Singulärwertzerlegung

1. $B = A^T A$
2. Eigenwerte von B. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 ...$ $\quad S_1 = \sqrt{\lambda_1}$
3. Eigenvektoren bestimmen von B. (V_1)
4. $U_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} A \cdot V_1$
5. $A = U S V^T$

Eigenschaften der singulärwertzerlegung

$A = USV^T \iff A^T = VS^TU^T$

Ist A invertierbar, so ist $A^{-1} = US^{-1}V^T$ (beachte: $U = U^T$ und $V^{-1} = V^T$)

Definitheit von Matrizen

positiv definit	$x^T A x > 0$	; alle $EW > 0$
semi-pos. def.	$x^T A x \geq 0$	; $EW \geq 0$
negativ def.	$x^T A x < 0$	; $EW < 0$
semi-neg. def.	$x^T A x \leq 0$	; $EW \leq 0$

Definitheit : Hurwitz Kriterium

A & A^T positiv definit genau dann, wenn $\det(X) > 0$

Bsp.: $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 4 & -5 & -4 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

Matrix ist negativ definit, wenn der erste Hauptminor negativ
2. Hauptminor positiv
3. Hauptminor negativ
.. immer so abwechselnd

Matrixexponential

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} = T e^D T^{-1}$$

$$A^3 = (TD\underbrace{T^{-1})(T}_{I_n}D\underbrace{T^{-1})(T}_{I_n}DT^{-1}) = T D^3 T^{-1}$$

Ausgleichsrechnung

$\iff A x - c = r$

Koeffizienten (A), Unbekannte (x), Ergebnisvektor (c), Residium (r)

1. Normalengleichung $A^T A x = A^T c$

2. QR-Zerlegung - Methode der kleinsten Quadrate

$$Q^T A x - Q^T c = Q^T r =: s, \quad \|s\| = \|r\|$$

Q orthogonal

Algorithmus zum Lösen der Fehlergleichung $Ax - c = r$ mit Hilfe der QR-Zerlegung:

1) $R := Q^T A$ (QR Zerlegung von A mit Givensrotation)

2) $d := Q^T c$ berechne $d = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \end{pmatrix}$. $d_0 \in \mathbb{R}^n$

3) $R_0 x = d_0$ lösen

Eigenwerte

$A x = \lambda x$

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Es gelten die folgenden Aussagen:

- Jede quadratische Matrix hat mindestens einen Eigenwert
- Jede $n \times n$ Matrix hat höchstens n Eigenwerte
- Für jeden Eigenwert ist die algebraische Vielfachheit, die mit welcher ein Eigenwert in der Linearfaktorzerlegung vorkommt, größer gleich 1 und kleiner gleich n
- Jede $n \times n$ Matrix hat genau n Eigenwerte, wenn jeder Eigenwert mit seiner algebraischen Vielfachheit gezählt wird
- Für jede reelle Matrix sind die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms reell. In diesem Fall sind die Eigenwerte entweder reell oder sie treten in konjugiert komplexen Paaren auf.

Eigenvektoren

Definition

Ist λ Eigenwert der Matrix A, dann heißt die Menge der Lösungen von $(A - \lambda I_n) x = 0$ Eigenraum zum Eigenwert λ. Dieser Unterraum von $\mathbb{C}^n$ wird mit E_λ bezeichnet. Die Dimension des Unterraums E_λ heißt geometrische Vielfachheit des Eigenwertes λ.

$$(A - \lambda I_n) x = 0$$

Bemerkung

1) Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes immer größer gleich 1.

2) Komplexe EW & EV von reellen Matrizen treten immer in komplex konjugierten Paaren auf

- Sei λ^* Eigenwert der Matrix A. Dann gilt:

  $1 \leq$ geometrische Vielfachheit von $\lambda^* \leq$ algebraische Vielfachheit von λ^*

- Eine Basis aus Eigenvektoren von A heißt Eigenbasis zur Matrix A.

i) Eine quadratische Matrix heißt einfach, wenn jeder Eigenwert die algebraische Vielfachheit 1 (und damit auch die geometrische Vielfachheit 1) hat.

ii) Eine quadratische Matrix heißt halb einfach, wenn für jeden Eigenwert die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit ist.

Diagonalisierbarkeit

Definition

Eine quadratische Matrix A heißt diagonalisierbar, falls es eine reguläre Matrix T gibt, sodass die Matrix $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist.

Satz

Für jede quadratische Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:

i) Die Matrix A ist halbeinfach

ii) Die Matrix A besitzt eine Eigenbasis

iii) Die Matri A ist diagonalisierbar

Folgerungen

1) seien $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$ eine Eigenbasis von A => Für $T = (v^{(1)}\, v^{(2)} \dots v^{(n)})$ gilt: T diagonalisiert A, d.h. $T^{-1}AT := D$ ist diagonal, Diagonalelemente sind Eigenwerte von A.

2) Umgekehrt: Gibt es T regulär, D diagonal mit $T^{-1}AT = D$, so bilden die Spalten von T eine Eigenbasis zu A und in der D-Diagonalen stehen die Eigenwerte von A

Das Eigenwertproblem symmetrischer Matrizen

Satz

Sei A eine reelle, symmetrische (d.h. $A^T = A$) Matrix. Dann gilt:

i) Alle Eigenwerte von A sind reell

ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander

Satz

Sei A eine reelle, symmetrische Matrix. Dann gilt:

i) Die Matrix A ist halbeinfach (und somit diagonalisierbar)

ii) Es gibt eine orthonormale Eigenbasis zu A.

iii) Es gibt eine orthogonale Matrix T, so dass die Matrix $T^{-1}AT$ diagonal ist. In der Diagonalen stehen die Eigenwerte der Matrix A. Die Spalten von T sind die entsprechenden Eigenvektoren der Matrix A.

Lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

Gegeben sei ein Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = A y(t), \quad y(0) = y^{(0)}$$

A habe n Eigenwerte (mit Vielfachheit gezählt) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit den n Eigenvektoren $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$

$$B := (v^{(1)} \dots v^{(n)})$$

$$B^{-1} A B := C = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Transformation

$$y(t) = B x(t)$$

$$\dot{x}(t) = C x(t)$$

$$\dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t) \qquad i = 1, \dots, n$$

$$x_i(t) = c_i e^{\lambda_i t} \qquad i = 1, \dots, n$$

mit Anfangsbedingung bestimmen falls gegeben $x(0) = T y(0)$

Beispiel ODE 1. Ordnung

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \dot{y} = Ay \quad , y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

1) EW berechnen:

$\det(A - \lambda I) \overset{!}{=} 0$

$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 6 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 \overset{!}{=} 0$

$\lambda_{1/2} = 1{,}5 \pm \sqrt{1{,}5^2 + 4} = 1{,}5 \pm \sqrt{6{,}25} = 1{,}5 \pm 2{,}5$

$\lambda_1 = 4 \qquad \lambda_2 = -1$

2) Eigenwerte berechnen:

$E_4: \ (A - 4 \cdot I)x = 0$

$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} x_2 = t \\ x_1 = \frac{1}{3} t \end{array} \Rightarrow E_4 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$

$E_{-1}: \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} x_2 = t \\ x_1 = -\frac{1}{2} t \end{array} \to E_{-1} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

$T = \begin{pmatrix} \overset{t^{(1)}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} & \overset{t^{(2)}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}} \end{pmatrix}$

3) $y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot t^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} \cdot t^{(2)}$

$y = T \cdot x \iff y_0 = T \cdot x_0 \to \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

mit Gauß: $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 10 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} c_2 = -2 \\ c_1 = 2 \end{array}$

$y(t) = 2e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

4) Damit $\lim_{t \to \infty} y(t)$ gegen null konvergiert, müsste $c_1 = 0$ sein & $c_2 \in \mathbb{R}$

$\lim_{t\to\infty} c_1 e^{4t} = \pm\infty$ und $\lim_{t\to\infty} c_2 e^{-t} = 0$

$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow y(0) = T \cdot x(0) = \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha \end{pmatrix}$

Determinante

Definition via Eigenschaften

$\det(A) = |A|$

(D1) $\det(I_n) = 1$

(D2) det wechselt Vorzeichen, wenn 2 Zeilen/Spalten vertauscht werden

(D3) det ist linear in jeder Zeile/Spalte

$$\det\begin{pmatrix} ta & tb \\ c & d \end{pmatrix} = t \cdot \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a+\tilde{a} & b+\tilde{b} \\ c & d \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ c & d \end{pmatrix}$$

3 × 3 Matrix

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1$$

Vorzeichenmatrix:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Für jede nxn Matrix:

1) $\det A^T = \det A$

2) $\det \alpha A = \alpha^n \det A$

3) $\det(A \cdot B) = \det(BA) = \det(A) \cdot \det(B)$

4) Falls A invertierbar ($\det A \neq 0$): $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

5) Falls A orthogonal $\Rightarrow \det A = \pm 1$

6) Falls A singulär/nicht invertierbar $\Rightarrow \det(A) = 0$

7) Für 1×1 Matrizen $A = (a)$ ist $\det(A) = a$

8) $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j})$

Tricks beim Berechnen der Determinante

1) zwei Zeilen/Spalten vertauschen $\det \cdot (-1)$

2) Zeile + Vielfaches einer anderen Zeile $\Rightarrow$ det bleibt gleich

3) Die Determinante einer Matrix mit zwei gleichen Zeilen/Spalten ist gleich null

4) Die Determinante einer Matrix, die eine Zeile/Spalte aus lauter Nullen enthält ist gleich null

5) Die Determinante einer Dreiecksmatrix (Diagonalmatrix) ist gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente

Blockmatrizen auf Diagonalen

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{B} & * & * \\ 0 & \boxed{C} & * \\ 0 & 0 & \boxed{D} \end{pmatrix}$$

$\det(A) = \det(B) \cdot \det(C) \cdot \det(D)$

Gauß

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 20/7 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt in V ist die Funktion $(\cdot,\cdot): V \times V \to \mathbb{R}$, falls

(S1) linear im zweiten Argument:

$(x, ay + bz) = a(x,y) + b(x,z)$

(S2) symmetrisch: $(x,y) = (y,x)$ über $\mathbb{R}$
$(x,y) = \overline{(y,x)}$ über $\mathbb{C}$

(S3) positiv definit $\begin{cases} (x,x) \geq 0 & \text{für alle } x \in V \\ (x,x) = 0 & \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$: $(x,y) := x^T y$

Standardskalarprodukt in $\mathbb{C}^n$: $(x,y) := x^H y$

Skalarprodukt (eine Variante) in $C[a,b]$: $\forall f,g \in C[a,b]$:

$$(f,g) = \int_a^b f(t)\,g(t)\,dt$$

Lineare Abbildungen

Definition:

Eine Abbildung $F: x \in V \mapsto y = F(x) \in W$ heißt lineare Abbildung vom endlichdimensionalen Vektorraum V in den endlichdimensionalen Vektorraum W, falls:

1) $F(x+y) = F(x) + F(y)$, für alle $x, y \in V$

2) $F(\alpha x) = \alpha F(x)$, für alle Zahlen α und alle $x \in V$

orthogonale Abbildung: Winkel bleiben erhalten: $(x', y') = (Ax, Ay) = (x,y)$

Längengetreue Abb.: Längen bleiben erhalten: $\|x'\| = \|Ax\| = \|x\|$

orthonormale Abb.: Winkel & Längen bleiben erhalten
↳ beide obrigen Kriterien treffen zu
↳ Abbildungsmatrix wird dann auch orthogonal genannt

Isomorphismus

Def.: $F: X \to Y$ linear & bijektiv heißt Isomorphismus $\to$ man sagt X, Y sind isomorph

Falls $X = Y$ $\to$ dann ist F: Automorphismus

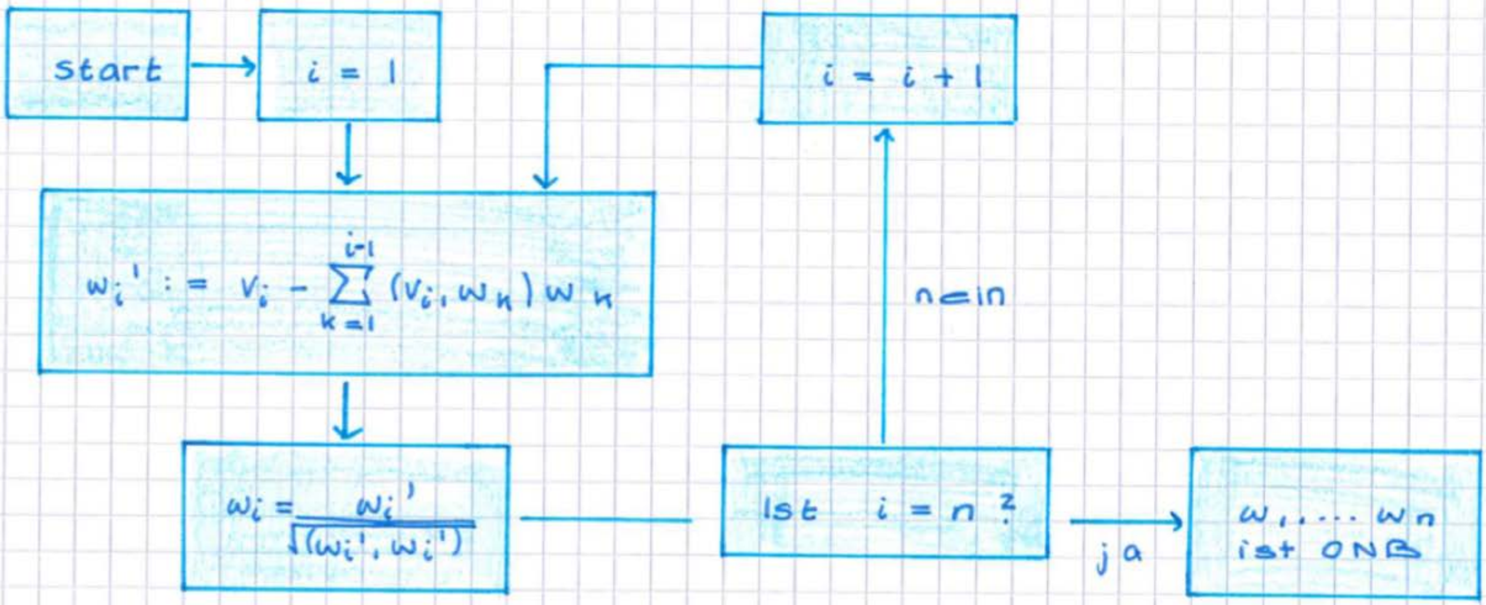
Theorem: Injektiv

$F = X \to Y$ lin. Abbildung, dann F injektiv $\Leftrightarrow \ker(F) = \{0\}$

$F: X \to Y$ lin. Abbildung auf endlich dim. Räume X, Y

dann: $\dim(\ker(F)) + \dim(\text{Bild}(F)) = \dim(X)$

Algorithmus



$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "B"] & Y \\ \tilde{V} \arrow[u, "T"] \arrow[r, "A"] & \tilde{Y} \arrow[u, "T"] \end{tikzcd}$$

$V, Y, \tilde{V}, \tilde{Y}$ sind Matrizen mit Basis B und $\tilde{B}$.

- T bzw. k_b finden wenn Matrizen gegeben sind.

$V = T \cdot \tilde{V}$,

$T = V \cdot \tilde{V}^{-1}$

- T bzw. k_b finden wenn Basen gegeben sind.

Beschreiben den selben Punkt im Raum

$\tilde{B} \cdot \tilde{V} = B \cdot V$, $V = T \cdot \tilde{V}$

$\Rightarrow \tilde{B} \cdot \cancel{\tilde{V}} = B \cdot T \cdot \cancel{\tilde{V}} \quad | \cdot \tilde{V}^{-1}$

T ist auf der andere Seite.

$\Rightarrow \tilde{B} = B \cdot T$

$T = \tilde{B} \cdot B^{-1}$

Vektorräume

Definition

Ein Vektorraum V über einem Körper $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$: reeller VR, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: komplexer VR) ist eine Menge von Objekten mit folgenden Eigenschaften:

- Es gibt eine Addition $+ : V \times V \to V$ $\quad x, y \in V$
  $(x, y) \mapsto x + y \in V$
- Es gibt eine Multiplikation mit einem Element des Körpers $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$
  $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$
  $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in V$
  dann $\lambda \cdot x \in V$

sodass: $\forall x, y, z \in V, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

- (A1) $x + y = y + x$
- (A2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
- (A3) $\exists$ "0" $\in V$ mit: $x +$ "0" $= x$
- (A4) $\forall x \in V \ \exists$ "$-x$" $\in V$: $x +$ "$-x$" $=$ "0"
- (M1) $\mu(\lambda x) = (\mu \lambda) x$
- (M2) $(\mu + \lambda) x = \mu x + \lambda x$, $\mu(x + y) = \mu x + \mu y$
- (M3) $1 \cdot x = x$