Dagordning

den 11 september 2018 13:31

Idag: Linjärt oberoende och determinanter

Repetition av begrepp:

Linjärt beroende och oberoende

En mängd $\{\bar{v}_i\}_{i=1}^{n}$ av vektorer kallas linjärt oberoende om ekvationen

$$c_1\bar{v}_1 + \dots + c_n\bar{v}_n = \bar{0}$$

bara har lösningen $c_i = 0 \ \forall i : i=1,\dots,n$. Om så inte är fallet är $\{\bar{v}_i\}_{i=1}^{n}$ linjärt beroende.

Sats 3.4.9. Låt A = $n \times n$-matris. Då är följande påståenden ekvivalenta:

a) rref av A är I_n.

b) A är en produkt av elementära matriser.

c) A är inverterbar.

d) $A\bar{x} = \bar{0}$ har bara den triviala lösningen.

e) $A\bar{x} = \bar{b}$ har exakt en lösning $\forall \bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

f) $A\bar{x} = \bar{b}$ är konsistent $\forall \bar{b} \in \mathbb{R}^n$.

g) kolonnvektorerna är linjärt oberoende.

h) radvektorerna är linjärt oberoende

Determinanter: Säger något om lösningsmängden till tillhörande matris.

Enkelt för 2x2; jobbigt för större. Kan reducera till ett antal 2x2-matriser genom kofaktor expansion.

Sats 4.2.2.

att lägga ihop eller dra bort en rad eller kolonn från en annan i en matris A ändrar inte determinanten.

radbyte: $A \to B$

$\to \det A = -\det(B)$

Multiplicera en rad i A med k: kalla den nya matrisen B. Då är

$$\det B = k \det A.$$

$\to \det(kA) = k^n \det A$.

$\det(AB) = \det A \det B$.

Determinanten av en trappstegsmatris är produkten av diagonalelementen.

3.4.13.

den 11 september 2018 13:33

Hitta den generella lösningen till systemet nedan, och lista en mängd vektorer som spänner upp lösningsrummet:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ -x_1 - 6x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 12x_2 + 5x_3 - 18x_4 = 0 \end{cases}$$

Lsg:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & -6 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 12 & 5 & -18 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{Bmatrix} r_3 - 2r_1 \\ r_2 + r_1 \end{Bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{Bmatrix} r_3 - r_2 \\ r_1 - 2r_2 \end{Bmatrix} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Ger

$x_1 + 6x_2 + 11x_4 = 0$

$x_3 - 8x_4 = 0$

$x_2 = s$

$x_4 = t$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6s - 11t \\ s \\ 8t \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -11 \\ 0 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} \quad s,t \in \mathbb{R}$$

$$= \boxed{\operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -11 \\ 0 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

3.4.19.

den 11 september 2018 13:48

Bestäm om vektorerna är linjärt beroende:

a) $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\} = \left\{\begin{bmatrix}4\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\10\\2\end{bmatrix}\right\}$

$c_1\bar{v}_1 + c_2\bar{v}_2 = 0 \iff \bar{v}_1 = \frac{-c_2}{c_1}\bar{v}_2 = \{c_1, c_2 \text{ godt}\} = d\bar{v}_2$

$\iff$ I fallet 2 vektorer är de linjärt beroende omm den ena är en multipel av den andra.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{linjärt oberoende.}}$

b) $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\} = \left\{\begin{bmatrix}3\\0\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\-2\end{bmatrix}\right\}$

Samma argument som a) $\Rightarrow$ linjärt oberoende.

c) $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} = \left\{\begin{bmatrix}-3\\0\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$

3.4.9. ger linj. oberoende omm

$A := [\bar{v}_1\ \bar{v}_2\ \bar{v}_3] \sim I_n.$

Dvs:

$$\begin{bmatrix}-3 & 5 & 1\\0 & -1 & 1\\4 & 2 & 3\end{bmatrix} \sim I_n.$$

$$\begin{bmatrix}-3 & 5 & 1\\0 & -1 & 1\\4 & 2 & 3\end{bmatrix} \sim \{r_1 + r_3\} \sim \begin{bmatrix}1 & 7 & 4\\0 & -1 & 1\\4 & 2 & 3\end{bmatrix} \sim \{r_3 - 4r_1\} \sim \begin{bmatrix}1 & 7 & 4\\0 & -1 & 1\\0 & -26 & -13\end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left\{\frac{r_3}{13}\right\} \sim \begin{bmatrix}1 & 7 & 4\\0 & -1 & 1\\0 & -2 & -1\end{bmatrix} \sim \{r_3 - 2r_2\} \sim \begin{bmatrix}1 & 7 & 4\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & -3\end{bmatrix} \sim \left\{\begin{matrix}r_2 \cdot -1\\ r_3 \cdot -\frac{1}{3}\end{matrix}\right\} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & 7 & 4\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \sim \{\text{Pivot i varje kolumn}\} \sim I_3.$$

$\Rightarrow \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ linj. oberoende.

Stud 3.4.25.

den 11 september 2018 14:10

visa att

$$W := \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \bar{x} = (a, 0, a, 0), a \in \mathbb{R} \}$$

är ett delrum till $\mathbb{R}^4$ genom att hitta ett linjärt hölje till W.

Lsg: Låt $\bar{v} = (1,0,1,0)$. Då är $W = \text{Span}\{\bar{v}\}$.

vi kan skriva för $\bar{x} \in W$:

$\bar{x} = a \cdot \bar{v}, a \in \mathbb{R}$.

Detta är en linje genom origo.

Stud 3.5.15.

den 11 september 2018 14:16

Ekvationen

$$x+y+z=1 \quad (1)$$

kan ses som ett linjärt system av en ekvation i 3 variabler.

a) Uttryck (1) som en linj. komb. av partikulär lösning och homogen lsg.

Sätt

$x=s$
$y=t$
$\Rightarrow z=1-s-t$

Gen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{\text{part. lösn.}} + \underbrace{s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{\text{homogen lsg.}} .$$

4.1.1. Och 9

den 11 september 2018 14:31

Hitta determinanten till:

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$\det A = 3 \cdot 4 - (-2 \cdot 5) = 22.$

9. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 9 & -4 \end{bmatrix} = 3 \cdot (4 - 45) = -123.$$

4.2.11.

den 11 september 2018 14:39

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Beräkna det A genom att reducera A till trappstegsform.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \{ r_1 + r_3 \} \sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \{ r_3 = r_3 + 2r_1 \} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 15 & -3 \end{bmatrix} \sim \{ r_2 = r_3 ; r_3 = r_2 \} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 7 & -4 \\ 0 & 15 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = (1 \cdot 15 \cdot (-2)) \cdot \overset{\text{radbyte}}{\overset{\downarrow}{(-1)}} = 30.$$

Stud 101208/2

den 11 september 2018 14:49

2. Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

är ett speciallfall av en typ av matriser som ofta förekommer i olika tillämpningar, exempelvis i samband med diskretisering av differentialekvationer för numerisk lösning. Använd rad- eller kolonnoperationer för att beräkna determinanten av matrisen A.

2. Med hjälp av *elementära* radoperationer transformerar vi matrisen till en övertriangulär matris vars determinant sedan enkelt kan beräknas, eftersom determinanten av en triangulär matris är lika med produkten av dess diagonalelement.

   I själva verket räcker det i detta exempel med upprepad användning av operationen "addera en multipel av en rad till en annan rad", vilket som bekant inte ändrar determinantens värde.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 + \frac{1}{2} r_1 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 + \frac{2}{3} r_2 \\ r_4 \\ r_5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 + \frac{3}{4} r_3 \\ r_5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \\ r_5 + \frac{4}{5} r_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = 6.$$

Stud 100913/3

den 11 september 2018 15:11

3. Förklara med hjälp av egenskaperna hos determinanter varför det för kvadratiska matriser, A, i allmänhet gäller att $\det(A^T A) = (\det(A))^2$ och använd sedan detta för att beräkna $\det(A^T A)$ i specialfallet när

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Vi har att determinanten av en produkt är produkten av determinanterna. Dessutom är determinanten av en matris lika med determinanten av transponatet av matrisen. Därmed får vi att

$$\det(A^T A) = \det(A^T)\det(A) = \det(A)^2.$$

För att beräkna $\det(A^T A)$ kan vi därför först beräkna determinanten av A och får då

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1 \\ r_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} r_1 \\ -r_2 \\ r_3 + r_2 \\ r_4 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -((-3)\cdot 4 - 1\cdot 1) = 13.$$

Vi får nu att $\det(A^T A) = (\det(A)^2) = 13^2 = 169$.