**1.** Всюди, де є можливість активної участі людини, виникає проблема відшукання найкращого, тобто оптимального, рішення. Слово «оптимальний» походить від латинського optimus, що значить - найкращий, досконалий. Щоб знайти оптимальний серед множини різних варіантів, доводиться розв’язувати задачі на знаходження максимуму чи мінімуму певних показників, тобто найбільших чи найменших значень деяких величин. Обидва ці поняття – максимум (maximum) чи мінімум (minimum) об’єднуються єдиним терміном «екстремум» (від латинського extremum – крайнє). Задачі на відшукання максимуму чи мінімуму певних величин називаються екстремальними задачами. Методи дослідження різних типів екстремальних задач та їх розв’язування складають основу теорії оптимізації і дослідження операцій. Конкретні цілі, поставлені в задачі, об’єднуються в цільову функцію, екстремум якої треба знайти, а обмеження, що відтворюють нестачу відповідних ресурсів, визначають деяку множину значень величин, від яких залежить цільова функція, що задовольняють всім умовам задачі. Ця множина значень утворює допустиму множину задачі. Якщо цілі поставленої задачі описуються однією функцією, то задача називається однокритеріальною, в протилежному випадку – багатокритеріальною. Формально (математично) задача однокритеріальної мінімізації записується у вигляді

,  (1)

По аналогії з (1) задачу максимізації функції  на множині *X*будемозаписують у вигляді

,  (2)

Функція  називається ***цільовою функцією***, *X* – ***допустимою множиною***, а будь-який елемент  – ***допустимою точкою***. Якщо , то задачі (1)–(2) називаються ***сумісними***, в протилежному випадку – ***несумісними***. Формалізація екстремальної задачі полягає в точному визначенні її основних елементів: функції  i множини *X*. Цільова функція , яку часто називають також ***критерієм якості***, являє собою математичний опис мети, досягнення якої прагнуть при розв’язуванні реальної задачі. Допустима множина *X*визначає умови, в яких перебігає процес, що досліджується.

**2.**  1) Постановка задачі в реальних об’єктах. При постановці будь-яка практична задача спочатку формулюється в змістовних (реальних) термінах тієї галузі людської діяльності, де задача виникла.

2) Постановка задачі в математичних об’єктах (побудова математичної моделі). Якщо поставлену задачу не вдається розв’язати безпосередньо у тій формі, в якій вона сформульована, можна спробувати зробити це за допомогою математичних методів. Для цього потрібно описати умову задачі замість мови реальних об’єктів мовою математичних об’єктів (формальною мовою). Процес побудови такого опису називають формалізацією або побудовою математичної моделі.

3) Класифікація одержаної формальної (математичної) задачі і вибір методу для її розв’язання. При цьому, якщо одержана задача відноситься до певного класу, то метод вибирається, як правило, з вже існуючих. В протилежному випадку необхідно:

- дослідити властивості цільової функції, зокрема на неперервність i диференційованість;

- визначити умови існування розв’язку задачі при заданих обмеженнях;

- встановити необхідні, а по можливості i достатні, умови глобального або локального екстремуму;

- розробити аналітичні або чисельні методи відшукання розв’язку задачі.

4) Вибір засобів розв’язування задачі обраним методом. Зокрема, це може бути комп’ютер з програмним продуктом, який безпосередньо розв’язує задачу на рівні моделі. Якщо ж такої програми немає, то необхідно скласти алгоритм за обраним або розробленим методом і написати відповідну програму на одній з мов програмування (етап алгоритмізації, програмування та тестування).

5) Проведення обчислень на комп’ютері, одержання результатів в математичних об’єктах та їх аналіз. При цьому аналіз результатів обов’язково потрібен, оскільки в процесі розв’язування можуть бути одержані результати, які не задовольняють умову задачі, або взагалі є абсурдними.

6) Інтерпретація результатів в реальних об’єктах, яка полягає в тому, щоб з’ясувати реальний зміст одержаних результатів на мові відповідної галузі діяльності людини.

**3.** Модель – це матеріальна, знакова або уявна (мислена) система, що відтворює, імітує чи відображає принципи внутрішньої організації або функціонування, певні властивості, ознаки чи характеристики об’єкта дослідження (оригіналу), безпосереднє вивчення якого неможливе, ускладнене або недоцільне, i може замінити об’єкт дослідження в пізнавальному процесі з метою одержання нових знань про нього.

За своєю природою моделі поділяються на

- фізичні, що мають ідентичну з оригіналом природу;

- аналогові, природа яких відмінна від природи оригіналу, однак математичні формалізації, що їх описують, еквівалентні;

- знакові – формули, схеми, графіки тощо;

- уявні (мислені) – умоглядні конструкції, чуттєво-наочні образи тощо.

Прийоми моделювання можна умовно об’єднати в дві великі групи: **матеріальне** (предметне) та **ідеальне** (абстрактне) моделювання. До **матеріальних** відносяться такі способи моделювання, при яких дослідження ведеться на основі моделі, яка відтворює основні геометричні, фізичні, динамічні та функціональні характеристики об’єкту, що вивчається. Основними видами матеріального моделювання є **фізичне** та **аналогове** моделювання.

**Фізичним** прийнято називати моделювання, при якому реальному об’єкту співставляється його збільшена або зменшена копія з перенесенням властивостей процесів та явищ, які досліджуються, на модель на основі теорії подібності. **Аналогове** моделювання базується на аналогії процесів та явищ, які мають різну фізичну природу, але однаково описуються формально (одними й тими ж математичними формулами, логічними схемами i т.п.).

**Ідеальне** моделювання, яке базується не на матеріальній аналогії об’єкта i моделі, а на аналогії ідеальній, мисленій. Ідеальне моделювання носить теоретичний характер. Розрізняють два типи ідеального моделювання: **інтуїтивне** та **знакове**.

Під **інтуїтивним** розуміють моделювання, яке базується на інтуїтивному уявленні про об’єкт дослідження, який не піддається формалізації або не потребує її. Так, наприклад, життєвий досвід кожної людини може вважатися його інтуїтивною моделлю оточуючого світу. **Знаковим** називається моделювання, яке використовує моделі у вигляді знакових об’єктів будь-якого виду: схеми, графіки, формули, набори символів i т.д. **Важливим видом знакового** моделювання є **математичне моделювання**, при якому дослідження об’єкта здійснюється за допомогою моделі, що описується формальною мовою – мовою математики.

**Математична модель** являє собою систему математичних залежностей i відношень, які описують структуру і властивості реальних об’єктів, процесів, явищ, що досліджуються, та принципи їх функціонування. Математична модель дозволяє звести розв’язування реальної задачі до розв’язування математичної задачі, що дає можливість застосовувати добре вивчені i розроблені математичні методи.

Будь-яка математична модель повинна задовольняти дві основні вимоги:

- **Адекватність реальному об’єкту**. Модель повинна відображати найбільш суттєві зв’язки між величинами, що характеризують реальний об’єкт, враховувати властивості середовища, в якому перебігає досліджуваний процес, інформацію про початковий стан процесу, давати можливість передбачати майбутні стани процесу.

- **Розв’язуваність моделі**. Модель не повинна бути занадто складною і повинна забезпечувати можливість одержувати потрібну інформацію в прийнятний час з прийнятними витратами. При цьому бажано мати розв’язок в аналітичному або чисельному поданні. Суттєві результати при цьому може дати згаданий обчислювальний експеримент над моделлю.

4. У наш час при високому рівні виробництва i визнанні обмеженості ресурсів Землі стають актуальними задачі оптимального використання корисних копалин, енергії, матеріалів, робочого часу, управління фізичними, хімічними, біологічними, технологічними, економічними та іншими складними процесами. До таких задач можна віднести, наприклад,

- задачу організації виробництва з метою отримання максимального прибутку при заданих обмеженнях на ресурси,

- задачу управління системою гідростанцій i водосховищ з метою отримання максимальної кількості електроенергії,

- задачу про космічний політ з однієї точки простору в іншу якнайшвидше або з найменшими витратами енергії,

- задачу про швидке нагрівання або охолодження металу до заданої температури;

- задача оптимізації міжгалузевих зв’язків економічного регіону, з метою ефективного зниження загальних витрат людської праці та технічних і енергетичних ресурсів;

- задача про оптимізацію перевезень вантажів між базами продукції і базами споживачів з метою зниження вартості перевезень,

- задачі визначення оптимальних кормових раціонів худоби у сільському господарстві,

- визначення оптимальної структури посівних площ;

- задача про раціональний розкрій матеріалів з метою економії сировини;

- проблема розміщення програмних модулів у багаторівневій пам’яті ЕОМ з метою мінімізації середнього часу розв’язування задач заданого класу.

**Задача про оптимальний прибуток.**

**Постановка задачі**. Підприємство виробляє продукцію кількох типів. Для кожного типу продукції задані витрати на одиницю продукції, прибуток від її реалізації, об’єм наявних ресурсів певних видів, які використовуються при виробництві продукції, та обмеження на об’єм виробництва кожного типу продукції. Необхідно скласти такий план виробництва, який, з урахуванням обмежень на ресурси i випуск кожного типу продукції, забезпечує найбільший загальний прибуток.

**Формалізація задачі.** Нехай підприємство виробляє продукцію *n* видів і для цього використовується *m* видів ресурсів. Позначимо через  витрати *i*-го виду ресурсів  на виробництво одиниці продукції *j*-го виду , через  – наявний об’єм ресурсів *i*-го виду , – прибуток, що одержує підприємство від реалізації одиниці продукції *j*-го виду , а через  – задані нижню i верхню межі обсягу виробництва *j*-го виду продукції. Необхідно скласти такий план  виробництва продукції, щоб при наявних ресурсах задовольнити задані обмеження на випуск кожного виду продукції i в той же час забезпечити якомога більший загальний прибуток підприємству.

Математична модель задачі має вигляд:

, ,

де

.

**Транспортна задача**.

**Постановка задачі.** Запаси деякого однорідного продукту розподілені на кількох базах i цей продукт потрібно доставити до кількох пунктів споживання. При цьому відомі вартість перевезень з кожної бази до кожного пункту споживання, а також запаси продукту на кожній базі та потреби в ньому кожного пункту споживання. Задача полягає в тому, щоб визначити, яку кількість продукту потрібно перевезти з кожної бази до кожного пункту споживання, щоб сумарна вартість перевезення була мінімальною.

**Формалізація задачі.** Нехай: *m* – кількість баз, *n* – кількість пунктів споживання,  – кількість одиниць продукту на *i*-й базі ,  – потреба *j*-го пункту споживання в продукті,  – вартість перевезення одиниці продукції з *i*-їбази до *j-*го пункту споживання,  – кількість одиниць продукції, яку заплановано перевезти з *i*-їбази до *j*-го пункту споживання.

Тоді вартість перевезення продукції дорівнює

,

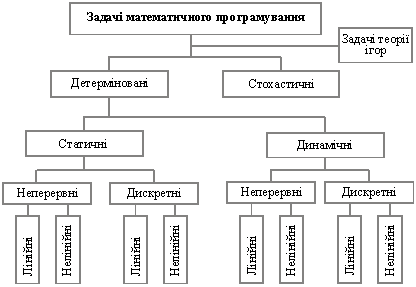
i її потрібно мінімізувати. При цьому на змінні  накладаються обмеження:

а) , , ;

б)  (слід повністю задовольнити потреби *j*-го пункту споживання);

в)  (з *i*-ї бази не можна вивезти більше від наявного запасу).

**6. Задачами математичного програмування** називають однокритеріальні задачі оптимізації. При їх розв’язку оперують з детермінованими математичними моделями. У математичному програмуванні виділяють два напрямки — **детерміновані** задачі і **стохастичні**. Детерміновані задачі не містять випадкових змінних чи параметрів. Уся початкова інформація повністю визначена. У стохастичних задачах використовується вхідна інформація, яка містить елементи невизначеності, або деякі параметри набувають значень відповідно до визначених функцій розподілу випадкових величин.



Як детерміновані, так і стохастичні задачі можуть бути **статичними** (однокроковими) або **динамічними** (багатокроковими). Оскільки економічні процеси розвиваються в часі, відповідні економіко-математичні моделі мають відображати їх динаміку. Поняття динамічності пов’язане зі змінами об’єкта (явища, процесу) у часі. Задачі математичного програмування поділяють також на **дискретні** і **неперервні**. Дискретними називають задачі, в яких одна, кілька або всі змінні набувають лише дискретних значень. З-поміж них окремий тип становлять задачі, в яких одна або кілька змінних набувають цілочислових значень. Їх називають задачами цілочислового програмування. Якщо всі змінні можуть набувати будь-яких значень на деяких інтервалах числової осі, то задача є неперервною. Оскільки в економіко-математичних моделях залежності між показниками описані за допомогою функцій, то відповідно до їх виду всі вище згадані типи задач поділяють на **лінійні** та **нелінійні**. Якщо цільова функція http://www.lib.lntu.info/book/mbf/mlp/2010/10-072/Rozdil3/3_7.files/image004.gif і обмеження http://www.lib.lntu.info/book/mbf/mlp/2010/10-072/Rozdil3/3_7.files/image006.gifє лінійними, тобто містять змінні xj тільки у першому або нульовому степенях, то така задача є лінійною. В усіх інших випадках задача буде нелінійною.

**Задача математичного програмування** (або **задача з рівностями та нерівностями**) — [задача умовної оптимізації](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B0%D0%B4%D0%B0%D1%87%D0%B0_%D1%83%D0%BC%D0%BE%D0%B2%D0%BD%D0%BE%D1%97_%D0%BE%D0%BF%D1%82%D0%B8%D0%BC%D1%96%D0%B7%D0%B0%D1%86%D1%96%D1%97), [допустима множина](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%BE%D0%BF%D1%83%D1%81%D1%82%D0%B8%D0%BC%D0%B0_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B6%D0%B8%D0%BD%D0%B0) якої має вигляд:

\mathbf{X} = \left\{ x \in \mathbf{R}^n | \quad g_i(x) \le 0,\, i = 1, \ldots, k;\, g_i(x) = 0,\, i = k+1, \ldots, m;\, x \in P \right\} 

Формально задача математичного програмування записується так:

 \begin{cases}
f(x) \to \min, & \\
g_i (x) \le 0,\, i = 1, \ldots, k, & \\
g_i (x) = 0,\, i = k+1, \ldots, m, & \\
x \in \mathrm P & 
\end{cases} 

[Обмеження](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9E%D0%B1%D0%BC%D0%B5%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0)) з *g*i називаються функціональними обмеженнями, а *x* ∈ **P** — прямим.

Якщо цільова функція задачі оптимізації

 лiнiйна i множина ***X*** визначається системою лiнiйних рівнянь i нерівностей, то задача називається **задачею лiнiйного програмування**, тобто

, (1)

,,

де  () - задані числа.

Задача лiнiйного програмування у формi називається **загальною,** у формi

, (2)



Називається **Основною,** у формi:

, (3)



**Стандартною**, у формі

, (4)



**канонiчною**.

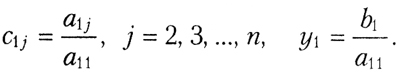
9. Якщо задача полягає у відшуканні локального чи глобального екстремуму деякої функції за умови, що на змінні такої функції накладаються додаткові обмеження, то маємо задачу пошуку **умовного екстремуму** функції.

**Метод виключення частини змінних**: Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса полягає її послідовному виключенні невідомих x1, x2, ..., xn із цієї системи. Припустимо, що визначник матриці **А** відмінний від нуля, що свідчить про те, що система (3.1) має єдиний розв'язок. Якщо a11 не дорівнює 0, то, поділивши перше рівняння (3.1) на a11, отримаємо:

     (3.5)



де



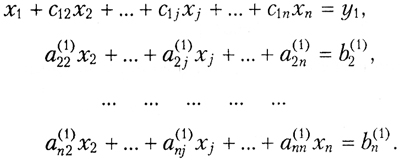
   Розглянемо решту рівнянь системи (3.1)

     (3.6)



і у кожному з них виключимо невідому x1, виконавши таку послідовність дій. Помножимо (3.5) на ai1 і віднімемо отримане рівняння від і-го рівняня системи (3.6).  
   У результаті отримаємо таку систему рівнянь:

     (3.7)



   Тут позначено

     (3.8)



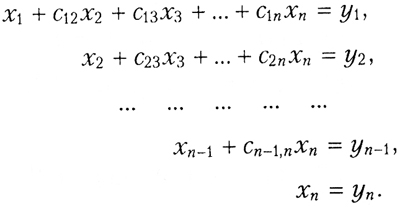
   У системі (3.7) невідома x1 є тільки в першому рівнянні, тому надалі достатньо мати справу зі скороченою системою рівнянь:

     (3.9)



   У такий спосіб здійснено перший крок методу Гаусса. Якщо a22(1) не дорівнює 0, то з системи (3.9) аналогічно можна виключити x2 і перейти до системи, яка еквівалетна (3.1). При цьому перше рівняння системи (3.7) залишиться без змін.  
   Виключаючи послідовно в такий спосіб невідомі x3, x4, ... , xn, прийдемо остаточно до системи рівнянь, яка має такий вигляд:

     (3.10)



   У матриці цієї системи, що еквівалентна системі (3.1) всі елементи, які розташовані нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю. Такі матриці називаються верхніми трикутними, на відміну від нижніх трикутних матриць, у яких дорівнюють нулю всі елементи, розташовані вище головної діагоналі.  
   Перехід від системи (3.1) до системи (3.10) являє собою прямий хід методу Гаусса.

12. Розглянемо задачу лінійного програмування, записану в канонічній формі

, (6)

 (7)

, , (8)

при цьому без обмеження загальності будемо вважати, що , .

Введемо позначення

, ,



Тоді задачу (6)-(8) можна записати у векторній формі



при умовах , .

**Означення 1.** *Планом* задачі лінійного програмування (6)-(8) називається вектор , компоненти якого задовольняють умови(7), (8)*.*

**Означення 2.**Планназивається *опорним*, якщо вектори , які відповідають додатним компонентам плану *Х*, утворюють лінійно-незалежну систему.

**Зауваження.** Оскільки вектори  є *m*-вимірними, то максимальне число таких векторів, що утворюють лінійно-незалежну систему, не перевершує *m*. Звідси випливає, що кожний опорний план містить не більше ніж *m* додатних компонент.

**Означення 3.**Опорний план називається *невиродженим*, якщо він містить рівно *m* додатних компонент. Якщо опорний план містить менше за *m* додатних компонент, то такий опорний план називається *виродженим*.

**Означення 4.** *Оптимальним планом* або *розв`язком задачі* лінійногопрограмування (6)-(8),називаєтьсяплан, який мінімізує (максимізує) лінійну функцію (6), іншими словами, *Х*0 – оптимальний план задачі лінійного програмування, якщо для будь-якого плану *Х* задачі (6)-(8) виконується умова .

**15**. Нехай необхідно знайти максимальне (мінімальне) значення функції

, (22)

при умовах

 (23)

 (),

де  () – задані дійсні числа, , , і серед векторів

 немає m одиничних.

**Означення 5**. Задача, яка полягає в знаходженні максимального (мінімального) значення функції

 (24)

() (25)

при умовах

 (26)

 (), де - деяке досить велике додатне число, конкретне значення якого не задається, називається *розширеною задачею* по відношенню до задачі (22)-(23).

Розширена задача має опорний план

, який визначається системою векторів , що утворюють базис - вимірного векторного простору, який називається *штучним*. Самі вектори (), як і змінні  ( ), називаються *штучними*. Оскільки розширена задача має опорний план, то її розв’язок може бути знайдений симплексним методом. При опорному плані  розширеної задачі значення цільової функції (24) (25) є

 ,

а значення  дорівнюють  .

Отже  і різниці складаються з двох незалежних частин, одна з яких залежить від , а інша - ні.

Після обчислення  і  їх значення, а також вхідні дані розширеної задачі заносять в симплекс-таблицю, яка містить на один рядок більше, ніж звичайна симплекс-таблиця. При цьому до -го рядка заносять коефіцієнти при , а в -й рядок - доданки, що не містять .

При переході від одного опорного плану до іншого в базис вводять вектор, що відповідає найбільшому за абсолютною величиною від’ємному (додатному) числу -го рядка. Штучний вектор, що виключається з базису в результаті деякої ітерації, в подальшому не має потреби вводити в жоден з наступних базисів і, відповідно, не потрібно перетворювати стовпчик даного вектора. Може трапитися випадок, що в результаті деякої ітерації жоден з штучних векторів з базису не буде замінено.

Переобчислення симплекс-таблиці при переході від одного опорного плану до іншого проводять за загальними правилами симплексного методу.

Ітераційний процес по -му рядку ведуть доти, поки не виконається одна з умов:

1. всі штучні вектори виключені з базису;
2. не всі штучні вектори виключені, але -й рядок не містить від’ємних (додатних) елементів в стовпчиках векторів .

У першому випадку базис відповідає деякому опорному плану вхідної задачі і визначення її оптимального плану продовжують за -м рядком.

У другому випадку, якщо елемент, що стоїть в -му рядку стовпчика  від’ємний (додатній), вхідна задача не має розв’язку; якщо ж він дорівнює нулю, то знайдений опорний план вхідної задачі є виродженим і базис містить хоча б один з векторів штучного базису.

**Зауваження.** Якщо вхідна задача містить декілька одиничних векторів, то їх слід ввести в штучний базис.

18. Двоїстий симплекс-метод, як і симплекс-метод, використовується при знаходженні розв’язку задачі лінійного програмування, записаної в формі основної задачі, для якої серед векторів складених з коефіцієнтів при невідомих в системі рівнянь, є *т* одиничних. Таку задачу і розглянемо тепер, заздалегідь передбачивши, що одиничними є вектори , тобто розглянемо задачу, що передбачає визначення максимального значення функції

 (27)

при умовах

 (28)

,

де

...,

і серед чисел  є від’ємні.

У цьому випадку  є розв’язком системи лінійних рівнянь (28). Однак цей розв’язок не є планом задачі (27) - (28), оскільки серед його компонент є від’ємні числа.

Оскільки вектори , одиничні, кожен з векторів  можна представити у вигляді лінійної комбінації даних векторів, причому коефіцієнтами розкладання векторів , повекторах  служать числа . Таким чином, можна знайти



**Означення 6.** Розв’язок  системи лінійних рівнянь (28), що визначається базисом  називається ***псевдопланом***задачі (27)-(28), якщо  для будь-кого .

**Теорема 8.** *Якщо в псевдоплані* , *що визначається базисом* , *є хоч би одне від’ємне число*  *таке, що всі* , то *задача (27*)-(28) взагалі *не має планів.*

**Теорема 9.** *Якщо в псевдоплані* , *що визначається базисом* *, є від’ємні числа*  *такі, що для будь-кого з них існують числа* , *то можна перейти до нового псевдоплану, при якому значення цільової функції задачі (27*) - (28) не *зменшиться.*

Сформульовані теореми дають підставу для побудови алгоритму двоїстого симплекс-методу

Нехай  псевдоплан цієї задачі (27) - (28). На основі початкових даних складають симплекс-таблицю (табл. 7), в якій деякі елементи стовпця вектора  є від’ємними числами. Якщо таких чисел немає., то в симплекс-таблиці записаний оптимальний план задачі (27)-(28), оскільки, по припущенню, всі . Тому для визначення оптимального плану задачі при умові, що він існує, потрібно зробити впорядкований перехід від однієї симплекс-таблиці до іншої доти, поки з стовпця вектора  *не* будуть виключені від’ємні елементи. При цьому весь час повинні залишатися невід’ємними всі елементи (m+1)-ого рядка, тобто  для будь-якого *.* Таким чином, після складання симплекс-таблиці перевіряють, чи є в стовпці вектора  від’ємні числа. Якщо їх немає, то знайдено оптимальний план початкової задачі. Якщо ж вони є (що ми і передбачаємо), то вибирають найбільше по абсолютній величині від’ємне число. У тому випадку, коли таких чисел декілька, беруть яке-небудь одне з них: нехай це число . Вибір цього числа визначає вектор, що виключається з базису, тобто в цьому випадку з базису виводиться вектор . Щоб визначити, який вектор потрібно ввести в базис, знаходимо , де . Нехай це мінімальне значення приймається при j=r; тоді в базис вводять вектор . Число , є розв’язковим елементом. Перехід до нової симплекс-таблиці проводять за звичайними правилами симплексного методу. Ітераційний процес продовжують доти, поки в стовпці вектора  не буде більше від’ємних чисел. При цьому знаходять оптимальний план початкової задачі, а отже, і двоїстої. Якщо на деякому кроці виявиться, що в і-му рядку симплекс-таблиці (табл. 1.47) в стовпці вектора  стоїть від’ємне число , а серед інших елементів цього рядка немає від’ємних, то початкова задача не має розв’язку.

**Таким чином, відшукання розв’язку задачі (1)-(2) двоїстим симплекс-методом включає наступні етапи:**

1. **Знаходять псевдоплан задачі.**
2. **Перевіряють цей псевдоплан на оптимальність. Якщо псевдоплан оптимальний, то знайдено розв’язок задачі. У іншому випадку або встановлюють нерозв'язність задачі, або переходять до нового псевдоплану.**
3. **Вибирають розв’язковий рядок за допомогою визначення найбільшого по абсолютній величині від’ємного числа стовпця вектора  і розв’язкомий стовпчик за допомогою знаходження найменшого по абсолютній величині відношення елементів (m+1)- ого рядка до відповідних від’ємних елементів розв’язкового рядка.**
4. **Знаходять новий псевдоплан і повторюють всі дії починаючи з етапу 2.**

21. **Метод потенціалів.** Загальний принцип визначення оптимального плану транспортної задачі методом потенціалів аналогічний принципу розв’язування задачі лінійного програмування симплексним методом, а саме: спочатку знаходять опорний план транспортної задачі, а потім його послідовно поліпшують до отримання оптимального плану. **Теорема 2.** *Якщо для деякого опорного плану*(*,*) *транспортної задачі (1)-(4) існують такі числа , що*

** при * і* при **

*для всіх  і , то  оптимальний план транспортної задачі.*

Нехай одним з розглянутих вище методів знайдений опорний план транспортної задачі. Для кожного з пунктів постачання і споживання визначають  *і * (*,*). Ці числа знаходять з системи рівнянь

*,* (6)

де  - тарифи, що стоять в заповнених клітинках таблиці умов транспортної задачі. Оскільки число заповнених клітинок рівне , то система (6) з *п+т* невідомими містить  рівнянь. Оскільки число невідомих перевищує на одиницю число рівнянь, одне з невідомих можна покласти рівним довільному числу, наприклад , і знайти послідовно з рівнянь (6) значення інші невідомих. Після того як всі потенціали знайдені, для кожної з вільних (не заповнених) клітинок визначають числа . Якщо серед чисел  немає додатніх, то знайдений опорний план є оптимальним. Якщо ж для деякої вільної клітинки , то вихідний опорний план не є оптимальним і необхідно перейти до нового опорного плану. Для цього розглядають всі вільні клітинки, для яких , і серед даних чисел вибирають максимальне. Клітинку, якій це число відповідає, потрібно заповнити. В методі потенціалів використовуютьсяцикли, вершини яких розташовані в зайнятих клітинках таблиці, а ланки - вздовж рядків і стовпчиків, причому в кожній вершині циклу зустрічається рівно дві ланки, одна з яких знаходиться в рядку, а інша - в стовпчику. Після того як для вибраної вільної клітинки цикл побудований, потрібно перейти до нового опорного плану. Для цього необхідно перемістити вантажі в межах клітинок, пов'язаних з даною вільною клітинкою. Це переміщення проводять за наступними правилами:

1) кожній з клітинок, пов'язаній циклом з даною вільною клітинкою, приписують певний знак, причому вільній клітинці - знак плюс, а всім іншим клітинкам - почергово знаки мінус і плюс (будемо називати ці клітинки мінусовими і плюсовими);

2) в дану вільну клітинку переносять менше з чисел , що стоять в мінусових клітинках. Одночасно це число додають до відповідних чисел, що стоять в плюсових клітинках, і віднімають від чисел, що стоять в мінусових клітинках. Клітинка, яка раніше була вільною, стає зайнятою, а мінусова клітинка, в якій стояло мінімальне з чисел , вважається вільною.

Отриманий новий опорний план транспортної задачі перевіряють на оптимальність. Для цього визначають потенціали пунктів постачання і споживання, а також знаходять числа для всіх вільних клітинок. Якщо серед цих чисел не виявиться додатних, то це свідчить про отримання оптимального плану. Якщо ж додатні числа є, то потрібно перейти до нового опорного плану. Внаслідок ітераційного процесу після скінченої кількості кроків отримують оптимальний план задачі.

24. **Нерівність Гоморі**

В методі Гоморі, який буде розглянуто нижче, якщо розв’язок задачі ЛП, одержаний симплекс-методом, не є цілочисловим, то будується розширена задача ЛП шляхом введення додаткового обмеження-нерівності. Ця нерівність одержала назву нерівності Гоморі.

Для побудови нерівності Гоморі необхідно розглянути питання про функцію, яка визначає дробову частину дійсного числа та її властивості.

Функція  називається *дробовою частиною числа*, де [*x*] – ціла частина числа *x*∈*R*, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує задане число *х*.

Функція *f(x)* в математиці позначається так  і має такі властивості:

а) {*x*}≥0,

б) для будь-якого *n*∈Z+ {*nx*}≤*n*{*x*},

в) {*x+y*}≤{*x*}+{*y*}.

Розглянемо деяке обмеження-рівність



Застосуємо функцію “дробова частина числа” до лівої і правої чатсин цього обмеження. Тоді, враховуючи її властивості, маємо

,

або

.

Остання нерівність називається *нерівністю Гоморі* для заданого обмеження рівності.

При застосуванні методу Гоморі у випадку коли треба ввести додаткове обмеження, що відповідає дробовій координаті оптимального плану задачі лінійного програмування, необхідно для зведення розширеної задачі до канонічного виду ввести додаткову штучну змінну :

.

Але для того щоб одержати одиничний базисний вектор краще цю нерівність подати у вигляді:

. (\*)

Тоді до базисних векторів додається вектор *Рn+1 =* (0, 0, . . . , 1)т. За рахунок того, що вільний член –{*bi*} від'ємний, то для пошуку опорного плану розширеної задачі необхідно застосувати двоїстий симплекс метод.

27. max http://fingal.com.ua/imag/Other/nak_mp/5_047.gif,

http://fingal.com.ua/imag/Other/nak_mp/5_049.gif; http://fingal.com.ua/imag/Other/nak_mp/5_051.gif.

**Визначення 1**: Функцією Лагранжа в задачі випуклого(квадратичного) програмування (24)-(26) називається функція:



де  - множники Лагранжа.

**Визначення 2**: Точка 

називається сідловою точкою функції Лагранжа, якщо

для всіх  і 

**Теорема 2**: (Теорема Куна-Таккера). Для задачі випуклого програмування (24)-(26), багато допустимих розв’язань які володіють регулярністю,  являються оптимальним планом тоді і тільки тоді, коли існує такий вектор   - сідлова точка функції Лагранжа.

Якщо допустити, що цільова функція  і aij неперервно диференціюють, то теорема Куна-Таккера може бути доповнена аналітичними вираженнями, визначеними необхідними достатніми умовами того, щоб точка  була сідловою точкою функції Лагранжа, тобто була розв’язком задачі випуклого програмування. Ці вирази мають такий вид:



де  та  - значення відповідних частинних похідних функції Лагранжа, обчислених в сідловій точці. Усім вище вказаним вимогам, які дозволяють записати необхідні та достатні умови для сідлової точки  функції Лагранжа у вигляді виразів.

**Визначення 4.** Задача, що складається у визначенні максимального (мінімального) значення функції

*f*(x) = (7)

при обмеженнях

 (8)

хj, **(9)**

де  — негативно(позитивно)-напіввизначена квадратична форма, називається задачею квадратичного програмування.

Для сформульованої задачі квадратичного програмування функція Лагранжа записується у вигляді:



Якщо функція  має сідлову точку , то в цій точці виконуються співвідношення (1) — (6). Вводячи тепер доповнюючі змінні  й , обертаючі нерівності (1) й (4) у рівності, перепишемо вираження (1) — (6), записані для задачі квадратичного програмування, у такому вигляді:



(11)

(13)

(12)

(10)

 (14)

Таким чином, щоб знайти розв'язок задачі квадратичного програмування (7) (9), потрібно визначити невід’ємний розв'язок систем лінійних рівнянь (10) та (11), яке задовольняє умову (12) та (13). Цей розв'язок можна знайти за допомогою методу штучного базису, застосованого для знаходження максимального значення функції  при умовах (10), (11), (14) з врахуванням (12) та (13). Тут — штучні змінні, введені в рівняння (10) та (11).

30. Розглянемо задачу дробово-лінійного програмування від двох змінних виду:

****, (7)

 (8)

. (9)

При цьому будемо вважати, що .

Геометричний метод розв’язування задачі (7)-(9) практично співпадає з аналогічним методом для розв’язування задачі лінійного програмування від двох змінних і містить такі етапи:

1. У системі обмежень (8) замінити знаки нерівностей на знаки рівностей і побудувати відповідні прямі.
2. Знайти півплощини, які визначаються кожною з нерівностей системи обмежень (8), (9).
3. Знайти многогранник розв’язків задачі (7)-(9). Якщо він існує, то перейти на пункт 4, інакше задача не має розв’язків.
4. Побудувати пряму виду

, (10)

де *h* – деяка константа, яка завжди проходить через початок координат, оскільки після нескладних перетворень можна показати, що співвідношення (10) еквівалентне співвідношенню

.

1. Повертаючи пряму (10) навколо початку координат, визначити точку максимуму задачі (7)-(9) і значення цільової функції в цій точці або встановити її нерозв’язність.

При розв’язуванні задачі дробово-лінійного програмування геометричним методом можливі різні випадки розташування ліній рівня цільової функції і многокутника розв’язків:

1. Многокутник розв’язків обмежень, максимум і мінімум цільової функції досягається в його кутових точках (рис. 2.).
2. Многокутник розв’язків необмежені, максимум і мінімум цільової функції досягається в його кутових точках (рис. 3.).
3. Многокутник розв’язків необмежені і один з екстремумів досягається. Наприклад, на рис. 4 мінімум цільової функції досягається в його кутовій точці, але точки максимума не існує (кажуть, що в цьому випадку цільова функція має асимптотичний максимум).
4. Многокутник розв’язків необмежені, цільова функція має асимптотичний максимум і мінімум (рис. 5).

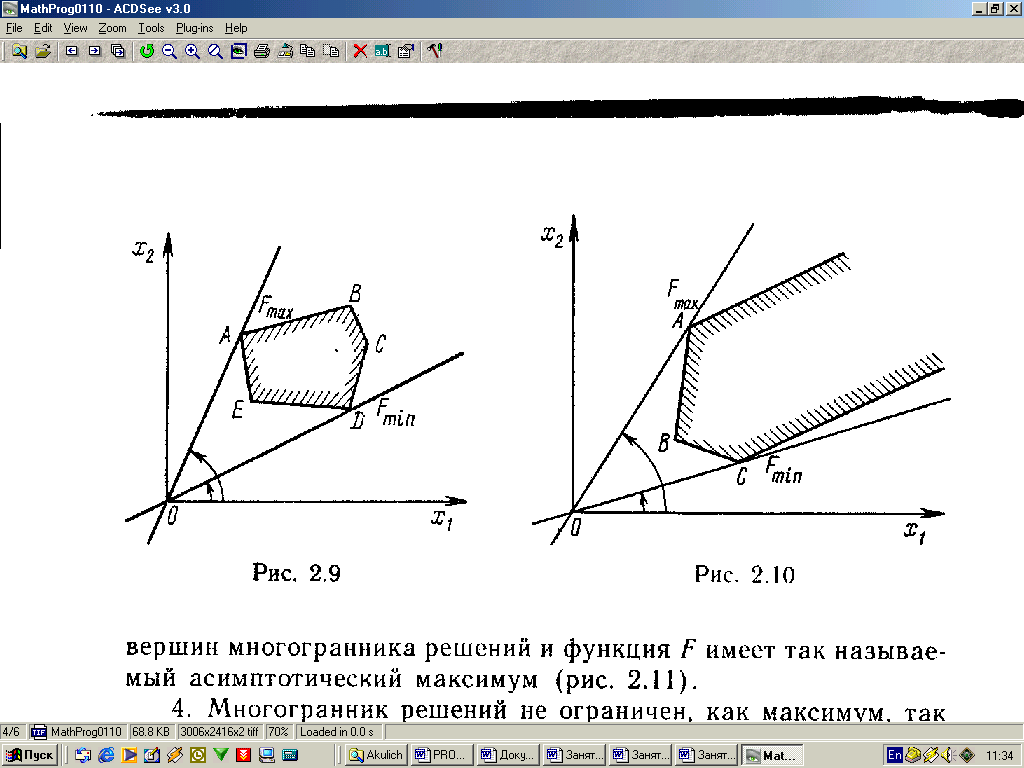
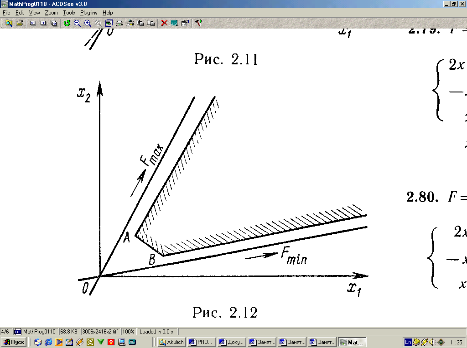
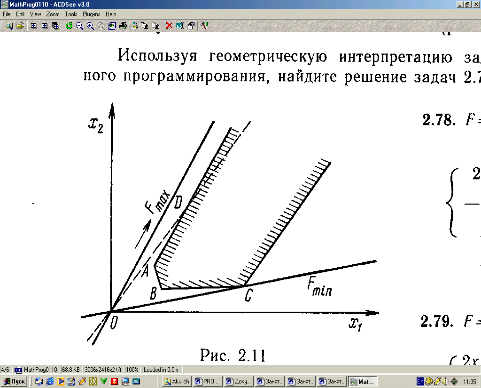


Рис. 2. Рис. 3.



33. **Зведення задач теорії ігор до задач лінійного програмування.**

Розглянемо гру , обумовлену матрицею



Відповідно до теореми 3, для оптимальної стратегії першого гравця  і ціни гри *v* виконується нерівність . Припустимо для визначеності, що . Це завжди може бути досягнуте завдяки тому, що додавання до всіх елементів матриці *А* того самого постійного числа *C* не приводить до зміни оптимальних стратегій, а тільки лише збільшує ціну гри на *С*.

Розділивши тепер обидві частини останньої нерівності на *v*, одержимо

.

Покладемо  тоді

; .

Використовуючи введене позначення, перепишемо умову  у вигляді .

Тому що перший гравець прагне одержати максимальний виграш, то він повинний забезпечити мінімум величині . З урахуванням цього, визначення оптимальної стратегії першого гравця зводиться до знаходження мінімального значення функції  при умовах ; .

Аналогічні міркування показують, що визначення оптимальної стратегії другого гравця зводиться до знаходження максимального значення функції  при умовах ; . Тут .

Легко бачити, що отримані вище задачі оптимізації утворюють пару двоїстих задач.

Таким чином, щоб знайти розв’язок даної гри, обумовленою матрицею *А*, потрібно скласти наступну пару двоїстих задач і знайти їхні розв’язки.

Пряма задача:

;

;

.

Двоїста задача:

;

;

.

Використовуючи розв’язок пари двоїстих задач, одержуємо формули для визначення стратегій і ціни гри:

, 

; .

36.

39. (метод дихотомії)

Нехай задано ,  і відрізок , де функція  унімодальна. Покласти.

**Крок 1.** Знайти точки

, 

і обчислити , .

**Крок 2.** Якщо , то покласти , , інакше , , .

**Крок 3.** Якщо , то покласти  і перейти на крок 4, в протилежному випадку покласти  і перейти до виконання кроку 1.

**Крок 4.** Вивести , . Кінець алгоритму.

Оскільки кожен крок методу вимагає обчислення значення функції  у двох точках, то для досягнення потрібної точності  необхідно зробити  обчислень значень функції, при цьому з (3) маємо

. (4)

Звідси випливає, що число кроків алгоритму задовольняє умову

.

Часто на практиці число  можливих обчислень значень функції  задане заздалегідь і його перебільшення небажане.

В цьому випадку нерівність (4) дає можливість оцінити точність отриманого наближення  після  обчислень значень функції:

.

**Примітки:**

1. Величина  в методі дихотомії вибирається в залежності від кількості ймовірних десяткових знаків при обчисленні аргументу  і не може бути меншою за машинний нуль конкретної ЕОМ, яка використовується при розв'язуванні задачі.

2. Метод дихотомії без змін можна застосувати для мінімізації функцій, які не є унімодальними. Однак у цьому випадку не можна гарантувати, що отриманий розв'язок буде досить хорошим наближенням до точки глобального мінімуму функції .

42. (метод парабол)

Нехай задані відрізок  локалізації точки мінімуму функції  і  (досить мале число).

**Крок 0.** На відрізку  визначити першу вдалу трійку  і обчислити , , .

**Крок 1**. Знайти точку



і обчислити .

**Крок 2.** Якщо , то покласти ,  i кінець алгоритму, інакше якщо , то покласти , , , , інакше покласти , , , .

**Крок 3.** Для одержаних точок  знайти вдалу трійку , обчислити значення  і перейти до виконання кроку 1.

Кінець алгоритму.

45. **Метод покоординатного спуску.** При розв’язуванні практичних задач часто зустрічаються випадки, коли функція, що мінімізується, або недиференційована взагалі, або вона диференційована, але обчислення її похідних досить трудомістка процедура. В таких випадках бажано використовувати методи, які вимагають лише обчислення значень функції, тобто методи нульового порядку. Одним з таких методів є метод *покоординатного спуску*. Ідея цього методу полягає в тому, що відбувається спуск по ламанії лінії, яка утворюється з відрізків прямих, паралельних осям координат (рис. 5).

рис 5

*x*2

*x*1

*x\**

*x*(01)

*x*(11)

*x*(02)

*x*\*

*e*2

*e*1

Ітераційний процес методу покоординатного спуску складається з «внутрішніх» і «зовнішніх» ітерацій. Одна зовнішня ітерація містить *n* внутрішніх ітерацій, на яких по черзі відбувається спуск паралельно осям координат. Опишемо початкову зовнішню ітерацію. Нехай - початкове наближення, де перший верхній індекс визначає номер зовнішньої ітерації, а другий - номер тієї координати, за якою відбувається спуск. Наступна точка внутрішньої ітерації визначається за формулою

,

де , при цьому за напрямок руху  вибирається той з двох напрямків , який є напрямком спадання цільової функції в точці . Крок  вибирається так, щоб . Після чого наступна внутрішня ітерація відбувається при  і т.д. Після *n* внутрішніх ітерації знаходиться точка  (див. рис. 5), яка визначається за формулою

,

де . Нехай на *k*-й зовнішній ітерації відбувається спуск по *j*-й координаті. Тоді рекурентна формула, яка визначає наступне наближення до точки мінімуму, має такий вигляд:

, (17)

де ,  

Величина кроку  в (17), що задовольняє умові (18) вибирається за одним з правил, описаних в пунктах 1, 2 цього параграфа. При цьому якщо , то маємо *покоординатний спуск з постійним кроком*. Якщо ж  вибирається з умови

 (19)

то одержуємо покоординатний аналог методу найшвидшого спуску, який називається **методом *Гаусса-Зейделя*.**

Сформулюємо умови збіжності методу покоординатного спуску (17), (18).

Нехай

,

де ,- множина стаціонарних точок функції **.

Будемо вважати, що крок  в точці  вибирається так, що виконується умова

 (20)

де , - параметр, що характеризує точність обчислень точки мінімуму задачі (19).

**Теорема 3.** *Нехай функція  диференційована і обмежена знизу на множині , а її градієнт задовольняє* *умові Ліпшіца:*

**

*для будь-яких*  *де* *.*

*Якщо множина - непорожня і послідовність точок* *, яка генерується методом* (4.60) *з вибором кроку за правилом* (4.62)*,* (4.63) *така, що*

, (21)

*то*



48. **. Метод рівномірного перебору**

Найпростішим пасивним методом є метод рівномірного перебору, в якому послідовність точок , , ... , вибирається за правилом

, , ... ,, ... ,

, , (2)

де  – крок методу.

Визначимо похибку цього методу . Нехай  – точка глобального мінімуму функції  на . Оскільки згідно (2)  ,  і , то серед точок  , знайдеться точка  така, що . Враховуючи (1), маємо

.

Для того щоб розв’язати задачу мінімізації першого типу з точністю , тобто , крок  методу (2) необхідно обирати з умови

. (3)

При цьому кількість обчислень  повинна визначатись за умовою

.

Прикладом методу (2) є метод, в якому

, (4)

тобто

, , ... ,. (5)

Тоді . Якщо задана точність , то  вибирається з умови

. (6)