Intro

den 27 september 2018 13:41

En bas $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ för $\mathbb{R}^n$ kallas en ON-bas om

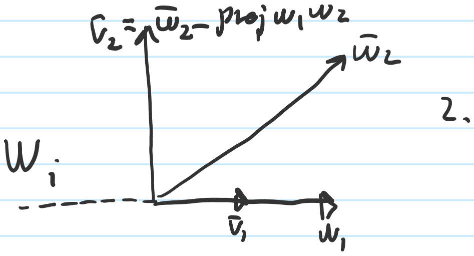
$\bar{v}_i \cdot \bar{v}_j = 0 \;\; \forall \, i,j.$

$\|\bar{v}_i\| = 1 \;\; \forall \, i.$

Dessa är fantastiska att arbeta med, men besvärliga att ta fram. För detta används Gram-Schmidts metod, som omvandlar godtyckligt valt varje icke-tomt delrum av $\mathbb{R}^n$ till en ortonormal bas. Den går till som följer:

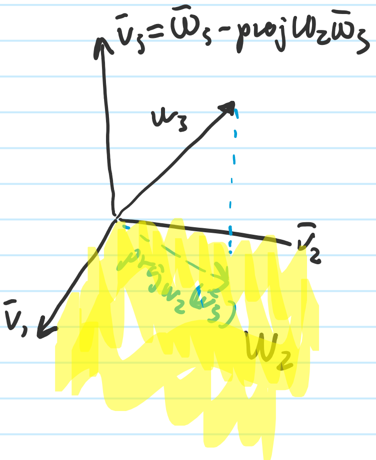
Låt $B = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$ vara en bas för $\mathbb{R}^n$.

1. Låt $\bar{v}_1 = \bar{w}_1$.
2. $\bar{v}_2 = \bar{w}_2 - \text{proj}_{w_1} \bar{w}_2$



3. $\bar{v}_3 = \bar{w}_3 - \text{proj}_{W_2} \bar{w}_3 =$

$$= \bar{w}_3 - \frac{\bar{w}_3 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 - \frac{\bar{w}_3 \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|^2} \bar{v}_2$$



etc etc...

7.11.17. forts

den 27 september 2018 13:34

Vilka koordinatmatrisen för $\bar{w} = (3,-5)$ m. avseende på S och vilka $[\bar{w}]_B$.

e) Koordinatmatrisen:

$(w)_S = (a_1, a_2)$, med $\bar{w} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 = a_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow (w)_S = (3,-5)$.

$[w]_B = P_{S\to B}[w]_S = \frac{1}{11}\begin{bmatrix}4 & 3\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix}-3\\-13\end{bmatrix}$.

7.9.7.

den 27 september 2018 13:36

Hitta den ortogonala projektionen av $\bar{x}=(1,2,0,-2)$ på $\mathbb{R}^n$-delrummet

$$W := \text{span}\left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} \right\}.$$

$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ är en ortogonal, men inte ortonormal, bas för W.

Normera

$$B_{on} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}, \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2} \right\}.$$

Då är

$$\text{proj}_W \begin{bmatrix}1\\2\\0\\-2\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{2} + \left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\\-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{5}{4}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\3\\-2\\-2\end{bmatrix}.$$

7.9.30.

den 27 september 2018 13:56

Använd gram-Schmidt för att göra den givna basen ortonormal.

$\bar{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\bar{w}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$; $\bar{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Välj $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ att utgå från.

$\bar{v}_1 = \bar{w}_1$.

$$\bar{v}_2 = \bar{w}_2 - \text{proj}_{w_1}(\bar{w}_2) = \bar{w}_2 - \frac{\bar{w}_2 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{1^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v}_3 = \bar{w}_3 - \text{proj}_{\bar{w}_2}(\bar{w}_3) = \bar{w}_3 - \frac{\bar{w}_3 \cdot \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 - \frac{\bar{w}_3 \cdot \bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|^2} \bar{v}_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \cancel{\frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{1}}^{\,0} \cdot \bar{v}_1 - \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}}{\sqrt{49+4}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{26}{\sqrt{53}} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Normera: $\bar{v}_2 = \frac{1}{\|\bar{v}_2\|} \cdot \bar{v}_2$

$\bar{v}_3 = \frac{1}{\|\bar{v}_3\|} \cdot \bar{v}_3$

Diskussionsuppgifter 7.9.D6.

den 27 september 2018 14:04

Sant eller falskt? Motivera.

A) Det finns inga linjärt beroende ortonormala mängder i R^n.

B) Det finns inga linjärt beroende ortogonala mängder i R^n.

C) Varje delmängd av R^n har en ortonormal bas.

D) Om q_1, q_2, q_3 är de ortonormala vektorerna som fås genom gram schmidt av w_1, w_2, w_3 så är q_3 * w_1 och q_3 * w_2 = 0.

D6. (a) True. Any orthonormal set of vectors is linearly independent.

(b) False. An orthogonal set may contain $\mathbf{0}$. However, it is true that any orthogonal set of nonzero vectors is linearly independent.

(c) False. Strictly speaking, the subspace $\{\mathbf{0}\}$ has no basis, hence no orthonormal basis. However, it is true that any nonzero subspace has an orthonormal basis.

(d) True. The vector $\mathbf{q}_3$ is orthogonal to the subspace span$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.

Upg 5 från hemuppgifter

den 27 september 2018 14:06

Uppgift 5. Delrummet W i $\mathbf{R}^5$ ges som lösningsrummet till det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_5 = 0 \end{cases}$$

Bestäm en ortonormal bas för W och skriv vektorn $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ som en summa av två vektorer, den ena i W och den andra i $W^\perp$.

Uppgift 6. Bestäm en ortonormal bas för $W^\perp$, där W är som i uppgift 5. Vad säger dimensionssatsen för delrum om det här fallet (uppgift 5 och 6)? Stämmer det?

Skriv systemet som matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Delrummet vi söker är lösningsrummet till $A\bar{x} = \bar{0}$:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \{r_3 - r_1\} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \{r_3 + 4r_2\} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \{r_1 - r_2\} \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Nu kan vi parametrisera:

$$\left.\begin{array}{l} x_5 = t \\ 3x_4 = -x_5 \\ x_3 = s \\ x_2 = -x_3 - x_4 \\ x_1 = -x_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ -s + 1/3\,t \\ s \\ -1/3\,t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Välj $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ som $\bar{v}_1$. Gram-Schmidt:

$$\bar{v}_2 = \bar{w}_2 - \text{proj}_{\bar{v}_1} \bar{w}_2 = \bar{w}_2 - \frac{\bar{w}_1 \bullet \bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} 2$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 0 \\ -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ortonormera sedan båda vektorerna, i gör det inte på tavla!

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v}_2 = \frac{\cancel{\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}}{\cancel{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1/3 + (1-\sqrt{3})^2 + 1/3 + 1 + 9}} = \frac{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}}{\sqrt{10 + 2/3 + 1 - 2\sqrt{3} + 3}} = \ldots \text{ osv.}$$

7.2.P4.

den 26 september 2018 11:23

Visa att om $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är injektiv och linjär och $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$ så är $C = \{T(\bar{v}_1), \dots, T(\bar{v}_n)\}$ en bas för $\mathbb{R}^n$. Dvs: Injektiva avbildningar skickar baser på baser!

En bas är en linjärt oberoende mängd som spänner upp $\mathbb{R}^n$ (i detta fall). Vi vet att en linjärt oberoende mängd av n vektorer spänner upp $\mathbb{R}^n$. Det återstår att visa att $\{T(\bar{v}_1), \dots, T(\bar{v}_n)\}$ är linjärt oberoende.

Vi vet att T injektiv $\Leftrightarrow \ker(T) = \bar{0}$.

Vi kan skriva en linjärkombination av vektorer i C som

$$\bar{0} = k_1 T(\bar{v}_1) + \dots k_n T(\bar{v}_n) = \{T \text{ linjär}\} = T(k_1 \bar{v}_1 + \dots + k_n \bar{v}_n).$$

Eftersom β är linjärt oberoende så är $k_1 \bar{v}_1 + \dots + k_n \bar{v}_n \neq \bar{0}$ om inte $k_1, \dots, k_n = 0 \ \forall k_i$. T injektiv $\Rightarrow T(k_1 \bar{v}_1 + \dots + k_n \bar{v}_n) \neq 0$ om inte $k_1, \dots k_n = 0 \ \forall k_i$. Detta är ekvivalent, av linearitet, med att

$$k_1 T(\bar{v}_1) + \dots + k_n T(\bar{v}_n) \neq \bar{0} \text{ om inte } k_1, \dots k_n = 0 \ \forall i,$$ vilket

är definitionen av linjärt oberoende. Eftersom C är linjärt oberoende och spänner upp $\mathbb{R}^n$ så är C en bas till $\mathbb{R}^n$, V.S.V.

Stud 7.9.29.

den 27 september 2018 17:27

Använd Gram-Schmidt för att göra följande bas till en ortonormal bas:

$w_1 = (1,1,1)$

$w_2 = (-1,1,0)$

$w_3 = (1,2,1)$

29. Let $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = (1,1,1)$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 - \frac{\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 = (-1,1,0) - (\frac{0}{3})(1,1,1) = (-1,1,0)$, and

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_3 - \frac{\mathbf{w}_3\cdot\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{w}_3\cdot\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 = (1,2,1) - (\tfrac{4}{3})(1,1,1) - (\tfrac{1}{2})(-1,1,0) = (\tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{3})$$

Then $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ is an orthogonal basis for R^3, and the vectors

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = (\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}), \quad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0), \quad \mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = (\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}})$$

form an orthonormal basis for R^3.

Ännu en skitsvår gammal tentauppgift (hann inte igår)

den 26 september 2018 22:34

8. (5p) Låt **I** beteckna identitetsmatrisen med n rader och n kolonner och låt **J** beteckna en matris av samma format bestående av enbart ettor. Låt **A** vara en matris, med minst lika många kolonner som rader, och sådan att

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{J} + \lambda \mathbf{I},$$

för något reellt tal λ. Visa på vilket sätt matrisen **A**:s rang beror på värdet på λ.