Nämn Pòlyas fyra steg

den 2 september 2018 13:57

1.

den 2 september 2018 13:53

Uppgift 1. Punkterna P, Q och R har koordinater

$$P = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix}4\\6\\-1\end{bmatrix},$$

och planet Π ges av ekvationen

$$2x - y + 2z = 3.$$

(a) Bestäm en parameterform till linjen L som går genom P och Q.
(b) Går linjen L genom punkten R?
(c) Bestäm skärningen mellan Π och L.
(d) Bestäm en ekvation för planet som är vinkelrät mot L och går genom P.

a) Fixera P och beräkna $\overline{PQ} := \overline{w}$:

$$\overline{w} = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

Då kan vi skriva:

$$L = P + \overline{w} \cdot t, \; t \in \mathbb{R}$$

med värden:

$$\boxed{L = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix}}$$

b) $R \overset{!}{=} P + t \cdot \overline{w}$, för något t. $\Leftrightarrow \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\6\\-1\end{bmatrix}$.

måste vara

Betrakta valfri komponent av ekvationen (väljer z-komponenten) för att se att $t \overset{!}{=} -1$. Men

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\4\\-1\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}4\\6\\-1\end{bmatrix}, \text{ så } \boxed{\text{nej, } R \notin L.}$$

c) I L:

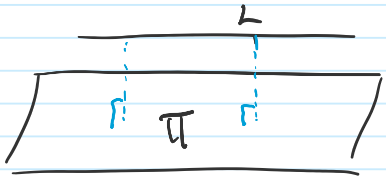
$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 - 2t\\2 - 2t\\0 + t\end{bmatrix} \quad (1)$$

Sätt in i Π:

$$2x - y + 2z = 3 \Leftrightarrow \{(1)\} \Leftrightarrow 2(1-2t) - (2-2t) + 2t = 3 \Leftrightarrow$$

$2-\cancel{4t}-2+2t+\cancel{2t}=3 \iff 0=3$

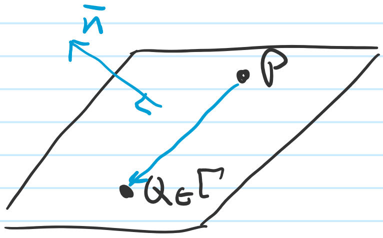
Vad innebär detta? Ingen skärningspunkt! Bild:



a) Vinkelrät mot L ⇒ $\bar{w}$ är normal till planet := Γ.

Point-normal:

$$\bar{n}\cdot(\overline{OQ}-\overline{OP})=0$$



I vårt fall:

$$\begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right)=0 \iff$$

$$-2(x-1)-2(y-2)+z=0 \iff$$

$$-2x-2y+z+2+4=0 \iff$$

$$\boxed{-2x-2y+z+6=0}$$

2.

den 2 september 2018 13:55

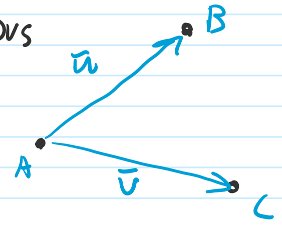
Uppgift 2. Till varje tal t har vi triangeln T med hörn

$$A = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} \quad \text{och} \quad C = \begin{bmatrix}t\\t\\1\end{bmatrix}.$$

(a) För vilket värde på t har T en rät vinkel vid A?
(b) Bestäm de två andra vinklarna för detta värde på t (använd miniräknare).
(c) Bestäm t sådant att punkten C är närmast A.

a) Rät vinkel i $A \Leftrightarrow (\overline{AB} := \bar{u}) \bullet (\overline{AC} := \bar{v}) = 0$. Dvs

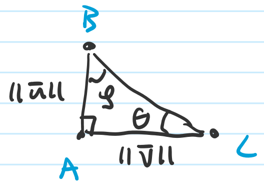
definieras som



$$\left(\begin{bmatrix}1\\0\\-2\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right) \bullet \left(\begin{bmatrix}t\\t\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}0\\-2\\-5\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix}t-1\\t-2\\-2\end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(t-2) + 10 = 0 \Leftrightarrow -2t + 4 + 10 = 0 \Leftrightarrow t = 7.$$

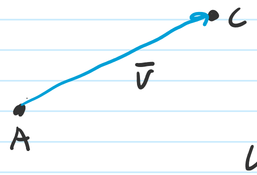
b)



$$\tan\theta = \frac{\|\bar{u}\|}{\|\bar{v}\|} = \frac{\sqrt{4+25}}{\sqrt{36+25+4}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{65}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\|\bar{v}\|}{\|\bar{u}\|} = \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{29}}$$

c)



$$d_{AC}(t) = \|\bar{v}(t)\| = \sqrt{(t-1)^2 + (t-2)^2 + 4}$$

Uerhet avstånd då $\frac{d}{dt}(d_{AC}(t)) = 0$ (fråga om studenterna är du modella)

Dvs:

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{(t-1)^2 + (t-2)^2 + 4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(t-1)^2 + (t-2)^2 + 4}} \cdot \big(2(t-1) + 2(t-2)\big) = 0 \Leftrightarrow \{\text{nämnaren är positiv}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4t - 6 = 0 \Leftrightarrow \boxed{t = 3/2.}$$

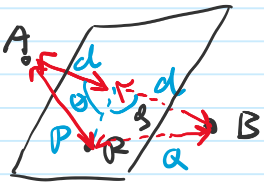
3.

den 2 september 2018 13:56

Uppgift 3. Bestäm en ekvation för det plan som består av punkter med lika långt avstånd till punkten $A = (-1, 1, 2)$ som till punkten $B = (1, 5, -4)$. (*Ledning*: Mittpunkten på sträckan mellan A och B ligger i planet.)

Något lurigare uppgift som kräver ett grepp om koncept samt lite nytänkande.

Rita bild:



Vad måste θ vara för att avståndet $p = q$?

$\theta = \varphi = 90°$!

$\Rightarrow$ Planets normal är $\overline{OB} - \overline{OA} := \bar{v}$

Dessutom vet vi att mittpunkten mellan A och B har koordinaterna $S = A + \frac{\overline{OB} - \overline{OA}}{2}$.

$$\begin{aligned} S &= (-1, 1, 2) + \tfrac{1}{2} \cdot [(1, 5, -4) - (-1, 1, 2)] \\ &= (-1, 1, 2) + \tfrac{1}{2} \cdot (2, 4, -6) \\ &= (-1, 1, 2) + (1, 2, -3) \\ &= (0, 3, -1) \end{aligned}$$

För en punkt R i planet gäller point-normalekvationen

$$\bar{n} \bullet (\overline{OR} - \overline{OS}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{v} \bullet (\overline{OR} - \overline{OS}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \bullet \left[\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4(y-3) - 6(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2x + 4y - 6z = 18}$$

Övriga diskussionsuppgifter

den 2 september 2018 13:56

Här är några andra moment som är viktiga och intressanta att diskutera.

- Hur många ekvationer behövs det för att bestämma ett m-dimensionellt delrum av $\mathbb{R}^n$? Hur många fria variabler behövs det i en parameterframställning?
- Vad är den förväntade skärningen av två plan i $\mathbb{R}^3$, i $\mathbb{R}^4$ och i $\mathbb{R}^5$?
- Vad kan menas med vinkeln mellan en linje och ett plan eller mellan två plan i $\mathbb{R}^3$? Hur kan man beräkna denna vinkel?

- m st fria variabler (tänk på ett plan och en linje i $\mathbb{R}^3$)
  $n-m$ st ekvationer. (återigen, tänk på ett plan och en linje i $\mathbb{R}^3$).

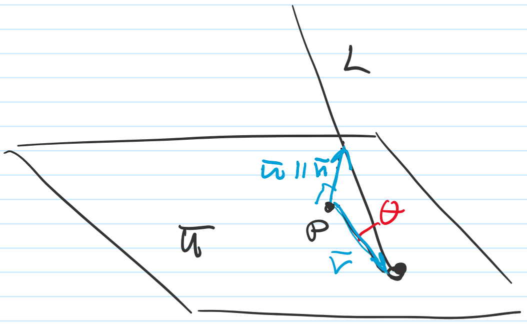
- I $\mathbb{R}^3$: en linje eller ingenting

  I $\mathbb{R}^4$: en linje eller en punkt, eller ingenting om parallella

  I $\mathbb{R}^5$: en linje, en punkt eller ingenting

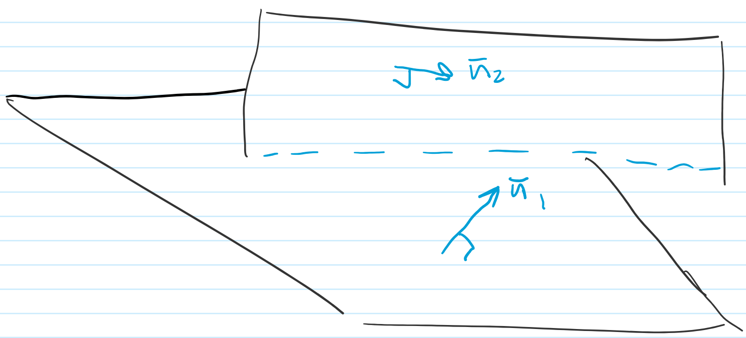
  behöver inte vara parallella

-



Dra linje i normalens riktning vid linjen (vilken P), sen

$$\tan\theta = \frac{\|\bar{u}\|}{\|\bar{v}\|}$$



$$\cos\theta = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{\|\bar{n}_1\| \, \|\bar{n}_2\|}$$