1.2.23.

den 5 september 2018 13:41

Lös systemet med Gauss-Jordanelimination:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned}\right\} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -7 & 4 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & 5 & 9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -14 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & -52 & -104 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Dvs

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

1.2.43.

den 5 september 2018 13:49

$$\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 3x-y+5z=2 \\ 4x+y-14z=a+2 \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & -14 & a+2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & -10 \\ 0 & -7 & -26 & a-14 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & -22 & a-4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & -22 & a-4 \end{array}\right]$$

visar att

$$z = \frac{4-a}{22}$$

sätter vi in i ovan är det tydligt att y och x är unikt bestämda av valet av a. Har de ett entydigt värde är systemet väldefinierat $\forall a$.

Hur skulle en liknande uppgift se ut med a som kan ge obestämt / icke konsistent system?

Stud 101129/1

den 5 september 2018 14:26

1. Betrakta det linjära ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - x_3 + x_4 = 8, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 9. \end{cases}$$

a) Använd Gausselimination för att överföra totalmatrisen för ekvationssystemet till reducerad trappstegsform.

b) Ange lösningmängden för ekvationssystemet med hjälp av den reducerade totalmatrisen.

c) Förklara hur det kommer sig att det finns lösningar till systemet även om man ändrar högerledet.

1.2. 2010-11-29

1. a) Totalmatrisen för systemet ges av

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

och med hälp av Gauss-Jordans metod kan vi överföra den till övertriangulär form:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 - r_1 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 + r_2 \\ -r_2 \\ r_3 + r_2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 10 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} r_1 - \frac{1}{2}r_3 \\ r_2 + \frac{1}{2}r_3 \\ \frac{1}{2}r_3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

b) Eftersom det är en av kolonnerna i koefficientmatrisen som inte har en ledande ett får vi införa en parameter t och sätta $x_3 = t$. De övriga variablerna kan nu direkt lösas ut från de tre ekvationerna som motsvarar raderna i matrisen:

$x_1 = 3 + x_3 = 3 + t, \quad x_2 = 4 - 2x_3 = 4 - 2t \quad$ och $\quad x_4$

Lösningsmängden ges därmed av

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + t \\ 4 - 2t \\ t \\ 5 \end{bmatrix} : t \text{ reellt tal} \right\}.$$

c) Eftersom det finns en ledande etta i varje rad i koefficientmatrisen kan det aldrig bli en ledande etta i högerledet, oavsätt hur det ser ut. Vi kan därmed finna lösningar för alla möjliga högerled precis som för högerledet $(7, 8, 9)$.

Stud 100913/1 om tid

den 5 september 2018 14:18

1. För varje tal a har vi ekvationssystemet i tre okända x, y och z som ges av

$$(\star)\quad \begin{cases} (a-3)y &= 1, \\ 2x - ax + ay - 3y + 2z - az &= 1, \\ (4-2a)x + (2a-6)y + 5z - 2az &= 3. \end{cases}$$

Visa att ekvationssystemet $(\star)$ har en unik lösning om och endast om $a \neq 2$ och $a \neq 3$. Lös sedan ekvationssystemet $(\star)$ då $a = 2$ med hjälp av radoperationer på totalmatrisen för systemet.

Skriv systemet som matris:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & a-3 & 0 & 1 \\ 2-a & a-3 & 2-a & 1 \\ 2(2-a) & 2(a-3) & 5-2a & 3 \end{array}\right]$$

$a=2$ ger alla x-beroenden försvinner $\rightarrow$ x godtycklig $\rightarrow$ ej entydig lösning

$a=3$ ger alla y-beroenden försvinner $\rightarrow$ $0=1$ istället $\rightarrow$ ej entydig lsg

Antag $a \neq 3, a \neq 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & a-3 & 0 & 1 \\ 2-a & a-3 & 2-a & 1 \\ 2(2-a) & 2(a-3) & 5-2a & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & a-3 & 0 & 1 \\ 2-a & 0 & 2-a & 0 \\ 2(2-a) & 0 & 5-2a & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & a-3 & 0 & 1 \\ 2-a & 0 & 2-a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & a-3 & 0 & 1 \\ 2-a & 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (a-2)/(2-a) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(a-3) \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

Väldefinierat $\forall\, a \neq 2,5.$

3.1.1.

den 5 september 2018 14:42

Lös matrisekvationen

$$\begin{bmatrix} a-b & b+a \\ 3d+c & 2d-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

När är 2 matriser lika?

Jo, då alla dess termer är lika

$\Rightarrow a-b = 8 \Rightarrow b = a-8$

$b+a = 1$

$3d+c = 7$

$2d-c = 6 \Rightarrow c = 2d-6$

$\Rightarrow (a-8)+a = 1$

$\Rightarrow a = 9/2 \Rightarrow \{b = a-8\} \Rightarrow b = 9/2 - 8$

$\Rightarrow 3d + 2d - 6 = 7$

$\Rightarrow d = 13/5 \Rightarrow \{c = 2d-6\} \Rightarrow c = 26/5 - 6$

3.1.23.

den 5 september 2018 15:01

Hitta h, om det finns, så att

$$\underbrace{[h\ 1\ 1]}_{\bar{a}^T}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -3\end{bmatrix}}_{B}\underbrace{\begin{bmatrix}h\\1\\1\end{bmatrix}}_{\bar{c}} = 0.$$

Kan börja med matris multiplikation, säg $B\bar{c}$:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}h+1\\3\\-1\end{bmatrix} = \bar{d}$$

$$\bar{a}^T\bar{d} = [h\ 1\ 1]\begin{bmatrix}h+1\\3\\-1\end{bmatrix} = h(h+1)+3-1 = 0$$

$$\Rightarrow h^2+h+2=0$$

$$\Rightarrow h = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}-\frac{8}{4}} = \boxed{-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

Frågor?

Stud 3.1.11.

den 5 september 2018 14:50

Uttryck systemet på formen $A\bar{x}=\bar{b}$:

a) $$\underbrace{\begin{matrix}2x_1-3x_2+5x_3\\ 9x_1-x_2+x_3\end{matrix}}_{A\bar{x}} \begin{matrix}=\\=\end{matrix} \underbrace{\begin{matrix}7\\-1\end{matrix}}_{\bar{b}}$$

$\bar{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ Identifiera antal x_i, $\bar{x}$ så gett som alltid vektor

$\bar{b}=\begin{bmatrix}7\\-1\end{bmatrix}$

$A=?$

$A=\begin{bmatrix}\text{rad}_1\\ \text{rad}_2\end{bmatrix}$

$[\text{duth}]\begin{bmatrix}d\\u\\t\\t\end{bmatrix}=d^2+u^2+2t^2$

$[\text{rad }1]\cdot\bar{x}=2x_1-3x_2+5x_3$

$[\text{rad }2]\cdot\bar{x}=9x_1-x_2+x_3$

$\Rightarrow [\text{rad }1]=[2\ \ -3\ \ 5]$

$[\text{rad }2]=[9\ \ -1\ \ 1]$

$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}2&-3&5\\9&-1&1\end{bmatrix}$

$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$

$\bar{b}=\begin{bmatrix}7\\-1\end{bmatrix}$

b) Studenterna gör denna. Samma princip ger

$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-3&4\\1&5&-2\end{bmatrix}$

$\bar{x}=[x_1\ \ x_2\ \ x_3]^T$

$\bar{b}=[4\ \ 3\ \ -2]^T$

Stud 120910/1

den 5 september 2018 15:17

1. Betrakta ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 17x & - & 13y & + & 2z & - & 7w & = & 5, \\ 13x & + & 6y & - & z & + & 11w & = & 3. \end{array}\right. \qquad (*)$$

a) Bestäm en lösning av systemet för vilken $x = 0$ och $w = 1$.

b) Förklara varför systemet (*) har oändligt många lösningar.

c) Finns det en lösning av systemet för vilken $y = -2x$ och $w = -3x$?

Låt $x=0$, $w=1$. Då har vi systemet

$$\begin{array}{l} -13y + 2z = 12 \\ 6y - z = -8 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -13 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & -4 \\ 6 & -1 & -8 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -32 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 32 \end{array}\right]$$

$\Leftrightarrow y = 4 \,/\, z = 32$

b) Antingen har ett system med fler variabler än ekv ∞ eller inga lsg, vi har hittat 1 lsg så det finns ∞ st.

c)

1. a) Med $x = 0$ och $w = 1$ har vi ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -13y & + & 2z & - & 7 & = & 5, \\ 6y & - & z & + & 11 & = & 3. \end{array}\right.$$

Detta ekvationssystem, i två okända, skriver vi som matrisekvationen

$$\begin{bmatrix} -13 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}.$$

Matrisen är inverterbar, med determinant 1, och vi har att systemet har den unika lösningen

ten

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -6 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 32 \end{bmatrix}.$$

b) Ett ekvationssystem i fler okända än antalet ekvationer har antingen ingen lösning, eller oändligt många lösningar. Vi har hittat en lösning, nämligen $(0, 4, 32, 1)$, och därför finns det oändligt många lösningar.

c) Med $y = -2x$ och $w = -3x$ blir systemet

$$\left\{\begin{array}{l} 17x + 26x + 2z - 21x = 64x + 2z = 5, \\ 13x - 12x - z - 33x = -32x - z = 3. \end{array}\right.$$

Då $-2 \cdot 3 = -6$ och inte 5, har systemet ingen lösning.