1.

den 30 september 2018 22:09

Uppgift 1. Betrakta matrisen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm en bas för nollrummet, $\mathrm{Null}(A)$.
(b) Bestäm en bas för kolonnrummet, $\mathrm{Col}(A)$.

a) Hitta nollrummet $\Leftrightarrow$ lös $A\bar{x} = \bar{0}$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \{r_3 + 2r_1\} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left\{\begin{array}{l} r_1 = -r_1 \\ r_2 + 3r_1 \end{array}\right\} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_4 = s$

$x_3 = t$

$x_2 = \frac{1}{2}(2s - t)$

$x_1 = s - \frac{1}{2}(2s - t) = t/2$

$$\Rightarrow \mathrm{Null}(A) = s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En bas är där

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

b) $\dim \mathrm{Null}(A) + \dim \mathrm{Col}\, A = 4$

$\Rightarrow$ Col A 2dim $\Rightarrow$ Välj 2 linj. ober. kolonnvektorer i A.

En bas för Col A är där

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

2.

den 30 september 2018 22:09

Uppgift 2. Låt

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm alla vektorer som ligger i båda Col(A) och Col(B). Förklara varför alla vektorer som ligger i båda Col(A) och Col(B) bildar ett delrum i $\mathbb{R}^3$ och beräkna dess dimension.

(b) Bestäm en vektor i Col(A) som inte ligger i Col(B).

a) Om $\bar{b} \in \mathrm{Col}\, A \cup \mathrm{Col}\, B$ så är

$$\bar{b} = a_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

och

$$\bar{b} = b_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow -2a_1 = b_2$

$a_1 + a_2 = b_1$

$a_1 - a_2 = b_2$

$\Rightarrow a_1 - a_2 = -2a_1$

$\Rightarrow a_2 = 3a_1$

$b_1 = 4a_1 = -2b_2$

En normalvektor till Col A ges av

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\hat{x} - 2\hat{y} - 2\hat{z}.$$

En punkt som ligger i planet är

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. $\hat{n} \cdot (\bar{x} - \bar{x}_0) = \bar{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y-1 \\ z+1 \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow -2x - 2y + 2 - 2z - 2 = 0$

$\Rightarrow -2x - 2y - 2z = 0$

P.s.s. Normal till Col B:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{x} - \hat{z}$$

en punkt som ligger i Col B är $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \cdot \end{bmatrix}$ [illegible] en punkt som ligger i Col B är (0,1,0).

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y-1\\z\end{bmatrix}=0 \Rightarrow x-z=0$$

vi har $-2x-2y-2z=0$

$$x-z=0$$

en punkt (x,y,z) som uppfyller detta är

$(1,-2,1)$.

riktningen på skärningslinjen är $\bar{v}=\hat{u}_1\times\hat{u}_2=$

$$=\begin{bmatrix}-2\\-2\\-2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\-2&-2&-2\\1&0&1\end{vmatrix}=-2\hat{x}+2\hat{z}$$

Då är

$$\text{Col}\,A\cup\text{Col}\,B=\left\{\bar{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \bar{x}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix}-2\\0\\2\end{bmatrix},\ t\in\mathbb{R}\right\}.$$

b) $\bar{x}=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$.

3.

den 30 september 2018 22:09

Uppgift 3. Låt
$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$
vara standardbasen för $\mathbb{R}^2$ och låt
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) Visa att $\mathcal{B}$ är en bas för $\mathbb{R}^2$.

(b) Bestäm koordinatvektorn $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ för vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(c) Bestäm matriser M och N sådana att
$$[\vec{x}]_{\mathcal{E}} = M\,[\vec{x}]_{\mathcal{B}} \quad \text{och} \quad [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = N\,[\vec{x}]_{\mathcal{E}}$$
för alla vektorer $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^2$.

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ är linjärt oberoende. En linjärt oberoende mängd av n vektorer i $\mathbb{R}^n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$. Då är $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, en bas för $\mathbb{R}^2$.

b) $P_{B \to S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow P_{S \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3-2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$

$[\bar{v}]_B = P_{S \to B} [v]_S = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}.$

c) $M = P_{B \to S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$N = P_{S \to B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$

4.

den 30 september 2018 22:09

Uppgift 4. En linje $y = kx + m$ ska anpassas till punkterna $(-2, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 2)$ och $(7, 6)$.

(a) Bestäm de värden på konstanterna k och m som ger bäst anpassning i minsta-kvadratmening.

(b) Rita ut linjen tillsammans med punkterna i ett koordinatsystem och illustrera vad det är som har minimerats för dessa värden på konstanterna.

a) Vi kan skriva

$$m + k x_1 = y_1$$

$$m + k x_2 = y_2$$

$$\vdots$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}}_{\bar{y}}$$

Sats: Lösningen $\bar{x}$ till $A^T A \bar{x} = A^T \bar{b}$ är minsta-kvadrat-lösningen till $A x = \bar{b}$

$$A^T A \bar{x} = A^T \bar{b} \Leftrightarrow$$

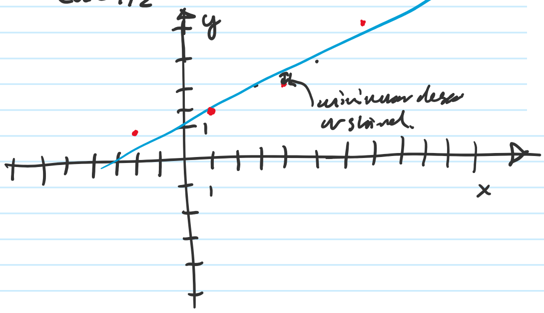
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & 11 \\ 10 & 70 & 50 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 10 & 11 \\ 1 & 7 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -18 & -9 \\ 1 & 7 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 7 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1/2 \\ 1 & 0 & 5-7/2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 3/2 \\ k = 1/2 \end{cases}$$



Uppgift 4. En linje $y = kx + m$ ska anpassas till punkterna $(-2, 1)$, $(1, 2)$, $(4, 2)$ och $(7, 6)$.

(a) Bestäm de värden på konstanterna k och m som ger bäst anpassning i minsta-kvadratmening.

(b) Rita ut linjen tillsammans med punkterna i ett koordinatsystem och illustrera vad det är som har minimerats för dessa värden på konstanterna.

5.

den 30 september 2018 22:09

Uppgift 5. Låt $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ en godtycklig, men inte specifierad linjär avbildning.

(a) Varför är dimensionen av bildrummet $\mathrm{Im}(L)$ av L högst 2?

(b) Låt $\vec{b}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^3$ som ligger utanför bildrummet $\mathrm{Im}(L)$. Beskriv hur man bestämmer de vektorer $\vec{x}$ som minimerar $\|L(\vec{x}) - \vec{b}\|$.

(c) Tillämpa b) för att hitta minsta värdet av $\|L(\vec{x}) - \vec{b}\|$, då $L(\vec{x}) = (x_1, -x_2, x_1 + x_2)$, och $\vec{b} = (1, 2, 3)$.

S. 395 i boken är bra!

a) L svarar mot en 3×2-matris A

dim Col A ≤ 2 ty n linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$.

b) Det är minsta kvadratlösningen till $L(x) = \bar{b}$, Låt A vara matrisrepresentationen av L i standardbasen.

Då ges lösningsmängden av ekvationen

$$A^T A \bar{x} = A\bar{b}.$$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$A^T A \bar{x} = A\bar{b} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \bar{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Diskussionsfrågor

den 30 september 2018 22:12

ANNAT

Här är några andra moment som är viktiga och intressanta att diskutera.

- Vad menas med en ortogonal matris?
- Vad är syftet med minstakvadratmetoden?
- Vad är sammanhanget mellan minstakvadratmetoden och (ortogonala) projektioner?

* Se boken

* Anpassa data, komma nära rätt lösning

* Felvektorn $\bar{b} - A\hat{x} = \mathrm{proj}_{\mathrm{null}\,A^T}\bar{b}$.