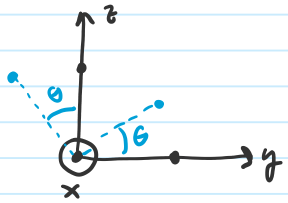
Rita rotation

den 25 september 2018 21:26

Om man vill rotera en vektor θ rad kring en axel (säg x-axeln), hur blir matrisen?



$$x \to x$$
$$y \to y\cos\theta - z\sin\theta$$
$$z \to z\cos\theta + y\sin\theta$$

$$\Rightarrow R\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$R\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\\cos\theta\\-\sin\theta\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow R = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \cos\theta & \sin\theta\\0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

$$R\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\\sin\theta\\\cos\theta\end{bmatrix}$$

Intro

den 26 september 2018 10:47

Definition: En mängd vektorer i en delmängd V till R^n sägs vara en bas för V om den är linjärt oberoende och spänner upp V. (Den minsta mängden vektorer som spänner upp V).

Sats: Om V är ett icke-tomt delrum till R^n så existerar en bas yill V som har som mest n vektorer.

Definition: Om V är ett nollskilt delrum till R^n så är V:s dimension, skrivet dim(V), definierat som antalet vektorer i en bas för V. Vi säger att noll-delrummet har dimension 0.

Dimensionssatsen: Låt A vara en mxn-matris. Då är

Rank(A) + Nullity(A) = n. (rank A = dim Col A, nullity(A) = dim ker A).

Koordinater: Om B = {v_1,… v_k} är en ordnad bas för ett delrum W av R^n och om

$$\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_k\bar{v}_k$$

för $\bar{w} \in W$ så är

$a_1, \dots, a_k$

koordinaterna för $\bar{w}$ m.a.p. B. Vi definierar

$$(\bar{w})_B = (a_1, \dots, a_k).$$

$$[\bar{w}]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}.$$

Basbytesmatris: Om $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ och $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$, $B' = \{\bar{v}_1', \dots, \bar{v}_n'\}$ är baser för $\mathbb{R}^n$, så är koordinatmatriserna för dessa relationerna

$$[\bar{w}]_{B'} = P_{B \to B'}[\bar{w}]_B, \text{ med}$$

$$P_{B \to B'} = \left[[\bar{v}_1]_{B'}, \dots, [\bar{v}_n]_{B'} \right].$$

Sats: Om P är en inverterbar $n \times n$-matris med kolonnvektorer $\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n$

hur vet vi att detta är en bas?

så är P basbytesmatrisen från $B = \{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n\}$ till standardbasen $S = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$, för $\mathbb{R}^n$.

Hur man får fram basbytesmatrisen:

1. Bilda $[B \mid B']$.
2. Gaussa till reducerad trappstegsform.
3. Matrisen kommer vara

$$[I \mid P_{B \to B'}].$$

4. Klart!

7.1.11.

den 26 september 2018 10:53

Bestäm en bas för hyperplanet $\bar{a}^{\perp}$:

a) $= (1, 2, -3)$

b) $= (2, -1, 4, 1)$.

$\bar{a}$ är normalvektor till hyperplanet $\bar{a}^{\perp}$: Går $\bar{a}^{\perp}$ genom origo så är

a) $x + 2y - 3z = 0$.

$\Rightarrow z = \frac{1}{3}(x + 2y)$

Sätt $x \to t$, $y \to s$.

Då är

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ \frac{1}{3}(t+2s) \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

Då är

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2/3 \end{bmatrix} \right\}$$

en bas för $\bar{a}^{\perp}$.

b) $2x - y + 4z + w = 0$

$\Rightarrow w = -2x + y - 4z$

Låt

$x \to t$

$y \to s$

$z \to u$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ u \\ -2t+s-4u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot t + s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Vilket ger basen

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}.$$

7.2.13.

den 26 september 2018 11:10

Låt

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

visa att

$$B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$$

utgör en bas för $\mathbb{R}^3$.

Satsen om nästan allt: A:s kolonnvektorer utgör en bas för $\mathbb{R}^n \Leftrightarrow$

$\det A \neq 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 \neq 0 \Rightarrow B$ är en bas för $\mathbb{R}^3$.

7.2.P4.

den 26 september 2018 11:23

Visa att om $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är injektiv och linjär och $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ är en bas för $\mathbb{R}^n$ så är $C = \{T(\bar{v}_1), \dots, T(\bar{v}_n)\}$ en bas för $\mathbb{R}^n$. Dvs: Injektiva avbildningar skickar baser på baser!

En bas är en linjärt oberoende mängd som spänner upp $\mathbb{R}^n$ (i detta fall). Vi vet att en linjärt oberoende mängd av n vektorer spänner upp $\mathbb{R}^n$. Det återstår att visa att $\{T(\bar{v}_1), \dots, T(\bar{v}_n)\}$ är linjärt oberoende.

Vi vet att T injektiv $\Leftrightarrow \ker(T) = \bar{0}$.

Vi kan skriva en linjärkombination av vektorer i C som

$$\bar{0} = k_1 T(\bar{v}_1) + \dots k_n T(\bar{v}_n) = \{T \text{ linjär}\} = T(k_1 \bar{v}_1 + \dots + k_n \bar{v}_n).$$

Eftersom β är linjärt oberoende så är $k_1 \bar{v}_1 + \dots + k_n \bar{v}_n \neq \bar{0}$ om inte $k_1, \dots, k_n = 0 \ \forall k_i$. T injektiv $\Rightarrow T(k_1 \bar{v}_1 + \dots + k_n \bar{v}_n) \neq 0$ om inte $k_1, \dots, k_n = 0 \ \forall k_i$. Detta är ekvivalent, av linearitet, med att

$k_1 T(\bar{v}_1) + \dots + k_n T(\bar{v}_n) \neq \bar{0}$ om inte $k_1, \dots, k_n = 0 \ \forall i$, vilket är definitionen av linjärt oberoende. Eftersom C är linjärt oberoende och spänner upp $\mathbb{R}^n$ så är C en bas till $\mathbb{R}^n$, V.S.V.

Diskussionsuppgifter 7.2.

den 26 september 2018 11:42

Sant eller falskt? Motivera!

a) Om $S := \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k\}$ linj. oberoende mängd i $\mathbb{R}^n$ så är $k \leq n$.

Sant! Sats: En linjärt oberoende mängd av n vektorer i $\mathbb{R}^n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$.

b) -||- spänner upp $\mathbb{R}^n$ så är $k \geq n$.

Sant! Samma tänk som ovan

c) -||- mängd i $\mathbb{R}^n$ och varje $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ kan uttryckas entydigt som lin-komb av vektorer i S, så är $k = n$.

Sant! Då är S en bas för $\mathbb{R}^n$, och en bas för n-dim rum har n vektorer.

d) Om $A\bar{x} = \bar{0}$ är n st ekv i n st variabler och har ∞ lsg så utgör radvektorerna inte en bas till $\mathbb{R}^n$.

Sant! $\det A$ är 0, och radvektorerna är linjärt beroende.

7.4.17

den 26 september 2018 11:51

Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hitta relationen mellan rank(A) och t.

$$A \sim \begin{Bmatrix} r_2 - r_1 \\ r_3 - t \cdot r_1 \end{Bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 1-t & 1-t^2 \end{bmatrix} \sim \{ r_3 + r_2 \} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 0 & 1-t^2+1-t \end{bmatrix}$$

$$2 - t^2 - t = (2+t)(1-t)$$

$$\Rightarrow A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 0 & (2+t)(1-t) \end{bmatrix}.$$

Så om $t=-2$ så är rank $A=2$, och om $t=1$ så är rank $A=1$

(antal nollrader).

7.11.5.

den 26 september 2018 17:14

Låt $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$. Hitta $\bar{u}$ så att $(\bar{u})_B = (7, -2, 1)$.

Vi har från definitionen

$$(\bar{u})_B = (a_1, \ldots, a_n),$$

med $(a_1, \ldots, a_n)$ så att

$$\bar{u} = a_1 \bar{v}_1 + \ldots + a_n \bar{v}_n.$$

Dvs

$$\boxed{\bar{u} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.}$$

7.11.17

den 26 september 2018 21:56

Låt S vara standardbasen för $\mathbb{R}^2$ och låt $B=\{\bar v_1, \bar v_2\}$ vara basen i vilken

$$\bar v_1 = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\ \bar v_2 = (-3,4).$$

a) Hitta basbytesmatrisen $P_{B\to S}$ genom inspektions-metoden.

Sats i intro ger

$$P_{B\to S} = [\bar v_1\ \bar v_2] = \begin{bmatrix}2&-3\\1&4\end{bmatrix}.$$

sammanfaller med inversen!

b) Ställ upp $\left[\begin{matrix}2&-3\\1&4\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{matrix}1&0\\0&1\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}4&3\\-1&2\end{matrix}\right]\cdot\frac{1}{11}$

Svar: $P_{S\to B} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix}4&3\\-1&2\end{bmatrix}.$

c) $P_{B\to S}\cdot P_{S\to B} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix}4&3\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-3\\1&4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11/11&0\\0&11/11\end{bmatrix} = I.$

d) $(w)_B = P_{S\to B}\cdot(\bar w)_S = \frac{1}{11}\begin{bmatrix}4&3\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$

$[w]_S = P_{B\to S}[w]_B = \begin{bmatrix}2&-3\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$ (som väntat).

e) Koordinatmatrisen:

$(w)_S = (a_1, a_2)$, med $\bar w = a_1\bar e_1 + a_2\bar e_2 = a_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow (w)_S = (3,-5).$

$[w]_B = P_{S\to B}[w]_S = \frac{1}{11}\begin{bmatrix}4&3\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-5\end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix}-3\\-13\end{bmatrix}.$

Ännu en skitsvår gammal tentauppgift

den 26 september 2018 22:34

8. (5p) Låt $\mathbf{I}$ beteckna identitetsmatrisen med n rader och n kolonner och låt $\mathbf{J}$ beteckna en matris av samma format bestående av enbart ettor. Låt $\mathbf{A}$ vara en matris, med minst lika många kolonner som rader, och sådan att

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{J} + \lambda\mathbf{I},$$

för något reellt tal λ. Visa på vilket sätt matrisen $\mathbf{A}$:s rang beror på värdet på λ.