Dagordning

den 27 augusti 2018 18:24

Introducera mig själv, skriv mailadress på tavlan, skriv de uppgifter som kommer gås igenom

Prata lite kring övningarnas upplägg, se till att säga att det är mycket studenterna som kommer få räkna individuellt och i grupp

Fråga hur kursen känns hittills efter 2 frls

Rekommendera appendix (hur man läser matematik)

Säg att studenterna är jättevälkomna att fråga frågor i rasten, säga till om något är konstigt på tavlan, etc

Säg att de får maila men helst ta upp det på övning eller prata med kompisar först, då det är instruktivt att samtala om matematik för att förstå det bättre

Linjär algebra är bland den snyggaste matematiken som finns, ni har något väldigt roligt framför er

Första timmen 1.2., andra 1.3.

Slå ett slag för exempelsamlingen som finns på kurshemsidan

1.2.

den 27 augusti 2018 18:32

9. Hitta $\bar{u}\cdot\bar{v}$, $\bar{u}\cdot\bar{u}$ och $\bar{v}\cdot\bar{v}$ med

a) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Vem minns definitionen av $\bar{u}\cdot\bar{v}$?

Vi minns

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots$$

Så

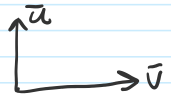
$$\bar{u}\cdot\bar{v} = 3\cdot 2 + 1\cdot 2 + 4\cdot(-4) = 8-16 = -8$$

$$\bar{u}\cdot\bar{u} = 9+1+16 = 26$$

$$\bar{v}\cdot\bar{v} = 4+4+16 = 24$$

b) studenterna får göra

$\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$ (vad innebär detta)



(men i 4D)

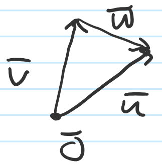
$\bar{u}\cdot\bar{u} = 54$

$\bar{v}\cdot\bar{v} = 21$

(skalärprodukten mellan enhetsvektorer är ett mått på hur parallella de är)

---

11. Euklidiskt avstånd: Lite intuition:



Det euklidiska avståndet mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$ är

$$\|\bar{u}-\bar{v}\| = \|\bar{w}\| = \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2 + \dots}$$

(varför är denna norm helt oproblematisk för reella tal? Hur skulle man kunna göra om skalärprodukten för att kunna definiera samma norm för komplexa tal?)

Hitta det euklidiska avståndet mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$, där

a) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

$\|\bar{u}-\bar{v}\| = \sqrt{14}$

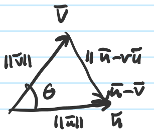
b) $\bar{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\bar{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\|\bar{u}-\bar{v}\| = \sqrt{54}$

13.) För $\bar{u}$ och $\bar{v}$ i föregående uppgift, hitta cosinus för vinkeln mellan dem.

Th. 1.2.8.

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{\|\bar{u}\|\cdot\|\bar{v}\|}}$$



cosinussatsen säger (med linalg-språk)

$$\|\bar{u}-\bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 - 2\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|\cos\theta$$

men

$$\|\bar{u}-\bar{v}\|^2 = (\bar{u}-\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = (\bar{u}-\bar{v})\cdot\bar{u} - (\bar{u}-\bar{v})\cdot\bar{v} = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2 - 2\,\bar{u}\cdot\bar{v}$$

$$\Rightarrow \cancel{\|\bar{u}\|^2} + \cancel{\|\bar{v}\|^2} \cancel{-2}\,\bar{u}\cdot\bar{v} = \cancel{\|\bar{u}\|^2} + \cancel{\|\bar{v}\|^2} \cancel{-2}\,\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|\cos\theta$$

V.S.V.

Använd nu formeln själva på a) och b) i 11. (5 min, kanske lite mer)

a) $\cos\theta = \dfrac{15}{\sqrt{27}\sqrt{17}}$

b) $\cos\theta = -\dfrac{4}{\sqrt{6}\sqrt{45}}$

23.) Visa att

$\bar{v}_1 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$, $\bar{v}_2 = (1/2, -5/6, 1/6, 1/6)$

$\bar{v}_3 = (1/2, 1/6, 1/6, -5/6)$, $\bar{v}_4 = (1/2, -5/6, 1/6, 1/6)$

bildar en ortonormal mängd.

Fråga: Vad är ortonormal?

Ortonormal mängd: vektorerna har längd 1 och är ortogonala, dvs $\forall \bar{v}_i \in S$ så $v_i \cdot v_j = 0$, $j \neq i$.

Studenterna får göra detta i grupper om 3, så arbetsbördan kan delas:

27: För vilka värden på k är $\bar{u}$ och $\bar{v}$ ortogonala med

a) $\bar{u} = \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\quad \bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ k \end{bmatrix}$

$\bar{u}\cdot\bar{v} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow k + 7 + 3k = 0$

$\Rightarrow 4k + 7 = 0$

$\Rightarrow k = -7/4$

b) $\bar{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ k \\ k \end{bmatrix}$, $\quad \bar{v} = \begin{bmatrix} k \\ 5 \\ k \end{bmatrix}$

(studenterna gör denna) räkna med 5 min

$-2h + 5h + h^2 = 0$

$\Rightarrow h^2 + 3h = 0$

$\Rightarrow h(h+3) = 0$

$\Rightarrow h = -3, 0$

1.3.

den 27 augusti 2018 18:32

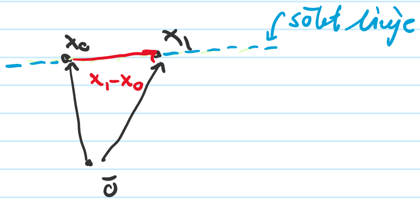
5. Finn vektor- och parameterform av linjen som går mellan punkterna

a) (0,0) och (3,5)

b) (1,1,1) och (0,0,0)

c) (1,-1,1) och (2,1,1).

Vi minns att för punkter x_0 och x_1 i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ så gäller att linjen som går mellan dem är parallell mot $x_1 - x_0$:



Vår sökta vektor $\bar{x}$ är således

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + t(\bar{x}_1 - \bar{x}_0)$$

skalär

med

$$\bar{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad \bar{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix} \cdot t$$

a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5-0 \\ 3-0 \end{bmatrix} \cdot t = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot t$

b) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t = (1-t) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) Studenterna gör denna (2 min)

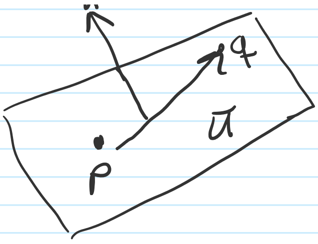
Frågor?

9.) Hitta point-normal ekvationen till planet π som passerar P och har normalen $\bar{n}$.

$$\bar{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

För alla punkter q i π så måste vektorn $\bar{q} - \bar{p} := \bar{w}$ vara ortogonal mot $\bar{n}$:

Det går inte att definiera ett plan från



Det går inte att definiera ett plan från bara en normalvektor. men kan flytta planet upp och ner längs $\bar{n}$ och alla vektorer från $\bar{n}$ till någon punkt i planet är fortfarande ortogonala.

i vårt fall:

$$\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} \cdot \left[\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}\right] = 0$$

$$\Rightarrow 3(x+1) + 2(y+1) + z+1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{3x+2y+z=-6}$$

Frågor?

15.| Hitta planet som definieras av punkterna

$P(1,2,4)$; $Q(1,-1,6)$, $R(1,4,8)$

och uttryck dess generella och vektoriella ekvationen.

Lsg: Vi väljer en av punkterna som fix och definierar planet därifrån. Tag P fix. Då måste vektorerna $\bar{v}_1 = Q-P$ och $\bar{v}_2 = R-P$ vara parallella med planet. Vektorekvationen ges som

$$\bar{x} = (1,2,4) + t_0[(1,-1,6)-(1,2,4)] + t_1[(1,4,8)-(1,2,4)]$$

$$= (1,2,4) + t_0(0,-3,2) + t_1(0,2,4)$$

med $\bar{x} = \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$: Komponentvis:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2-3t_0+2t_1 \\ z = 4+2t_0+4t_1 \end{cases}$$

Anmärk att det går att göra liknande med plan i $\mathbb{R}^3$ som är parallella med en (sluten) yta

Frågor?

21.| Hitta parametriska ekvationer för planet som är parallellt med planet $3x+2y-z=1$ och passerar genom punkten $P(1,1,1)$.

Studenterna får lösa denna i grupp. ca 3. (5 min) Inled med:

Vad betyder det att två plan är parallella? (samma normal)

Studenterna får lösa denna i grupp. Inled med: ans:

Vad betyder det att två plan är parallella? (samma normal)

Normalen ges av $\bar{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

För $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ i sökt plan är

$$\bar{n}\cdot(\bar{x} - P) = 0 \iff \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff 3x - 3 + 2y - 2 - z + 1 = 0$$

$$\iff \boxed{3x + 2y - z = 4} \quad (1)$$

Vi kan nu välja $x = t_1$, $y = t_2$, och från (1) får vi

$z = 3t_1 + 2t_2 - 4$.

Frågor?

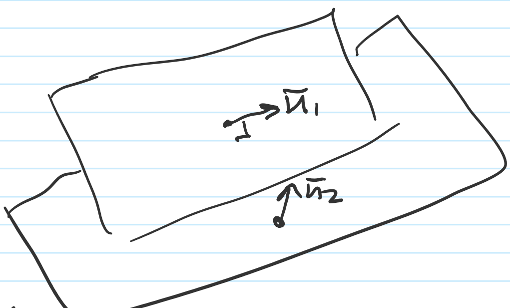
33.) 33. Avgör om planen är vinkelräta:

a) $4x + 3y - z + 1 = 0$; $x + 2z = -1$

b) $x - 2y + 3z = 4$; $-2x + 5y + 4z = -1$

Fråga: Hur gör man detta jättesnabbt?

Det enklaste sättet att göra detta på är att skalärmultiplicera deras normaler



$\bar{n}_1 \bullet \bar{n}_2 = 0 \Rightarrow$ vinkelräta!

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \neq 0 \quad \text{så nej}$$

Frågor?

b) studenterna gör. svaret är ja.