Dagordning och intro

den 12 september 2018 13:37

Idag: Kryssprodukt, areor och volymer.

Låt $\bar{u}$ och $\bar{v}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^3$. Då definieras kryssprodukten $\bar{w}=\bar{u}\times\bar{v}$ som

$$\bar{w}=(u_2v_3-u_3v_2,\ u_3v_1-u_1v_3,\ u_1v_2-u_2v_1) \iff$$

$$\bar{w}=\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right) \iff$$

$$\bar{w}=\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Det gäller från egenskaper hos determinanter att

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}\times\bar{v} &= -\bar{v}\times\bar{u} \\ \bar{u}\times\bar{u} &= \bar{0} \end{aligned}\right\}$$ Låt studenterna fundera på svaren till detta

samt att (4-3.8)

$$\bar{u}\times(\bar{v}+\bar{w})=\bar{u}\times\bar{v}+\bar{u}\times\bar{w}$$

$$(\bar{u}+\bar{v})\times\bar{w}=\bar{u}\times\bar{w}+\bar{v}\times\bar{w}$$

$$k(\bar{u}\times\bar{v})=(k\bar{u})\times\bar{v}=\bar{u}\times k\bar{v}$$

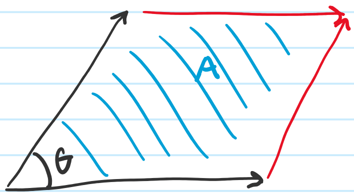
$$\bar{u}\times\bar{0}=\bar{0}\times\bar{u}=\bar{0}.$$

Sats 4-3.4.

a) $\bar{u}\cdot(\bar{u}\times\bar{v})=0$

b) $\bar{v}\cdot(\bar{u}\times\bar{v})=0.$

Sats 4.3.10.



$$\|\bar{u}\times\bar{v}\|=\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|\sin\theta$$

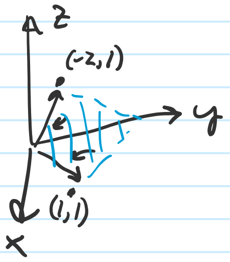
$$A=\|\bar{u}\times\bar{v}\|$$

4.3.19.

den 12 september 2018 13:26

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ar = \det A = 1 + 2 = 3$$



I $\mathbb{R}^3$:

$$Ar = \| \bar{u} \times \bar{v} \| = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \hat{x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \hat{y} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right\| =$$

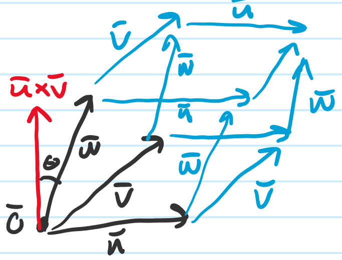
$$= \| 3 \hat{z} \| = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{9} = 3 \text{, summa!}$$

4.3.27.

den 12 september 2018 13:36

Hitta volymen hos parallellepipeden som spänns upp av

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix};\ \bar{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix};\ \bar{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$



$$V = A\cdot h$$

$$h = \left|\bar{w}\bullet\frac{(\bar{u}\times\bar{v})}{\|\bar{u}\times\bar{v}\|}\right|$$

riktningsvektorn pekandes mot $\bar{u}\times\bar{v}$.

$$A = \|\bar{u}\times\bar{v}\|$$

$$\Rightarrow A\cdot h = \left|\bar{w}\bullet\frac{(\bar{u}\times\bar{v})}{\cancel{\|\bar{u}\times\bar{v}\|}}\right|\cancel{\|\bar{u}\times\bar{v}\|} = |\bar{w}\bullet(\bar{u}\times\bar{v})|$$

$$\bar{u}\times\bar{v} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \hat{x}\cdot\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - \hat{y}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \hat{z}\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12-8 \\ -(-2)\cdot 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$V = |\bar{w}\bullet(\bar{u}\times\bar{v})| = \left|\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}\right| = |-16| = \boxed{16}$$

Stud 4.3.35.

den 12 september 2018 13:36

Låt

$\bar{u} = (3, 2, -1)$, $\bar{v} = (0, 2, -3)$, $\bar{w} = (2, 6, 7)$. Beräkna

a) $\bar{v} \times \bar{w}$

b) $\bar{u} \times (\bar{v} \times \bar{w})$

c) $(\bar{u} \times \bar{v}) \times \bar{w}$.

Svar:

a) $(32, -6, -4)$

b) $(-14, -20, -82)$

c) $(27, 40, -42)$

Stud 4.3.37.

den 12 september 2018 13:36

Hitta en vektor som är ortogonal med både $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

a) $\bar{u} = (-6, 4, 2)$, $\bar{v} = (3, 1, 5)$

b) $\bar{u} = (-2, 1, 5)$, $\bar{v} = (3, 0, -3)$

Svaret är $\bar{u} \times \bar{v}$ från sats i dragordningen, med

a) $\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v} = (18, 36, -18)$

b) $\bar{w} = \bar{u} \times \bar{v} = (-3, 9, -3)$.

4.3.52.

den 12 september 2018 14:27

Antag att $A^k = 0$, för något k. Visa att A inte är inverterbar.

4.3.52.

den 13 september 2018 20:26

Låt

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}.$$

Visa att

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \overbrace{\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & w_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}}^{\text{determinant}}.$$

Vi har av definitionen:

$$\bar{v} \times \bar{w} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \hat{x} \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - \hat{y} \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + \hat{z} \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{V} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{bmatrix} = V_1 \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} - V_2 \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + V_3 \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \qquad \text{V.S.V.}$$

4.3.21.

den 13 september 2018 20:33

(Jag har modifierat A från hur A ser ut i boken)

Hitta volymen av parallellepipeden som har sidorna som kolumnerna i

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Av förra upg:

$$V = \det A^T = \det A.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{Bmatrix} r_2 - r_1 \\ r_3 + r_1 \end{Bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Rightarrow$ vektorerna ej linj. oberoende $\Rightarrow$ de spänner upp ett plan eller en linje som inte har någon volym!

Uppgift från tentan jag skrev i linjär algebra som diskussionsuppgift

den 12 september 2018 14:36

(2) (5p) Vilka av följande fem påståenden om matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

är **FALSKA**? (Du behöver inte motivera svaren.)

(a) A är inverterbar.
(b) Om $v \in \mathbb{R}^5$ och $Av = v$ så är $v = 0$.
(c) Den sista raden i A^2 är $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix}$.
(d) A kan transformeras till identitetsmatrisen med hjälp av elementära radoperationer.
(e) $\det(A) = 120$.

d) ser vi är sant. Då följer a) av "satsen om nästan allt".

b) är falskt, låt t.ex. $\bar{v} = [1 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0]^T$.

c) Är sant, multiplikation av sista raden med någon av kolumnerna är 0, förutom sista, som blir 25.

e) $\det A = \prod_{i=1}^{5} a_{ii} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 6 \cdot 20 = 120.$

Svår uppgift från gammal tenta, ge som läxa

den 13 september 2018 20:54

8. För varje heltal $n \geq 1$, låt A_n vara $n \times n$-matrisen med ettor på diagonalen och superdiagonalen, minusettor på subdiagonalen och nollor för övrigt. För $n = 1$ finns inga super- eller subdiagonaler så vi definierar $A_1 = (1)$. Exempelvis är

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Det gäller att $\det A_n = \det A_{n-1} + \det A_{n-2}$ för alla $n \geq 3$. Varför? **(3)**

(b) Beräkna $\det A_{10}$. **(1)**

Lösning. (a) Först ett par observationer:

- Om man stryker den första raden och kolonnen i A_n får man A_{n-1}.
- Om man i stället stryker den första kolonnen och den andra raden får man en matris B_{n-1} som är likadan som A_{n-1} sånär som på att första raden bara innehåller en etta och inte två.

Om vi utvecklar determinanten för A_n längs med första kolonnen får vi $\det A_n = 1 \cdot \det A_{n-1} - (-1) \cdot \det B_{n-1}$. Utvecklar vi $\det B_{n-1}$ längs första raden får vi $\det B_{n-1} = \det A_{n-2}$.

(b) Vi kan direkt beräkna $\det A_1 = 1$ och $\det A_2 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 2$, och med rekursionsformeln från (a)-uppgiften får vi

$$\begin{aligned}
\det A_3 &= \det A_2 + \det A_1 = 2 + 1 = 3, \\
\det A_4 &= \det A_3 + \det A_2 = 3 + 2 = 5, \\
\det A_5 &= \det A_4 + \det A_3 = 5 + 3 = 8, \\
\det A_6 &= \det A_5 + \det A_4 = 8 + 5 = 13, \\
\det A_7 &= \det A_6 + \det A_5 = 13 + 8 = 21, \\
\det A_8 &= \det A_7 + \det A_6 = 21 + 13 = 34, \\
\det A_9 &= \det A_8 + \det A_7 = 34 + 21 = 55, \\
\det A_{10} &= \det A_9 + \det A_8 = 55 + 34 = 89.
\end{aligned}$$

□

Svar:

(b) $\det A_{10} = 89$.