, \dots, \zeta_N$, las N-ésimas raíces de la unidad ($\zeta_k \in \mathbb{C}$, $\zeta_k^N = 1$, $k=1,\dots,N$)

$$\zeta_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{N}\right), \; k = 1,\dots,N.$$

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \dots + \zeta_N = 0.$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{N} \cos\left(\frac{\pi j x}{N}\right) = \sum_{x=1}^{N} \sin\left(\frac{\pi j x}{N}\right) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\sum_{j=1}^{N} \sin^2\left(\frac{\pi j x}{N}\right)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(1-\cos\left(\frac{2\pi j x}{N}\right)\right)$$

$$= N/2 - \sum_{j=1}^{N} \cos\left(\frac{2\pi j x}{N}\right) = \boxed{N/2}$$

En el caso $f = \delta_x$ $(f(x)=1,\ f(y)=0,\ y\neq x)$.

$$1 = f(x) = \sum_{j=1}^{N-1} c_j \sin\left(\frac{\pi j x}{N}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \sin^2\left(\frac{\pi j x}{N}\right) = N/2 \cdot 1 = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{N}{2} c_j \sin\left(\frac{\pi j x}{N}\right)$$

Si $y \neq x$, $\sum_{j=1}^{N-1} \sin\left(\frac{\pi j x}{N}\right)\sin\left(\frac{\pi j y}{N}\right) = 0$

$$= f(y) = \sum_{j=1}^{N-1} c_j \sin\left(\frac{\pi j y}{N}\right)$$

$$\therefore c_j = \sin\left(\frac{\pi j x}{N}\right)\frac{2}{N}$$

Finalmente concluimos que

$$P_n(y) = \mathbb{P}(S_{n\wedge T_A} = y \mid S_0 = x) = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N-1} \phi_j(x)\lambda_j^n \phi_j(y)$$

$\hookrightarrow \sin\left(\frac{\pi j x}{N}\right)$

Caso no lineal

$$\partial_n V^n(x) := V^{n+1}(x) - V^n(x) = \max\{0, TV^n(x) - V^n(x)\}$$

$$= \max\{0, \mathcal{L}V^n(x)\}$$

matriz de trans. matada

$\hookrightarrow$ Caso matado

$\hookrightarrow$ ¿Descomposición espectral?

Comparar la descomposición espc. quitar eigenvalores con la recursión.

Verificar la recursión en el caso matado

Artículo: tipo Peng (Cadenas de Markov no lineales)
David Criens

Marcel Neutz (Transactions AMS)
Procesos de Lévy no lineales
↳ ¿Δ^p?

1.- Parte numérica
2. David Criens
3. Opciones americanas → se puede como pero óptimo
↳ ¿Peskir? → Traducirlo al contexto de CM.

Soluciones de viscosidad.

§1. Definiciones

Sea $T>0$ y $\mathcal{O} \subset [0,T] \times \mathbb{R}^N$.

$USC(\mathcal{O}) := \{ u : \mathcal{O} \to \mathbb{R} : u$ es s.c. superiormente $\}$
$LSC(\mathcal{O}) := \{ u : \mathcal{O} \to \mathbb{R} : u$ es s.c. inferiormente $\}$.

Consideramos

$$(1.1) \begin{cases} (E) & \partial_t u - G(t,x,u,Du,D^2u) = 0 \quad \text{en } (0,T)\times\mathbb{R}^N \\ (IC) & u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

donde $G : [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{S}(N) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \in C(\mathbb{R}^N)$

Supondremos que G es continua y satisface una condición (degenerada) elíptica:

$\forall\ X \geq Y,\ X, Y \in S(N)$, ($X-Y$)

$G(t,x,r,p,X) \geq G(t,x,r,p,Y)$.

* Conseguir biblio del orden matrices (+ definida) Loewner ö

Sea $u : (0,T)\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, y $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^N$.
Denotamos $\mathcal{P}^{2,+}u(t,x)$ al "superjet parabólico" de u en (t,x) a las triadas $(a,p,X)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times S(N)$, tales que (Katzourakis)

$$u(s,y) \leq u(t,x) + a(s-t) + \langle p, y-x\rangle + \langle X(y-x), y-x\rangle + o(|s-t| + |x-y|^2).$$

Definimos $\overline{\mathcal{P}}^{2,+}u(t,x) \longrightarrow$ Puntos en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times S(N)$ que se pueden aproximar por medio de elementos $\mathcal{P}^{2,+}u(t_n,x_n)$.

subjet

$$\mathcal{P}^{2,-}u(t,x) = -\mathcal{P}^{2,+}(-u)(t,x), \quad \overline{\mathcal{P}}^{2,-}u(t,x) = -\overline{\mathcal{P}}^{2,+}(-u)(t,x).$$

Def 1.1. (i) Una subsolución de viscosidad de (E) en $(0,T)\times\mathbb{R}^N$ es una función $u\in USC((0,T)\times\mathbb{R}^N)$ t.q. para cada $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^N$,

$$a - G(t,x,u(t,x),p,X) \leq 0 \quad \forall\ (a,p,X)\in\mathcal{P}^{2,+}u(t,x).$$

De forma parecida, una supersolución de (E) es una función $LSC((0,T)\times\mathbb{R}^N)$ t.q. p.c. $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^N$,

$$a - G(t,x,u(t,x),p,X) \geq 0 \quad \forall\ (a,p,X)\in\mathcal{P}^{2,-}u(t,x).$$

Una solución de viscosidad de (E) es una función que es tanto subsolución como supersolución.

(ii) Una función $u \in USC([0,T) \times \mathbb{R}^N)$ es una ~~subsolución de viscosidad de (1.1)~~ en $[0,T) \times \mathbb{R}^N$ si u es subsolución de (E) en $(0,T) \times \mathbb{R}^N$ y $\underline{u(0,x) \leq \varphi(x)}$ $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

→ Katzourakis

→ Evans (Motivación) → Hamilton-Jacobi - Bellman

Def 1.2. Una subsol. de viscosidad de (E) (G-subsolución) en $(0,T) \times \mathbb{R}^N$, es una función $u \in USC((0,T) \times \mathbb{R}^N)$ t.q. $\forall (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^N$, $\forall \psi \in C^2((0,T) \times \mathbb{R}^N)$ t.q. $u(t,x) = \psi(t,x)$ y $u < \psi$ en $(0,T) \times \mathbb{R}^N \setminus \{(t,x)\}$, tenemos

$$\partial_t \psi(t,x) - G(t,x,\psi(t,x), D\psi(t,x), D^2\psi(t,x)) \leq 0.$$

$\partial_t u + G_u^{(t,x,u,Du,D^2u)} - \varepsilon \Delta u$ cuasilineal $\qquad \partial_t u = H(t,x,u,Du,D^2u)$

Si $\varepsilon \to 0$ (u es al menos continua) $\qquad$ ↳ $\max\{0, \Delta u\}$

$u - \varphi$, $\varphi \in C^\infty$ ¿Derivadas de u?

↳ $\begin{matrix}\text{máx} \\ \text{mín}\end{matrix}$ locales en vez de derivadas

$V^t(x) = \max_{0 \leq \tau \leq t} G(X_\tau)$

Paro óptimo discreto: $V^n(x) = \max_{0 \leq \tau \leq n} G(X_\tau)$

$\frac{\partial u}{\partial t} = (\Delta u)^+ \qquad V^n(x) = \max\{V^n(x), TV^{n-1}(x)\}$

↳ Generador inf discreto cambiarlo por continuo.

Principios de comparación (extender principios del máximo)

¿Argumento tipo Donsker? $V^n \longrightarrow B$

Programación dinámica → Korn Control estocástico... (presente) ejercicio de escritura

Escribir motivación de solución viscosa

(X_t) Opciones americanas → ver que X es $\max\{K - X_t, 0\}$ homogénea en el tiempo.

Teorema de verificación, principio de comp., $\exists$, unicidad, aproximación y aplicación

No sólo para MB, también para procesos estables (y sus laplacianos fraccionarios asimétricos

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ((-\Delta)^p u)^+$$

→ espectro (valores propios +)

Hector Chang (CIMAT)

Control Óptimo: José Luis Pérez Garmendia
Hector Jasso

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado, y sea $T > 0$. Sean $u \in USC((0,T) \times \Omega)$ y $\varphi \in C^{1,2}((0,T) \times \Omega)$ tales $u - \varphi$ alcanza un máximo local en algún $(\hat{t}, \hat{x}) \in (0,T) \times \Omega$.

En un entorno de $(\hat{t}, \hat{x})$, tenemos

$$\begin{aligned} u(t,x) &\leq u(\hat{t},\hat{x}) + \varphi(t,x) - \varphi(\hat{t},\hat{x}) \\ &= u(\hat{t},\hat{x}) + a(t-\hat{t}) + p \cdot (x - \hat{x}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x-\hat{x})^T X (x-\hat{x}) + o(|t-\hat{t}| + |x-\hat{x}|^2) \end{aligned}$$

donde $a = \partial_t \varphi(\hat{t},\hat{x})$, $p = D\varphi(\hat{t},\hat{x})$, $X = D^2\varphi(\hat{t},\hat{x})$

En general,

$$u(t,x) = u(\hat{t},\hat{x}) + b(t-\hat{t}) + q\cdot(x-\hat{x}) + \frac{1}{2}(x-\hat{x})^T Y (x-\hat{x})$$
$$+ o(|t-\hat{t}| + |x-\hat{x}|^2)$$

en un entorno de $(\hat{t},\hat{x})$, entonces $u \in C^{1,2}$.

En general, para $u \in USC((0,T)\times\Omega)$,

$$J^{2,+}u(t,x) = \Big\{ (a,p,X) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times S(N) : \exists\ \eta>0$$
$$u(t,x) \le u(s,y) + a(s-t) + p\cdot(y-x)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(y-x)^T\cdot X\cdot(y-x) + o(|s-t| + |x-y|^2)$$
$$\forall\ (s,y)\in B_\eta(t,x)\cap(0,T)\times\Omega \Big\}$$

LSC

$$J^{2,-}u(t,x)$$

Si $u\in C^{1,2}((0,T)\times\mathbb{R}^N)$

$$J^{2,+}u(t,x) \cap J^{2,-}u(t,x) = J^{2}u(t,x) = \{(\partial_t u, Du, D^2u)\}$$

Def (Sol. Visc)

$u\in USC((0,T)\times\Omega)$ es sub solución de viscosidad de

(1.1) $\quad \partial_t u - G(t,x,u,Du,D^2u) = 0$ en $(0,T)\times\Omega$

si $\forall\ (t,x)\in(0,T)\times\Omega$ tenemos

$$a - G(t,x,u,p,X) \le 0 \quad \forall\ (a,p,X)\in J^{2,+}u(t,x).$$

Podemos añadir condiciones de frontera

$(1.2)\quad u(0,x) = f(x) \quad , \quad x \in \Omega$

Si además $u(0,x) \leq f(x) \quad \forall\, x \in \Omega$,
u es subsolución de $(1.1) + (1.2)$

Análogamente tenemos la definición de supersolución.

Hacia el teorema de comparación.

Supongamos $u \in USC([0,T] \times \overline{\Omega})$ y
$v \in LSC([0,T] \times \overline{\Omega})$, donde u es subsolución de (1.1) y v es supersolución de (1.1).

P.D. $u(0,x) \leq v(0,x) \quad \forall\, x \in \Omega$
$\Longrightarrow \quad u(t,x) \leq v(t,x) \quad \forall\, T \geq t \geq 0$.

Estrategia: Proceder por contradicción.

Se supone $\infty > \sigma := \sup_{[0,T] \times \overline{\Omega}} (u(t,x) - v(t,x)) > 0$.

Si $u, v \in C^{1,2} \longrightarrow$ Podemos aplicar principios del máximo clásicos.

Pero $u \in USC$ y $v \in LSC$!

Tanto $J^{2,+}u(t,x)$ como $J^{2,-}v(t,x)$ pueden ser vacíos !

Se opta por doblar el número de variables.
A cambio, debemos introducir un término

de penalización.

Buscamos maximizar $\Phi_\alpha(t,x,y) = u(t,x) - v(t,y) - \frac{\alpha}{2}|x-y|^2$

$\rightarrow$ obtener máx. local $(t_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)$, y dejar $\alpha \to \infty$.

Lema 3.1. (Lions et al)

Sea $u \in USC([0,T)\times\Omega)$ y $v \in LSC([0,T)\times\Omega)$.

$M_\alpha := \sup_{[0,T]\times\Omega^2} (u(t,x) - v(t,y) - \frac{\alpha}{2}|x-y|^2)$.

Supongamos $M_\alpha < \infty$ $\forall$ $\alpha > 0$ y que

$(t_\alpha, x_\alpha, y_\alpha) \in (0,T)\times\Omega^2$ tales que

(3.3) $\lim_{\alpha\to\infty} \left(M_\alpha - \left(u(t_\alpha,x_\alpha) - v(t_\alpha,y_\alpha) - \frac{\alpha}{2}|x_\alpha-y_\alpha|^2\right)\right) = 0$.

Entonces
$$\begin{cases} \text{(i)} \ \lim_{\alpha\to\infty} \alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2 = 0 \\ \text{(ii)} \ \lim_{\alpha\to\infty} M_\alpha = \sup_{[0,T]\times\Omega} (u(t,x) - v(t,x)) \\ \qquad = u(\hat{t},\hat{x}) - v(\hat{t},\hat{x}) \end{cases}$$

siempre que $\hat{t}, \hat{x}$ sean puntos de acumulación de $t_\alpha \to \hat{t}$, $x_\alpha, y_\alpha \to \hat{x}$

Teorema de Comparación

$\max\{0, Tr(X)\}$

Sea $G: S(N) \to \mathbb{R}$ continua y no decreciente ($X \leq Y \iff Y - X$ es semi-definida positiva).

Supongamos $u \in USC([0,T)\times\Omega)$ y $v \in LSC([0,T)\times\Omega)$. son sub y supersolución de

$$\begin{cases} \partial_t u - G(D^2u) = 0 \quad \text{en} \quad (0,T)\times\Omega \end{cases}$$

$$(1.1)\ \begin{cases} u(t,x) = 0 & \text{en } (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0,x) = f(x) & \text{en } \overline{\Omega} \end{cases}$$

Entonces $u \leq v$ en $(0,T)\times\Omega$.

Dem Para $\varepsilon>0$, $\tilde{u} = u - \varepsilon/(T-t)$ es solución de $\partial_t \tilde{u} - G(D^2\tilde{u}) \leq -\varepsilon/(T-t)^2$.

Dado que $u \leq v \iff \tilde{u} \leq v$ pasando al límite $\varepsilon \to 0$, entonces podemos probar el resultado suponiendo

débil $\qquad C$

$$(1.2)\ \begin{cases} (i) & u_t - G(D^2u) \leq -\varepsilon/T^2 \\ (ii) & \lim_{t\to T^-} u(t,x) = -\infty \text{ uniformemente en } \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Por contradicción, supongamos $\sigma := \sup_{(0,T)\times\Omega} (u(t,x)-v(t,x)) > 0$.

Para $\alpha>0$, definimos

$$\Phi_\alpha(t,x,y) = u(t,x) - v(t,y) - \frac{\alpha}{2}|x-y|^2$$
$$\Phi_\alpha(t,x,x) = u(t,x) - v(t,x)$$

Como $u, -v \in USC$, entonces están acotadas por arriba y por tanto Φ_α alcanza un máximo local en $(t_\alpha, x_\alpha, y_\alpha) \in (0,T)\times\Omega^2$.

Queremos probar que $(t_\alpha, x_\alpha, y_\alpha) \in [0,T_0]\times K$, con K compacto.

Que $t_\alpha \in [0,T_0]$ se sigue de (1.2).

Además, $(x_\alpha, y_\alpha) \in \{(x,y)\in\Omega^2 : \sup_{t\in[0,T_0]} (u(t,x)-v(t,y)) \geq \frac{\sigma}{2}\}$, pues $\sup_{t\in[0,T_0]} (u(t,x_\alpha)-v(t,y_\alpha)) \geq \Phi_\alpha(t_\alpha,x_\alpha,y_\alpha) \geq \sigma$.

$\therefore$ $(t_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)$ tiene un punto de acumulación $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y})$.

Por el lema,
$\hookrightarrow x_\alpha, y_\alpha \to \hat{x}$

(i) $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha |x_\alpha - y_\alpha|^2 = 0$

(ii) $\lim_{\alpha\to\infty} \Phi_\alpha(t_\alpha, x_\alpha, y_\alpha) = \sup_{[0,T)\times\Omega} (u(t,x) - v(t,x))$

$= u(\hat{t}, \hat{x}) - v(\hat{t}, \hat{x})$.

Obs $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}) \in (0,T) \times \Omega^2$.
Pues si $\hat{t} = 0$, $\limsup_{\alpha\to\infty} (u(t_\alpha, x_\alpha) - v(t_\alpha, y_\alpha)) \leq u(0, \hat{x}) - v(0, \hat{y}) \leq 0$

Caso 1 Supongamos que $u, v \in C^{1,2}$.
$\Rightarrow \Phi_\alpha \in C^{1,2}$ y podemos aplicar el principio del máximo clásico para concluir

$$\begin{cases} \partial_t \Phi_\alpha(z_\alpha) = 0, & \text{en } \mathbb{R} \\ D\Phi_\alpha(z_\alpha) = 0, & \text{en } \mathbb{R}^{2N} \\ D^2 \Phi_\alpha(z_\alpha) \leq 0, & \text{en } \mathcal{S}(2N) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ \partial_t u(z_\alpha) - \partial_t v(z_\alpha) = 0 \Rightarrow \partial_t u(\hat{z}) = \partial_t v(\hat{z}) \\ (2)\ D(u-v)(z_\alpha) = 2\alpha(x_\alpha - y_\alpha) \Rightarrow D(u-v)(\hat{z}) = 0 \\ (3)\ D^2(u-v)(z_\alpha) \leq 2\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \end{cases}$$

Si $D^2 u(z_\alpha) = X$, $D^2 v(z_\alpha) = Y$, entonces

$$D^2(u-v)(z_\alpha) = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix}.$$

De (3), se sigue $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \leq 2\alpha \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}^T = 0$$

$$\begin{pmatrix} \xi^T X \\ -\xi^T Y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} = \xi^T X \xi - \xi^T Y \xi$$
$$= \xi^T (X - Y) \xi$$

$\therefore X - Y \leq 0 \longrightarrow D^2 u(z_\alpha) \leq D^2 v(z_\alpha) \quad \forall \alpha > 0$

Por hipótesis,

$$\partial_t u(\hat{z}) - G(D^2 u(\hat{z})) \leq -C, \quad \text{donde } C = \varepsilon / T^2$$
$$\partial_t v(\hat{z}) - G(D^2 v(\hat{z})) \geq 0$$

$\Longleftrightarrow \quad C \leq G(D^2 u(\hat{z})) - G(D^2 v(\hat{z})) \leq 0$! $C > 0$.

Theorem 2.1 *Let $u_i \in USC((0,T) \times \mathbb{R}^{N_i})$ for $i = 1, \cdots, k$. Let φ be a function defined on $(0,T) \times \mathbb{R}^{N_1 + \cdots + N_k}$ such that $(t, x_1, \ldots, x_k) \to \varphi(t, x_1, \ldots, x_k)$ is once continuously differentiable in t and twice continuously differentiable in $(x_1, \cdots, x_k) \in \mathbb{R}^{N_1 + \cdots + N_k}$. Suppose that $\hat{t} \in (0,T)$, $\hat{x}_i \in \mathbb{R}^{N_i}$ for $i = 1, \cdots, k$ and*

$$\begin{aligned} w(t, x_1, \cdots, x_k) &:= u_1(t, x_1) + \cdots + u_k(t, x_k) - \varphi(t, x_1, \cdots, x_k) \\ &\leq w(\hat{t}, \hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_k) \end{aligned}$$

for $t \in (0,T)$ and $x_i \in \mathbb{R}^{N_i}$. Assume, moreover, that there exists $r > 0$ such that for every $M > 0$ there exists constant C such that for $i = 1, \cdots, k$,

$$\begin{aligned} &b_i \leq C \text{ whenever } (b_i, q_i, X_i) \in \mathcal{P}^{2,+} u_i(t, x_i), \\ &|x_i - \hat{x}_i| + |t - \hat{t}| \leq r \text{ and } |u_i(t, x_i)| + |q_i| + \|X_i\| \leq M. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Then for each $\varepsilon > 0$, there exist $X_i \in \mathbb{S}(N_i)$ such that
(i) $(b_i, D_{x_i}\varphi(\hat{t}, \hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_k), X_i) \in \overline{\mathcal{P}}^{2,+} u_i(\hat{t}, \hat{x}_i), \quad i = 1, \cdots, k,$
(ii)

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon} + \|A\|\right) I \leq \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & X_k \end{bmatrix} \leq A + \varepsilon A^2,$$

(iii) $b_1 + \cdots + b_k = \partial_t \varphi(\hat{t}, \hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_k)$,
where $A = D_x^2 \varphi(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathbb{S}(N_1 + \cdots + N_k)$.

Caso 2 $\quad u, -v \in USC$.

Observamos que $(\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}) \in (0,T) \times \Omega$ y queremos aplicar Teo 2.1.

Sea $M > 0$, $(b, q, X) \in \mathcal{P}^{2,+} u(t,x)$ t.q. $|u(t,x)| + \|q\| + \|X\| \leq M$.

Por definición, $u(t,x) \leq u(\hat{t},\hat{x}) + b(t-\hat{t}) + q\cdot(x-\hat{x})$
$+ \frac{1}{2}(x-\hat{x})^T X (x-\hat{x}) + \underline{o}(|t-\hat{t}| + |x-\hat{x}|^2)$

$$b(\hat{t}-t) \leq u(\hat{t},\hat{x}) - u(t,x) + q\cdot(x-\hat{x}) + \frac{1}{2}(x-\hat{x})^T X (x-\hat{x}) + o$$

$$\leq \underline{u(\hat{t},\hat{x})} + C\big(|u(t,x)| + |b|t + \|q\| + \|X\|\big)$$

$\Rightarrow$ Como $t > 0$ y podemos tomar $t \ll 1$,
$\rightarrow b \leq \frac{1}{\hat{t}}(u(\hat{t},\hat{x}) + CM + bt) \leq \frac{1}{\hat{t}+r} \tilde{C}$

Entonces para $\varepsilon > 0$, $\exists\ X, Y \in \mathcal{S}(N)$ t.q.
$a, b \in \mathbb{R}$

(i) $(b, D_x\varphi(\hat{t},\hat{x},\hat{y}), X) \in \overline{\mathcal{P}}^{2,+} u(\hat{t},\hat{x})$
$(a, D_y\varphi(\hat{t},\hat{x},\hat{y}), Y) \in \overline{\mathcal{P}}^{2,-} u(\hat{t},\hat{x})$.

$$\varphi(t,x,y) = \frac{\alpha}{2}|x-y|^2 \implies D_x\varphi(\hat{t},\hat{x},\hat{y}) = \alpha(\hat{x}-\hat{y}) = D_y\varphi(\hat{t},\hat{x},\hat{y})$$

(ii) $$-\left(\frac{1}{\varepsilon} + \|A\|\right) I \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -Y \end{pmatrix} \leq A + \varepsilon A^2,$$

donde $$A = D^2_{x,y}\varphi(\hat{z}) = \alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}.$$

$\rightarrow A + \varepsilon A^2 = (1 + 2\alpha\varepsilon) A$.

(iii) $a - b = \partial_t \varphi(\hat{z}) = 0$.

Como u y v son sub/super soluciones,

$$b - G(X) \leq -c$$
$$a - G(Y) \geq 0$$

De (ii) $X \leq Y$, entonces

$$c \leq G(X) - G(Y) \leq 0 \quad ! \quad \blacksquare$$

No tenemos $D^2 u$ pero sí el generador de un p. Markov

Teo: Caracterización de generador: Hille-Yosida.
Los p. Máximo

P. del max se satisfacen para V

$$\partial_t V = \max\{\partial_0, \underbrace{A(V)}_{\text{gen. infinitesimal}}\}$$

$$V = \sup_{0 \leq \tau \leq T} G(X_\tau)$$

$L_x f(\Delta)^\alpha \qquad \sum \lambda_k \varphi_k f$

$- \lambda_x^\alpha$

integro-diferencial

Ante proyecto

Intro

Problema a resolver

Metodología

Bibliografía.

Funcion de valor en el caso del MB satisface una una EDP no lineal

Caso fraccionario

Resultado de Verificación.

Procesos de Lévy

Principios de comparación.

no lineales

Opciones americanas, nuevos métodos numéricos.

Esquemas de aproximación para soluciones de viscosidad

$$(1)\begin{cases} u_t - F(D^2u) = 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0,T) \\ u = u_0 & \text{en } \mathbb{R}^N \times \{0\} \end{cases}$$

Suponemos $F(X) \leq F(Y) \quad \forall\, X,Y \in S(N)$ t.q. $X \leq Y$

Nota: Si F es uniformemente continua y $u_0 \in BUC(D)$ (unif. continuas y acotadas) entonces (1) tiene una única solución viscosidad en $BUC(D)$.

Para construir un esquema de aproximación de (1), para cada $\rho > 0$ necesitamos un operador $S(\rho): B(\mathbb{R}^N) \longrightarrow B(\mathbb{R}^N)$ tal que

I
(i) $S(\rho)u \geq S(\rho)v$ si $u \geq v$,
(ii) $S(\rho)(u+k) = S(\rho)u + k \quad (k \in \mathbb{R})$,
(iii) $\lim_{\rho \to 0} \frac{\phi - S(\rho)\phi}{\rho} = F(D^2\phi) \quad \forall\, \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$

Esquema general: Para $M \in \mathbb{Z}^+$, definimos $u_M : \mathbb{R}^N \times [0,T] \to \mathbb{R}$ como

$$u_M(\cdot,t) = \int S\left(t - i\tfrac{T}{M}\right) u_M\left(\cdot, i\tfrac{T}{M}\right)(\cdot) \quad \text{si } t \in \left(i\tfrac{T}{M}, (i+1)\tfrac{T}{M}\right]$$

$$\begin{cases} \quad \\ u_0(\cdot) & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

Teorema: Si $S : B(\mathbb{R}^N) \longrightarrow B(\mathbb{R}^N)$ satisface I.(i) – I.(iii) y $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$, entonces $u_M \to u$ de manera localmente uniforme en $\mathbb{R}^N \times [0,T]$ conforme $M \to \infty$.

Resultado de convergencia

Consideramos esquemas de aproximación

$$(2) \quad S(\rho, x, u^\rho(x), u^\rho) = 0 \quad \text{en } \overline{\Omega},$$

Aquí $S : \mathbb{R}^+ \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times B(\overline{\Omega}) \to \mathbb{R}$ es localmente acotada. Si este esquema es monótono, estable y consistente, converge a la solución de

¡convención!

$$(3) \quad F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \text{en } \overline{\Omega},$$

donde suponemos F elíptica:

$$F(x, u, p, X) \leq F(x, u, p, Y) \quad \forall\, (x, u, p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

Necesitaremos las siguientes propiedades sobre S:

análoga a la elipticidad

II (i) Monotonía.

$$S(\rho, x, t, u) \leq S(\rho, x, t, v) \quad \text{si } u \geq v \quad \forall\, \rho \geq 0,\ x \in \overline{\Omega},$$
$$t \in \mathbb{R} \ \text{y} \ u, v \in B(\overline{\Omega})$$

(ii) Estabilidad.

$\forall\ \rho > 0$, $\exists$ una solución $u^\rho \in B(\bar{\Omega})$ de (2) con una cota sobre $\|u^\rho\|_{B(\bar\Omega)}$ independiente de ρ.

(iii) Consistencia.

$\forall\ x \in \bar{\Omega}$ y $\phi \in C_b^\infty(\bar{\Omega})$,

$$\limsup_{\substack{\rho\to 0\\ y\to x\\ \xi\to 0}} \frac{S(\rho, y, \phi(y)+\xi, \phi+\xi)}{\rho} \leq F^*(x, \phi(x), D\phi(x), D^2\phi(x))$$

y,

$$\liminf_{\substack{\rho\to 0\\ y\to x\\ \xi\to 0}} \frac{S(\rho, y, \phi(y)+\xi, \phi+\xi)}{\rho} \geq F_*(x, \phi(x), D\phi(x), D^2\phi(x))$$

Necesitamos que (3) satisfaga un principio de comparación.

Teorema 2 Suponiendo I.(i) – I.(iii) y el principio de comparación, tenemos que la solución u^ρ de (2) converge localmente uniformemente a la única sol. de viscosidad de (3) conforme $\rho \to 0$.

Dem. Denotamos

$$\bar{u}(x) = \limsup_{\substack{y\to x\\ \rho\to 0}} u^\rho(y) := \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to 0}} \left(\sup \left\{ u^\rho(y) : \begin{array}{l} y \in B_\varepsilon(x)\setminus\{x\} \\ \rho \in B_\eta(0)\setminus\{0\} \end{array} \right\} \right)$$

$$\underline{u}(x) = \liminf_{\substack{y\to x\\ \rho\to 0}} := \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \eta\to 0}} \left(\sup\{ u^\rho(y) \dots \} \right)$$

Afirmación $\bar{u}$ y $\underline{u}$ son sub y supersoluciones de (1)

Probémosla primero para $\bar{u}$. Sea x_0 un máximo local de $\bar{u} - \phi$ en $\bar{\Omega}$ para alguna $\phi \in C_b^\infty(\bar{\Omega})$.

S.p.g. supongamos que x_0 es un máximo local estricto, con $\bar{u}(x_0) = \phi(x_0)$ y que $\phi \overset{(*)}{\geq} 2 \sup \|u^\rho\|$ ...

que $\bar{u}(x_0) = \phi(x_0)$ y que $\phi \geq 2\sup_e \|u^e\|_\infty$ afuera de una bola $B_r(x_0)$ y $\bar{u}(x) - \phi(x) \leq \bar{u}(x_0) - \phi(x_0)$ en $B_r(x_0)$.

Por definición de $\bar{u}$ existen sucesiones $(e_n) \subseteq \mathbb{R}^+$ y $(y_n) \subseteq \bar{\Omega}$ t.q. $e_n \to 0$, $y_n \to x_0$, $u^{e_n}(y_n) \to \bar{u}(x_0)$ y y_n es un $\overbrace{\text{máximo global}}^{(*)}$ de $u^{e_n}(\cdot) - \phi(\cdot)$ conforme $n \to \infty$.

Si $\xi_n = u^{e_n}(y_n) - \phi(y_n)$, entonces $\xi_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ y $u^{e_n}(x) \leq \phi(x) + \xi_n \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}$.

De la definición de u^e y la monotonía de S,

$$
\begin{aligned}
&S(e_n, y_n, \phi(y_n) + \xi_n, \phi + \xi_n) \\
\leq\ &S(e_n, y_n, \phi(y_n) + \xi_n, u^{e_n}) \\
=\ &S(e_n, y_n, u^{e_n}(y_n), u^{e_n}) \leq 0
\end{aligned}
$$

Entonces
$$
\begin{aligned}
0 &\geq \liminf_n \frac{S(e_n, y_n, \phi(y_n) + \xi_n)}{e_n} \\
&\geq \liminf_{\substack{e\to 0\\ y\to x_0\\ \xi\to 0}} \frac{S(e, y, \phi(y) + \xi, \phi + \xi)}{e} \\
&\geq F_*(x_0, \phi(x_0), D\phi(x_0), D^2\phi(x_0))
\end{aligned}
$$
$\hookrightarrow$ def equivalente de sol. de v.

Como $\bar{u}(x_0) = \phi(x_0)$, concluimos. ∎

Discretización del problema

$N = 1$, $\quad M, P \in \mathbb{Z}^+$ tales que $M\Delta x = 1$, $P\Delta t = T$.

Para aproximar a $(u(j\Delta x, n\Delta t))_{j,n}$ resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$
(4) \quad \begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t\, F\left(\dfrac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{(\Delta x)^2}\right), & 0 \leq n \leq P \end{cases}
$$

$$u_j^0 = u_0(j\Delta x) \qquad j \in \mathbb{Z}$$

$u_{\Delta x, \Delta t}(x,t) := u_j^n$ si $x \in [(j-\frac{1}{2})\Delta x, (j+\frac{1}{2})\Delta x)$ y $t \in [(n-\frac{1}{2})\Delta t, (n+\frac{1}{2})\Delta t)$.

Teorema 3 Si F es monótona, $u_0 \in C(\mathbb{R})$ y $(\Delta t/(\Delta x)^2)\|F'\|_\infty$, entonces

$u_{\Delta x, \Delta t} \longrightarrow u$ uniformemente en $\mathbb{R} \times [0,T]$ c. $|\Delta x| + |\Delta t| \longrightarrow 0$.