Intro

den 10 oktober 2018 20:30

En mängd är ett vektorrum om den uppfyller 10 kriterier som jag inte tänker skriva ner. R^n är det kanoniska exemplet, men det finns MÅNGA vektorrum. Det är legitimt att säga att linjär algebra är läran om vektorrum, och allt vi talat om kring matriser etc. är bara ett kanoniskt exempel av detta.

De välkända begreppen bas, linjärkombination, linjärt oberoende, linjärt hölje etc har precis samma betydelse i ett generellt vektorrum.

Sats: Om W är en icke-tom mängd vektorer i ett vektorrum V så är W ett delrum av V om och endast om W är slutet under skalärmultiplikation och addition.

Det finns en massa olika rum som kvalificerar sig som vektorrum. Ett exempel är P_n, vilket är ett n+1-dimensionellt vektorrum av alla polynom av grad n eller mindre. Basvektorerna är då polynom, och standardbasen är $(1, x, x^2)$.

Isomorfi: En isomorfi är en linjär avbildning mellan två vektorrum som är injektiv och surjektiv. Dessa är mycket mycket häftigare i allmänna vektorrum, som ni kommer få se. Det innebär att man kan hoppa mellan vektorrum och jobba i det vektorrum som är enklast, och sedan transformera tillbaka med hjälp av inversen till isomorfin som man vet finns.

Sats: Alla n-dimensionella vektorrum är isomorfa mot R^n. Detta är ett oerhört, oerhört kraftfullt resultat som innnebär att man med en isomorfi kan överföra ett problem i vilket n-vektorrum som helst, och få det att handla om matriser och vektorer istället. Dessa är ju jättetrevliga att jobba med!

Jag kommer inte räkna så många uppgifter den här övningen utan kommer låta er räkna rätt mycket själva och sen gå runt och hjälpa er. Detta då jag tror att det kommer krävas en del förklaringar av vad som händer, som jag tror är bäst att göra enskilt.

9.1.9.

den 10 oktober 2018 20:41

Vilka av följande är delrum för P_2?

a) $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0 = 0\} := A$

b) $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0 + a_1 + a_2 = 0\} := B$

c) $\{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{N}\} := C.$

Diskutera en kort stund med bänkgrannen.

Sats: Delrum omm sluten under addition och skalärmultiplikation.

a) $\underbrace{(\cancel{a_0}^{0} + a_1x + a_2x^2)}_{\in A} + \underbrace{(\cancel{b_0}^{0} + b_1x + b_2x^2)}_{\in A} = (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 \in A.$

$k\cdot(a_1x + a_2x^2) = ka_1x + ka_2x^2 \in A.$

b) $\underbrace{(a_0 + a_1x + a_2x^2)}_{\in B} + \underbrace{(b_0 + b_1x + b_2x^2)}_{\in} = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2$

$= c_0 + c_1x + c_2x^2 \Rightarrow c_0 + c_1 + c_2 = (a_0+b_0) + (a_1+b_1) + (a_2+b_2) =$

$= \underbrace{(a_0 + a_1 + a_2)}_{0} + \underbrace{(b_0 + b_1 + b_2)}_{0} = 0 \Rightarrow (c_0 + c_1x + c_2x^2 \in B.$

$k(a_0 + a_1x + a_2x^2) = ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 := P$

$k(a_0 + a_1 + a_2) = 0 \Rightarrow P \in B.$

c) Låt $k = \sqrt{2}$. Då är

$k(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \sqrt{2}a_0 + \sqrt{2}a_1x + \sqrt{2}a_2x^2 = b_0 + b_1x + b_2x^2 \notin C.$

Då är C inte ett delrum till P_2.

9.1.21.

den 10 oktober 2018 21:08

Låt

$\bar{p}_1 = 1+2x+x^2$

$\bar{p}_2 = 2+9x$

$\bar{p}_3 = 3+3x+4x^2.$

$\bar{p} = 2+17x-3x^2.$

Visa att $\{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3\}$ är en bas för P_2 och uttryck $\bar{p}$ som en linjärkombination av $\bar{p}_1, \bar{p}_2$ och $\bar{p}_3$.

Vi vill visa att de är linjärt oberoende eftersom en mängd av n st linj. ober. vektorer i ett n-dim vektorrum spänner upp rummet.

Använd den naturliga transformationen

$$T: P_2 \to \mathbb{R}^3$$

$$a_0+a_1x+a_2x^2 \to \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

bilda $G := \Big[[p_1]_{\mathbb{R}^3} \; [p_2]_{\mathbb{R}^3} \; [p_3]_{\mathbb{R}^3} \Big] =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det G = 1 \cdot [27-6] + 4[9-4] \neq 0.$

Då är $\{[p_1]_{\mathbb{R}^3}, [p_2]_{\mathbb{R}^3}, [p_3]_{\mathbb{R}^3}\} := B$ en bas för $\mathbb{R}^3$,

och av den naturliga inversen

$$T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to P^2$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \to a_0+a_1x+a_2x^2$$

så är $\{\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3\}$ en bas för P_2.

Sök: $G = P_{B\to E}$.

$$\Rightarrow P_{E\to B} = G^{-1} = \ldots = \begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix},$$

$$P_{E\to B}\,[\bar{p}]_{\mathbb{R}^3} = \begin{bmatrix} -36 & 8 & 21 \\ 5 & -1 & -3 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 17 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -72+8\cdot 17-3\cdot 21 \\ 10-17+9 \\ 18-34+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow [\bar{p}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Detta är koefficienterna av linjärkombinationen, använd T^{-1} igen:

$$\bar{p} = b_0\bar{p}_1 + b_1\bar{p}_2 + b_2\bar{p}_3$$

Koll

$$1\bar{p}_1 + 2\bar{p}_2 - \bar{p}_3 = 1\cdot(1+2x+x^2) + 2(2+9x) - 1(3+3x+4x^2) =$$

$$= (1+4-3) + (2+18-3)x + (1-4)x^2 =$$

$$= 2 + 17x - 3x^2 = \bar{p}$$ Magi!!!!!!!!

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n_E \arrow[r, shift left, "P_{E\to B}"] \arrow[d, shift left, "T^{-1}"] & \mathbb{R}^n_B \arrow[l, shift left, "P_{B\to E}"] \arrow[d, shift right, "T^{-1}"'] \\ P_{2_E} \arrow[u, shift left, "T"] & P_{2_B} \arrow[u, shift right, "T"'] \end{tikzcd}$$

JOBBA SJÄLVA

den 10 oktober 2018 21:08

9.3.19.

den 10 oktober 2018 20:29

a) Låt $T: P_1 \to P_2$; $T(p(x)) = xp(x)$.

Vilka av följande om några ligger i range(T)?

$q_1(x) = 1 + x + x^2$ Nej, tg lägsta graden minste vara 1.

$q_2(x) = x + 5x^2$ Ja! $T(1+5x) = x + 5x^2$.

$q_3(x) = 0$ Ja! $T(0) = 0$.

b) Låt $T: P_2 \to \mathbb{R}^2$; $T(p) = (p(-1), p(1))$. Vilka om några av följande ligger i ker(T)?

$q_1 = x^2 - 1$ Ja! $T(q_1) = (1-1, 1-1) = 0$

$q_2 = x^2 + 1$ Nej! $T(q_2) \neq 0$

$q_3 = 0$ Ja! $T(q_3) = 0$.

9.3.38.

den 10 oktober 2018 20:28

Betrakta den naturliga isomorfin $T: P_2 \to \mathbb{R}^3$.

$$T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

a) Vilken vektor $\bar{p} \in P_2$ motsvarar

$\bar{v} = (2, 3, -1)$ under denna isometri?

Svar: $\bar{p} = 2 + 3x - x^2$

b) Hitta motsvarande bas i $\mathbb{R}^3$ till delrummet $P_1 = \text{span}\{1, x\}$ till P_2.

$$B = \{T(1), T(x)\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

c) Hitta standardmatrisen i $\mathbb{R}^3$ för den linjära operatorn

$Q(p(x)) = p(x+1)$ på P_2.

Vad händer med basvektorerna?

$Q(1) = 1$

$Q(x) = x + 1$

$Q(x^2) = x^2 + 2x + 1$

$$[T(Q(1)) \;\; T(Q(x)) \;\; T(Q(x^2))] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

JOBBA SJÄLVA

den 10 oktober 2018 21:08

En sista skitsvår tentauppgift

den 10 oktober 2018 20:51

8. (5p) Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en avbildning. Vi säger att $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ är en *fixpunkt* om $f(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$. En kvadratisk matris $\mathbf{A}$ med egenskapen att $|\mathbf{A}\vec{x}| > |\vec{x}|$ för alla $\vec{x} \neq \vec{0}$ säges vara *expansiv*. Givet $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ och en expansiv $n \times n$-matris $\mathbf{A}$, definiera en avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ genom att låta $f(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{b}$. Visa att f har en fixpunkt.

Maila mig om ni löser den så blir det kaffe och bulle!