Diskussion 6.4. ist för egenvärden

den 25 september 2018 21:14

D1: Är påståendena sanna eller falska? Motivera:

a) Om $T_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ och $T_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ är linjära avbildningar, och $T_1 \neq$ injektiv, så är inte $T_2 \circ T_1$ injektiv.

Sant: Om $T_1 \neq$ inj så $\exists \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n : T(\bar{u}) = T(\bar{v})$ om $\bar{u} \neq \bar{v}$.

Då är $T_2 \circ T_1(\bar{u}) = T_2(T_1(\bar{u})) = T_2(T_1(\bar{v})) = T_2 \circ T_1(\bar{v})$.

b) -ll- , $T_1 \neq$ surjektiv, så är inte $T_2 \circ T_1$ surjektiv.

Falskt, om T_2 är surjektiv så kan

$T_2 \circ T_1$ vara surjektiv.

c) -ll- $T_2 \neq$ injektiv så är inte $T_2 \circ T_1$ injektiv.

Falskt, om $\operatorname{ran}(T_1) \cap \ker(T_2) = \bar{0}$ så är $T_2 \circ T_1$ injektiv.

d) -ll- $T_2 \neq$ surjektiv så är inte $T_2 \circ T_1$ surjektiv.

Sant. $\operatorname{ran}(T_1) \subseteq \mathbb{R}^m$, så $\operatorname{ran}(T_2 \circ T_1) \subseteq \operatorname{ran}(T_2)$.

2.

den 25 september 2018 21:15

Uppgift 2. Den här uppgiften handlar om linjära avbildningar från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ och deras standardmatriser.

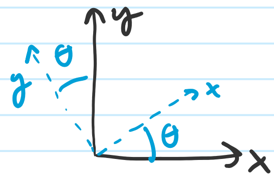
(a) Låt $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara rotationen kring origo med en vinkel på $90°$ ($\pi/2$ radianer) moturs. Bestäm standardmatrisen, A, för T_1.

(b) Låt $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara speglingen i linjen $y = -x$. Bestäm standardmatrisen, B, för T_2.

(c) Bestäm standardmatrisen, C, för sammansättningen $T_2 \circ T_1$.

(d) Avbildningen $T_2 \circ T_1$ är en spegling. I vilken linje? Motivera ditt svar.

a)



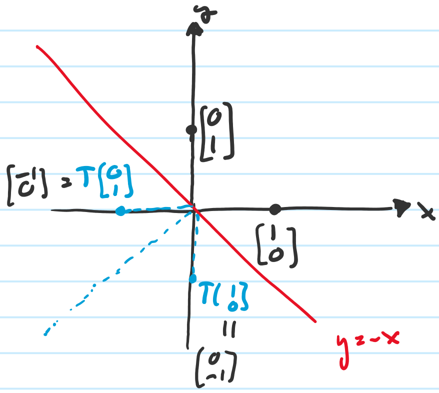
$y \to y\cos\theta + x\sin\theta$

$x \to x\cos\theta - y\sin\theta$

$$\Rightarrow A\bar{x} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\theta = 90° \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b)



Matrisen ges av

$$\left[T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \; T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $C = T_2 \circ T_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $x \to -x$, $y \to y$. Dvs spegling i y-axeln.

3.

den 25 september 2018 21:16

Uppgift 3. Den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uppfyller

$$T\left(\begin{bmatrix}5\\10\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\11\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$$

(a) Bestäm matrisen A som hör till T.
(b) Kontrollera att A är sin egen invers.

a) Vi har av teorin om linjära avbildningar:

$$T\begin{bmatrix}5\\10\end{bmatrix} = 5\cdot T\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix} = 5\cdot T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = T\left[\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right] = T\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - 2T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\left(\begin{bmatrix}2\\11\end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-4\\3\end{bmatrix}$$

så

$$A = \left[T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \; T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right] = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-4 & 3\\3 & 4\end{bmatrix}.$$

b) $$A^2 = \frac{1}{25}\begin{bmatrix}-4 & 3\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & 3\\3 & 4\end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix}16+9 & 0\\0 & 16+9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

4.

den 25 september 2018 21:17

Uppgift 4. Den linjära avbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ges av

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x+y \\ x-2y \\ y-x \end{bmatrix}.$$

(a) Bestäm matrisen för T.
(b) Avgör om någon av vektorerna

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ligger i bildrummet $\operatorname{im}(T)$.

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+y \\ x-2y \\ y-x \end{bmatrix}$$

a) $A = \left[T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].$

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) $\bar{b} \in Im(T) \Leftrightarrow$ ekvationen $A\bar{x} = \bar{b}$ har en lösning.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

visar att

$$\begin{bmatrix}2\\3\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} \Rightarrow x=1,\ y=-1. \quad \Rightarrow \begin{bmatrix}2\\3\\-2\end{bmatrix} \in \mathrm{Im}(T).$$

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & -2\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$x=0,\ y=1$ ger. $\Rightarrow \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} \in \mathrm{Im}(T).$

5.

den 25 september 2018 21:17

Uppgift 5. En avbildning f sökes som uppfyller

$$f\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad f\left(\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad f\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad f\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

(a) Varför finns det ingen sådan avbildning som är linjär?

(b) Hur måste man anpassa det sista värdet, $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$, så att en sådan linjär avbildning f finns?

(c) Finn standardmatrisen till f (om det sista värdet anpassas som i uppgift b).

a) $f\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix} = f\left[\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right] = \{\text{antag } f \text{ linjär}\} =$

$= f\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} - 3f\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - 3\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-3\\-3\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$

Då kan f inte vara linjär.

b) $f\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-3\\-3\end{bmatrix}.$

c)

$$f\left[\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Reducera: $\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0\\2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \sim \left\{\begin{matrix}r_2-2r_1\\r_3-r_1\end{matrix}\right\} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0\\0 & -3 & 1 & -2 & -1 & 1\\0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right] \sim$

$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0\\0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0\\0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right]$

c) $A = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$

Diskussionsfrågor

den 25 september 2018 21:18

ANNAT

Här är några andra moment som är viktiga och intressanta att diskutera.

- ~~Vad är den geometriska tolkningen av egenvektorer till en linjär avbildning? Till exempel till egenvärdena 0 eller 1?~~
- ~~Varför är egenvektorer till olika egenvärden linjärt oberoende?~~
- Vad menas med linjär avbildning? Är varje linjär avbildning från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^m$ en matrisavbildning? Hur många rader och kolonner har avbildningens matris?
- Vad menas med en avbildnings nollrum/kärna och bildrum? Vilka vektorer utgör nollrumm och bildrum till en rotation och till en spegling?

Se boken