Intro

den 20 september 2018 21:57

Låt $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning. Då är

$$\operatorname{ran}(T) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^m \mid \bar{y} = T(\bar{x}), x \in \mathbb{R}^n\}.$$

$$\ker(T) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid T(\bar{x}) = \bar{0}\}.$$

Vi säger att T är injektiv om $T(\bar{u}) \neq T(\bar{v})$ om $\bar{u} \neq \bar{v}$, $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$.

Vi säger att T är surjektiv om $\operatorname{ran}(T) = \mathbb{R}^m$.

Sats 6.3.11.

T injektiv $\Leftrightarrow \ker T = 0$.

Sats 6.3.14:

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är injektiv omm T är surjektiv.

6.3.9.

den 20 september 2018 19:36

Avgör om $\bar{b} \in \text{Col}\,A$, och uttryck i så fall $\bar{b}$ som en linjär kombination av kolumnvektorerna i A, med

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Kolonrummet av A utgörs av

$$\text{Col}\,A = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \bar{y} = A\bar{x},\ \bar{x} \in \mathbb{R}^3\}.$$

vi vill alltså se om $A\bar{x} = \bar{b}$, för något $\bar{x} \Rightarrow$ Gaussa!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 8 & 1 & 8 \end{array}\right] \sim \cdots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 5/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

dvs

$$\bar{b} = 4/3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 5/6 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Så $\bar{b} \in \text{Col}\,A$.

6.3.15.

den 20 september 2018 19:40

Hitta standardmatrisen för den linjära operatorn nedan, och avgör om den är injektiv/surjektiv.

T:

$w_1 = -x_1 + 3x_2 + 2x_3$

$w_2 = 2x_1 \quad + 4x_3$

$w_3 = x_1 + 3x_2 + 6x_3$

Betraktar HL och finner matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Är A injektiv? Sats 6.3.11. : A injektiv omm $\ker(A) = \bar{0}$.

Sats 6.3.14. Om A är injektiv så är A surjektiv.

Ställ upp $A\bar{x} = \bar{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{Bmatrix} r_2 + r_1 \\ r_3 - r_1 \end{Bmatrix} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Då A kommer ha en fri variabel kommer $\ker A \neq \bar{0}$.

Då är a inte injektiv, och därmed inte surjektiv.

Gammal tenta sf1604 2013

den 18 september 2018 17:43

2. För den linjära avbildningen A gäller att $A(1,0,0) = (2,1,0)$, $A(0,1,1) = (1,-1,2)$ och $A(0,1,2) = (0,-3,4)$.

   (a) (2p) Bestäm A:s matris relativt standardbasen.

   (b) (2p) Bestäm en bas för A:s kärna ("kernel") samt dimensionen för A:s bildrum ("range").

   (c) (1p) Är A surjektiv, injektiv och/eller bijektiv.

Lösning. ~~Vi använder "Martins metod":~~

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Så

SVAR:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) (2p) Bestäm en bas för A:s kärna ("kernel") samt dimensionen för A:s bildrum ("range").

Lösning. A:s bildrum är kolonnrummet till matrisen ovan och dess dimension är inte tre eftersom kolonn ett och kolonn två är parallella, men kolonnrummet har dimension två eftersom de två sista kolonnerna spänner upp ett delrum av dimension två. Enligt fundamentalsatsen har då nollrummet dimension ett. Det är lätt att se att $\mathbf{A}(1 \ \ -1 \ \ 0)^T = (0 \ \ 0 \ \ 0)^T$ och därmed kan vi sluta att vektorn $(1,-1,0)$ är en bas för A:s kärna.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) (2p) Bestäm en bas för A:s kärna ("kernel") samt dimensionen för A:s bildrum ("range").

Lösning. A:s bildrum är kolonnrummet till matrisen ovan och dess dimension är inte tre eftersom kolonn ett och kolonn två är parallella, men kolonnrummet har dimension två eftersom de två sista kolonnerna spänner upp ett delrum av dimension två. Enligt fundamentalsatsen har då nollrummet dimension ett. Det är lätt att se att $\mathbf{A}(1 \ \ -1 \ \ 0)^T = (0 \ \ 0 \ \ 0)^T$ och därmed kan vi sluta att vektorn $(1,-1,0)$ är en bas för A:s kärna.

3

(c) (1p) Är A surjektiv, injektiv och/eller bijektiv.

Lösning. A är inte injektiv eftersom dess kärna inte är trivial. Eftersom A avbildar R^3 till R^3 och bildrummet har dimension 2 kan avbildningen intE vara surjektiv. Bijektivitet kräver både injektivitet och surjektivitet, så då är den inte det heller.

a) Vi söker $A(0,1,0)$ och $A(0,0,1)$. Då är

$$B = \left[A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \ A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \ A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right]$$

Det gäller av lineariteten hos A att

$$A(0,0,1) = A\left[(0,1,2)-(0,1,1)\right] = A(0,1,2) - A(0,1,1) =$$
$$= (0,-3,4) - (1,-1,2) = (-1,-2,2).$$

P.s.s.

$$A(0,1,0) = A\left[(0,1,1) - (0,0,1)\right] = A(0,1,1) - A(0,0,1) =$$
$$= (1,-1,2) - (-1,-2,2) = (2,1,0)$$

Ger

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Kolonnrummet har dimension 2, eftersom kolonnerna spänner upp ett 2D-rum.

Då har nollrummet dim 1.

Vi ser att om

$\bar{u} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ så är $A\bar{u} = \bar{0}$.

Då vet vi alltså att

$\ker(A) = \operatorname{Span}\{\bar{u}\}$.

c) Ej injektiv eftersom $\ker A \neq 0$, och ej surjektiv då $\dim \operatorname{Col} A \neq 3$.

Diskussionsfrågor 6.3.

den 20 september 2018 19:53

D1: Är påståendena sanna eller falska? Motivera.

a) Om $\overset{\text{linjär}}{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är injektiv och $T(\bar{u}-\bar{v})=\bar{0}$ så är $\bar{u}=\bar{v}$.

Sant! Ty $T(\bar{u}-\bar{v}) = T(\bar{u})-T(\bar{v})$, och T injektiv $\Rightarrow T(\bar{u}) \neq T(\bar{v})$ om $\bar{u} \neq \bar{v}$.

b) Om $\overset{\text{linjär}}{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är surjektiv -||- -||- $\bar{u}=\bar{v}$.

Sant! Ty T är injektiv omm T är surjektiv, eftersom T är en linjär operator.

c) Om $\det A = 0$ så är T_A varken injektiv eller surjektiv.

Sant

Endast $n \times n$-matriser har en determinant, varför T är en linjär operator.

Då följer det av satsen om nästan allt att T_A varken är injektiv eller surjektiv.

Stud uppgifter från uppgiftsbladet

den 20 september 2018 19:46

Uppgift 14. Avgör om vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ tillhör nollrummet till den linjära avbildning som ges av matrisen $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Uppgift 15. Avgör om vektorn $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ tillhör bildrummet till den linjära avbildning som ges av matrisen $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

14. Nej. (Det är bara att multiplicera och se om det blir $\vec{0}$)

15. Ja. (Det är bara att kolla om ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har lösning, där A är matrisen och $\vec{b}$ är vektorn)

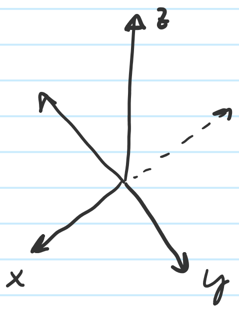
6.4.7.

den 20 september 2018 19:55

Använd matrismultiplikation för att hitta standardmatrisen till kompositionen av följande avbildningar nedan:

a) En reflektion i yz-planet följt av en ortogonal projektion på xz-planet.

reflektion i yz: $x=-x,\ y=y,\ z=z.$ Rita bild!



Ortogonal projektion i xz-planet:

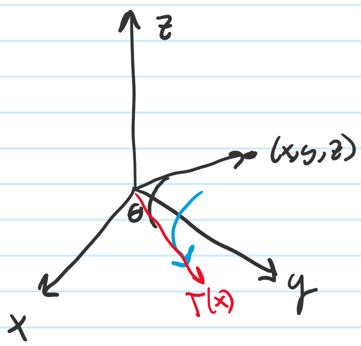
$x=x,\ z=z,\ y=0.$

Matrisen blir

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

b) en rotation med 45° moturs kring y-axeln, följt av en ortogonal projektion på xz-axeln.

Rotation med 45° kring y-axeln:



y konstant, x och z roteras.

$$R=\begin{bmatrix}\cos 45^\circ & 0 & \sin 45^\circ\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin 45^\circ & 0 & \cos 45^\circ\end{bmatrix}$$

$x \to x\cos 45 + z\sin 45^\circ$

$y \to y$

$z \to x\sin 45^\circ - z\cos 45^\circ$

Ortogonal projektion på xz axeln

$x \to x$

Ortogonal projektion på xz-axeln

$x \to x$
$y \to 0$
$z \to z$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 45 & 0 & \sin 45 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin 45 & 0 & \cos 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45 & 0 & \sin 45 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin 45 & 0 & \cos 45 \end{bmatrix},$$

c) Ortogonal projektion i xy-planet:

$x \to x$
$y \to y$
$z \to 0$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

reflektion i yz-planet:

$x = -x$
$y = y$
$z = z$

$$\Rightarrow R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.4.23.

den 20 september 2018 19:56

Avgör om $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

a) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ = ort.proj. på x-axeln. $x \to x,\ y \to 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ = ort.proj. på y-axeln. $y \to y,\ x \to 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$T_1 \circ T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_2 \circ T_1 = \ldots = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är rotation kring origo med en vinkel θ_1 : $\begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$

$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — " — θ_2 : $\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$

$$T_1 \circ T_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 & -(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$= \{\text{trig-identiteter}\} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} = T_2 \circ T_1.$$

c) $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en rotation kring x-axeln med en vinkel θ_1 och

$T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ — " — z-axeln — " — θ_2.

$$A_{T_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \quad A_{T_2} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_1 \circ T_2 = A_{T_1}A_{T_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \cos\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1\sin\theta_2 & \sin\theta_1\cos\theta_2 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 \circ T_1 = A_{T_2}A_{T_1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ 0 & \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2\cos\theta_1 & - - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{matrix}$$

$$\Rightarrow T_2 \circ T_1 \neq T_1 \circ T_2.$$

Diskussionsfrågor 6.4.

den 20 september 2018 19:58

D1: Är påståendena sanna eller falska? Motivera:

a) Om $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $T_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är linjära avbildningar, och $T_1 \neq$ injektiv, så är inte $T_2 \circ T_1$ injektiv.

Sant: Om $T_1 \neq$ inj så $\exists \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n : T(\bar{u}) = T(\bar{v})$ om $\bar{u} \neq \bar{v}$.

Då är $T_2 \circ T_1(\bar{u}) = T_2(T_1(\bar{u})) = T_2(T_1(\bar{v})) = T_2 \circ T_1(\bar{v})$.

b) –11–, $T_1 \neq$ surjektiv, så är inte $T_2 \circ T_1$ surjektiv.

Falskt, om T_2 är surjektiv så kan $T_2 \circ T_1$ vara surjektiv.

c) –11– $T_2 \neq$ injektiv så är inte $T_2 \circ T_1$ injektiv.

Falskt, om $\mathrm{ran}(T_1) \cap \ker(T_2) = \bar{0}$ så är $T_2 \circ T_1$ injektiv.

d) –11– $T_2 \neq$ surjektiv så är inte $T_2 \circ T_1$ surjektiv.

Sant. $\mathrm{ran}(T_1) \subseteq \mathbb{R}^m$, så $\mathrm{ran}(T_2 \circ T_1) \subseteq \mathrm{ran}(T_2)$.