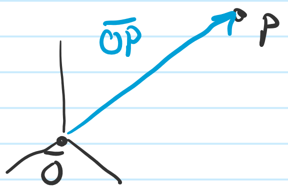
Ortsvektorer

den 30 augusti 2018 18:54

Förra gången blev ni förvirrade av hur jag använde vektorer och punkter. Med all rätt! Jag gjorde om punkterna till ortsvektorer utan att nämna det. Likheter och skillnader syns här



Jag kommer vara mer noggrann i fortsättningen.

Projektioner

den 30 augusti 2018 18:58

Definitions in terms of a and b [edit]

When θ is not known, the cosine of θ can be computed in terms of **a** and **b**, by the following property of the dot product **a** · **b**:

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}=\cos\theta$$

Scalar projection [edit]

By the above-mentioned property of the dot product, the definition of the scalar projection becomes

$$a_1=|\mathbf{a}|\cos\theta=|\mathbf{a}|\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$$

Vector projection [edit]

Similarly, the definition of the vector projection of **a** onto **b** becomes

$$\mathbf{a}_1=a_1\hat{\mathbf{b}}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},$$

which is equivalent to either

$$\mathbf{a}_1=(\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{b}})\hat{\mathbf{b}},$$

or[2]

$$\mathbf{a}_1=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{b}.$$

The latter formula is computationally more efficient than the former. Both require two dot products and eventually the multiplication of a scalar by a vector, but the former additionally requires a square root and the division of a vector by a scalar,[3] while the latter additionally requires only the division of a scalar by a scalar.

110923/3

den 30 augusti 2018 18:17

3. Bestäm skärningspunkten mellan planet med ekvation $x + 2y + 4z - 5 = 0$ och den linje som passerar genom punkterna $(1, 1, 1)$ och $(4, 0, 1)$.

$P \qquad Q$

Bilda ortsvektorerna $\overline{OP} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\overline{OQ} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vi kan skriva linjen på parameterform enligt:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sätt in i planets ekvation:

$$(1+3t) + 2(1-t) + 4(1+0) - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad t + 2 = 0$$

$$\Rightarrow t = -2$$

Skärningspunkten är då $(1,1,1) - 2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}}$

1.3.33.

den 30 augusti 2018 17:35

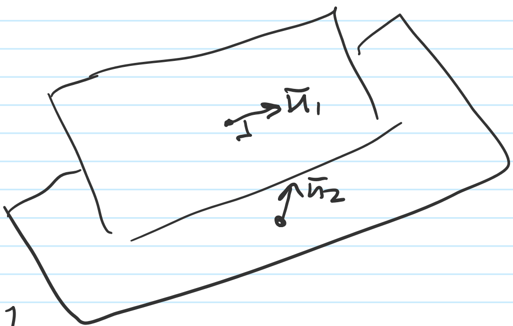
33.) 33. Avgör om planen är vinkelräta:

a) $4x+3y-z+1=0$; $x+2z=-1$

b) $x-2y+3z=4$; $-2x+5y+4z=-1$

Frågaitur gör man detta jättesnabbt?

Det enklaste sättet att göra detta på är att skalärmultiplicera deras normaler



$\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0 \Rightarrow$ vinkelräta!

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$$ så nej

Frågor?

b) studenterna gör. svaret är ja.

Stud 111014/3

den 30 augusti 2018 18:36

3. Bestäm en ekvation för det plan som går genom punkten $P = (2, 3, 0)$ och som innehåller linjen $(x, y, z) = (1 - t, 2 - t, 3 + t)$.

3. För att bestämma en ekvation för planet behöver vi en normalvektor i tillägg till någon punkt. Det sökta planet skall innehålla linjen, och speciellt riktningsvektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Planet skall också innehålla vektorn $\vec{Q}P$, där Q är någon punkt på linjen, t.ex. $Q = (1, 2, 3)$. Detta ger att $\vec{Q}P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. En normalvektor till planet ges av kryssprodukten av dessa två vektorer

$$\vec{v} \times \vec{Q}P = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-3) \\ (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En ekvation för planet ges då av $2x - 2y + d = 0$. Insätter vi koordinaterna till punkten P som skall ingå i planet erhåller vi att $d = 2$. Ekvationen blir då $2x - 2y + 2 = 0$, men vi kan förenkla den genom att dela med -4 och får då $x - y + 1 = 0$.

Stud 130128/3

den 30 augusti 2018 18:45

3. Betrakta de tre punkterna $P = (0, 1, 0)$, $Q = (2, 1, 1)$ och $R = (0, -1, 2)$.
   a) Bestäm en ekvation för ett plan som innehåller alla tre punkterna, P, Q och R.
   b) Avgör om de tre punkterna ligger på samma linje.

3. a) Planet innehåller vektorerna

$$\vec{PQ} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \vec{PR} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

En normal för planet är

$$\vec{n} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

En ekvation för planet är på formen $x - 2y - 2z + d = 0$, där talet d bestäms vid insättning. Insätter vi koordinaterna för punkten P får vi

$$0 - 2 - 0 + d = 0.$$

b) Om de tre punktern lå på en och samma linje då ville vektorn $\vec{PQ}$ vara parallell med vektorn $\vec{PR}$. Vilket inte är fallet.

alt:

Fixera P och bilda

$$\vec{PQ} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \vec{PR} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Då gäller i planet att

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot s$$

$\Rightarrow x = 2t$

$y = 1 - 2s$

$z = t + 2s = \frac{x}{2} + 1 - y$

$\Rightarrow x + 2 - 2y - 2z = 0$

$\Rightarrow \boxed{x - 2y - 2z + 2 = 0}$

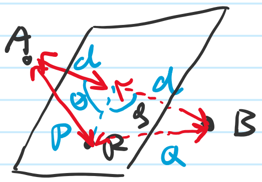
110912/3

den 30 augusti 2018 17:50

3. Bestäm en ekvation för det plan som består av punkter med lika långt avstånd till punkten $A = (-1, 1, 2)$ som till punkten $B = (1, 5, -4)$. (*Ledning*: Mittpunkten på sträckan mellan A och B ligger i planet.)

Något luringare uppgift som kräver ett grepp om koncept samt lite nytänkande.

Rita bild:



Vad måste θ vara för att avståndet $p = q$?

$\theta = \varphi = 90°$!

$\Rightarrow$ Planets normal är $\bar{OB} - \bar{OA} := \bar{v}$

Dessutom vet vi att mittpunkten mellan A och B har koordinaterna $S = A + \frac{(\bar{OB} - \bar{OA})}{2}$.

$$S = (-1, 1, 2) + \frac{1}{2} \cdot [(1, 5, -4) - (-1, 1, 2)]$$
$$= (-1, 1, 2) + \frac{1}{2} \cdot (2, 4, -6)$$
$$= (-1, 1, 2) + (1, 2, -3)$$
$$= (0, 3, -1)$$

För en punkt R i planet gäller point-normalekvationen

$$\bar{n} \bullet (\bar{OR} - \bar{OS}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{v} \bullet (\bar{OR} - \bar{OS}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \bullet \left[\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4(y-3) - 6(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2x + 4y - 6z = 18}$$

Frågor?

Stud 1.3.21.

den 30 augusti 2018 17:33

21. Hitta parametriska ekvationer för planet som är parallellt med planet $3x+2y-z=1$ och passerar genom punkten $P(1,1,1)$.

(5 min)

Studenterna får lösa denna i grupp om 3. Inled med:

Vad betyder det att två plan är parallella? (samma normal)

Normalen ges av $\bar{n}=\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}$

För $\bar{x}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ i sökt plan är

$$\bar{n}(\bar{x}-P)=0 \iff \begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}\bullet\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}=0$$

$$\iff 3x-3+2y-2-z+1=0$$

$$\iff \boxed{3x+2y-z=4} \quad (1)$$

Vi kan nu välja $x=t_1$, $y=t_2$, och från (1) får vi

$z=3t_1+2t_2-4$.

Frågor?

Stud 101129/2

den 30 augusti 2018 17:36

2. Betrakta triangeln ABC med hörn i punkterna $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, -3, 2)$ och $C = (4, 1, 0)$ i $\mathbb{R}^3$.
   a) Beräkna koordinaterna för vektorerna $\mathbf{u} = \overline{AB}$ och $\mathbf{v} = \overline{AC}$.
   b) Använd kryssprodukten för att beräkna arean av triangeln ABC.
   c) Använd skalärprodukten för att beräkna cosinus för vinkeln vid hörnet A.

a) Bilda ortsvektorerna (vektorerna från origo till respektive punkt)

$$\overline{OA} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \overline{OB} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} ; \quad \overline{OC} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\bar{u} = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v} = \overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

c) $$\cos \theta = \frac{\bar{u} \bullet \bar{v}}{\|\bar{u}\| \|\bar{v}\|} = \frac{3-3-1}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}} = \boxed{\frac{-1}{11}}$$