Technische Universität Braunschweig

Institut für Robotik und Prozessinformatik
Prof. J. Steil

Übungen für Grundlagen Maschinelles Lernen

SS 2019 Blatt 1

Übungstermin: 12.04.

Mathematischer Grundlagen

Dieses Übungsblatt betrachtet die mathematischen Grundlagen, die in der Vorlesung immer wieder ohne weiteren Kommentar verwendet werden. Diese Grundlagen sind sehr wichtig, aber auch weitgehend ausreichend! Bitte bearbeiten Sie das Blatt allein und ohne Matlab/Mathematikprogramme, um den eigentlichen Übungszweck zu erreichen. Viel schlimmer wird es dann aber auch im Verlauf der Vorlesung nicht :-)

Task 1.1 :
Berechne die folgenden multidimensionalen Gradienten
$\left(\nabla_{\vec{w}}\text{="gradient wrt. }_{\vec{w}}\text{"}=\left(\frac{\partial}{\partial w_1}f(\vec{w}),\ldots,\frac{\partial}{\partial w_N}f(\vec{w})\right)^T\right)$

a) $\nabla_{\vec{w}}\|\vec{x}-\vec{w}\|^2$ **b)** $\nabla_{\vec{w}}\exp\left(-\frac{\|\vec{x}-\vec{w}\|^2}{2\sigma^2}\right)$ **c)** $\nabla_{\vec{w}}\frac{1}{1+\exp(-\beta\vec{w}^T\vec{x})}$

Task 1.2 :
(Bishop, Exercise 1.3, p. 58) Suppose that we have three coloured boxes r (red), b (blue), and g (green). Box r contains 3 apples, 4 oranges, and 3 limes, box b contains 1 apple, 1 orange, and 0 limes, and box g contains 3 apples, 3 oranges, and 4 limes.

a) If a box is chosen at random with probabilities $p(r) = 0.2$, $p(b) = 0.2$, $p(g) = 0.6$, and a piece of fruit is removed from the box (with equal probability of selecting any of the items in the box), then what is the probability of selecting an apple?

b) If we observe that the selected fruit is in fact an orange, what is the probability that it came from the green box? Hint: apply the Bayes rule (and research it, if you do not know it).

Task 1.3 : Skizziere qualitativ die Höhenlinien der 2Dim-Gaussfunktion

$$f(\vec{x}) = exp(-(\vec{x}-\vec{\mu})^T\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})) \tag{1}$$

wobei $(\vec{x}) = (x_1, x_2)^T, \vec{\mu} = (1, -1)^T, \Sigma = \left(\begin{smallmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{smallmatrix}\right)$. Beachte, dass dazu die Matrix Σ invertiert werden muss !

Task 1.4 :
a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion

$$y(\vec{x}) = \vec{w}^T\vec{x} + c$$

mit $\vec{w}, \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$ in ein Diagramm mit x_1 als Abszisse und x_2 also Ordinate für die Fälle $y > c$, $y = c$ und $y < c$ (für irgendein sinnvoll gewähltes $\vec{w}$).

b) Welche Eigenschaften von $y()$ bleiben im multidimensional Fall erhalten, wenn $\vec{x}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$?

c) Was ist die Relevanz c?

Hinweis: Für die Aufgabe ist die Normalengleichung der Grade nützlich. Bedenke (und zeichne) auch den Fall $y(\vec{x}) = 0$!.

Task 1.5 :

a) Berechne die Eigenvektoren $\vec{u}_i$ der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -10 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

und die entsprechenden Eigenwerte λ_i.

b) Schreibe den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von Eigenvektoren.

c) Zeige, dass für eine symmetrische Matrix $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ gilt:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \vec{u}_i \vec{u}_i^T$$

wobei u_i und λ_i die Eigenvektoren und Eigenwerte von $\mathbf{B}$ sind.

d) Gilt die gleiche Bedingung für $\mathbf{A}$ und seine Eigenvektoren/werte ?