Intro

den 10 oktober 2018 22:16

Idag ska vi räkna några (ganska svåra) uppgifter jag valt ut från gamla tentor.

Nämn att det finns en sista jättesvår hemuppgift som kan innebära kaffe och bulle!

2016-10-21/6

den 10 oktober 2018 22:42

6. En matris A kallas för *skevsymmetrisk* om $A^T = -A$. Antag att A är en skevsymmetrisk $n \times n$-matris. Bestäm alla vektorer $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$ så att $(A\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$. **(6 p)**

Lsg:

$(A\bar{v})\cdot\bar{v} = (A\bar{v})^T\bar{v} = \bar{v}^T A^T \bar{v} = \bar{v}^T(-A)\bar{v} = -\bar{v}^T A\bar{v}$.

$\bar{v}\cdot A\bar{v} = \bar{v}^T A \bar{v}$

$\bar{v}^T A\bar{v} = -\bar{v}^T A\bar{v} \Rightarrow \bar{v} A\bar{v} = \bar{0} \ \forall \bar{v}$. $\bar{v}$ kan alltså vara godtycklig.

2017-03-13/6

den 10 oktober 2018 22:40

6. Multiplikationstabellen M definieras som den 9×9-matris vars element ges av formeln $M_{ij} = i \cdot j$, där $i, j = 1, 2, \ldots, 9$.

   a) Bestäm rangen av matrisen M. **(2 p)**

   b) Visa att talet $1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2 = 285$ är ett egenvärde till matrisen M. Vad är motsvarande egenvektorer? Bestäm därefter alla övriga egenvärdena till M (egenvektorer behöver inte anges). **(4 p)**

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots \\ 3 & 6 & 9 & 12 & \cdots \\ 4 & 8 & 12 & 16 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

a) Varje rad är en multipel av den första $\Rightarrow$ rangen är 1.

b) Betrakta vektorn

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Då är

$$M\bar{v} = \begin{bmatrix} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots \\ 2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 \cdots) \\ 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots) \\ \vdots \end{bmatrix} = 285 \cdot \bar{v}.$$

Vi vet att $\dim \operatorname{null}(M) + \operatorname{rang}(M) = 9$, av dimensionssatsen.

Då är $E_0 = \operatorname{null}(M)$ 8-dimensionellt $\Rightarrow$ E_1 är endimensionell.

Låt $B := \{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_8\}$ vara en bas för $E_0 = \operatorname{null}(M)$, och

låt $C := \{\bar{v}\}$. Då är $B \cup C$ en bas för $\mathbb{R}^9$ eftersom egenvektorer

Låt $C := \{ \bar{v} \}$. Då är $B \cup C$ en bas för $\mathbb{R}^9$ eftersom egenvektorer tillhörande olika egenvärden är linjärt oberoende.

Stud 2017-03-13/5

den 10 oktober 2018 22:40

5. Delrummet V i $\mathbb{R}^3$ ges av ekvationen $x - 2y + z = 0$. Låt $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildningen

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y + 3z \\ 2x - 4y + 6z \\ 3x - 6y + 9z \end{bmatrix}.$$

a) Hitta en bas $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ till $\mathbb{R}^3$ sådan att V är det linjära höljet av $\vec{u}$ och $\vec{v}$. **(2 p)**

b) Visa att $T(\vec{x})$ ligger i V för alla $\vec{x}$ som ligger i V. **(2 p)**

c) Bestäm en matrisrepresentation för avbildningen T med avseende på basen $\mathcal{B}$ av $\mathbb{R}^3$. **(2 p)**

a) $x - 2y + z = 0$

$\Rightarrow z = 2y - x$

Låt $x \to t$, $y \to s$:

I planet gäller

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ 2s - t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \Rightarrow \bar{u}, \bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Behöver en linjärt oberoende vektor till $\bar{u}$ och $\bar{v}$. T.ex $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Svar: $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$

b) Låt $\bar{x} \in V$. Då är $\bar{x} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

$$T(\bar{x}) = \begin{bmatrix} x - 2y + 3z \\ 2x - 4y + 6z \\ 3x - 6z + 9z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a + 4b \\ 2(-2a + 4b) \\ 3(-2a + 4b) \end{bmatrix} = (-2a + 4b) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \in V$, ty $1 - 2 \cdot 2 + 3 = 0$.

V.S.V.

c) $A = \begin{bmatrix} T(\bar{u}_1) & T(\bar{u}_2) & T(\bar{u}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ -4 & 8 & 6 \\ -6 & 12 & 9 \end{bmatrix}$

Stud 2017-01-11/5

den 10 oktober 2018 22:43

5. Låt Q vara den kvadratiska form på $\mathbb{R}^{2n}$ som är definierad genom

$$Q(x_1, \ldots, x_{2n}) = x_1x_{2n} + x_2x_{2n-1} + \cdots + x_nx_{n+1}.$$

a) Bestäm den symmetriska matrisen som tillhör Q. **(2 p)**

b) Avgör karaktären av Q: positivt/negativt (semi)definit eller indefinit? **(4 p)**

5. a) Symmetriska matrisen ges av:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dvs $A = (a_{ij})$, där $a_{ij} = 1/2$ för

$(i,j) = (2n,1), (2n-1,2), (2n-2,3), \cdots, (2, 2n-1), (1, 2n)$

trick

b) Man kan enkelt konstatera att

$$4x_ix_j = [(x_i + x_j)^2 - (x_i - x_j)^2]$$

och att

trick igen

$$4Q(x) = [(x_1+x_{2n})^2-(x_1-x_{2n})^2]+\ldots+[(x_n+x_{n+1})^2-(x_n-$$

Dvs efter en rotation med ansatsen $y_1 = x_1 + x_{2n}$, ... $y_n = x_n + x_{n+1}$, samt $y_{n+1} = x_1 - x_{2n}$, ... $y_{2n} = x_n - x_{n+1}$, har vi att kvadratiska formen är indefinit, då den skrivs som

$$4Q(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \sum_{i=n+1}^{2n} y_i^2.$$

4. En linjär avbildning $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definieras av formeln $L(\vec{x}) = \vec{e}_3 \times \vec{x}$ för alla vektorer $\vec{x}$. Här är $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och med $\times$ menas kryssprodukten.

   a) Bestäm standardmatris till $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. **(2 p)**

   b) L transformerar planet $x_3 = 0$ till sig själv. Beskriv geometrisk hur vektorer i detta plan transformeras. **(1 p)**

   c) Bestäm alla egenvärden och tillhörande egenvektorer till L. **(3 p)**

4. a) Kryssprodukten beräknas och vi får

$$L(x) = \vec{e}_3 \times x = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6.

Standardmatrisen ges då av hur L verkar på standardbasen i rummet

$$L(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad L(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad L(\vec{e}_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

och därmed är dess matris

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Avbildningen skickar alla vektorer till planet $x_3 = 0$, eftersom tredje komponenten i Lx är lika med noll. Vektorer i planet $x_3 = 0$ ges av $(x_1, x_2, 0)$ som avbildas på $(-x_2, x_1, 0)$ dvs (x_1, x_2) avbildas på $(-x_2, x_1)$ som tydligen är en rotation och vi kan skriva

$$\begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \pi/2 & -\sin \pi/2 \\ \sin \pi/2 & \cos \pi/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

som är en rotation med 90°, dvs $\pi/2$.

c)

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda^2+1) = 0 \qquad \text{ger} \qquad \lambda = 0,$$

så L har bara ett egenvärde $\lambda = 0$. Det betyder att motsvarande egenvektorer ges av de nollskilda vektorerna i $\ker(L)$. Matrisen till L har rang 2, som ger att $\ker(L)$ har dimension 1. Vi kan konstatera att egenvektorer till L ges av $\alpha\vec{e}_3$ där α är en nollskild skalär.

En sista skitsvår tentauppgift

den 10 oktober 2018 20:51

8. (5p) Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en avbildning. Vi säger att $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ är en *fixpunkt* om $f(\vec{x}_0) = \vec{x}_0$. En kvadratisk matris $\mathbf{A}$ med egenskapen att $|\mathbf{A}\vec{x}| > |\vec{x}|$ för alla $\vec{x} \neq \vec{0}$ säges vara *expansiv*. Givet $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ och en expansiv $n \times n$-matris $\mathbf{A}$, definiera en avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ genom att låta $f(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x} + \vec{b}$. Visa att f har en fixpunkt.

Maila mig om ni löser den så blir det kaffe och bulle!