Aufgabe 1

Es sei $t := t(a, b, c)$ und o.B.d.A. $b = 1$. Dann ist $c \geq \frac{1}{a} = t$ oder $\frac{1}{a} \geq c = t$. Im ersten Fall folgt mit der Dreiecksungleichung $1 + \frac{1}{t} = b + a > c \geq t$ bzw. $t^2 - t - 1 < 0$, da $t \geq 1 > 0$ aufgrund $c \geq b \geq a > 0$. Die ist äquivalent zu $1 \leq t < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Sei nun $t \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und wir betrachten den zweiten Fall. Dann ist $a \leq \frac{1}{t} = \frac{2\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ und also $t = c < a + b \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq t$, was ein Widerspruch ist. Es kommen also keine weiteren t, außer dem schon bestimmten Intervall $1 \leq t < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, in Frage. Diese Werte werden auch angenommen, denn die Größen $a = \frac{1}{t}, b = 1$ und $c = t$ erfüllen die Dreiecksungleichung (siehe oben) und es gilt $t(a, b, c) = t$.

Aufgabe 2

Antwort: Genau alle Zweierpotenzen (mit Exponenten aus $\mathbb{N}\backslash\{0\}$) werden dreimal angenommen (alle anderen Zahlen aus $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ genau zwei-, die Eins als einzige Zahl vier mal).
Beweis: Der Einfachheit halber schreiben wir im Folgenden für $a_1 + a_2 + \cdots + a_m =: S(m)$. Wegen $a_1 \geq 0$ folgt induktiv auch $a_n \geq 0$ für alle $n \geq 1$, sodass die Folge zuerst einmal wohldefiniert ist. Offenbar ist wegen $a_{n+2} = \left[\sqrt{S(n+1)}\right] \geq \left[\sqrt{S(n)}\right] = a_{n+1}$ für $n \geq 1$ die Folge auch monoton steigend und nimmt nur positive, ganze Zahlen an. Es ist $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1, a_5 = 2$, damit ist dieser Fall abgehandelt. Wir zeigen nun induktiv für natürliche $l \geq 1$: Ist n der kleinste Index mit $a_n = 2^l$ (dass ein solcher existiert, folgt mit dem Induktionsbeweis), so ist $S(n-1) = 2^{l+1}$, und für jeden Wert von k im Bereich von 0 bis 2^l gilt $a_{n+2k+1} = a_{n+2k+2} = 2^l + k$:
Für $l = 1$ ist $n = 5$ und offensichtlich ist $S(5-1) = 4 = 2^{l+1}$. Sei nun nach Induktionsvoraussetzung $a_n = 2^l$ und $S(n-1) = 2^{l+1}$. Wir zeigen nun induktiv für $0 \leq k \leq 2^l$, dass $S(n+2k) = \left(2^l + k + 1\right)^2 - 2^l - 3k - 1$ und $S(n+2k+1) = \left(2^l + k + 1\right)^2 - 2k - 1$ ist:
Es ist $S(n) = S(n-1) + a_n = 2^{l+1} + 2^l = \left(2^l + 1\right)^2 - 2^l - 1 - 3 \cdot 0$. Insbesondere ist $S(n) < \left(2^l + 1\right)^2$, also $a_{n+1} \leq 2^l$. Aufgrund der Monotonie folgt $a_{n+1} = 2^l$. Analog ist $S(n+1) = S(n) + a_{n+1} = \left(2^l + 1\right)^2 - 2^l - 1 - 3 \cdot 0 + 2^l + 0 = \left(2^l + 1\right)^2 - 2 \cdot 0 - 1$ und $a_{n+2} = 2^l$. Sei nun $0 < k \leq 2^l$ beliebig und es gelte nach Induktionsvoraussetzung $S(n+2k-1) = \left(2^l + k\right)^2 - 2(k-1) - 1$ und $a_{n+2k} = 2^l + k - 1$. Dann ist $S(n+2k) = \left(2^l + k\right)^2 - 2k + 1 + 2^l + k - 1 = 2^{l+1} + 2k2^l + k^2 - k + 2^l = 2^{l+1} + 2(k+1)2^l - 2^l + (k+1)^2 - 3k - 1 = \left(2^l + k + 1\right)^2 - 2^l - 3k - 1$. Also ist $a_{n+2k+1} \leq 2^l + k$. Andererseits ist $S(n+2k) = \left(2^l + k\right)^2 - 2k + 1 + 2^l + k - 1 = \left(2^l + k\right)^2 + \left(2^l - k\right) \geq \left(2^l + k\right)^2$ für $k \leq 2^l$, weswegen $a_{n+2k+1} \geq 2^l + k$, also $a_{n+2k+1} = 2^l + k$ ist.
Damit ist auch $S(n+2k+1) = S(n+2k) + a_{n+2k+1} = \left(2^l + k + 1\right)^2 - 2^l - 3k - 1 + 2^l + k = \left(2^l + k + 1\right)^2 - 2k - 1$ und $a_{n+2k+2} \leq 2^l + k$. Wegen der Monotonie ist $a_{n+2k+2} \geq a_{n+2k+1} = 2^l + k$, also $a_{n+2k+2} = 2^l + k$. Dies schließt die innere Induktion ab.
Insbesondere ist dann auch $S\left(n + 2 \cdot 2^l\right) = \left(2^l + 2^l + 1\right)^2 - 2^l - 3 \cdot 2^l - 1 = \left(2^{l+1} + 1\right)^2 - 4 \cdot 2^l - 1 = \left(2^{l+1}\right)^2$. Damit ist $a_{n+2^{l+1}+1} = 2^{l+1}$. Aus Monotoniegründen ist dann auch dies der kleinste Index, sodass die Folge diesen Wert annimmt. Damit ist auch der äußere Induktionsbeweis abgeschlossen. $\square$

Aufgabe 3

Da wir es im Folgenden häufiger benötigen, wollen wir mit UST de Umkehr des Satzes von Thales bezeichnen. Desweiteren seien die Punkte wie in der Aufgabenstellung bezeichnet, d.h. P auf AC usw.

Wegen UST (und den rechten Winkeln) liegen P und Q auf dem Thaleskreis mit Durchmesser AD. Ihn wollen wir mit k_1 bezeichnen. Analog liegen R und S auf dem Thaleskreis k_2 mit Durchmesser DB. Da die drei Punkte A, D und B auf einer Geraden liegen, ist die Gerade durch C und D, die wir mit g bezeichnen wollen, eine gemeinsame Tangente an beide Kreise (da sie senkrecht zu den Durchmessern steht und durch einen Randpunkt verläuft).

Auch aufgrund von UST liegen Q und R auf dem Thaleskreis mit Durchmesser AE und P sowie S auf dem mit Durchmesser CD. Sie seien mit k_3 bzw. k_4 bezeichnet. Da die drei Punkte D, E und C auf einer Geraden liegen, ist die Gerade AB gemeinsame Tangente dieser beiden Kreise.

Bei der Inversion am Kreis geht ein Kreis K durch den Mittelpunkt M des Inversionskreises in eine Gerade über; in eine Parallele zur Tangenten an K in M. Diese Tatsache werden wir nun nutzen, wenn wir die Figur am Kreis um D durch C invertieren:

Die Tangente an k_1 durch D ist g. Dann geht also durch die Inversion k_1 in eine Gerade g_1, die parallel zu g ist, über. Analog gehe k_2 in die Gerade g_2 über. Diese ist aus gleichen Gründen auch parallel zu g.

Weiterhin ist die Gerade durch A und B Tangente in D an diesen Kreis, senkrecht also auf g. Also geht k_3 in eine Gerade g_3 über, die senkrecht zu g steht. Aus analogen Gründen geht k_4 in eine Gerade g_4 über, die auch senkrecht zu g steht.

Nun ist P der eindeutige von D verschiedene Schnittpunkt von k_1 und k_4. Also ist P', womit wir das Bild dieses Punktes bezüglich der Inversion bezeichnen wollen, der eindeutige Schnittpunkt (im Endlichen) der Geraden g_1 und g_4. Analog sind Q', R' und S' die Schnittpunkte von g_1 mit g_3, g_2 mit g_3, resp. g_2 mit g_4. Sie bilden also ein Rechteck, da sie die Schnittpunkte zweier Paar Parallelen, die senkrecht aufeinander stehen, sind. Insbesondere besitzt dieses Rechteck einen Umkreis k. Durch nochmalige Inversion am gleichen Kreis werden die Punkte P' bis S' wieder auf ihre ursprünglichen Punkte abgebildet. Dabei geht k über in einen Kreis oder eine Gerade, auf der alle 4 Punkte P bis S liegen. $\square$

Aufgabe 4

Antwort: Genau für die Polynome (mit nicht-negativen Koeffizienten) p existiert eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f^{(3)} = p$, die nicht die Form $p(n) = n + m$ mit $3 \not| m$ besitzen.

Beweis: Ist p mindestens quadratisch oder „linear und Leitkoeffizent > 1“, so gibt es unendlich viele Zahlen asu $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, die von p nicht angenommen werden (da für $x \geq 1$ gilt, dass $p'(x) \geq 2$, d.h. $p(x+1) \geq p(x) + 2$). Diese Menge nennen wir M. Wir definieren nun f rekursiv:

Ist $p(0) = 0$, so definiere $f(0) := 0$ und starte dann im Folgenden mit 1 anstatt mit 0. Sonst definiere $f(0) := k$, mit k aus M. Dann $f(k) := l$ mit $l \in M\backslash\{k\}$, dann $f(l) := p(0), f(p(0)) := p(k)$, usw. Da p streng monoton steigend ist, führt dies nicht in Zyklen, d.h. es gibt keine Definitionsschwierigkeiten.

Sei m nun der kleinste Wert, für den f bisher noch nicht definiert ist. Dann verfahre analog: Definiere $f(m) := x$, mit einem $x \in M$, welches verschieden von allen bisherigen

aus dieser Menge verwendeten Elementen ist, $f(x) := y$, mit analoger Voraussetzung, $f(y) := p(m), f(p(m)) := f(p(x))$, usw.
Genauer gesagt muss man nicht erst alle Funktionswerte von f aus der Folge $m, x, y, p(m), p(x), \ldots$ festlegen, bevor man „den nächsten Durchlauf“ startet: Da für jede nat. Zahl $n > 0$ die Folge n,$p(n)$,$p(p(n))$, usw. streng monoton wachsend ist, kann man für eine nat. Zahl in endlicher Zeit feststellen, ob sie in einer solch oben auftretenden Folge $m, x, y, p(m), p(x), \ldots$ vorkommt: Tut sie dies nicht bis zu der Stelle, wo alle 3 Werte $p^{(n)}(m), p^{(n)}(x)$ und $p^{(n)}(y)$ größer sind als sie, so taucht sie auch in Zukunft nicht mehr auf. Dabei bezeichne $p^{(n)}$ die n-fache Iteration von p.
Auf diese Weise (da M unendlich viele Elemente enthält, ist jeder Schritt hier wohldefiniert und es kommt nicht zu einer „Mehrfachfestlegung“ ein und desselben Arguments von f) ist f für jede pos. ganze Zahl n definiert und offensichtlich gilt $f(f(f(n))) = p(n)$, nach Def. von f.
Bleiben noch die konstanten Polynome (trivialerweise $f := p$) und die der Form $p(n) = n + m$, mit einer festen pos. ganzen Zahl m (m=0 liefert trivialerweise $f = p = \mathrm{id}$).
Es ist $f(n)+m = f^{(3)}(f(n)) = f(f^{(3)}(n)) = f(n+m)$ für alle n und $f^{(3k)}(n) = f(n)+k\cdot m$ für alle nat. Zahlen n, k. Sei f nun so, dass es der Aufgabenstellung genügt, n beliebig, $f(n) = a, f(a) = b$. Wir betrachten nun die Folge, die entsteht, wenn man f auf das jeweils vorhergehende Folgenglied anwendet (wie oben), beginnend mit n: $n, a, b, n+m, a+m, b+m, n+2m, \ldots$
In den drei Teilfolgen, die jeweils nur jedes dritte Folgenglied betrachten, handelt es sich um arithmetische Folgen mit Schrittweite m. Lägen nun zwei der drei Werte n, a und b in der gleichen Restklasse modulo m, so gäbe es zwei verschiedene Indizes k, l mit $f^{(k)}(n) = f^{(l)}(n)$, d.h. die Folge würde periodisch werden. Dies ist aber ein Widerspruch zu $f^{(3k)}(n)$ streng monoton wachsend in k. Also sind n, $f(n)$ und $f^{(2)}(n)$ paarweise inkongruent modulo m. Außerdem taucht jeder genügend große Wert, der kongruent einem dieser drei Werte modulo m ist, irgendwann in dieser Folge auf, ist also als $f^{(k)}(n)$ darstellbar.
Sei n' nun eine nat. Zahl, die zu keinem dieser Werte kongruent modulo m ist. Dann sind dies $f(n')$ und $f(f(n'))$ auch. Denn sonst gäbe es Indizes k und l, sodass $f^{(k)}(n') = f^{(l)}(n)$ ist. Wendet man auf diese Gleichung ein bzw. zweimal f an, so erhält man rechts einen Wert, der kongruent n' modulo m ist und links einen, der kongruent $n, f(n)$ oder $f(f(n))$ modulo m ist, was im Widerspruch zur Definition von n' steht.
Also zerfallen die Restklassen modulo m in 3-er-Blöcke der Form $n, f(n), f(f(n))$. Insbesondere muss also m durch 3 teilbar sein. In jenem Fall liefert $f(n) = n + \frac{m}{3}$ das Gewünschte.
Genau für diejenigen Polynome (mit nicht-negativen Koeffizienten) p existiert eine Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit $f^{(3)} = p$, die nicht die Form $p(n) = n + m$ mit nicht durch 3 teilbarem m besitzen. $\square$
Anmerkung: Die Argumentationen lassen sich vollkommen analog auf das Problem $f^{(k)} = p$ mit k fest, pos. ganz, übertragen. Es ergibt sich dann, dass es für alle Polynome, bis auf die der Form $p(n) = n + m$ mit m nicht durch k teilbar, solche f gibt.