Prawa działań na potęgach

Potęga to skrócony zapis mnożenia wielu jednakowych czynników. Zamiast pisać: $\underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 5}_{20\ razy}$ piszemy 5^{20} itp. Liczbę stojącą „u dołu" (w tym przypadku liczbę 5) nazywamy *podstawą* potęgi, a liczbę „u góry" *wykładnikiem*.

Obowiązują dwie umowy:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{dla } a \neq 0$$

(znak $\neq$ czytamy „różne od"). Na przykład: $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$. oraz

$$a^0 = 1 \qquad \text{dla } a \neq 0$$

Czyli na przykład $7^0 = 1$, $(-2)^0 = 1$, $(\frac{2}{3})^0 = 1$ itd.

Mamy następujące prawa działań na potęgach:

I) $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$
II) $a^n : a^k = a^{n-k}$ lub w postaci ułamka: $\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k}$
III) $(a^n)^k = a^{n \cdot k}$

Na przyład: $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$ oraz $(\frac{2^{19}}{2^{15}} = 2^{19-15} = 2^4 = 16$. Oczywiście, zazwyczaj takie dodawania wykonujemy w pamięci i nie stosujemy tak długiego zapisu.

Zauważ, że powyższe prawa mówią, co należy zrobić z wykładnikami, gdy ustalona jest podstawa.

Kolejne prawa dotyczą sytuacji, gdy mamy do czynienia z różnymi podstawami, ale wykładnik jest wspólny:

IV) $(ab)^n = a^n b^n$
V) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$

Na przykład: $6^4 = (2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$ oraz $\frac{12^3}{4^3} = (\frac{12}{4})^3 = 3^3 = 27$.

Przykłady

1. Udowodnij, że $4^6 = 8^4$. Mamy: $4^6 = (2^2)^6 = 2^{2 \cdot 6} = 2^{12} = 2^{3 \cdot 4} = (2^3)^4 = 8^4$.
2. Która liczba jest większa: 2^{45} czy 3^{30}? Mamy: $2^{45} = 2^{3 \cdot 15} = (2^3)^{15} = 8^{15}$, gdy tymczasem $3^{30} = 3^{2 \cdot 15} = (3^2)^{15} = 9^{15}$, a to jest liczba większa niż 8^{15}.

Zadania (potęgi i nie tylko)

1. Oblicz (zanim zaczniesz obliczać – pomyśl!)
   a) $11 + 13 + 15 + 7 + 9 + 5$
   b) $293 + 347 - 189 + 54 - 11 + 7$
   c) $1031 + 1798 - 31 + 1212$
   d) $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 49 + 50$
   e) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512$

2. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias i oblicz:
   a) $11 \cdot 19 + 11$
   b) $13 \cdot 18 - 8 \cdot 13$
   c) $7 \cdot 197 + 21$
   d) $7 + 14 + 21 + 28$
   e) $131 \cdot 17 + 131 \cdot 3$
   f) $19 \cdot 19 + 19$
   g) $101 \cdot 101 - 101$
3. Oblicz kwadraty liczb i zapamiętaj je!

a) $1^2 =$	f) $6^2 =$	k) $12^2 =$	p) $17^2 =$
b) $2^2 =$	g) $7^2 =$	l) $13^2 =$	q) $18^2 =$
c) $3^2 =$	h) $8^2 =$	m) $14^2 =$	r) $19^2 =$
d) $4^2 =$	i) $9^2 =$	n) $15^2 =$	s) $20^2 =$
e) $5^2 =$	j) $11^2 =$	o) $16^2 =$	

4. Zapisz w postaci potęgi możliwie małej liczby:

a) $256 =$	c) $125 =$	e) $243 =$	g) $729 =$
b) $81 =$	d) $64 =$	f) $512 =$	h) $216 =$

5. Wyłącz wspólny czynnik przed nawias:
   1. $2^2 + 2^4$
   2. $2^2 - 2^3 + 2^4$
   3. $3^4 + 3^5 + 6^4 + 12^5$
6. Przedstaw w postaci jednej potęgi:
   a) $3^4 \cdot 9^4$
   b) $125^7 : 25^{10}$
7. Przedstaw w postaci potęgi podanej obok liczby:
   a) 125^7, 5
   b) 81^4, 3
   c) 16^6, 8
8. (*) Uporządkuj rosnąco liczby:
   a) $44^4, 4^{44}, (4^4)^4, 4^{4^4}$.
   b) $32^9, 16^{11}, 65^8, 3^{22}$.
9. Ustal, ile zer ma na końcu liczba:
   a) $2^5 \cdot 5^7$
   b) $2^6 \cdot 5^3$
   c) $4 \cdot 5^5$
   d) $4^8 \cdot 75^5$
   e) $12^4 \cdot 50^3$.
10. Oblicz:
   a) $\frac{2\cdot 3^{20} - 5\cdot 3^{19}}{9^9}$ (Odpowiedź: 3)
   b) $\frac{(3^{15}+3^{12})\cdot 2^9}{(3^{14}+3^{12})\cdot 1024}$ (Odpowiedź: $\frac{7}{5}$)