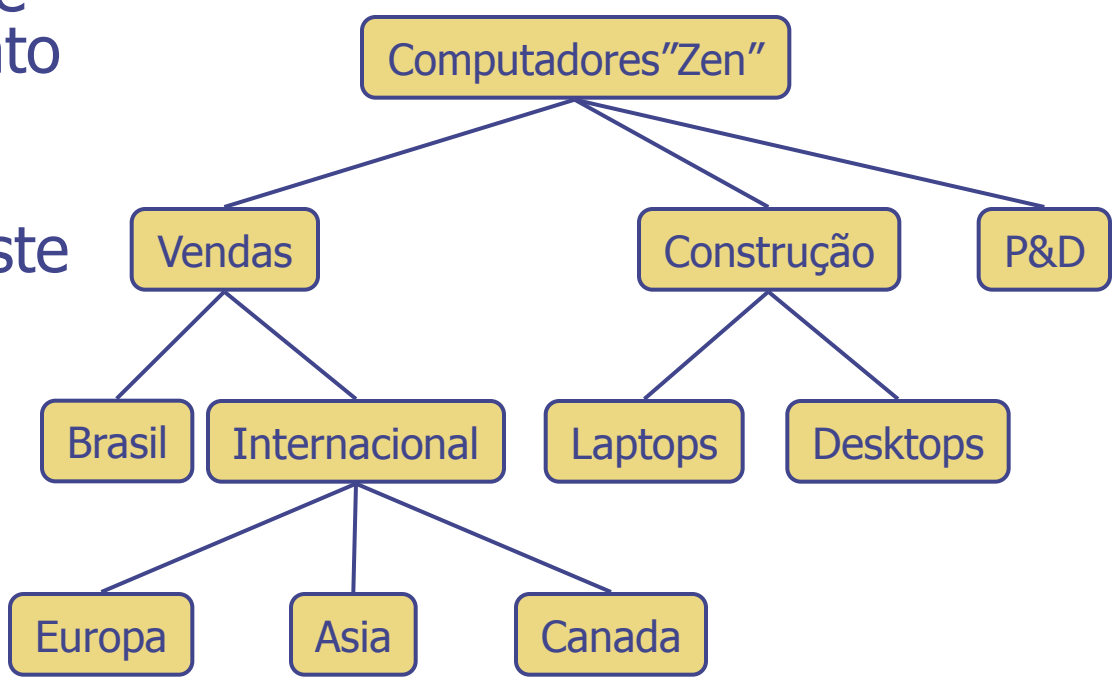
Estrutura de Dados
Árvores

Prof. Robinson Alves

O que é uma árvore

- Em Computação, é um modelo abstrato de uma estrutura hierárquica
- Uma árvore consiste de nós com uma relação pai-filho



Motivação

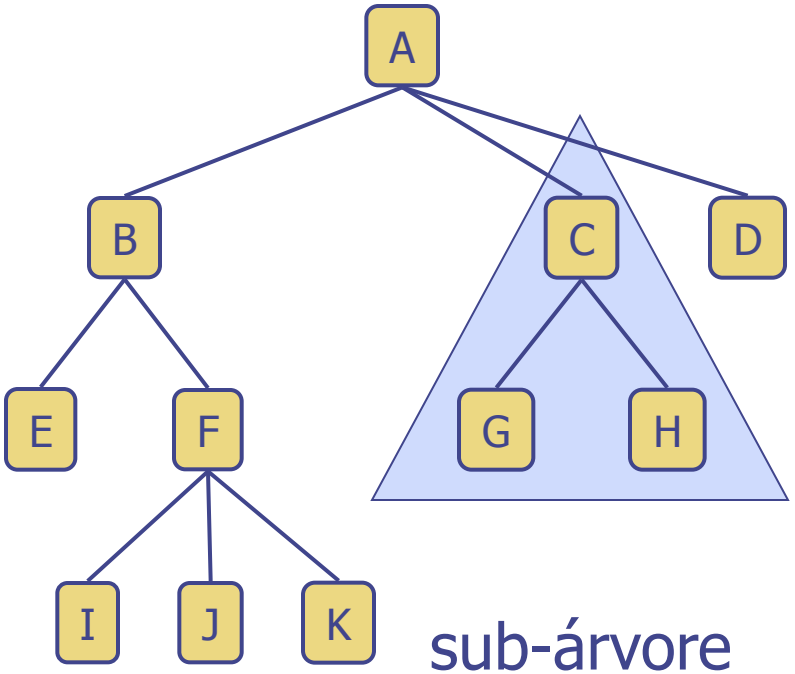
- Uma das estrutura de dados não-lineares mais importantes da computação.
- Diversas aplicações necessitam de estruturas mais complexas que as listas estudadas até agora, como listas e filas.
- Diversos problemas podem ser modelados através de árvores.
- Permitem uma gama de algoritmos muito mais rápidos do que no uso de estruturas de dados lineares, tais como listas.

Aplicações

- Relação de hierarquia entre classes Java e .Net
- Sistemas de arquivos
- Representação de documentos (livro, capítulo, ...)
- Respostas a questões sim/não: árvore de decisão
- Expressões aritméticas
- Relacionamento entre tabelas em um banco de dados (grupos, subgrupos, produtos)

Terminologia de árvore

- Raiz (root): Nó sem pai (A)
- Nó interno: Nó com, pelo menos, um filho (A, B, C, F)
- Nó externo: Nó sem filhos (E, I, J, K, G, H, D)
- Ancestral de um nó: pai, avô, bisavô, etc.
- Profundidade de um nó: Número de ancestrais
- Altura de um árvore: Profundidade máxima (3)
- Descendente de um nó: filho, neto, bisneto, etc.
- Sub-árvore: árvore formada por um nó e seus descendentes



TAD árvore

- Métodos genéricos:
  - integer size()
  - integer height()
  - boolean isEmpty()
  - Iterator elements()
  - Iterator nos()
- Métodos de acesso:
  - No root()
  - No parent(No)
  - Iterator children(No)
- Métodos de consulta:
  - boolean isInternal(No)
  - boolean isExternal(No)
  - boolean isRoot(No)
  - integer depth(No)
- Métodos de atualização:
  - Object replace(No, o)
- Métodos adicionais podem ser definidos pela estrutura que extende/implementa o TAD árvore

Operações de Acesso

- Métodos genéricos:
  - integer size()
    - retorna o número de nós da árvore
  - integer height()
    - Retorna a altura
  - boolean isEmpty()
    - indica se a árvore é vazia
  - Iterator elements()
    - retorna um iterador para os elementos da árvore
  - Iterator nos()
    - retorna um iterador para os nós da árvore

Operações de Acesso

- Métodos de acesso:
  - No root()
    - retorna o nó raiz
  - No parent(No)
    - retorna o nó pai de um nó
  - Iterator children(No)
    - retorna um iterador para os filhos de um nó

Operações de Acesso

- Métodos de consulta:
  - boolean isInternal(No)
    - Verifica se o Nó é interno
  - boolean isExternal(No)
    - Verifica se o Nó é externo ou folha
  - boolean isRoot(No)
    - Verifica se o Nó é Raiz
  - integer depth(No)
    - Retorna a profundidade de um No
- Métodos de atualização:
  - Object replace(No, o)
    - Altera o objeto armazenado em um Nó
- Métodos adicionais podem ser definidos pela estrutura que extende/implementa o TAD árvore

Profundidade

- A profundidade de um nó *v* pode ser definida recursivamente como:
  - Se *v* for raiz, então a profundidade é 0
  - Senão, a profundidade é 1 mais a profundidade do pai de *v*

```
Algoritmo depth(v)
    se (isRoot(v))
      retorne 0
    senão
      retorne 1+depth(parent(v))
```

Altura

- A altura de um nó *v* pode ser definida recursivamente como:
  - Se *v* for externo, então a altura é 0
  - Senão, a altura é 1 mais a maior altura de um filho de *v*

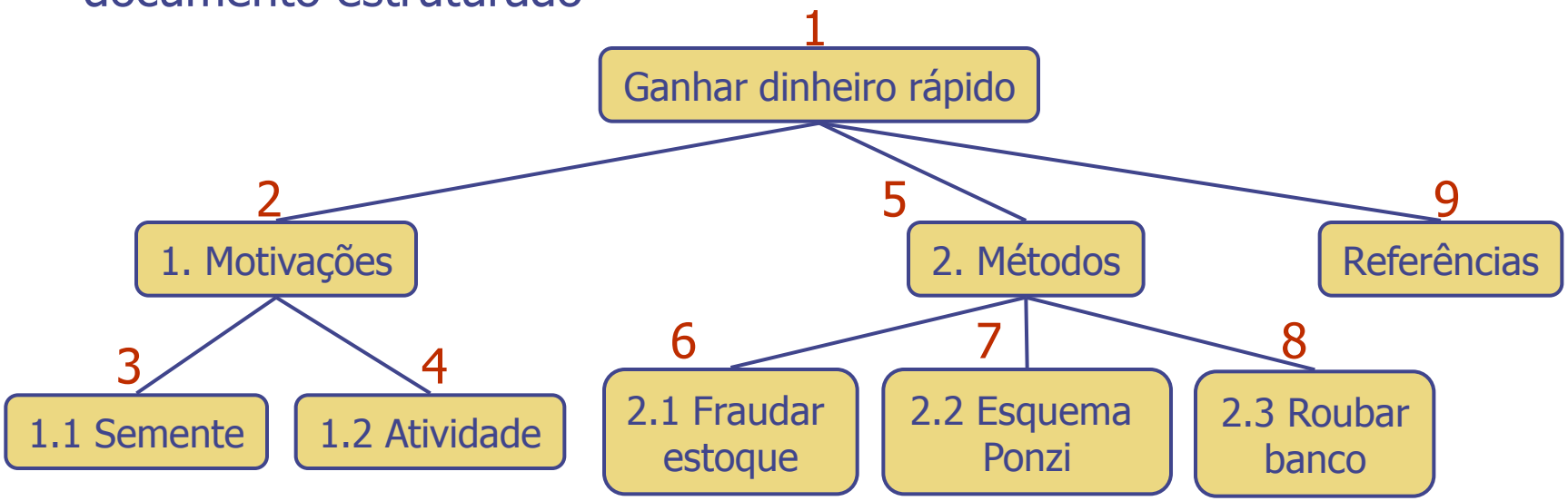
```
Algoritmo altura(v) – O(n)
    se (isExternal(v))
      retorne 0
    senão
      h=0
      para cada w em children(v)
          h=max(h,altura(w))
      retorne 1+h
```

```
Algoritmo altura(v) – O(n^2)
    h=0
    para cada w em nos()
    se (isExternal(w))
       h=max(h,depth(w))
    retorne h
```

Travessia pré ordem

- Uma travessia visita os nós de uma árvore de uma forma sistemática
- Em uma travessia pré-ordem, um nó é visitado antes de seus descendentes
- Aplicação: imprimir um documento estruturado

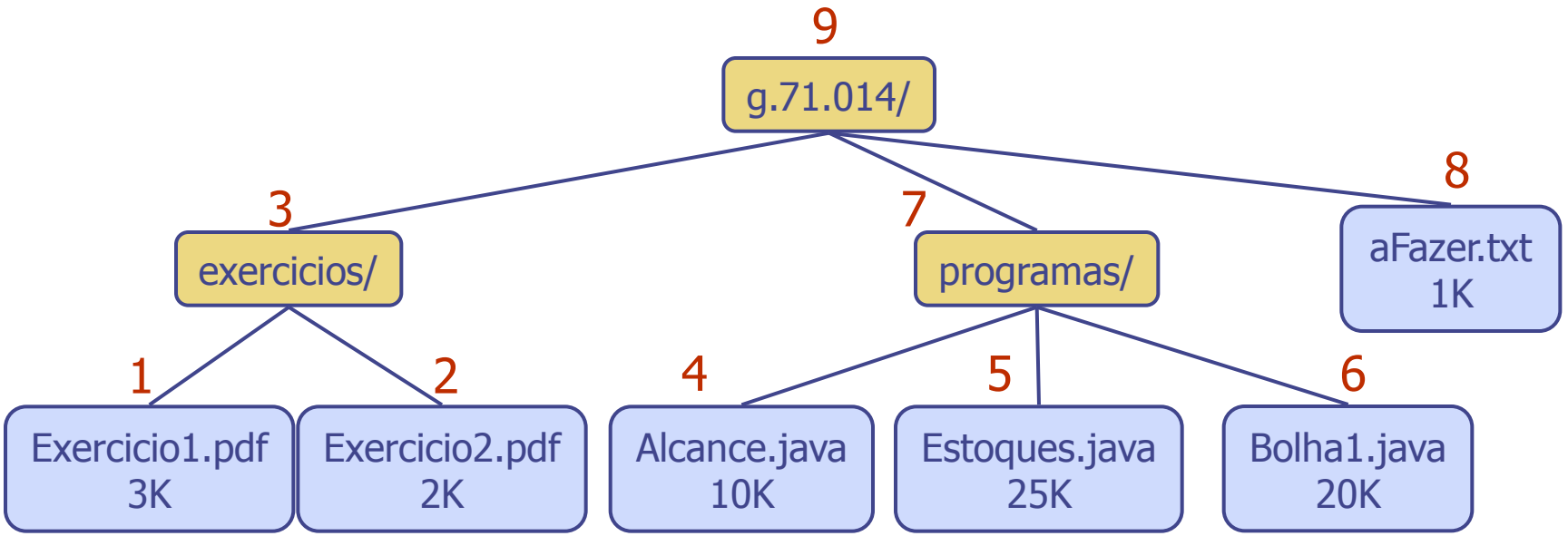
Algoritmo ***preOrder*****(*****v*****)**
    visite**(*****v*****)**
    para cada filho ***w*** de ***v***
        preorder **(*****w*****)**



Travessia pós ordem

- Em uma travessia pós-ordem, um nó é visitado depois de seus descendentes
- Aplicação: Computar o espaço usado por diretórios, subdiretórios e arquivos

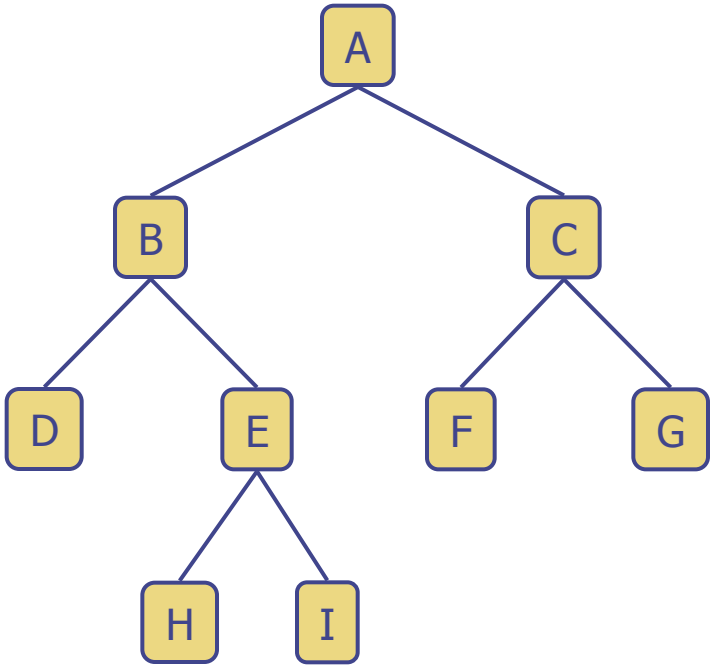
Algoritmo ***postOrder*****(*****v*****)**
  para cada filho ***w*** of ***v***
    postOrder **(*****w*****)**
  visite**(*****v*****)**



Árvore binária

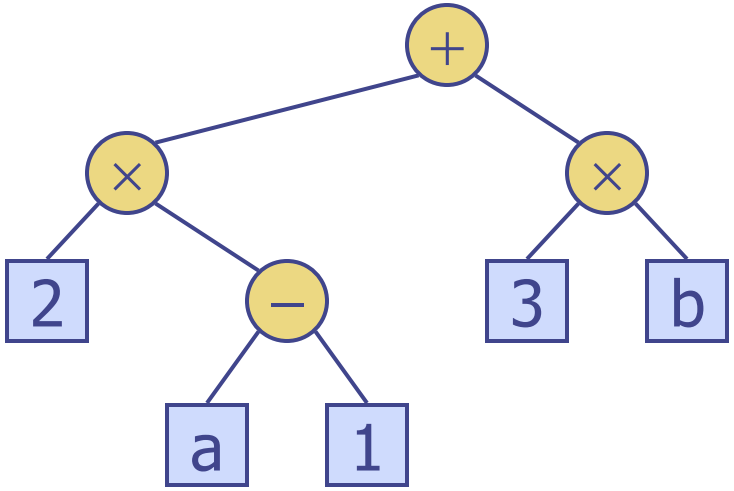
- Uma árvore binária é uma árvore com as seguintes propriedades:
  - Cada nó interno tem, no máximo, dois filhos
    - Arvore binária própria é aquela em que cada nó tem exatemente zero ou dois filhos
  - Os filhos de um nó é um par ordenado
- Chamamos os filhos de um nó de filho da esquerda e filho da direita
- Podemos, também, definir uma árvore binária recursivamente como:
  - uma árvore consistindo de um único nó, ou
  - Uma árvore cuja raiz tem um par ordenado de filho, cada um dos quais é uma árvore binária

- Aplicações:
  - Expressões aritméticas
  - Processo de decisão
  - busca



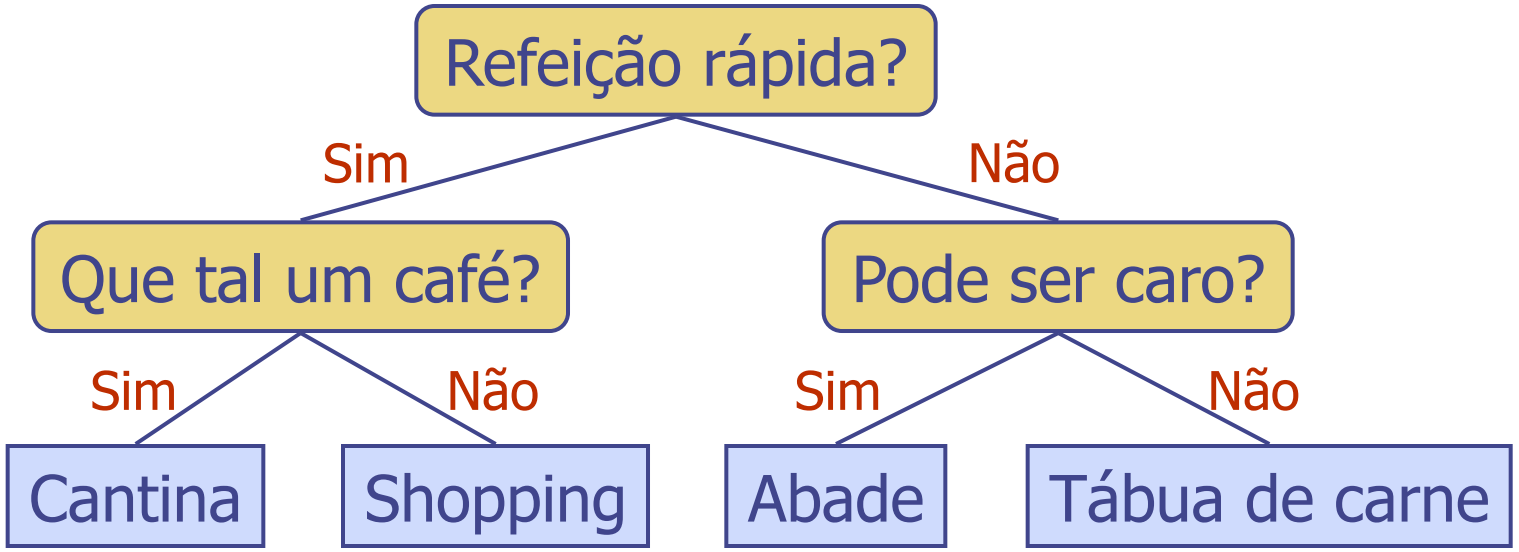
Árvore de expressões aritméticas

- Árvore binária associada com uma expressão aritmética
  - Nós internos: operadores
  - Nós externos: operandos
- Exemplo: árvore da expressão aritméticapara a expressão $(2 \times (a - 1) + (3 \times b))$



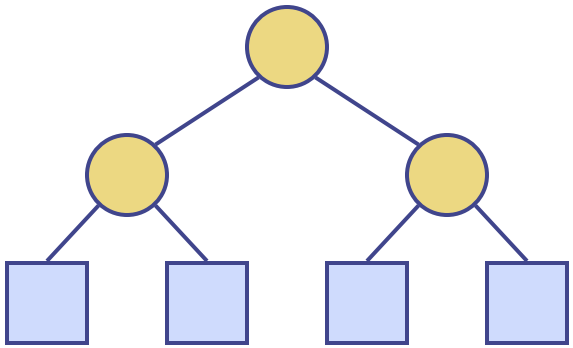
Árvore de decisão

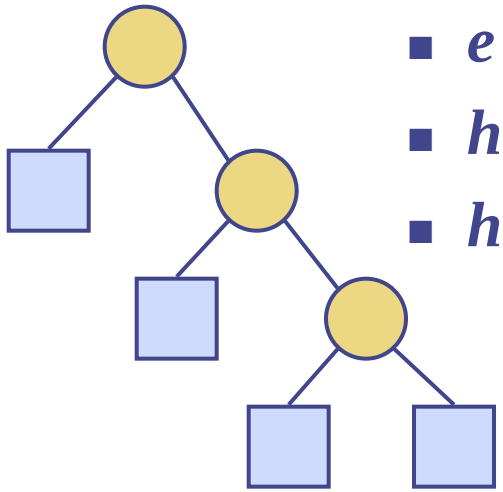
- Árvore binária associada com um processo de decisão
  - Nós internos: questões com respostas sim/não
  - Nós externos: decisões
- Exemplo: Onde jantar



Propriedades de AB (BT)

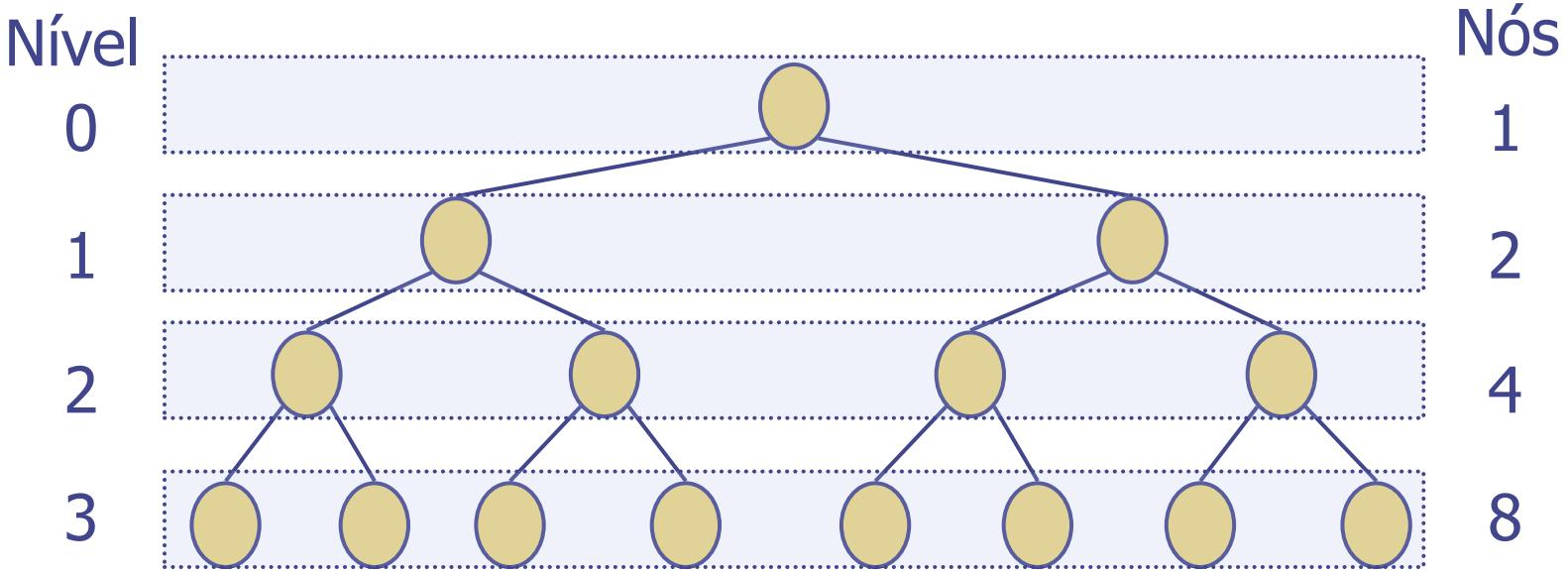
- Notação
  - n número de nós
  - e número de nós externos
  - i número de nós internos
  - h altura (*height*)





- Propriedades:
  - $e = i + 1$
  - $n = 2e - 1$
  - $h \leq i$
  - $h \leq (n - 1)/2$
  - $e \leq 2^h$
  - $h \geq \log_2 e$
  - $h \geq \log_2 (n + 1) - 1$

Propriedades de AB (BT)



Número máximo de nós em um nível h é 2^h

Número total de nós é, no máximo é $2^{h+1} - 1$

TAD Árvore Binaria

- O TAD ArvoreBinaria possui os métodos de árvore.
- Métodos adicionais:
  - Nó leftChild(v)
    - Retorna o filho esquerdo de V
  - Nó rightChild(v)
    - Retorna o filho esquerdo de V
  - Nó hasLeft(v)
    - Retorna se V tem filho esquerdo
  - Nó hasRight(v)
    - Retorna se V tem filho direito

- Métodos de atualização podem ser definidos por estruturas de dados que implementam o TAD ArvoreBinaria

Travessia em ordem

- Na travessia inorder, um nó é visitado depois do filho da esquerda e antes do filho da direita
- Aplicação: Desenhar uma árvore binária
  - x(v) = colocação de v
  - y(v) = profundidade de v

Algoritmo ***inOrder*(*v*)**

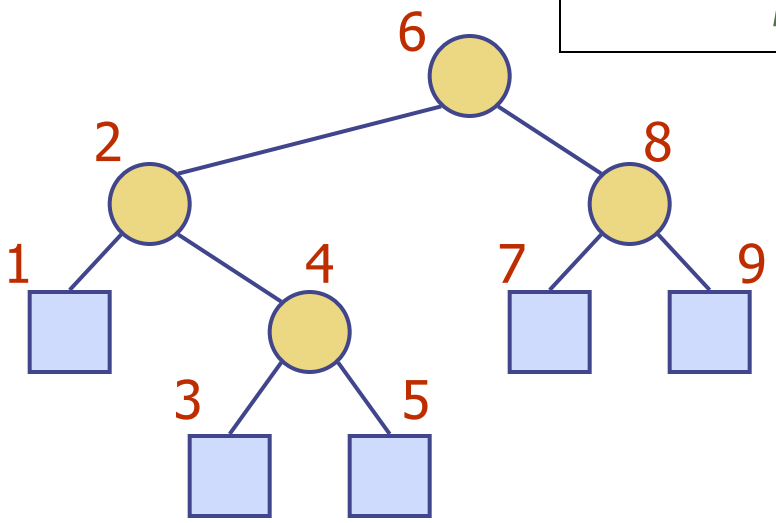
se (*isInternal* (*v*))

inOrder (*leftChild* (*v*))

visite(*v*)

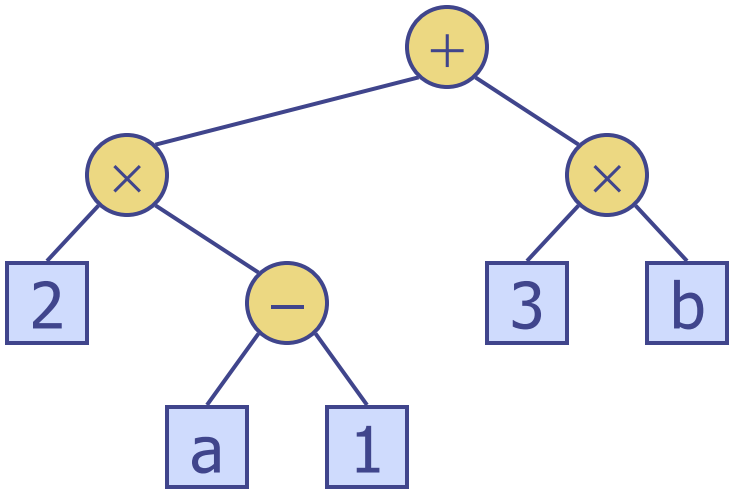
se (*isInternal* (*v*))

inOrder (*rightChild* (*v*))



Impressão de expressões aritm.

- Especialização de uma travessia inorder
  - Imprime operando/operador quando visita o nó
  - imprime "(" antes de visitar o filho da esquerda
  - imprime ")" depois de visitar o filho da direita



Algoritmo *printExpression*(*v*)

se (*isInternal* (*v*))

print("(")

inOrder (*leftChild* (*v*))

print(*v.element* ())

se (*isInternal* (*v*))

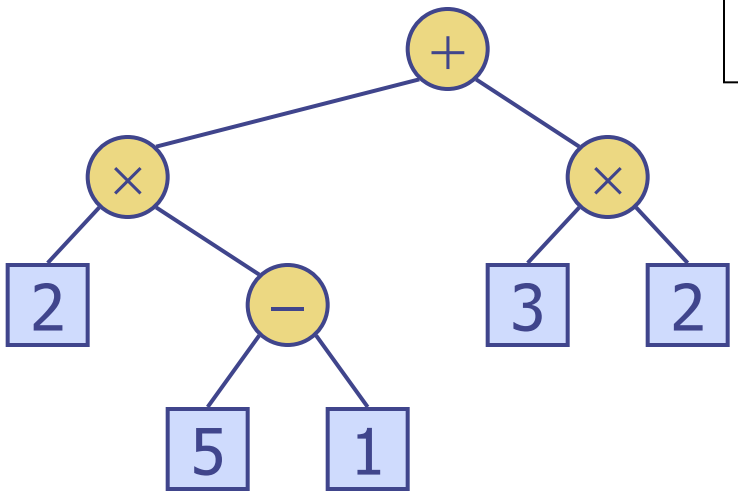
inOrder (*rightChild* (*v*))

print (")")

((2 × (a – 1)) + (3 × b))

Avaliação de expressões aritm.

- Especialização da travessia pós-ordem
  - Método recursivo retorna o valor de uma subárvore
  - Ao visitar um nó interno, combina os valores das subárvores



Algoritmo *evalExpr*(*v*)

    se (*isExternal* (*v*))

        return *v.element* ()

    senão

        x ← *evalExpr*(*leftChild* (*v*))

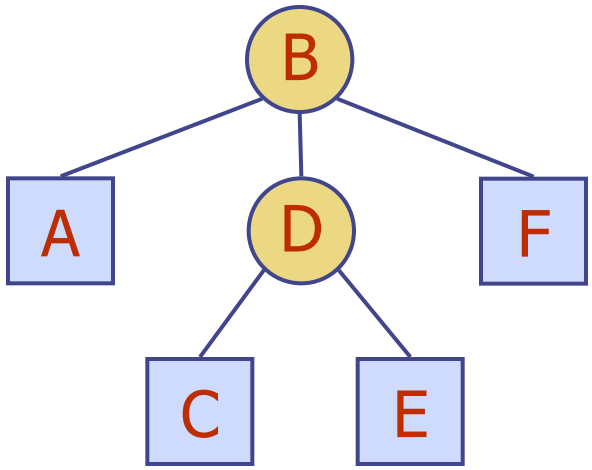
        y ← *evalExpr*(*rightChild* (*v*))

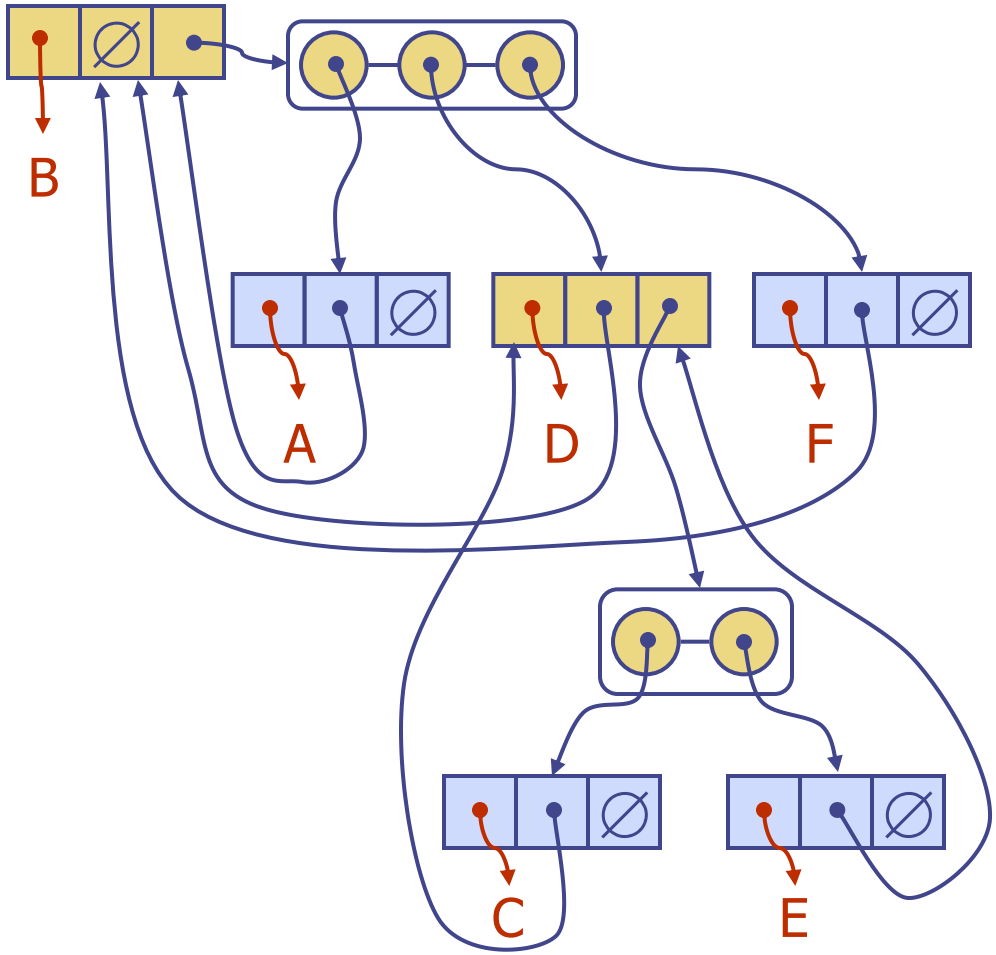
        ◊ ← operador em *v*

        return *x* ◊ *y*

Estrutura de dados para árvores

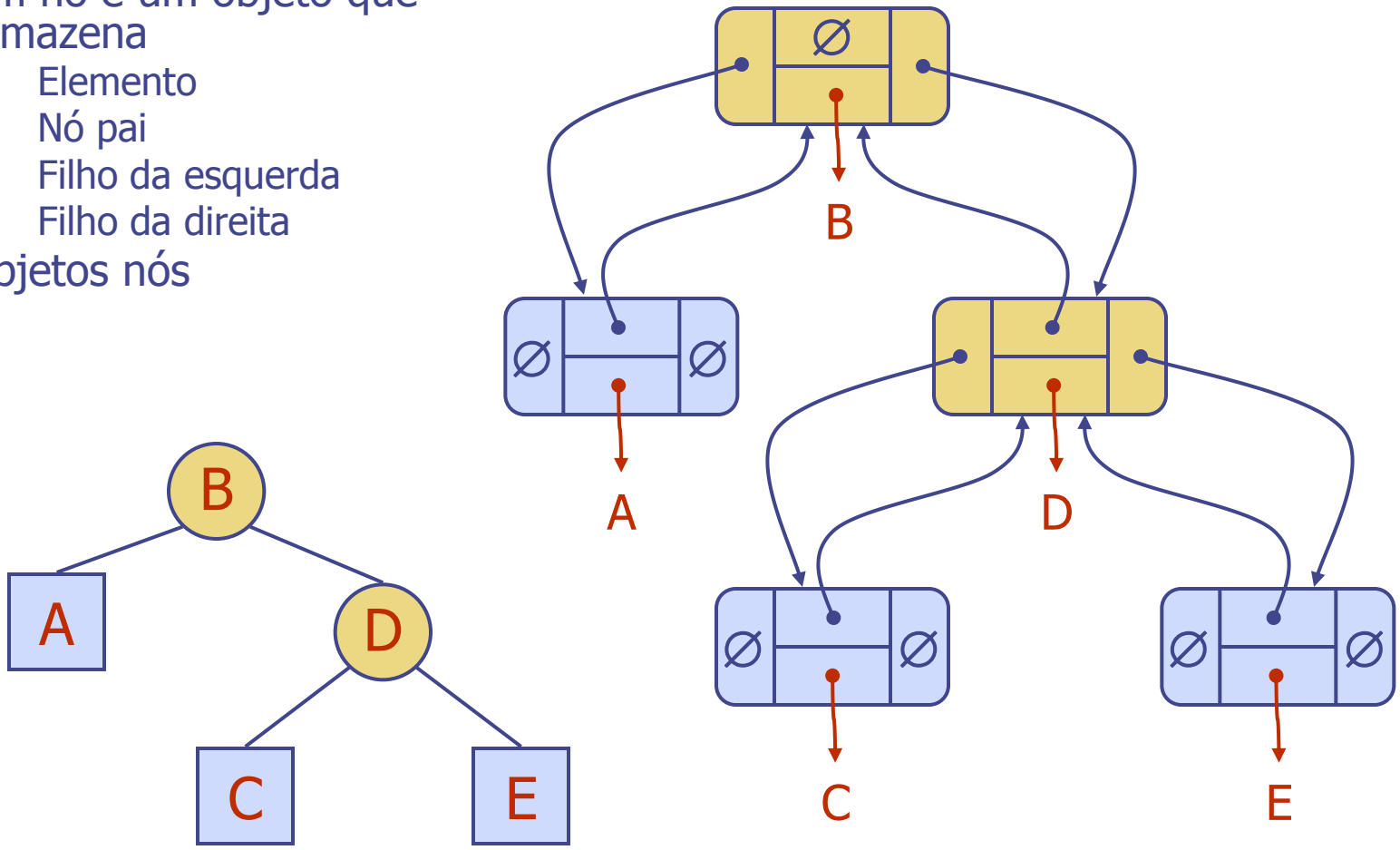
- Um nó é um objeto que armazena
  - Elemento
  - Nó pai
  - Nós Filhos (Sequência, Vector, Array, etc)
- Objetos nós





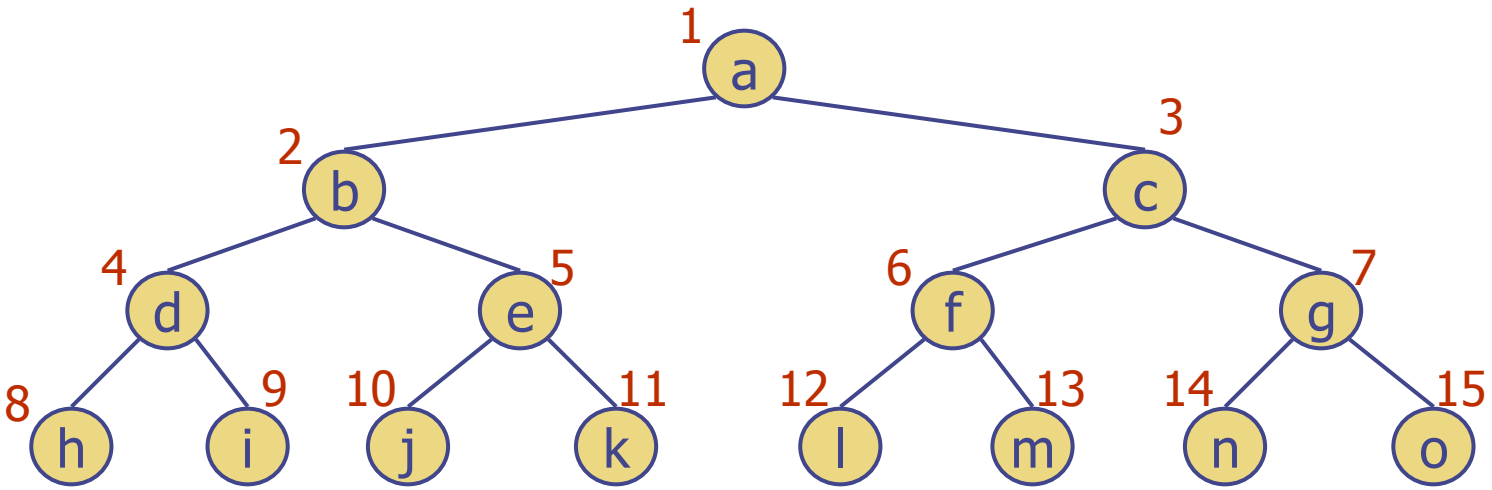
Estrutura de dados para AB

- Um nó é um objeto que armazena
  - Elemento
  - Nó pai
  - Filho da esquerda
  - Filho da direita
- Objetos nós



Estrutura de dados para AB

- Podemos usar um *array*

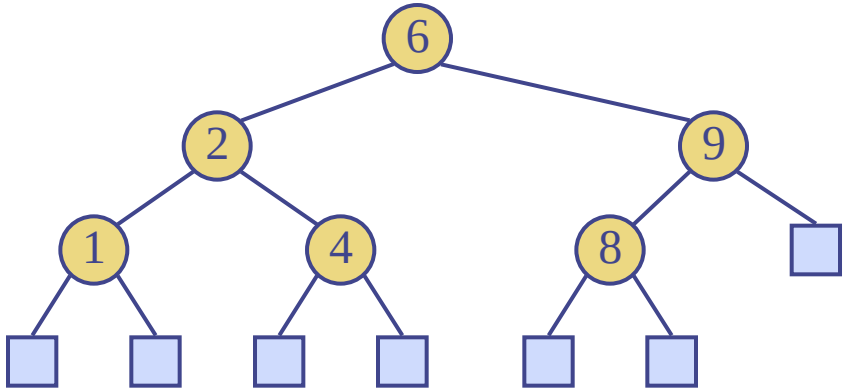


a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Árvore de pesquisa binária

- Uma árvore de pesquisa binária é uma árvore binária armazenando chaves (ou itens) em seus nós internos e satisfazendo a seguinte propriedade:
  - Seja u, v e w três nós tais que u é nó esquerdo de v e w é o nó direito. Temos $key(u) \leq key(v) \leq key(w)$
- Nós externos não armazenam itens (null)

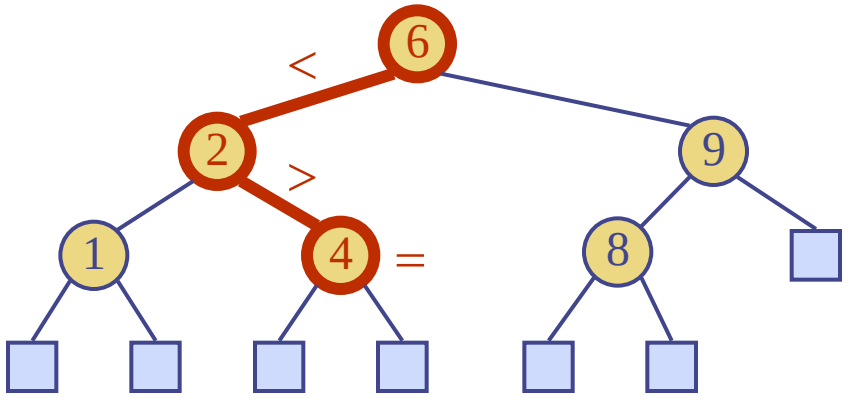
- Uma travessia em ordem visita as chaves em ordem crescente



Busca

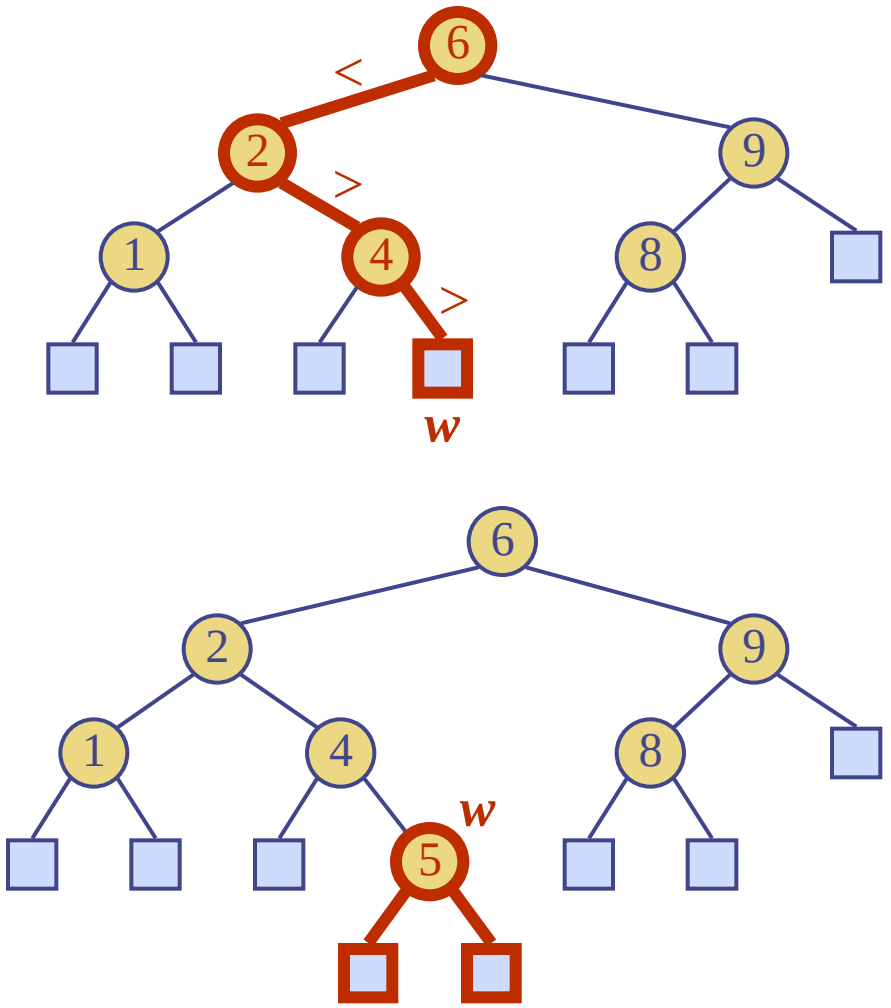
- Para procurar uma chave ***k***, procuramos a partir da raiz comparando com a chave do nó.
- O próximo nó depende da comparação da chave pesquisada com a chave do nó atual
- Se chegar em uma folha e não encontrar a chave, retorna-se null
- Exemplo: find(4):
  - chama algoritmo TreeSearch(4,root)

Algoritmo *TreeSearch*(*k*, *v*)
  se *T.isExternal* (*v*)
    retorne *v*
  se $k < key(v)$
    retorne *TreeSearch*(*k*, *T.left*(*v*))
  senão se $k = key(v)$
    retorne *v*
  senão $\{ k > key(v) \}$
    retorne *TreeSearch*(*k*, *T.right*(*v*))



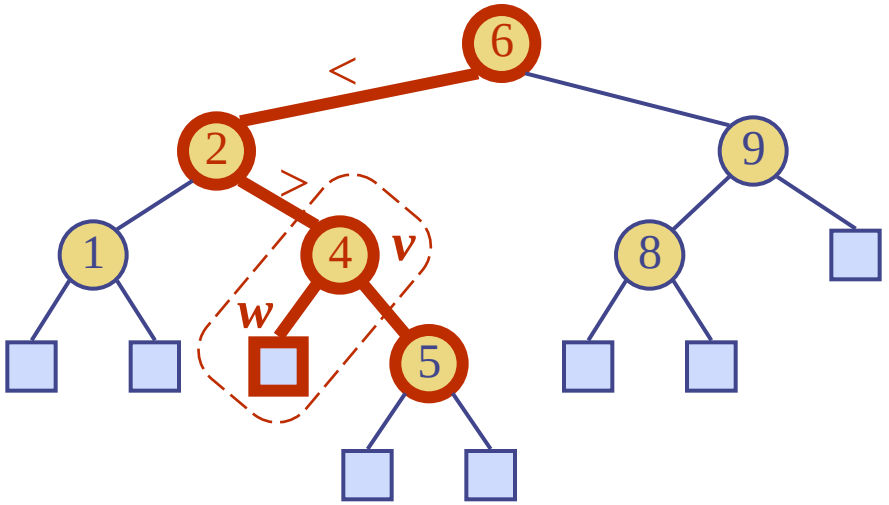
inserção

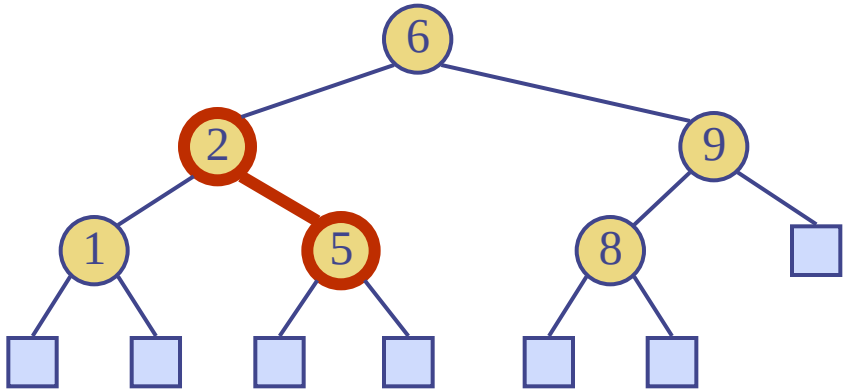
- Para executar inser(k, o), procura-se pela chave k
- Assumindo que k ainda não está na árvore, w será a folha encontrada pela busca
- Inserimos k no nó w
- Exemplo: inserir 5



remoção

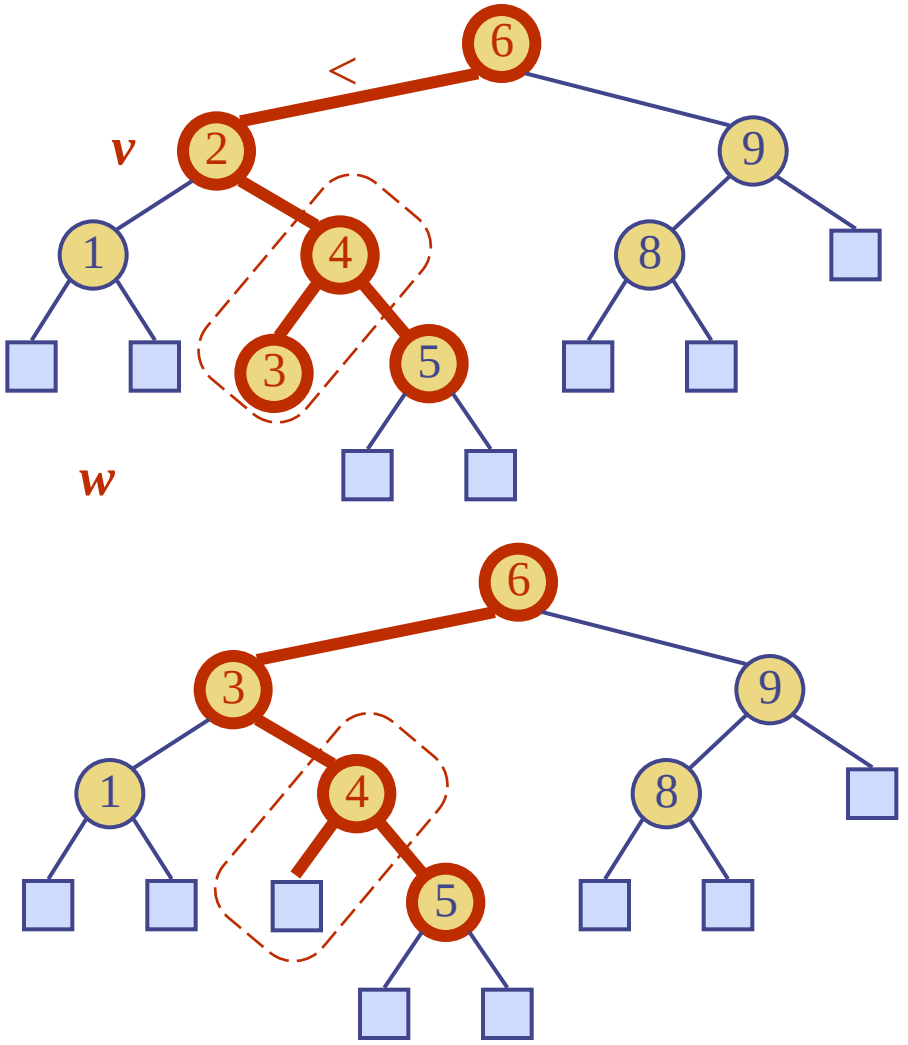
- Para executar remove(*4*), procuramos pela chave *4*





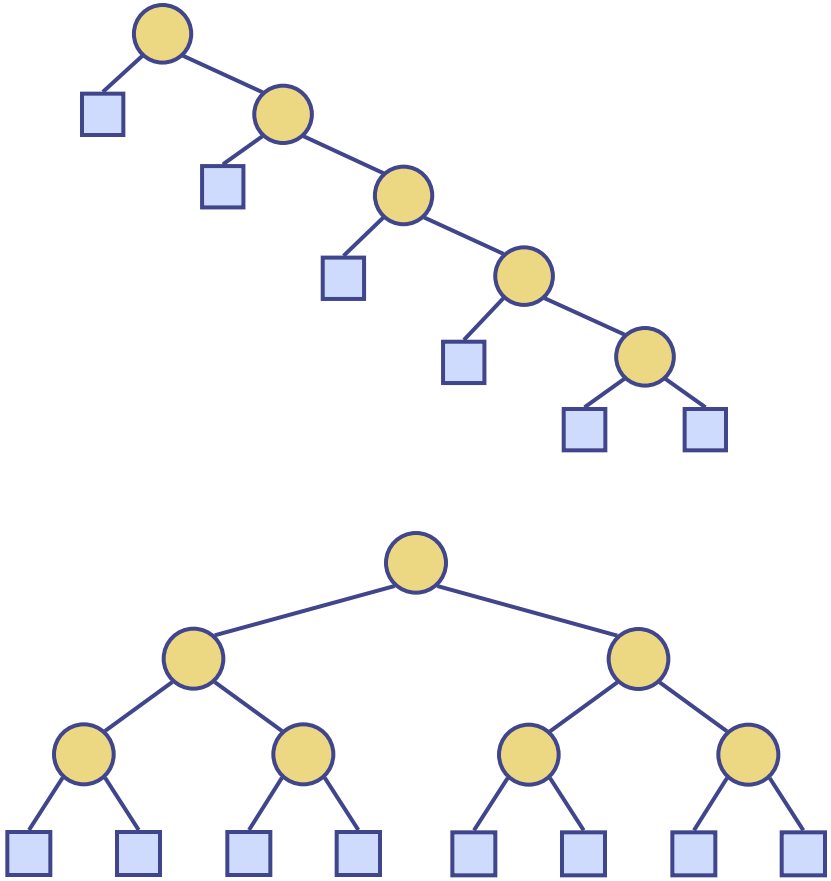
remoção

- Para executar remove(***2***), procuramos pela chave ***2***
- Fazemos um caminhamento em ordem na subárvore direita do nó 2 e até encontrar o primeiro nó



Desempenho

- Considere um dicionário com n itens, implementado com uma árvore binária de pesquisa de altura h
  - o espaço usado é $O(n)$
  - métodos find, insert e remove executam em tempo $O(h)$
- A altura h é $O(n)$ no pior caso e $O(\log n)$ no melhor caso



Dúvidas