Intro

den 1 oktober 2018 14:19

Egenvärden och egenvektorer:

Om $Ax = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}$, så är x en egenvektor till A med egenvärdet λ.

Hitta egenvärden:

$\det(A - \lambda I) = 0$.

Hitta egenvektorer:

$Ax = \lambda x \iff (A - \lambda I)\bar{x} = 0$, lös ut hoeff. i $\bar{x}$, eller använd inspektionsmetoden.

Basbyten med linjära avbildningar:

$B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ bas för $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}$ standardbasen

$[T]_\mathcal{E} = P_{B \to \mathcal{E}} [T]_B P_{\mathcal{E} \to B}$

$[T]_\mathcal{E} [x]_\mathcal{E} = P_{B \to \mathcal{E}} [T]_B P_{\mathcal{E} \to B} [x]_\mathcal{E} = P_{B \to \mathcal{E}} [T]_B [x]_B = P_{B \to \mathcal{E}} [T\bar{x}]_B = [T\bar{x}]_\mathcal{E} = [T]_\mathcal{E} [\bar{x}]_\mathcal{E}$.

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$B' = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$ bas för $\mathbb{R}^m$

$[T(\bar{x})]_{B'} = A[\bar{x}]_B$, med

$A := [T]_{B', B} = [T(\bar{v}_1)_{B'} \; \cdots \; T(\bar{v}_n)_{B'}]$.

bas för domän

bas för kodomän

Om man har bytt bas i både domän och kodomän går man direkt mellan dem med $[T]_{B', B}$.

Diagonaliserbarhet:

A diagonaliserbar om $\exists P$ inverterbar så att

$P^{-1}AP$

är diagonal.

Sats 8.2.10. A kvadratisk matris

a) Geometriska multipliciteten hos egenvärde av A är $\leq$ algebraiska multiplicitet

b) A diagonaliserbar omm geo.mul. = alg.mul. för alla egenvärden till A.

Sats 8.2.11. A $n \times n$ $\Rightarrow$ dessa påståenden är ekvivalenta:

a) A diagonaliserbar.

b) A har n linj. oberor. egenvektorer.

c) $\mathbb{R}^n$ har en bas av egenvektorer till A.

d) Summan av de geometriska multiplicitetena av A:s egenvärden är n.

e) GM av varje egenv. är samma som alg. mult.

4.4.9.

den 18 september 2018 17:28

Hitta egenrummen för matriserna i upg 5.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 = -1, 3$

$B = \begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 = 4$

$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 = 2$

Vi har

$$A\bar{x} = \lambda \bar{x} \Rightarrow (A - \lambda I)\bar{x} = 0$$

A: $A - (-1)I = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow (A - \lambda I)\bar{x} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

$E_{-1} = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

P.s.s.

$(A - 3I)\bar{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{x_2}{2}$

Så

$E_3 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$.

För B och C, låt studenterna lösa.

B: $E_4 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

C: $E_2 = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Vad är E_4, och E_2, geometriskt?

Stud 4.4.26.

den 1 oktober 2018 14:32

För vilka värden på x, om några, kommer matrisen ha åtminstone ett upprepat egenvärde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & x & 2 \\ 0 & 2 & x \end{bmatrix}.$$

8.1.1., 8.1.3.

den 1 oktober 2018 14:35

Låt $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär avbildning vars standardmatris $[T]$ är given som

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ och } \mathcal{B} := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

a) Hitta $[T]_{\mathcal{B}}$.

b) Faktorisera

$$[T] = P[T_{\mathcal{B}}]P^{-1}.$$

a) $P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; $P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$[T]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}[T]P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) $[T] = P_{\mathcal{E}\to\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}P_{\mathcal{B}\to\mathcal{E}}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8.1.19.

den 1 oktober 2018 14:55

Låt $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara given av

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 \end{bmatrix},$$

$$, \quad B := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad B' := \left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

Hitta $[T]_{B',B}$.

vi kan

$$[T(x)]_{B'} = A[\bar{x}]_B$$

bas för kodomänen

bas för domänen.

med $A = [T]_{B',B}$

$$[T]_{B',B} = \left[[T(\bar{v}_1)]_{B'} \ [T(\bar{v}_2)]_{B'} \ \dots \ [T(\bar{v}_n)]_{B'} \right].$$

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad T(\bar{v}_1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(\bar{v}_2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T(\bar{v}_3) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$P_{\mathcal{E}\to B'} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-14} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad [T(\bar{v}_1)]_{B'} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$[T(\bar{v}_2)]_{B'} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -18 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$[T(\bar{v}_3)]_{B'} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{[T]_{B',B} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} -11 & -18 & -9 \\ 9 & 16 & 1 \end{bmatrix}.}$$

Stud 8.2.9.

den 1 oktober 2018 15:47

Hitta egenvärden och dess algebraiska och geometriska multiplicitet. till

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

9. The characteristic polynomial of A is $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 5)^2(\lambda - 3)$. Thus the eigenvalues of A are $\lambda = 5$ and $\lambda = 3$, with algebraic multiplicities 2 and 1 respectively. The eigenspace corresponding to $\lambda = 5$ is the solution space of the system $(5I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, which is

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The general solution of this system is $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; thus the eigenspace is 1-dimensional and so $\lambda = 5$ has geometric multiplicity 1. The eigenspace corresponding to $\lambda = 3$ is the solution space of the system $(3I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ which is

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

The solution space of this system is $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ s \\ -2s \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$; thus the eigenspace is 1-dimensional and so $\lambda = 3$ also has geometric multiplicity 1.

8.2.22.

den 1 oktober 2018 15:55

Bestäm om A är diagonaliserbar och om så är fallet vilken P som diagonaliserar A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Egenvärdena:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2(1-\lambda) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 0$

$\lambda_3 = 1.$

Egenvektorerna:

$\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

Vi ser

$$\bar{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Kan inte finnas fler, eftersom geo $\leq$ alg.

$\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \bar{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$P = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \bar{v}_3] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Då är $P = \begin{bmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$

Gammal tenta

den 1 oktober 2018 16:16

(8) Låt P vara en $n \times n$ matris med egenskapen att $P^2 = P$. Visa att P är diagonaliserbar.

Låt $V = \mathbb{R}^n$, $V_1 = ker(P)$ och $V_2 = ker(I-P)$. Givet $v \in V$ kan vi skriva

$$v = Pv + (I-P)v = v_1 + v_2$$

dvs $v_1 = Pv$ och $v_2 = (I-P)v$. Vi ser då att $v_1 \in ker(I-P)$ och att $v_2 \in ker(P)$. Således kan godtycklig vektor $v \in V$ skrivas som

$$v = v_1 + v_2$$

med $v_i \in V_i$. Om vi låter $b_1, \dots, b_k$ vara bas för V_1 och $c_1, \dots, c_l$ vara bas för V_2 ser vi att $b_1, \dots, b_k, c_1, \dots, c_l$ spänner upp V. Genom att slänga vektorer som finns i höljet av de föregående (om nödvändigt; "bas uppifrån") kan vi bilda en bas $d_1, \dots, d_n$ för V med egenskapen att d_i tillhör antingen V_1 eller V_2. Således har vi hittat en bas av egenvektor till P och därför är P diagonaliserbar.

men ej nödvändigtvis en bas

$P[(I-P)\bar{v}] = (P-P^2)\bar{v} = \bar{0}$.

(Jag fick 0 p på denna upg).

P.S.S.

$P\bar{v}_1 = P^2\bar{v} = P\bar{v} = \bar{v}_1$

$\Rightarrow \bar{v}_1 \in V_1$ är egenvektorer m. eg. värde 1.

$P\bar{v}_2 = P(I-P)\bar{v} = (P-P^2)\bar{v} = \bar{0}$

$\Rightarrow \bar{v}_2 \in V_2$ är egenvektorer m. eg. värde 0.