Universidad de los Andes
Departamento de Ingeniería Industrial
Probabilidad y Estadística I (IIND2106)
Profesor Coordinador: Mario Castillo
Profesores: Hernando Mutis
Instructores: Luis José Novoa, Juan Carlos Gutiérrez, Diana Lesmes, John Ríos, Carlos Castellanos, María Andrea Novoa.

Segundo Semestral 2010

Tarea 3

Instrucciones para la Entrega:
I. Normas para la Presentación de Tareas

- La tarea debe ser entregada en hojas blancas tipo block o cuadriculadas; tamaño carta, sin orillos, de preferencia impresas o con una presentación de calidad similar a impresa.
- La tarea debe estar grapada y las páginas deben estar numeradas.
- Debe respetarse el horario de entrega de las tareas. Después de la fecha y hora límites no se recibirán.
- Las tareas no se reciben por correo electrónico.
- La tarea debe realizarse en grupos de máximo 3 personas de cualquier sección.
- En la parte superior de todas las hojas debe aparecer claramente el nombre, código y sección de cada uno de los integrantes.
- El incumplimiento de alguna de las anteriores instrucciones tendrá un impacto negativo en la nota de esta tarea.
- Cualquier sospecha de fraude será tratada de acuerdo con el reglamento de la Universidad. **Fecha Máxima de Entrega:** viernes 15 de Octubre de 2010, antes de las 10:00 a.m**.**
- **Lugar de Entrega:** Casilleros Ingeniería Industrial ML - 7mo piso frente al ascensor.
- **Advertencia: En caso de entregar la tarea después de la fecha máxima de entrega o en un lugar diferente al especificado anteriormente, la nota de la Tarea será 0, sin excepciones.**

Si usted encuentra algún GAZAPO[1] en la solución correspondiente a esta tarea, por favor comuníquelo a j-navas@uniandes.edu.co. Si su observación es válida, se verá recompensada con un incremento del 5% en la nota de la tarea.

Punto 1 – Variables Aleatorias Discretas (20 pts.)

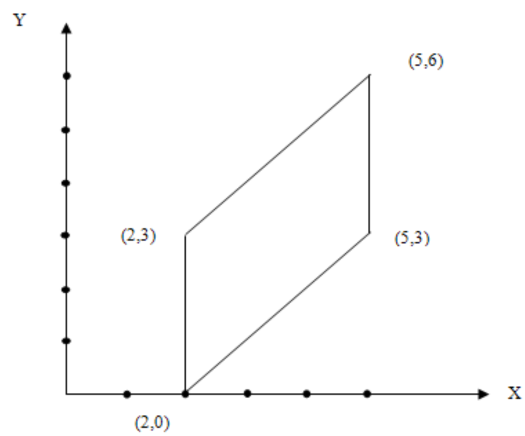
En la realización de un experimento de laboratorio, se usan termómetros en cuatro puntos de unión de la configuración de un equipo. Estos cuatro termómetros se seleccionan aleatoriamente de un recipiente que contiene siete. Sin que lo sepa el científico, tres de los siete miden incorrectamente la temperatura. Sea X el numero de termómetros defectuosos seleccionados y Y, el de termómetros no defectuosos elegidos.

a. (4 pts.) Halle la función de probabilidad conjunta de las variables X y Y.
b. (4 pts.) Halle la función de probabilidad acumulada de las variables X y Y.
c. (4 pts.) Calcule las funciones de probabilidad marginales de las variables X y Y.
d. (4 pts.) Halle el valor esperado de las variables X y Y, e interprete el resultado.
e. (4 pts.) ¿Son las variables X y Y independientes? Interprete el resultado.

[1] Yerro que por inadvertencia deja escapar quien escribe o habla. (Definición según La Real Academia de la Lengua Española)

Punto 2 – Variables Aleatorias Continuas (20 pts.)

Industrias "JJ" es una empresa del sector metalmecánico de Colombia dedicada a la fabricación de partes para motos. El producto estrella de la empresa son las bandas de freno RX-100. La variable aleatoria **X** representa el precio de venta por banda, en dólares, y la variable aleatoria **Y** representa los costos de fabricación por banda, en dólares. La variable aleatoria conjunta continua (**X**,**Y**) se distribuye uniformemente sobre el área de la siguiente figura:



a. (4 Pts.) Determine la función de densidad de probabilidad conjunta de las variables X y Y.
b. (3 Pts.) Determine las funciones de densidad de probabilidad marginales de X y Y.
c. (2 Pts.) ¿Cuál es el valor esperado de X y Y? ¿Cuál es la desviación estándar de X y Y? Interprete sus resultados.
d. (2 Pts.) ¿Son el precio de venta y los costos de fabricación por banda independientes?
e. (3 Pts.) Si las ganancias por banda se calculan como el precio de venta por banda menos los costos de fabricación por banda, calcule la probabilidad de que no se generen ganancias por banda. ¿Cómo puede interpretarse este resultado?
f. (3 Pts.) Si se sabe que el precio de venta, en dólares, por banda fue de 3 dólares, calcule el valor esperado los costos de fabricación por banda, en dólares. ¿Cómo puede interpretarse este resultado?
g. (3 Pts.) Calcule la probabilidad de que los costos de fabricación por banda sean mayor a 2 dólares, si se sabe que el precio de venta, en dólares, por banda fue de 3 dólares.

Punto 3 – Distribuciones Condicionales (15 pts.)

Juan y José están concursando en el nuevo programa del canal de televisión IJSA. En la prueba final para ganar 20 millones de pesos se encuentra con el siguiente reto. Hay 5 monedas dentro de 8 cajas de tal forma que puede haber máximo una moneda por caja. Primero concursa Juan quien debe escoger 4 cajas para encontrar el mayor número de monedas. Luego es el turno de José que deberá sacar en dos oportunidades las monedas faltantes. Para Ganar el premio deben sacar las 5 monedas.

A partir de la anterior información:

a. (5 pts.) Halle las funciones de probabilidad del número de monedas que encuentran Juan.
b. (5 pts.) Halle las funciones de probabilidad del número de monedas que encuentran José.
c. (5 pts.) Calcule la probabilidad de que Juan y José ganen el premio de 20 millones que ofrece el concurso.

Punto 4 – Suma de variables aleatorias independientes y TLC (10 pts.)

La compañía Mi Casa S.A. tiene 50 sucursales en toda la ciudad para las cuales ha fijado como política solicitar a su proveedor 100 unidades mensuales del producto que usan como materia prima fundamental en su negocio, para cada una de las sucursales. De la información histórica se sabe que la cantidad de producto que demanda cada una de las sucursales en un mes tiene una distribución uniforme entre 60 y 110 unidades. La compañía está analizando la posibilidad de hacer un solo pedido a su proveedor y almacenarlo en un expendio común para enviarlo a sus sucursales a medida que lo necesiten.

a. (3 pts.) Calcule la probabilidad de que en una sucursal escogida al azar la cantidad de materia prima utilizada no supere las 100 unidades.

b. (3 pts.) Calcule la probabilidad de que el promedio de la cantidad de materia prima utilizada por las 50 sucursales no supere las 100 unidades.

c. (4 pts.) Construya un modelo en Crystal Ball que permita calcular las probabilidades de los incisos anteriores, ¿qué puede concluir?

Punto 5 - Distribuciones Derivadas (15 Pts.)

Una variable aleatoria tiene una distribución Weibull con parámetros v, λ y β, si tiene la siguiente función de probabilidad acumulada.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < v \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-v}{\lambda}\right)^{\beta}} & x \geq v \end{cases}$$

El tiempo, en días, que se demora el ensamble de una componente para automóvil, se puede representar por medio de la VA Y, la cual depende de la VA X que tiene una distribución Weibull. Si la expresión por la cual se calcula Y es $Y = \left(\frac{X-v}{\lambda}\right)^{\beta}$, Demuestre que la VA Y tiene una distribución Exponencial con parámetro λ=1.

Punto 6 – Propiedades del Valor Esperado, Varianza y Covarianza (20 Pts.)

La gerencia de un establecimiento de comida rápida está interesada en el comportamiento conjunto de dos variables aleatorias definidas de la siguiente manera:

Y_1: Tiempo total que transcurre entre el instante en que el cliente llega al establecimiento y el momento en que abandona la ventanilla de servicio.
Y_2: Tiempo que un cliente espera en cola antes de llegar a la ventanilla de servicio.

Puesto que Y_1 incluye el tiempo que el cliente espera en la fila, $Y_1 \geq Y_2$. La distribución conjunta de los valores observados de Y_1 y Y_2 se puede representar mediante la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta (con el tiempo en minutos):

$$f_{Y_1 Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} e^{-y_1} & 0 \leq Y_2 \leq Y_1 \leq \infty \\ 0 & d.l.c \end{cases}$$

a. (4 Pts.) Grafique la región Y1- Y2 ≥ 1, y calcule P(Y1- Y2 ≥ 1).

b. (4 Pts.) Calcule el tiempo promedio de espera en cola de un cliente antes de llegar a la ventanilla de servicio.
c. (4 Pts.) Si el tiempo total que transcurre entre el instante en que el cliente llega al establecimiento y el momento en que abandona la ventanilla de servicio es de 3 minutos, calcule el tiempo promedio que el cliente debe esperar en cola antes de llegar a la ventanilla de servicio.
d. (4 Pts.) Encuentre el valor de la desviación del tiempo que un cliente debe esperar en cola antes de llegar a la ventanilla de servicio, si se sabe que el tiempo total que transcurre entre el instante en que el cliente llega al establecimiento y el momento en que se abandona la ventanilla de servicio es de 3.5 minutos.
e. (4 Pts.) Calcule la covarianza de las variables aleatorias Y1 y Y2, y concluya sobre la relación entre las dos variables.