$$
\begin{aligned}
\hat{\mathrm{V}}^{\mathrm{I}}(t) &= \left\{\hat{\mathrm{V}}^{\mathrm{S}}\right\}^{\mathrm{I}}(t) = -J \cdot \sum_{[l,m]} \left\{ \left(\hat{\mathrm{h}}_l^{\dagger \mathrm{S}} \hat{\mathrm{h}}_m^{\mathrm{S}} + \hat{\mathrm{d}}_l^{\dagger \mathrm{S}} \hat{\mathrm{d}}_m^{\mathrm{S}} \right) \right\}^{\mathrm{I}}(t) \\
&= -J \cdot \sum_{[l,m]} \left(\hat{\mathrm{h}}_l^{\dagger \mathrm{I}}(t) \hat{\mathrm{h}}_m^{\mathrm{I}}(t) + \hat{\mathrm{d}}_l^{\dagger \mathrm{I}}(t) \hat{\mathrm{d}}_m^{\mathrm{I}}(t) \right) \\
&= -J \cdot \sum_{[l,m]} \left[\Lambda_{\mathrm{A}}(l,m,t) \cdot \hat{\mathrm{F}}_{\mathrm{A}}(l,m) + \Lambda_{\mathrm{B}}(l,m,t) \cdot \hat{\mathrm{F}}_{\mathrm{B}}(l,m) + \Lambda_{\mathrm{C}}(l,m,t) \cdot \hat{\mathrm{F}}_{\mathrm{C}}(l,m) \right]
\end{aligned}
$$

$$\Lambda_{\mathrm{A}}(l,m,t) = e^{i\cdot(\varepsilon_l-\varepsilon_m)\cdot t} \qquad \hat{\mathrm{F}}_{\mathrm{A}}(l,m) = \sum_{\sigma\in\{\uparrow,\downarrow\}} \hat{\mathrm{h}}^{\dagger \mathrm{S}}_{l,\sigma}\hat{\mathrm{h}}^{\mathrm{S}}_{m,\sigma}\left(1+2\cdot\hat{\mathrm{n}}^{\mathrm{S}}_{l,\overline{\sigma}}\hat{\mathrm{n}}^{\mathrm{S}}_{m,\overline{\sigma}}-\hat{\mathrm{n}}^{\mathrm{S}}_{l,\overline{\sigma}}-\hat{\mathrm{n}}^{\mathrm{S}}_{m,\overline{\sigma}}\right)$$

$$\Lambda_{\mathrm{B}}(l,m,t) = e^{i\cdot(\varepsilon_l-\varepsilon_m+U)\cdot t} \qquad \hat{\mathrm{F}}_{\mathrm{B}}(l,m) = \sum_{\sigma\in\{\uparrow,\downarrow\}} \hat{\mathrm{h}}^{\dagger \mathrm{S}}_{l,\sigma}\hat{\mathrm{h}}^{\mathrm{S}}_{m,\sigma}\left(\hat{\mathrm{n}}^{\mathrm{S}}_{l,\overline{\sigma}}-\hat{\mathrm{n}}^{\mathrm{S}}_{l,\overline{\sigma}}\hat{\mathrm{n}}^{\mathrm{S}}_{m,\overline{\sigma}}\right)$$

$$\Lambda_{\mathrm{C}}(l,m,t) = e^{i\cdot(\varepsilon_l-\varepsilon_m-U)\cdot t} \qquad \hat{\mathrm{F}}_{\mathrm{C}}(l,m) = \sum_{\sigma\in\{\uparrow,\downarrow\}} \hat{\mathrm{h}}^{\dagger \mathrm{S}}_{l,\sigma}\hat{\mathrm{h}}^{\mathrm{S}}_{m,\sigma}\left(\hat{\mathrm{n}}^{\mathrm{S}}_{m,\overline{\sigma}}-\hat{\mathrm{n}}^{\mathrm{S}}_{m,\overline{\sigma}}\hat{\mathrm{n}}^{\mathrm{S}}_{l,\overline{\sigma}}\right)$$