Intro

den 18 september 2018 23:38

Egenvärden och egenvektorer:

Om $Ax = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$, så är x en egenvektor till A med egenvärdet λ.

Hitta egenvärden:

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Hitta egenvektorer:

$$Ax = \lambda x \iff (A - \lambda I)\bar{x} = 0, \text{ lös ut } \text{hoelts i } \bar{x}.$$

Linjära avbildningar:

En avbildning $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är linjär om

$$T(a\bar{x}) = aT(\bar{x})$$

och

$$T(\bar{x} + \bar{y}) = T(\bar{x}) + T(\bar{y}).$$

Matriser <u>är</u> linjära avbildningar! (Men de representeras olika med olika bas, vilket vi kommer få se).

Boij

den 18 september 2018 17:58

8. För varje heltal $n \geq 1$, låt A_n vara $n \times n$-matrisen med ettor på diagonalen och superdiagonalen, minusettor på subdiagonalen och nollor för övrigt. För $n = 1$ finns inga super- eller subdiagonaler så vi definierar $A_1 = (1)$. Exempelvis är

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Det gäller att $\det A_n = \det A_{n-1} + \det A_{n-2}$ för alla $n \geq 3$. Varför? **(3)**

(b) Beräkna $\det A_{10}$. **(1)**

Lösning. (a) Först ett par observationer:

- Om man stryker den första raden och kolonnen i A_n får man A_{n-1}.
- Om man i stället stryker den första kolonnen och den andra raden får man en matris B_{n-1} som är likadan som A_{n-1} sånär som på att första raden bara innehåller en etta och inte två.

Om vi utvecklar determinanten för A_n längs med första kolonnen får vi $\det A_n = 1 \cdot \det A_{n-1} - (-1) \cdot \det B_{n-1}$. Utvecklar vi $\det B_{n-1}$ längs första raden får vi $\det B_{n-1} = \det A_{n-2}$.

(b) Vi kan direkt beräkna $\det A_1 = 1$ och $\det A_2 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 2$, och med rekursionsformeln från (a)-uppgiften får vi

$$\begin{aligned}
\det A_3 &= \det A_2 + \det A_1 = 2 + 1 = 3, \\
\det A_4 &= \det A_3 + \det A_2 = 3 + 2 = 5, \\
\det A_5 &= \det A_4 + \det A_3 = 5 + 3 = 8, \\
\det A_6 &= \det A_5 + \det A_4 = 8 + 5 = 13, \\
\det A_7 &= \det A_6 + \det A_5 = 13 + 8 = 21, \\
\det A_8 &= \det A_7 + \det A_6 = 21 + 13 = 34, \\
\det A_9 &= \det A_8 + \det A_7 = 34 + 21 = 55, \\
\det A_{10} &= \det A_9 + \det A_8 = 55 + 34 = 89.
\end{aligned}$$

□

Svar:

(b) $\det A_{10} = 89$.

4.4.5.

den 18 september 2018 17:25

Hitta den karakteristiska ekvationen, egenvärdena och den algebraiska multiplicitetet för dessa i följande matriser:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

vi kan för egenvärden λ:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 8 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0, \iff$$

$$(3-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \iff$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1. \end{cases}$$

A.M. = 1 för båda.

b) $A = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff (10-\lambda)(-2-\lambda) + 36 = 0 \iff$$

$$-20 - 10\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 36 = 0 \iff$$

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \iff$$

$$\lambda = 4 \pm \sqrt{16-16} \implies \lambda_1, \lambda_2 = 4.$$

A.M. 2.

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \iff (2-\lambda)^2 = 0 \iff \lambda_1, \lambda_2 = 2.$$ Ger

A.M. 2.

4.4.9.

den 18 september 2018 17:28

Hitta egenrummen för matriserna i upg 5.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 = -1, 3$

$B = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 = 4$

$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 = 2$

Vi har

$$A\bar{x} = \lambda \bar{x} \Rightarrow (A - \lambda I)\bar{x} = 0$$

A: $A - (-1)I = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A - \lambda I)\bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

$E_{-1} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

P.s.s.

$(A - 3I)\bar{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{x_2}{2}$

Så

$E_3 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$.

För B och C, låt studenterna lösa.

B: $E_4 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

C: $E_2 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Vad är E_4, och E_2, geometriskt?

6.1.9.

den 18 september 2018 17:31

Avgör om T är linjär och ange, om T inte är linjär, om additivitet eller homogenitet förstör linearikt.

Låt studenterna gissa, diskutera i grupp.

a) $T(x,y)=(2x,y)$.

b) $T(x,y)=(x^2,y)$

c) $T(x,y)=(-y,x)$

d) $T(x,y)=(x,0)$.

a) linjär

$$T(k(x,y)) = kT(x,y) = k(2x,y)$$
$$T(x+t,y+s) = T(x,y)+T(t,s) = (2x+2t, y+s)$$

b) inte linjär,

$$T(k(x,y)) \neq kT(x,y)$$

och

$$T(x+t,y+s) \neq T(x,y)+T(t,s)$$

c) linjär,

$$T(k(x,y)) = T((kx,ky)) = (-ky,kx) = k(-y,x) = kT(x,y).$$

$$T(x+t,y+s) = (-(y+s), x+t) = (-y,x)+(-s,t) = T(x,y)+T(t,s).$$

d) linjär

$$T(k(x,y)) = (kx,0) = kT(x,y)$$
$$T(x+t,y+s) = (x+t,0) = T(x,y)+T(t,s).$$

6.1.15.

den 18 september 2018 17:32

Hitta domän och kodomän för $\bar{x} \xrightarrow{T} \bar{w}$ definierad som

$$w_1 = 5x_1 - x_2 + x_3$$
$$w_2 = -x_1 + x_2 + 7x_3$$
$$w_3 = 2x_1 - 4x_2 - x_3.$$

Kort diskussion i par

Vi kan identifiera $L(x_1, x_2, x_3)$ som matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

som verkar på

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Alla avbildningar som kan uttryckas som matriser är linjära, se sats i boken.

Domän och kodomän är $\mathbb{R}^3$.

6.1.36.

den 18 september 2018 17:33

Antag att $(x,y) \xrightarrow{T} (s,t)$ är den linjära operatorn på $\mathbb{R}^2$ som definieras av

$$2x+y=s$$
$$6x+2y=t.$$

Hitta bilden av $L: x+y=1$ under T.

Extrahera information:

$$T(x,y) = (2x+y,\ 6x+2y)$$

För L gäller $y=1-x$. Vi får

$$T(x,1-x) = (2x+(1-x),\ 6x+2(1-x))$$
$$= (1+x,\ 4x+2).$$

Stud 6.2.3.

den 18 september 2018 17:54

Bevisa att

$$A = \begin{bmatrix} 4/5 & 0 & -3/5 \\ -9/25 & 4/5 & -12/25 \\ 12/25 & 3/5 & 16/25 \end{bmatrix}$$

är ortogonal och hitta inversen. Tips, hitta saker i boken. Inversen är enklare än ni tror.

Av sats så är $A^{-1} = A^T$.

Stud 120206/2

den 18 september 2018 17:39

2. Betrakta de linjära avbildningarna $S, T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som ges av matriserna

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{respektive} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Bestäm matrisprodukterna AB och BA.

b) Vilken av de båda produkterna svarar mot sammansättningen $T \circ S$?

c) Bestäm en bas för nollrummet till en av de båda sammansättningarna $S \circ T$ eller $T \circ S$.

2. a) Vi utför matrismultiplikationerna och får

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 - 2\cdot 1 & 1\cdot 4 - 2\cdot 2 \\ 2\cdot 2 - 4\cdot 1 & 2\cdot 4 - 4\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

och

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 4\cdot 2 & 2\cdot(-2) + 4\cdot(-4) \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot(-2) + 2\cdot(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -20 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$$

b) BA svarar mot $T \circ S$ eftersom

$$T \circ S(\vec{x}) = T(S(\vec{x})) = T(A\vec{x}) = B(A\vec{x}) = BA\vec{x}.$$

c) Nollrummet till $S \circ T$ består av de vektorer som uppfyller $S \circ T(\vec{x}) = \vec{0}$, dvs $AB\vec{x} = \vec{0}$. Eftersom AB är nollmatrisen är detta alla vektorer i $\mathbb{R}^2$. En bas för $\mathbb{R}^2$ ges exempelvis av standardbasen, $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ och $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Nollrummet till $T \circ S$ ges på motsvarande sätt av lösningsmängden till $BA\vec{x} = \vec{0}$. Med Gausselimination får vi

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10 & -20 & 0 \\ 5 & -10 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} \frac{1}{10} r_1 \\ r_2 - \frac{1}{2} r_1 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Den andra variabeln är fri och vi sätter $x_2 = t$ för en parameter t. Lösningsmängden ges nu av

$$\left\{ \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} : t \text{ reellt tal.} \right\}$$

En bas för nollrummet ges därmed av $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Gammal tenta sf1604 2013

den 18 september 2018 17:43

2. För den linjära avbildningen A gäller att $A(1,0,0) = (2,1,0)$, $A(0,1,1) = (1,-1,2)$ och $A(0,1,2) = (0,-3,4)$.

   (a) (2p) Bestäm A:s matris relativt standardbasen.

   (b) (2p) Bestäm en bas för A:s kärna ("kernel") samt dimensionen för A:s bildrum ("range").

   (c) (1p) Är A surjektiv, injektiv och/eller bijektiv.

Lösning. Vi använder "Martins metod":

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$

Så

SVAR:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) (2p) Bestäm en bas för A:s kärna ("kernel") samt dimensionen för A:s bildrum ("range").

Lösning. A:s bildrum är kolonnrummet till matrisen ovan och dess dimension är inte tre eftersom kolonn ett och kolonn två är parallella, men kolonnrummet har dimension två eftersom de två sista kolonnerna spänner upp ett delrum av dimension två. Enligt fundamentalsatsen har då nollrummet dimension ett. Det är lätt att se att $\mathbf{A}(1\ \ -1\ \ 0)^T = (0\ \ 0\ \ 0)^T$ och därmed kan vi sluta att vektorn $(1,-1,0)$ är en bas för A:s kärna.

(b) (2p) Bestäm en bas för A:s kärna ("kernel") samt dimensionen för A:s bildrum ("range").

Lösning. A:s bildrum är kolonnrummet till matrisen ovan och dess dimension är inte tre eftersom kolonn ett och kolonn två är parallella, men kolonnrummet har dimension två eftersom de två sista kolonnerna spänner upp ett delrum av dimension två. Enligt fundamentalsatsen har då nollrummet dimension ett. Det är lätt att se att $\mathbf{A}(1\ \ -1\ \ 0)^T = (0\ \ 0\ \ 0)^T$ och därmed kan vi sluta att vektorn $(1,-1,0)$ är en bas för A:s kärna.

3

(c) (1p) Är A surjektiv, injektiv och/eller bijektiv.

Lösning. A är inte injektiv eftersom dess kärna inte är trivial. Eftersom A avbildar R^3 till R^3 och bildrummet har dimension 2 kan avbildningen intE vara surjektiv. Bijektivitet kräver både injektivitet och surjektivitet, så då är den inte det heller.

a) Vi söker $A(0,1,0)$ och $A(0,0,1)$. Då är

$$B = \left[A\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \ A\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \ A\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right]$$

Det gäller av linearitet hos A att

$$A(0,0,1) = A\big[(0,1,2)-(0,1,1)\big] = A(0,1,2) - A(0,1,1) =$$
$$= (0,-3,4) - (1,-1,2) = (-1,-2,2).$$

P.s.s.

$$A(0,1,0) = A\big[(0,1,1) - (0,0,1)\big] = A(0,1,1) - A(0,0,1) =$$
$$= (1,-1,2) - (-1,-2,2) = (2,1,0)$$

Ger

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

b) Kolonnrummet har dimension 2, eftersom kolonnerna spänner upp ett 2D-rum.

Då har nollrummet dim 1.

Vi ser att om

$$\bar{v} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \text{ så är } A\bar{v} = \bar{0}.$$

Då vet vi av ovan att

$$\ker(A) = \operatorname{Span}\{\bar{v}\}.$$

c) Ej injektiv eftersom $\ker A \neq 0$, och ej surjektiv då $\dim \operatorname{Col} A \neq 3$.