Intro

den 3 oktober 2018 22:56

Ortogonal diagonalisering:

Låt A vara kvadratisk. Existerar en ortogonal matris P så att

$$A = PDP^T, \quad D \text{ diagonal!}$$

Sats. 8.3.4.

a) En matris är diagonaliserbar omm den är symmetrisk ($A = A^T$)

b) Om A symmetrisk matris så är egenvektorerna i olika egenrum ortogonala mot varandra.

(existerar ortonormal bas till $\mathbb{R}^n$ av egenvektorer till A).

Ortogonal diagonalisering av matris:

1. Hitta egenvärden och tillhörande egenvektorer.
2. Gram-Schmidta fram en ortonormal bas för varje delrum.
3. Bilda P med basvektorerna som kolonner.

Kvadratiska former:

Till varje symmetrisk matris A finns en tillhörande kvadratisk form

$$Q_A(\bar{x}) = \bar{x}^T A \bar{x}.$$

Sats 8.4.1. Om A symm. $n \times n$-matris så finns ett ortogonalt variabelbyte som gör $\bar{x}^T A \bar{x} \to \bar{y}^T D \bar{y}$, där D är diagonal. Variabelbytet ges av

$\bar{x} \to P\bar{y}$, där P diagonaliserar A ortogonalt.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Def: $Q_A(\bar{x})$ kallas

positivt definit om

Def: $Q_A(x)$ kallas

positivt definit om

$$\bar{x}^T A \bar{x} > 0 \text{ for } \bar{x} \neq 0$$

negativt -ll-

$$\bar{x}^T A \bar{x} < 0 \quad x \neq 0$$

indefinit om ingen av dessa gäller.

Sats 3.4.3.

a) $\bar{x}^T A \bar{x}$ pos. def. omm. A:s egenvärden är positiva.

b) $\bar{x}^T A \bar{x}$ neg. def. omm A:s eg.värd är negativa.

c) $\bar{x}^T A \bar{x}$ indefinit, annars.

8.3.8.

den 4 oktober 2018 00:22

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Hitta P som diagonaliserar A ortogonalt och uttryck

$D = P^T A P$.

8. The characteristic polynomial of A is $(\lambda - 2)(\lambda - 7)$; thus the eigenvalues of A are $\lambda = 2$ and $\lambda = 7$. Corresponding eigenvectors are $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ respectively. These vectors are orthogonal to each other, and the orthogonal matrix $P = [\frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \quad \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ has the property that

$$P^T A P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = D$$

8.3.19.

den 4 oktober 2018 00:22

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -6 & -7 \end{bmatrix}.$$

Bestäm A^{10}.

räkna explicit

19. The matrix A has eigenvalues $\lambda = -1$ and $\lambda = 2$, with corresponding eigenvectors $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Thus the matrix $P = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ~~has the property that~~ $\cancel{P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}$. ~~It follows that~~

$$A^{10} = PD^{10}P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1024 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3070 & 3069 \\ -2046 & -2045 \end{bmatrix}$$

2013-01-07/7

den 4 oktober 2018 00:22

7. Låt A vara en symmetrisk 3×3-matris. Antag att 1 är ett egenvärde till A, och att alla vektorer $\vec{v}$ som ligger i planet $x - y + 2z = 0$ uppfyller $A\vec{v} = 2\vec{v}$. Bestäm

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(4 p)

7. Vi använder följande två egenskaper för symmetriska matriser(se kapitel 8 i kursboken):
(E1.) Varje symmetrisk matris kan diagonaliseras.
(E2.) Egenvektorer för en symmetrisk matris som hör till olika egenvärden är ortogonala.

emet Först väljer vi två linjärt oberoende egenvektorer som ligger i planet $x - y + 2z = 0$ och hör till egenvärdet 2. Vi kan t ex välja

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Enligt antagandet hör vektorerna $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$ till egenvärdet 2. Enligt (E1.) är en egenvektor $\vec{v}_3$ som hör till egenvärdet 1 ortogonal mot alla vektorer som hör till egenvärdet 2. Därför kan vi välja

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Om vi betecknar

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

har vi

$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Härav

$$A = PDP^{-1}$$
$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 11 & 1 & -2 \\ 1 & 11 & 2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Slutligen

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Diskussionsuppgifter 8.3.

den 4 oktober 2018 00:38

Sant eller falskt? Motivera.

a) Om A $n \times n$-matris så är AA^T ortogonalt diagonaliserbar.

b) Om A är en $n \times n$-diagonaliserbar matris så $\exists$ ortonormal bas för egenvektorer till A till $\mathbb{R}^n$.

c) En ortogonal matris är ortogonalt diagonaliserbar.

e) Om A är ortogonalt diagonaliserbar så har A reella egenvärden.

D1. (a) True. The matrix AA^T is symmetric and hence is orthogonally diagonalizable.

(b) False. If A is diagonalizable but not symmetric (therefore not orthogonally diagonalizable), then there is a basis for R^n (but not an orthogonal basis) consisting of eigenvectors of A.

(c) False. An orthogonal matrix need not be symmetric; for example $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$.

Ska göra sen

~~(d) True. If A is an invertible orthogonally diagonalizable matrix, then there is an orthogonal matrix P such that $P^TAP = D$ where D is a diagonal matrix with nonzero entries (the eigenvalues of A) on the main diagonal. It follows that $P^TA^{-1}P = (P^TAP)^{-1} = D^{-1}$ and that D^{-1} is a diagonal matrix with nonzero entries (the reciprocals of the eigenvalues) on the main diagonal. Thus the matrix A^{-1} is orthogonally diagonalizable.~~

(e) True. If A is orthogonally diagonalizable, then A is symmetric and thus has real eigenvalues.

8.4.6.

den 4 oktober 2018 00:40

Hitta ett ortogonalt variabelbyte som tar bort korstermerna i

$$Q = 5x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2$$

och uttryck Q i de nya variablerna.

$x = Py$

6. The given quadratic form can be expressed in matrix notation as $Q = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ where $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. The matrix A has eigenvalues $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 6$, with corresponding (orthogonal) eigenvectors $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Thus the matrix $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ orthogonally diagonalizes A, and the change of variable $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ eliminates the cross product terms in Q:

$$Q = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T(P^T AP)\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = y_1^2 + 4y_2^2 + 6y_3^2$$

8.4.31. a)

den 4 oktober 2018 00:33

Betrakta

$$A=\begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Visa att a är positivt definit och hitta en symmetrisk positivt definit matris så att $A=B^2$.

31. (a) The matrix A has eigenvalues $\lambda_1 = 3$ and $\lambda_2 = 15$, with corresponding eigenvectors $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ and $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Thus A is positive definite, the matrix $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ orthogonally diagonalizes A, and the matrix

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2} \end{bmatrix}$$

has the property that $B^2 = A$.

2016-01-13/8

den 4 oktober 2018 00:57

8. Låt A vara en symmetrisk och inverterbar matris.
   a) Bevisa att inversen A^{-1} också är en symmetrisk matris. **(2 p)**
   b) Bevisa att $(\vec{x})^T A\vec{x}$ är en positivt definit kvadratisk form om och endast om $(\vec{x})^T A^{-1}\vec{x}$ är en positivt definit kvadratisk form. **(2 p)**

8. (a): Matrisen A är symmetrisk, som ger $A = A^T$. Därför:

$$A(A^{-1})^T = A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T = I$$

om vi multiplicerar båda sidor med A^{-1}, får vi:

$$(A^{-1})^T = A^{-1}$$

som säger att A är symmetrisk.

(b): Låt B vara en symmetrisk matris. En kvadratisk form $(\vec{x})^T B\vec{x}$ är positivt definit om och endast om alla egenvärden till B är positiva.

Det betyder att för att bevisa (b), måste vi bevisa att egenvärdena till A är positiva om och endast om egenvärdena till A^{-1} är positiva. För detta ändamål skulle det vara tillräckligt att visa att λ är egenvärde till A^{-1} om och endast om $\frac{1}{\lambda}$ är egenvärde till A.

Kom ihåg att λ är ett egenvärde till A^{-1} om och endast om det finns en vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ så att $A^{-1}\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Om vi multiplicerar båda sidor av den likheten med A, får vi $\vec{v} = \lambda A\vec{v}$. Eftersom $\vec{v} \neq \vec{0}$, har vi $\lambda \neq 0$. Vi kan därför dela båda sidor av sista likheten med λ och får

$$A(\vec{v}) = \frac{1}{\lambda}\vec{v}$$

Det betyder att λ är egenvärden till A^{-1} om och endast om $\frac{1}{\lambda}$ är en egenvärde till A.