

FY3464 – Kvantefeltteori, kort fortalt

Jonas Bueie

Oppdatert: 1. juni 2021

Innhold

1	Sentrale teoremer	2
2	Kvantisering	3
2.1	Førstekvantisering	3
2.2	Annenkvantisering	3
3	Frie skalarfelter	4
3.1	Lagrangefunksjoner	4
3.2	Korrelatorer	5
4	Veiintegralet	5
5	Skalar perturbasjonsteori	6
5.1	Feynmandiagrammer	6
5.2	Feynmanregler	6
5.3	Regularisering	7
5.4	Renormalisering	8
5.5	Ladningsrenormalisering	8
5.6	Masserenormalisering	8

5.6.1	Men hvilken masse er <i>massen</i> ?	10
6	Diracfelter	10
6.1	Løsningen på diraclikningen	11
6.2	Kvantisering av diracfeltet og diracpropagatoren	12
7	Spredning	12

1 Sentrale teoremer

Teorem 1 (Noethers teorem) Når lagrangefunksjonen har en kontinuertlig symmetri, eksisterer det en strøm forbundet med symmetrien, som er bevart når bevegelseslikningene er tilfredsstilt.

Altså er

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = 0$$

dersom \mathcal{L} er symmetrisk under variasjon av α .

Eksempel 1 Når $\phi \rightarrow e^{-i\alpha}\phi$, er denne strømmen

$$J_\mu = \Sigma_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu (\partial \phi_n)} \frac{\delta \phi_n}{\delta \alpha}.$$

Eksempel 2 Hvis \mathcal{L} er translasjonsinvariant, altså at ϕ er symmetrisk under $\phi(x_\mu) \rightarrow \phi(x_\mu + \xi_\mu)$, finnes en noetherstrøm per dimensjon μ . Disse strømmene er energi- ($\mu = 0$) og impulsstrømmer ($\mu = i = 1, 2, 3$), og er gitt ved energi-impulstensoren

$$T_{\mu\nu} = \Sigma_n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi_n - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}.$$

Teorem 2 (Wicks teorem)

$$T\phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) =: \phi_0(x_1) \cdots \phi_0(x_n) : + \text{alle mulige sammentrekninger}$$

Disse sammentrekningene er summen av alle mulige produkter av feynmanpropagatorer $D_F(x_i, x_j)$ mellom to felter $\phi(x_i), \phi(x_j)$.

$$D_F(x_1, x_2) \cdots D_F(x_{n-1}, x_n) + \dots,$$

for enhver mulig kombinasjon av to punkter fra x_1, \dots, x_n . Hvert felt ϕ kan kun trekkes sammen med ett annet, og alle felter må inngå i én propagator.

2 Kvantisering

2.1 Førstekvantisering

Den klassiske hamiltonfunksjonen for en harmonisk oscillator er

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2.$$

Ved å *kvantisere* denne likningen, oppnår vi hamiltonfunksjonen for en kvantemekanisk harmonisk oscillator. Dette gjøres ved å la x og p bli operatører \hat{x} og \hat{p} som tilfredsstiller

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i.$$

Vi definerer deretter skapelses- og annihilasjonsoperatorene a og a^\dagger slik at

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle,$$

$$[a, a^\dagger] = 1, \text{ og}$$

$$H = \omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (1)$$

Dette kalles førstekvantisering.

2.2 Annenkvantisering

I en feltteori består et system av uendelig mange moder ϕ som alle tilfredsstiller de samme bevegelseslikningene som i det klassiske tilfellet. Hver enkelt mode tilfredsstiller da den kvantiserte hamiltonfunksjonen (1), men ved å kvantisere denne enda en gang, kan vi beskrive et felt.

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \omega_p \left(a_p^\dagger a_p + \frac{1}{2} V \right),$$

der V er volumet til systemet og $\omega_p = |\vec{p}|$. Hamiltonfunksjonen for systemet er nå et integral over de uendelig mange modenenes individuelle hamiltonfunksjoner. Denne *annenkvantiseringen* promoterer hilbertrommet til et fockrom, og endrer skapelses- og annihilasjonsoperatorenes kommutatorrelasjon til

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_k^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{k}).$$

a_p^\dagger skaper en tilstand med impuls \vec{p} , og a_p annihilerer den.

$$a_p^\dagger |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} |p\rangle.$$

3 Frie skalarfelter

Klein-Gordonlikningen er en kvantisert versjon av den velkjente likningen for relativistisk energi

$$E = p^2 c^2 + m^2 c^4 \implies (\square + m^2)\phi = 0,$$

der $\phi = \phi(x) = \phi(t, \vec{x})$ er et skalart (spinnløst) felt, som kan uttrykkes

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx}),$$

der $p = p^\mu = (\omega_p, \vec{p})$, og skapelses- og anihilasjonsoperatorene er de samme som for den harmoniske oscillator. ϕ er altså en samling av uavhengige harmoniske oscillatorer, og vi tar dette som en definisjon av frie skalarfelter, med Klein-Gordonlikningen som bevegelseslikning.

Med denne definisjonen av feltene, har vi at

$$[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = 0,$$

ved samme tid $x^0 = y^0$, og

$$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = [\phi(\vec{x}), \partial_t \phi(\vec{y})] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}).$$

Denne siste kommutatoren er Heisenbergs usikkerhetsrelasjon for en feltteori: Et felt og dets endring er ikke målbart på samme tid og sted.

3.1 Lagrangefunksjoner

I kvantefeltteori er lagrangefunksjoner naturlige å bruke, ettersom de er lorentzinvariante. Vi deler normalt lagrangefunksjonen i en kinetisk del og en interaksjonsdel, analogt til den kinetiske og den potensielle energien i klassisk mekanikk.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin} + \mathcal{L}_{int}$$

Den kinetiske delen består *alltid* av bilineære ledd – det vil si ledd som har nøyaktig to felter, mens interaksjonsdelen består av ledd med *mer enn tre* felter.

Et fritt skalarfelt har lagrangefunksjonen

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin} = \frac{1}{2} \phi^* \square \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (2)$$

uten noe interaksjonsledd.

3.2 Korrelatorer

Feynmanpropagatoren

$$\begin{aligned} G_F(x-y) &:= \langle \phi(\vec{x}), \phi(\vec{y}) \rangle = \langle 0 | \phi(\vec{x}) \phi(\vec{y}) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{ik(x-y)} \end{aligned}$$

er en greenfunksjon for Klein-Gordonlikningen

$$(\square + m^2)G_F(x-y) = i\delta^4(x-y),$$

og beskriver korrelasjonen mellom feltet ϕ i to ulike punkter x og y , i en *fri teori*. Dette svarer til en partikkel som beveger seg med 4-impuls k og masse m gjennom romtiden. Nærmere bestemt: Sannsynligheten for at partikkelen beveger seg fra \vec{y} til \vec{x} i løpet av tida $y^0 - x^0$.

Denne propagatoren svarer til lagrangefunksjonen for frie skalarfelt fra likning (2). Andre propagatorer er nødvendig for andre \mathcal{L}_{kin} , for eksempel har fotoner eller diracspinorer egne propagatorer.

Svært nyttig er fouriertransformasjonen til en propagator. I fourierrom har feynmanpropagatoren den enkle formen

$$\tilde{G}_F(x-y) = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

Videre har G_F en pol i $k^2 = m^2$. Disse polene kansellerer når partikkelens bevegelseslikninger er oppfylt (altså når partikkelen er „on-shell“). Dette er viktig for beregning av S-matriseelementer, siden polene gir bidrag til integralet i LSZ-reduksjonsformelen (se seksjon 7).

4 Veiintegralet

Veiintegralet lar oss beregne tidsordnede produkter med utgangspunkt i et systems *klassiske* egenskaper. Integralet er

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) e^{iS[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}},$$

der S er den klassiske virkningen til systemet,

$$S = \int dt \mathcal{L}[x(t), \dot{x}(t)],$$

og $\mathcal{D}\phi$ indikerer at vi integrerer over *alle* mulige feltkonfigurasjoner ϕ som har de rette grensebetingelser.

For å beregne veiintegralet kan vi derfinere et genererende funksjonal

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ iS[\phi] + i \int d^4 x J(x) \phi(x) \right\},$$

slik at det tidsordnede produktet kan skrives

$$\langle \Omega | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | \Omega \rangle = (-i)^n \frac{1}{Z[0]} \left. \frac{\partial^n Z}{\partial J(x_1) \cdots \partial J(x_n)} \right|_{J=0},$$

som en analog til partisjonsfunksjonen i statistisk fysikk.

Med veiintegralet er kvantemekanikken feid langt under teppet, men Schwinger-Dyson-likningene – som gir avviket mellom klassisk og kvantemekanisk feltteori – kan utledes fra veiintegralet. Slik kan man se at et integral over den klassiske virkningen gir kvantemekaniske resultater.

5 Skalar perturbasjonsteori

5.1 Feynmandiagrammer

Feynmandiagrammer er verktøy for å utføre perturbasjonsteori. For enhver partikkels bevegelse gjennom tid, knytter man en del av et diagram, og disse delene settes sammen til et helt diagram. Et feynmandiagram korresponderer med et integral, som gir sannsynligheten for at interaksjonen fra diagrammet finner sted. Man kan dermed summere opp diagrammer med like start- og slutttilstander, og finne amplitudebidraget fra de ulike interaksjonene (diagrammene).

Hvert hjørne i diagrammet bidrar med en koplingskonstant (f.eks. λ) i integralet (se rglene nedenfor), som i perturbasjonsteori typisk er liten. Når vi rekkeutvikler et system i denne koplingskonstanten, summerer vi derfor diagrammet med økende antall hjørner. Jo flere hjørner, jo høyere orden er leddet, slik at mer komplekse interaksjoner (flere hjørner i diagrammet) gir mindre amplitudebidrag enn enkle interaksjoner (færre hjørner i diagrammet).

5.2 Feynmanregler

Feynmandiagrammer og deres integraler konstrueres gjennom feynmanregler, som er ulike for ulike lagrangefunksjoner. Feynmanreglene kan utledes enten fra veiintegralet, eller fra lagrange- eller hamiltonfunksjonene. I impulsrom, for lagrangefunksjoner på formen , er feynmanreglene som følger:¹ Nedenfor følger en oppsummering av feynmanreglene, med eksempler fra skalar $\lambda\phi^4$ -teori, som har lagrangefunksjonen

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{kin} + \mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2} \phi^* \square \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (3)$$

Generelt må feynmanregler utledes uavhengig for enhver teori, så jeg gir ingen garanti for at disse reglene er generelle.

- Interne linjer svarer til en fri propagator, og følger fra \mathcal{L}_{kin} .

¹Her burde vært et avsnitt om utledning av feynmanreglene.

- For \mathcal{L} som i likning (3), representeres de med feynmanpropagatoren, $\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$
- Hjørner svarer til interaksjoner, og følger fra \mathcal{L}_{int} .
 - For \mathcal{L} som i likning (3), representeres de med faktoren $i\lambda$.
 - Merk: Hvis interaksjonsleddene inneholder en derivert, slik som i kvanteelektrodynamikk, må koplingskonstanten ganges med impulsen til det deriverte feltet. Dette kan sees ved å skrive ut interaksjonsleddene med definisjonen av feltene som inngår i teorien. Leseren oppfordres til årvåkenhet i møte med mer komplekse interaksjonsledd enn fra likning (3).
- Impuls er bevart i hvert hjørne. Impulsbevaring representeres med en faktor $\delta(\sum_i k_i - \sum_f k_f)$ for alle hjørner.
- Symmetrier reopresenteres med symmetrifaktoren $\frac{1}{s}$.
- For å regne ut diagrammet multipliseres faktorene fra alle punktene over, og det integreres over alle ubestemte impulser.
- For å regne ut et sett med diagrammer, summeres alle enkeltdiagrammene.

5.3 Regularisering

Det meste i kvantefeltteori divergerer². For eksempel er 1-løkkediagrammet ∞ . Dette kan forklares med at kvantefeltteori ikke kan gi noen nyttig verdi for størrelser som ikke er fysisk observerbare, og løkker er ikke i utgangspunktet fysisk observerbare. Vi kan derimot finne rimelige verdier for integralene, gjennom regularisering og renormalisering. Dette innebærer (forenklet) å innføre parametre som kan fungere som målbare referanseverdier (på samme måte som vi er vant med for potensialfunksjoner), og beregne alle andre verdier med utgangspunkt i disse.

Det finnes flere metoder for å regularisere:³

- **Avkapping („hard cutoff“):** Definer en maksverdi for integraldomenet basert på en naturlig fysisk størrelse, og kutt integralet her.
- **Dimensjonell regularisering:** La $d^4k \rightarrow d^d k$, der $d = 4 - \epsilon$. Dette kan i mange tilfeller fjerne divergensen i et integral over propagatorer, slik at det kan løses i grensa $\epsilon \rightarrow 0$. Se for øvrig identitetene i Schwartz, vedlegg B for hjelp med å løse integralene.
- **Derivajsonsmetoden:** En rask og ikke-ideell måte å trekke ut koeffisientene i resultatet av et UV-divergerende integral (et integral som divergerer for store k).
- **Pauli-Villarsregularisering:** Innfør en fiktiv masse $\Gamma \gg m$ og legg til denne partikkelens propagator $\frac{1}{(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)^2}$ i integranden.

Etter å ha regularisert et integral, kan vi renormalisere resultatet og oppnå fysisk meningsfulle svar.

²Det virker i alle fall sånn.

³Merk at kun de to første har vært dekket i forelesninger, men også de andre kan være ganske hendige.

5.4 Renormalisering

Renormalisering er en prosess der vi definerer en referanseverdi, en *renormaliseringsbetingelse* for en variabel, slik at variabelen kan uttrykkes som en funksjon av referanseverdien. Både i skalar ϕ^3 - og ϕ^4 -teori, samt i kvanteelektrodynamikk, er det tre størrelser som renormaliseres: Feltet/feltene (ϕ eller ψ og A), massen (m) og ladningen (e , g eller λ)

5.5 Ladningsrenormalisering

Koplingskonstanten(e) i \mathcal{L} (for eksempel g , λ eller e) må renormaliseres for at et diagram skal gi meningsfulle svar. I denne prosessen uttrykker vi koplingskonstanten som ei rekkeutvikling av feynmandiagrammer, og definerer en referanseverdi for en variabel (typisk impuls).

Dette gjøres ved å skrive propagatoren som ei rekkeutvikling av feynmandiagrammer. Disse har økende orden av koplingskonstanten, som nevnt i seksjon 5.1. Vi kan så uttrykke en ny, renormalisert koplingskonstant som ei rekkeutvikling av den opprinnelige. Denne defineres ved en referanseverdi for impulsen som vi kan definere selv⁴. Til slutt kan propagatoren uttrykkes som ei rekkeutvikling av den nye, renormaliserte kopplingskonstanten.

5.6 Masserenormalisering

Eksempel 3 (Masserenormalisering) 1-løkkediagrammet i skalar $\lambda\phi^4$ -teori er

$$\text{Diagram: a horizontal line with an arrow pointing right, and a loop attached to it.} = \Sigma_2(k) = -\frac{i\lambda}{16\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^3}{p^2 + m^2} = \infty. \quad (4)$$

Dette er det andre leddet i selvenergien, derav navnet Σ_2 . Merk at leddet er trunkert – endepunktene er fjernet, slik som når feynmandiagram konstrueres. Hvis vi legger på endepunktene, har vi en propagator mellom to punkter. Denne skal vi finne snart.

Integralet i likning (4) kan regulariseres med avkapping

$$-\frac{i\lambda}{16\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^3}{p^2 + m^2} = -\frac{i\lambda}{16\pi^2} \int_0^\Lambda dp \frac{p^3}{p^2 + m^2} \approx -\frac{i\lambda}{32\pi^2} \left(\Lambda^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right),$$

for en stor $\Lambda \gg m$. Dette er en førsteordens korreksjon til den nullte ordens propagatoren

$$\text{Diagram: a horizontal line with an arrow pointing right.} = \frac{i}{(k^2 - m_0^2 + i\epsilon)},$$

⁴Dette er sikkert ikke særlig generelt.

med energi $k^2 = m^2$. Det vil si at 1-løkkediagrammet representerer en vei mellom de samme grensebetingelsene, men med ett hjørne – én interaksjon. Korreksjonen representerer en korreksjon i energien, $\omega \rightarrow \omega + \Delta\omega$, men siden $\omega^2 = m^2$, er dette ekvivalent med å behandle korreksjonen som en massekorreksjon

$$m_0^2 = Z_m m_R^2 = m_R^2 + \delta_m m_R^2,$$

og vi renormaliserer bølgefunksjonene (løsningene på bevegelseslikningene) til

$$\phi^R = \frac{1}{\sqrt{Z_2}} \phi^0, \quad Z_2 = 1 + \delta_2$$

$\delta_m = \infty$ og $\delta_2 = \infty$ kalles kontraled⁵, og er begge av orden $\mathcal{O}(\lambda)$. De er nøklene til å fjerne uendeligheten i integralet vårt.

Vi kjenner nå energien til to propagatorer: $\mathcal{O}(\lambda^0)$ og $\mathcal{O}(\lambda^1)$. Summen av disse er energien opp til første orden i λ for en partikkels bevegelse fra x til y i $\lambda\phi^4$ -teori. La oss skrive ut begge to, og summere dem:

Den nullte ordens propagatoren – med endepunkter – kan skrives som en rekkeutvikling i δ_m

$$\begin{aligned} \bullet \longrightarrow \bullet &= \frac{1}{Z_2} \frac{i}{(k^2 - m_0^2 + i\epsilon)} \\ &= \frac{1}{1 + \delta_2} \frac{i}{k^2 - m_R^2} \frac{1}{\frac{\delta_m m_R^2}{k^2 - m_R^2} + 1} \\ &\simeq (1 + \delta_2) \left[\frac{i}{k^2 - m_R^2} + \frac{i}{k^2 - m_R^2} (i\delta_m m_R^2) \frac{i}{k^2 - m_R^2} + \mathcal{O}(\lambda^2) \right] \\ &= \frac{i}{k^2 - m_R^2} + \frac{i}{k^2 - m_R^2} [i(\delta_2(k^2 - m_R^2) + \delta_m m_R^2)] \frac{i}{k^2 - m_R^2} + \mathcal{O}(\lambda^2), \end{aligned}$$

og den første ordens propagatoren er

$$\bullet \longrightarrow \bullet \text{ (med løkke) } = \frac{i}{k^2 - m^2} \Sigma_2(k) \frac{i}{k^2 - m^2}$$

Vi ser at når disse legges sammen, får vi den totale, renormaliserte effektive propagatoren.

$$\begin{aligned} iG^R(k) &= \langle \frac{\phi(x)}{\sqrt{Z_2}} \frac{\phi(y)}{\sqrt{Z_2}} \rangle = \frac{1}{Z_2} G^{\text{bar}}(k) \\ &= \frac{i}{k^2 - m_R^2} + \frac{i}{k^2 - m_R^2} \{i[\delta_2 k^2 - (\delta_2 + \delta_m)m_R^2 - \Sigma_2(k)]\} \frac{i}{k^2 - m_R^2} + \mathcal{O}(\lambda^2), \end{aligned}$$

Som nevnt, er hensikten med å introdusere kontraledene δ_m og δ_2 å fjerne divergensen fra løkken. Dette kan vi nå gjøre, ved å finne kontraledene slik at

$$\delta_2 k^2 - (\delta_2 + \delta_m)m_R^2 - \Sigma_2(k) = 0,$$

⁵Minhan har definert kontraledene på en litt annen måte enn Schwartz.

altså

$$\delta_2 k^2 - (\delta_2 + \delta_m) m_R^2 = \Sigma_2(k) = -\frac{i\lambda}{32\pi^2} \left(\Lambda^2 - m^2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right).$$

Ettersom $\Sigma_2(k)$ er uavhengig av k^2 , må $\delta_2 = 0$. Dermed har vi bestemt kontraleddene:⁶

$$\delta_2 = 0, \quad \delta_m = -\frac{i\lambda}{32\pi^2} \left(\frac{\Lambda^2}{m^2} - \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \right),$$

og følgelig den reduserte massen m_r .

Hvis vi setter inn den regulariserte massen i lagrangefunksjonen fra eksempel 3 får vi

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \phi^* \square \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \\ \mathcal{L}_R &= \frac{1}{2} \phi_R^* \square \phi_R - \frac{1}{2} m_R^2 \phi_R^2 - \frac{1}{2} \delta_m m_R^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi_R^4. \end{aligned}$$

Renormaliseringen innebærer altså at vi legger til uendelige kontraled i \mathcal{L} , slik at vi, når vi senere bergner integraler fra den nye lagrangefunksjonen \mathcal{L}_R , får endelige løsninger. Regulariseringsparametre, slik som Λ , er ufysiske parametre som faller bort fra fysisk observerbare størrelser.

5.6.1 Men hvilken masse er *massen*?

$m_0 = \sqrt{m_R^2 + \delta_m m_R^2}$ i eksempel 3 er nå per definisjon uendelig, men m_R er ikke det. Er denne den faktiske massen til partikkelen? Nei, ikke egentlig. Den fysiske massen er definert som *polmassen* til partikkelens proagator, som vi nå har renormalisert. Dette er altså den massen m_P^2 som er slik at

$$\begin{aligned} iG^R(k) &= \frac{i}{k^2 - m_R^2 - \delta_m m_R^2} \\ &= \frac{i}{k^2 - m_R^2 + \Sigma_R(k)} \end{aligned}$$

divergerer. Det vil si når

$$k^2 = m_P^2 = m_R^2 - \Sigma_R(m_P).$$

Slik finner vi den fysiske massen til partikkelen.

6 Diracfelter

Diracliingen

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$$

⁶Det finnes flere mulige måter å velge δ_m på. Ved å trekke fra eller legge til endelige ledd i kontraledene, kan man oppnå ulike uttrykk for massen, dog med samme fysiske betydning. Det sentrale er at den uendelige delen av selvenergien $\Sigma_2(k)$ må fjernes. De ulike valgmulighetene kalles subtraksjonsskjemaer.

er bevegelseslikningen som følger fra diraclagrangefunksjonen

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi.$$

som beskriver spinorer $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$. Et sentralt resultat er at disse må ha halvtallig spinn for at lorentzinvarians skal være bevart.

6.1 Løsningen på diralikningen

Diralikningen impliserer at Klein-Gordon-likningen stemmer:

$$(\partial + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = (\partial^2 - m^2)\psi = 0.$$

Dermed må spinorer løse Klein-Gordonlikningen, og spinorene må kunne skrives som planbølger

$$\psi_s(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} u_s(p) e^{-ipx}, \quad (5)$$

med $p_0 > 0$, ettersom Klein-Gordon er en bølgelikning. Vi definerer også antipartikkelløsningen

$$\bar{\psi}_s(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} v_s(p) e^{+ipx}. \quad (6)$$

u_s og v_s er spinorer som gir polariseringsretningen til henholdsvis partikler og antipartikler. Vi ønsker å uttrykke disse ved hjelp av spinorene ξ_s og η_s , for $s \in \{1, 2\} = \{\uparrow, \downarrow\}$, der vi velger $\xi_\uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\xi_\downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, og tilsvarende for η .

Vi gjør dette ved å løse diralikningen i weylbasis. Denne likningen, som finnes ved å multiplisere ut diralikningen for γ -matrisene i weylbasis, er

$$\begin{pmatrix} -m & i\sigma^\mu \partial_\mu u \\ i\sigma^\mu \partial_\mu u & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0.$$

I et referansesystem der partikkelen står stille, slik at $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$, blir spinorene da

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} u_s(p) = 0 \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} v_s(p) = 0.$$

Hvis vi nå lar $p^\mu \rightarrow (E, 0, 0, p_z)$, med $E^2 = p_0^2 = \vec{p}^2 + m^2$, får vi at

$$\vec{p} \cdot \sigma = \begin{pmatrix} E - p_z & 0 \\ 0 & E + p_z \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{p} \cdot \bar{\sigma} = \begin{pmatrix} E - p_z & 0 \\ 0 & E + p_z \end{pmatrix},$$

med $\bar{\sigma} := (\mathbb{I}, -\vec{\sigma})$ slik at den nye løsningen for spinorene blir

$$u_s(p) = \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{cc} \sqrt{E-p_z} & 0 \\ 0 & \sqrt{E+p_z} \end{array} \right) \xi_s \\ \left(\begin{array}{cc} \sqrt{E+p_z} & 0 \\ 0 & \sqrt{E-p_z} \end{array} \right) \xi_s \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad v_s(p) = \begin{bmatrix} \left(\begin{array}{cc} \sqrt{E-p_z} & 0 \\ 0 & \sqrt{E+p_z} \end{array} \right) \eta_s \\ \left(\begin{array}{cc} -\sqrt{E+p_z} & 0 \\ 0 & -\sqrt{E-p_z} \end{array} \right) \eta_s \end{bmatrix},$$

eller på en mer kompakt form

$$u_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma} \xi_s} \\ \sqrt{p \cdot \bar{\sigma} \xi_s} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad v_s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma} \eta_s} \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma} \eta_s} \end{pmatrix}.$$

6.2 Kvantisering av diracfeltet og diracpropagatoren

Som en videreføring av det frie feltet, uttrykkes ved å førstekvantisere diracfeltet fra seksjon 6.1, likning (5) og (6)

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p^s u_s(p) e^{-ipx} + b_p^{s\dagger} v_s(p) e^{ipx}), \\ \bar{\psi}(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} (a_p^{s\dagger} u_s(p) e^{-ipx} + b_p^s v_s(p) e^{ipx}). \end{aligned}$$

Diracpropagatoren er

$$\tilde{S}_F(x-y) = \langle \psi_\alpha(x) \psi_\beta(y) \rangle = \frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon}.$$

7 Spredning

For å beskrive spredning mellom partikler bruker vi S-matrisen

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle,$$

der $|i\rangle$ og $\langle f|$ er tilstandene før og etter vekselvirkningen, altså ved $t = -\infty$ og $t = +\infty$. S-matrisen er knyttet til spredningstverrsnittet $d\sigma$ (som er kjent fra klassisk mekanikk) gjennom relasjonen

$$d\sigma = \frac{|\langle f | S | i \rangle|^2}{\langle f | f \rangle \langle i | i \rangle} d\Pi,$$

der $d\Pi = \prod_j \frac{V}{(2\pi)^3} d^3p_j$ er et impulselement for slutttilstanden $|f\rangle$. Hvis vi definerer *overgangsmatrisen* \mathcal{T} slik at $S = \mathbb{I} + i\mathcal{T}$ – og stoler blindt på Minahan – kan vi uttrykke sannsynligheten $P_{f \leftarrow i}$ for en overgang fra $|i\rangle$ til $|f\rangle$ som

$$P_{fi} = P_{f \leftarrow i} = \frac{|\langle f | \mathcal{T} | i \rangle|^2}{\langle f | f \rangle \langle i | i \rangle}.$$

$\mathcal{T} = S - \mathbb{I}$ er den delen av S som svarer til interaksjon, mens diagonalen i S svarer til en fri teori, som ikke spres.

For å beregne S-matriseelementene, er LSZ-reduksjonsformelen nyttig.

Teorem 3 (LSZ-reduksjonsformelen) *Spreningsmatrisen (S -matrisen) kan uttrykkes*

$$\langle f|S|i\rangle = \prod_{j=0}^n \left[i \int d^4x_j e^{\pm i p_j x_j} (\square_j + m^2) \right] \cdot \langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) | \Omega \rangle,$$

der $-i$ og $+i$ i integranden svarer til henholdsvis start- og slutttilstander for systemet.

LSZ-formelen er et produkt av fouriertransformasjoner, $\int d^4x e^{-ipx} (\square + m^2)$, av Klein-Gordon-operatoren. For asymptotiske tilstander ($t = \pm\infty$), er $(\square + m^2)\phi = 0$, så kun selve interaksjonen (som skjer ved endelig t) bidrar til S-matrisen. Videre er feynmanpropagatorene proporsjonale med $\frac{1}{-p^2 + m^2}$, slik at S-matrisen har poler i $p^2 - m^2 = \mathcal{F}\{\square + m^2\}$. Dette betyr at kun leddene i tidsordningsoperatoren som har $p_i^2 = m^2$ for alle p_i det vil si kun de leddene som består av partikler på skallet. LSZ-reduksjonsformelen reduserer med andre ord tidsordningsoperatoren til kun de tilstandene som oppfyller bevegelseslikningene, nemlig de asymptotiske tilstandene som vi ønsker å beregne.

Her er det verdt å legge merke til at feynmandiagrammer beskriver netopp vekselvirkning mellom partikler, som er opphavet til spredning. Veiintegralet kan benyttes til å beregne LSZ-reduksjonsformelen, slik at esensielt alle verktøy og teorier som er definert i faget er nødvendige for å kunne beregne nettopp hvordan partikler påvirker hverandre: Hvordan spredning foregår.