Dagordning

den 10 september 2018 01:00

Ge tillbaka prov

Många har förstått konceptet med att behöva flera vektorer för att representera ett plan

Nämn snabbt att några behöver repetera parametrisering av plan (tex använde många planets normal som en av vektorerna), säg något om dem som använde parallella vektorer

Säg hur man kan gå snabbt mellan planets ekvation och parameterform, många gjorde det jobbigare än vad det behöver vara.

1.

den 6 september 2018 22:19

1. För varje tal a har vi ekvationssystemet i tre okända x, y och z som ges av

$$(\star) \quad \begin{cases} (a-3)y &= 1, \\ 2x - ax + ay - 3y + 2z - az &= 1, \\ (4-2a)x + (2a-6)y + 5z - 2az &= 3. \end{cases}$$

Visa att ekvationssystemet $(\star)$ har en unik lösning om och endast om $a \neq 2$ och $a \neq 3$. Lös sedan ekvationssystemet $(\star)$ då $a = 2$ med hjälp av radoperationer på totalmatrisen för systemet.

Skriv systemet som matris:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & a-3 & 0 & 1 \\ 2-a & a-3 & 2-a & 1 \\ 2(2-a) & 2(a-3) & 5-2a & 3 \end{array}\right]$$

$a=2$ ger alla x-beroenden försvinner $\rightarrow$ x godtycklig $\rightarrow$ ej entydig lösning

$a=3$ ger alla y-beroenden försvinner $\rightarrow$ $0=1$ istället $\rightarrow$ ej entydig lsg

Antag $a \neq 3$, $a \neq 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & a-3 & 0 & 1 \\ 2-a & a-3 & 2-a & 1 \\ 2(2-a) & 2(a-3) & 5-2a & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & a-3 & 0 & 1 \\ 2-a & 0 & 2-a & 0 \\ 2(2-a) & 0 & 5-2a & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & a-3 & 0 & 1 \\ 2-a & 0 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & a-3 & 0 & 1 \\ 2-a & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (a-2)/(2-a) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(a-3) \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

Väldefinierat $\forall\, a \neq 2, 5.$

2.

den 6 september 2018 22:22

1. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} 17x - 13y + 2z - 7w = 5, \\ 13x + 6y - z + 11w = 3. \end{cases} \quad (*)$$

a) Bestäm en lösning av systemet för vilken $x = 0$ och $w = 1$.

b) Förklara varför systemet (*) har oändligt många lösningar.

c) Finns det en lösning av systemet för vilken $y = -2x$ och $w = -3x$?

Låt $x=0$, $w=1$. Då har vi systemet

$$\begin{aligned} -13y + 2z &= 12 \\ 6y - z &= -8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -13 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -4 \\ 6 & -1 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -32 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 32 \end{array}\right]$$

$\Leftrightarrow y = 4 \,/\, z = 32$

b) Antingen har ett system med fler variabler än ekv ∞ eller inga lsg, vi har hittat 1 lsg så det finns ∞ st.

c)

1. a) Med $x = 0$ och $w = 1$ har vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} -13y + 2z - 7 = 5, \\ 6y - z + 11 = 3. \end{cases}$$

Detta ekvationssystem, i två okända, skriver vi som matrisekvationen

$$\begin{bmatrix} -13 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}.$$

Matrisen är inverterbar, med determinant 1, och vi har att systemet har den unika lösningen

kten

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -6 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 32 \end{bmatrix}.$$

b) Ett ekvationssystem i fler okända än antalet ekvationer har antingen ingen lösning, eller oändligt många lösningar. Vi har hittat en lösning, nämligen $(0, 4, 32, 1)$, och därför finns det oändligt många lösningar.

c) Med $y = -2x$ och $w = -3x$ blir systemet

$$\begin{cases} 17x + 26x + 2z - 21x = 64x + 2z = 5, \\ 13x - 12x - z - 33x = -32x - z = 3. \end{cases}$$

Då $-2 \cdot 3 = -6$ och inte 5, har systemet ingen lösning.

3.

den 10 september 2018 00:15

Uppgift 3. Låt
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

(a) En matris S kallas för *kvadratrot* till en matris M om $SS = M$. Bestäm två kvadratrötter till A.

(b) Hur många olika kvadratrötter till B kan du hitta?

(c) Tycker du att varje matris har en kvadratrot? Motivera.

från Anton-Busby, Ex. 3.1.D6

a) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow a^2+bc = d^2+bc = 2$, $b(a+d) = 2$, $b = c$ och $a = d$.

$\Rightarrow a^2 + c^2 = 2$.

$c \cdot 2a = 2$

$\Rightarrow a^2 + \frac{1}{a^2} = 2$, ger $a = \pm 1$

$\Rightarrow c = \pm 1$

Ger kvadratrötterna

$\pm \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix}$, enda möjlighet är $b = c = 0$, ty

$a + d = 0$

$\Rightarrow a = -d$ ger formen $\begin{bmatrix} d^2+bc & 0 \\ 0 & d^2+bc \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

c) Nej, exempelvis

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$b(a+d) = 1 \Rightarrow a+d = \frac{1}{b}$. Men

$c(a+d) = c/b \Rightarrow c \overset{!}{=} 0$.

$c = 0 \Rightarrow a^2 = d^2 = 0$. Då kan inte $b(a+d) = 1$, eftersom $a+d = 0$.

Diskussionsfrågor

den 10 september 2018 00:44

ANNAT

Här är några andra moment som är viktiga och intressanta att diskutera.

- Kommentarer till Seminarie 1: Var det något som var oklart med förra seminariet (teori, bedömning)?
- Hur påverkar Gauss-Jordan elimination lösningsmängden? Vad är syftet med Gauss-Jordan elimination?
- Vad är sammanhanget mellan lösningar av inhomogena ekvationssystem och lösningar av de motsvarande homogena ekvationssystemen?
- Pivotelementen får inte vara noll, annars måste man utföra ett radbyte. Vad händer om ett pivotelement är inte noll men mycket liten? Får man utföra ett radbyta även om pivotelementet är skilt från noll? Finns det fördelar med det?

- Det påverkar inte lösningsmängden, eftersom varje operation kan representeras av multiplikation med elementära matriser. Syftet är att reducera en matris till reducerad trappstegsform.
- Lösningen till ett inhomogent system kan uttryckas som lösningen till motsvarande homogena system plus en partikulärlösning.
- Det är bra i datoralgoritmer, eftersom det minskar avrundningsfel.