1.

den 7 oktober 2018 13:40

Uppgift 1. Låt $T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ vara övergångsmatrisen från basen $\mathcal{V}$ till basen $\mathcal{W}$ av ett delrum U av $\mathbb{R}^4$.

(a) Bestäm övergångsmatrisen från bas $\mathcal{W}$ till bas $\mathcal{V}$.

(b) Låt $f\colon U \to U$ vara en linjär avbildning som uppfyller $[f]_{\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Bestäm $[f]_{\mathcal{V}}$.

(Med $[f]_{\mathcal{B}}$ menas matrisen för avbildningen f med avseende på basen $\mathcal{B}$.)

a) $T_{V\to W} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$.

$T_{V\to W} T_{W\to V} = I \Rightarrow T_{W\to V} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = T_{W\to V}$.

b) $[f]_V [\bar{x}]_V = T_{W\to V} [f]_W T_{V\to W} [\bar{x}]_V$

$\Rightarrow [f]_V = T_{W\to V} [f]_W T_{V\to W} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & -4 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ 21 & -8 \end{bmatrix} = [f]_V$.

2.

den 7 oktober 2018 13:41

Uppgift 2. Betrakta följande avbildning:

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (0, x)$$

(a) Bestäm alla egenvärden och tillhörande egenrum till F.
(b) Bestäm om matrisen till F är diagonaliserbar.

a) $[F] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad P[F] = -\lambda(1-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0, 1.$

$\Rightarrow \quad \bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\bar{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

b) algebraiska multiplicitet = geometriska multiplicitet $\Rightarrow$ matrisen är diagonaliserbar.

3.

den 7 oktober 2018 13:41

Uppgift 3. Låt

$$A = \begin{bmatrix} 3 & a & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix},$$

där a är en reell parameter.

(a) Bestäm egenvärdena till A och egenrum till varje egenvärde.
(b) För vilka val av a är A diagonaliserbar?
(c) Bestäm för $a = 0$ en inverterbar matris P och en diagonal matris D sådana att $A = PDP^{-1}$.

a) $P(\lambda) = (3-\lambda)(4-\lambda)(5-\lambda) - 2 = 0$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow$

$\lambda_1 = 3$

$\lambda_2 = 3$

$\lambda_3 = 6$

Egenvektorer:

$\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow v_2 = 0$ eller godt om $a = 0$

$v_3 = 0$ eller $-v_2$ om $a = 0$

$v_1 =$ godt

$\Rightarrow E_3 = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ eller $\text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ om $a \neq 0$.

$\lambda = 6$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & a & 0 & v_1 \\ 0 & -2 & 1 & v_2 \\ 0 & 2 & -1 & v_3 \end{array}\right] = \bar{0}$$

$\Rightarrow -3v_1 + av_2 = 0$

$v_3 = 2v_2$

$\Rightarrow \quad E_6 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ a/3 \\ 2a/3 \end{bmatrix}\right\}$ om $a \neq 0$, $\text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ annars.

b) Diagonaliserbar om $a = 0$.

c) $$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \end{array} \end{array}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 = 3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 = 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 = 6 \end{bmatrix}.$$

4.

den 7 oktober 2018 13:41

Uppgift 4. Vi har matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Hitta alla egenvärden och motsvarande egenvektorer till A.
(b) Bestäm en matris U och en diagonal matris D sådant att $A = UDU^{-1}$.
(c) Beräkna $A^{123} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

a) Egenvärden:

$(1-\lambda)(-2-\lambda) - 18 = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 - 18 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 20} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{81} = -\frac{1}{2} \pm \frac{9}{2}$

$\lambda_1 = -5$

$\lambda_2 = 4.$

Egenvektorer:

$\lambda_1 = -5$:

$\left[\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & v_1 \\ 3 & 3 & v_2 \end{array}\right] = \bar{0}$

$\Rightarrow v_1 = -v_2$

$\Rightarrow E_{-5} = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}.$

$\lambda_2 = 4$:

$\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 6 & v_1 \\ 3 & -6 & v_2 \end{array}\right] = \bar{0}$

$\Rightarrow v_1 = 2v_2$

$\Rightarrow E_4 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\Rightarrow D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

c) $A^{123}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-5)^{123}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^{123} \\ -5^{123} \end{bmatrix}.$

5.

den 7 oktober 2018 13:41

Uppgift 5. Den kvadratiska formen Q på $\mathbb{R}^2$ ges av

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2.$$

(a) Ange den symmetriska matris A som uppfyller $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$.

(b) Avgör om Q är positivt definit, negativt definit, positivt semidefinit, negativt semidefinit eller indefinit.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

b) Egenvärdena är 0.5 och 1 varför Q är positivt definit.

5.

den 7 oktober 2018 14:24

Annat

Här är några andra moment som är viktiga och intressanta att diskutera.

- Vad är sammanhanget mellan symmetriska och ortogonala matriser?
- Varför är symmetriska matriser diagonaliserbara?
- Vad är en kvadratisk form och hur klassificerar man dem?

Se boken för diskussioner om detta.