Inversen av en matris

den 5 september 2018 16:34

Låt A vara en kvadratisk matris. Om det finns en matris B så att

$$AB = BA = I$$

så kallas A inverterbar och B kallas inversen till A, och B betecknas som A^{-1}.

Sats 3.2.7:

Matrisen

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

är inverterbar omm $ad - bc \neq 0$ och inversen ges av

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

3x3 och större:

Exempel med 3x3-matriser:

Ställ upp

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \text{gaussa till enhetsmatrisen i VL}$$

och utför i varje steg samma operation på matrisen i HL $\sim$

$$\sim \; I \mid A^{-1}$$

Varför fungerar detta? Beviset är svårt men finns i boken.
Det är mycket viktigare att vi lär oss räkna med det.

3.2.15.

den 5 september 2018 15:21

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$$

Hitta

a) A^{-2}

b) $p(A)$ för $p(x)=x+2$

c) $p(A)$ för $p(x)=x^2-2x+1.$

$$A^{-2}=(A^{-1})(A^{-1})$$

Söker A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=\frac{1}{6-5}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{bmatrix}$$

$$A^{-2}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+5 & -5\\ -25 & 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -5\\ -25 & 14\end{bmatrix}$$

b) $p(A)=A+2I=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}$

lätt steg utelämna som

c) $p(A)=A^2-2A+I=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 2\\ 10 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=$

$$=\begin{bmatrix}14 & 5\\ 25 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 2\\ 10 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 7\\ 15 & 6\end{bmatrix}$$

3.3.9

den 5 september 2018 16:20

a) Hitta inversen till matrisen m.h.a. reduktion med elementära matriser:

$$A = \left[\begin{matrix}1 & 5\\ 2 & 20\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\right] \overset{-2}{\sim} \left[\begin{matrix}1 & 5\\ 0 & 10\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{matrix}\right] \sim \tfrac{1}{2}\left[\begin{matrix}1 & 5\\ 0 & 5\end{matrix}\middle|\begin{matrix}1 & 0\\ -1 & 1/2\end{matrix}\right] \overset{-1}{\sim} \left[\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{matrix}\middle|\begin{matrix}2 & -1/2\\ -1 & 1/2\end{matrix}\right] \sim$$

$$\sim \tfrac{1}{2}\left[\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}\middle|\begin{matrix}2 & -1/2\\ -1/5 & 1/10\end{matrix}\right]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -1/2\\ -1/5 & 1/10\end{bmatrix}$$

b) $$A^{-1}A = \begin{bmatrix}2 & -1/2\\ -1/5 & 1/10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 20\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(2\cdot 1 - 2/2) & (2\cdot 5 - \frac{20}{2})\\ (-1/5 + 2/10) & (-5/5 + \frac{20}{10})\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$ Ok!

c) $(A^{-1})^T =$ {rader blir respektive kolumner} =

$$= \begin{bmatrix}2 & -1/5\\ -1/2 & 1/10\end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^T A^T = \begin{bmatrix}2 & -1/5\\ -1/2 & 1/10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 20\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(2 - 5/10) & (2\cdot 2 - \frac{20}{5})\\ (-1/2 + 5/10) & -2/2 + 20/10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ {av definitionen} $\Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. V.S.V.

d) Vill visa att $(2A^{-1}) = \frac{1}{2}A^{-1}$, dvs

$$\left(\tfrac{1}{2}A^{-1}\right)(2A) = I.$$

Men

$$\left(\tfrac{1}{2}A^{-1}\right)(2A) = \tfrac{2}{2}A^{-1}A = I, \text{ V.S.V.}$$

Diskussionsfrågor

den 6 september 2018 20:47

D4: Är det möjligt för A^3 att vara en identitetsmatris utan att A är inverterbar?

Nej, för $A^2 \cdot A = I \Rightarrow A^2 = A^{-1}$.

D5: a) Om A och B är lika stora kvadratiska matriser så är $(AB)^2 = A^2B^2$.

Nej, $(AB)^2 = ABAB \neq A^2B^2 = AABB$ i allmänhet.

b) – || –

$(A-B)^2 = (B-A)^2$. Ja $(A-B)^2 = (-(B-A))^2 = (-1)^2(B-A)^2 = (B-A)^2$.

c) Om A och B är inverterbara matriser m. samma. storlek så är A+B inverterbar.

Nej, exempelvis $B = -A$. Då är $A+B = 0$, och 0 är inte inverterbar.

Stud 3.3.15.

den 5 september 2018 16:24

Hitta c så att matrisen är inverterbar:

$$A = \begin{bmatrix} c & c & c \\ 1 & c & c \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$$

Gaussa!

c=0 ger ej inverterbar

Kan den radreduceras till identitetsmatrisen?

$$\begin{bmatrix} c & c & c \\ 1 & c & c \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & c \\ 1 & c & c \\ c & c & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & c \\ 0 & c-1 & 0 \\ 0 & 0 & c-c^2 \end{bmatrix}$$

Här kan vi se att $c - c^2 \neq 0 \Rightarrow c \neq 1$ (eller 0 men det vet vi)

I övrigt går alla c bra.

3.3.31.

den 6 september 2018 19:03

a) Hitta θ så att

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

är inverterbar.

Vi minns sats 3.2.7. :

> Matrisen
>
> $$A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$
>
> är inverterbar omm $ad-bc\neq 0$ och inversen ges av
>
> $$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}.$$

$ad-bc = \cos^2\theta+\sin^2\theta = \{\text{trig-ettan}\} = 1.$

Då är inversen

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$

b) Använd inversen för att lösa

$$\begin{aligned} a &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ b &= -x\sin\theta + y\cos\theta \end{aligned} \qquad (1)$$

Skriv (1) på formen $A\bar{x}=\bar{b}$:

$$\overbrace{\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}}^{A}\cdot\overbrace{\begin{bmatrix}x\end{bmatrix}}^{\bar{x}}=\overbrace{\begin{bmatrix}a\end{bmatrix}}^{\bar{b}}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

söker $\bar{x}$. vi har

$$A^{-1}(A\bar{x}) = A^{-1} \cdot \bar{b} \iff$$

$$\underbrace{(A^{-1}A)}_{I}\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{b} \iff$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\bar{b} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3.3.33.

den 6 september 2018 19:18

a) Visa att om A, B, och A+B är inverterbara så är

$$A(A^{-1}+B^{-1})B(A+B)^{-1} = I.$$

$$A\underbrace{(A^{-1}+B^{-1})}_{C}\underbrace{B(A+B)^{-1}}_{D} = (AC)D = (I + AB^{-1})B(A+B)^{-1} =$$

$$= \underbrace{I\,B}_{B}(A+B)^{-1} + A\underbrace{B^{-1}(B}_{I}(A+B)^{-1}) =$$

$$= (B+A)(A+B)^{-1} = (A+B)(A+B)^{-1} = I \quad , \text{ V.S.V.}$$

b) $$A(A^{-1}+B^{-1})B(A+B)^{-1} = I \iff$$

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{I}(A^{-1}+B^{-1})B(A+B)^{-1} = A^{-1}\cdot I \iff$$

Notera att det är skillnad på höger- och vänstermultiplikation!

$$(A^{-1}+B^{-1})B\underbrace{(A+B)^{-1}\cdot(A+B)}_{I} = A^{-1}\cdot(A+B) \iff$$

$$(A^{-1}+B^{-1})B = A^{-1}(A+B) \iff$$

$$(A^{-1}+B^{-1})\underbrace{B\cdot B^{-1}}_{I} = A^{-1}(A+B)B^{-1} \iff$$

$$(A^{-1}+B^{-1}) = A^{-1}(A+B)B^{-1}$$

Tag nu inversen:

$$(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = \left[A^{-1}((A+B)B^{-1})\right]^{-1} = \{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\} =$$

$$= ((A+B)B^{-1})^{-1}\underbrace{(A^{-1})^{-1}}_{A} =$$

$$= ((A+B)B^{-1})^{-1}A =$$

$$= \{\text{samma lag som ovan}\} =$$

$$= B(A+B)^{-1}A$$

så

$$\boxed{(A^{-1}+B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A.}$$

Stud 3.3.19.

den 6 september 2018 21:07

Använd den givna informationen för att hitta A:

a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$A = (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{10+3} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

$7A = ((7A)^{-1})^{-1} = -{\shortparallel}- = \frac{1}{6-7} \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{7} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

c) $(5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$5A^T = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-6+5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 5A = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow A = -\frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$

d) $(I + 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow I + 2A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-5-8} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow 2A = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} - \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -18 & 2 \\ 4 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$