capítulo 1

Sistemas de Numeração

"Devemos à Índia o engenhoso método de exprimir todos os números por meio de dez símbolos, cada qual portador, tanto de um valor de posição como de um valor absoluto; invenção notável, mas tão simples, que nem sempre lhe reconhecemos o mérito." (Laplace)

Os sistemas de computação têm como base a manipulação de informações numéricas, portanto é importante conhecer o fundamento dos sistemas de numeração.

Um dos mais antigos sistemas de numeração conhecidos é o egípcio (3.000 a.C.). Este era um sistema aditivo, em que cada símbolo representava um valor. Para representar valores maiores, esses símbolos eram colocados juntos e os seus valores somados. A ordem dos símbolos não importava na representação.

Muitos anos mais tarde, surgiu o sistema de numeração romano (ainda utilizado para alguns tipos de representações numéricas), no qual um determinado símbolo só pode ser utilizado três vezes na representação de um valor. Exemplo do sistema de numeração romano:

I - valor 1	**V** - valor 5	**X** - valor 10
L - valor 50	**C** - valor 100	**D** - valor 500

Exemplo: 38 → **XXXVIII**

O sistema utilizado atualmente é o de numeração **decimal** ou **indo-arábico** (pois foram os hindus do vale do Rio Indo, onde hoje é o Paquistão, que o criaram, porém foram os árabes que o divulgaram).

Leitura

O sistema decimal é, entretanto, universalmente adotado. Desde o tuaregue, que conta com os dedos, até o matemático que maneja instrumentos de cálculo, todos contamos de dez em dez ...

... Por serem 10 [dedos] os de ambas as mãos, começamos a contar até esse número e baseamos todo o nosso sistema em grupos de 10. Um pastor que necessitava estar seguro de que tinha as suas ovelhas ao anoitecer, teve que exceder, ao contar o rebanho, a sua primeira dezena. Numerava as ovelhas que desfilavam por sua frente, dobrando para cada uma um dedo, e quando já tinha dobrado os dez dedos, atirava um calhau [pedra] no chão limpo. Terminada a tarefa, os calhaus representavam o número de "mãos completas" (dezenas) de ovelhas do rebanho. No dia seguinte podia refazer a conta comparando os montinhos de calhaus. Logo ocorreu a algum cérebro propenso ao abstrato que se podia aplicar aquele processo a outras coisas úteis, como as tâmaras, o trigo, os dias, as distâncias e as estrelas. E se, em vez de atirar calhaus, fazia marcas diferentes e duradouras, então já se tinha um sistema de numeração escrita. (TAHAN, 1975, p. 157-158)

É um sistema de numeração posicional baseado em dez símbolos diferentes para representar os valores (decimal). Outra grande novidade introduzida por esse sistema de numeração foi o valor **zero** (representação do nada).

Os conceitos de número e numeral são diferentes. **Número** está ligado à quantidade a ser designada, enquanto **numeral** é a representação gráfica dessa quantidade.

Observação: É possível encontrar numerais diferentes para representar o mesmo número, dependendo do sistema de numeração adotado.

1.1 Notação Posicional e o Sistema de Numeração Decimal

Na **notação posicional** o que indica o valor de cada numeral é a posição na qual ele é escrito. Usando como exemplo o sistema de numeração decimal, cada posição tem um significado (unidade, dezena, centena etc.). Quando um numeral é lido, no sistema decimal, é possível decompô-lo, utilizando o significado de cada posição:

1951 → um milhar + nove centenas + cinco dezenas + uma unidade

O **sistema de numeração decimal** utiliza os seguintes numerais (também chamados dígitos) para representar os números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Os dígitos devem ser interpretados como possuidores de um valor que depende de sua posição no numeral. Para isso existe um polinômio que define essa condição. O número 1951 é interpretado da seguinte maneira:

1 9 5 1

1 +	1 x 1 +	1×10^0 +
50	5 x 10	5×10^1
900	9 x 100	9×10^2
1000	1 x 1000	1×10^3
1951	1951	1951

$$1951 = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

O número 1951[1] pode ser representado decompondo-se o numeral em um polinômio que utiliza a base 10 (quantidade de símbolos possíveis). É possível adotar um sistema de numeração que utilize qualquer base (base 3 ou base 8, por exemplo), nesse caso, substituindo a base 10 pela base adotada.

Deve-se ressaltar que não importa a base adotada, pois o sistema de numeração deve ser capaz de representar todos os valores numéricos possíveis. Esta é uma das características básicas de um sistema de numeração.

1.2 Sistema de Numeração Binário

É um sistema de numeração na base 2, ou seja, utiliza somente dois dígitos, **0 (zero)** e **1 (um)**. Mas como representar todos os valores numéricos possíveis utilizando apenas zeros e uns?

O sistema de numeração binário, como o sistema decimal, é posicional, o que torna possível utilizar o mesmo tipo de polinômio, apenas levando em consideração que, agora, a base é 2.

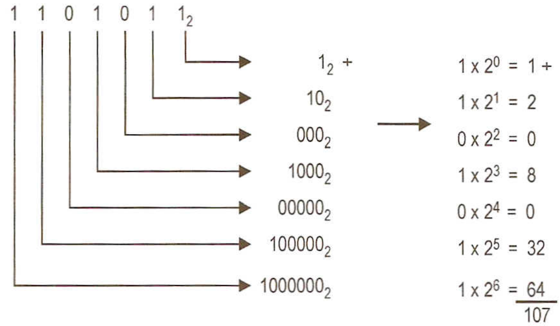
Para indicar que um número está sendo representado em uma base diferente da base 10 (decimal), o número correspondente à base é colocado como índice do número apresentado. Por exemplo:

$\mathbf{1101011_2}$ - base 2

---

[1] É importante observar que o mesmo dígito (no exemplo, o dígito "1") apresenta valores diferentes, dependendo da posição em que está.

Para entender melhor o conceito, observe o exemplo do número 1101011_2.



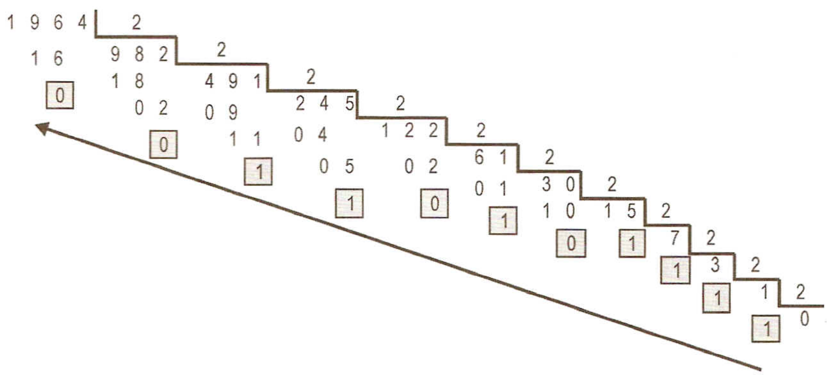
Os sistemas de computação utilizam o sistema de numeração binário como base para seu funcionamento, pois os circuitos eletrônicos podem, facilmente, representar os dígitos binários como sinais elétricos (apenas dois estados: ligado/desligado ou positivo/negativo). Além disso, foi escolhido o sistema binário devido a sua confiabilidade (BROWN, 1999) em representar as informações, pois não existem valores intermediários para cada dígito, apenas 1 ou 0, o que dificulta a interpretação errada do seu valor.

1.3 Conversão - Sistema Decimal em Sistema Binário

Para converter um número representado no sistema de numeração decimal no sistema de numeração binário, deve-se representar o número como uma soma de potências de 2. Existem duas maneiras para realizar essa conversão.

1.3.1 Método das Divisões Sucessivas

Dividir sucessivamente o número representado no sistema decimal por 2 até que seja obtido o quociente 0 (zero).



O resto da última divisão é o dígito mais à esquerda do número correspondente em binário e os restos das divisões anteriores são usados em sequência (conforme mostra a figura anterior)[2].

$$\mathbf{1964_{10} \Leftrightarrow 11110101100_2}$$

---

[2] Esse método serve para converter o número do sistema de numeração decimal em qualquer base; para isso, basta dividir sucessivamente pelo valor da base até obter o quociente 0.

1.3.2 Método da Tabela

Desenhar uma tabela, na qual cada coluna represente o valor correspondente à posição de um número no sistema binário. A primeira posição à direita deve ser igual a 1 e cada posição à esquerda deve ter o dobro do valor da anterior.

512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

Esse método permite a conversão do sistema binário no sistema decimal, ou vice-versa.

1.4 Conversão - Sistema Binário em Sistema Decimal

I. O número binário a ser convertido deve ser escrito dentro da tabela. Cada dígito deve ser colocado em uma coluna, sempre da direita para a esquerda[3].

512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
		1	0	0	0	1	0	0	1

II. Somar o valor correspondente de cada coluna que tiver o dígito igual a 1 (um).

512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
		1	0	0	0	1	0	0	1

$10001101_2 \Leftrightarrow 128 + 8 + 1$

$10001001_2 \Leftrightarrow 137_{10}$

1.5 Método da Tabela para Converter Números Decimais em Binários

I. O número de colunas a serem desenhadas depende do valor a ser convertido. Desenhar colunas na tabela, até que se obtenha uma coluna com o valor correspondente maior que o número decimal a ser convertido. Usando como exemplo o número 150_{10}, é necessário construir uma tabela com colunas até o valor correspondente de 256.

256	128	64	32	16	8	4	2	1

II. Colocar dígitos 1 (um) na tabela até ser obtido o valor correspondente ao número a ser convertido (como no método de conversão anterior). A colocação dos dígitos 1 não é aleatória, devendo seguir um conjunto de regras.

3 Essa tabela pode crescer, infinitamente, para a esquerda, pois qualquer sistema de numeração deve representar infinitos valores.

III. Colocar o primeiro dígito 1 na penúltima coluna da esquerda para a direita. Não se pode colocar o dígito 1 na última coluna da esquerda, senão o número representado seria maior que o desejado (no exemplo, o valor representado seria 256_{10}, quando o valor a ser representado é 150_{10}).

256	128	64	32	16	8	4	2	1
	1							

IV. Descobrir quanto falta ser representado, subtraindo o valor que deve ser representado daquele que acabou de ser representado. No exemplo, já foram representadas 128 unidades das 150 que se deve representar.

150 – 128 = 22 → faltam representar 22 unidades do valor original.

V. Colocar o próximo dígito 1 na coluna correspondente ao maior valor que esteja contido no resultado da subtração (unidades que faltam ser representadas). No exemplo, faltam 22 unidades, portanto a coluna que cumpre a exigência é a que tem valor correspondente igual a 16 (a coluna a sua esquerda possui o valor de 32, sendo maior que as unidades que faltam ser representadas).

256	128	64	32	16	8	4	2	1
	1			1				

VI. Repetir as etapas 4 e 5 até que se obtenha como resultado da subtração o valor 0 (zero). No exemplo, era necessário representar 22 unidades e foram representadas 16, portanto faltam 6 (22 – 16 = 6). A coluna que satisfaz a condição apresentada na etapa 5 é a coluna com valor 4. Colocar o próximo dígito 1 nessa coluna.

256	128	64	32	16	8	4	2	1
	1			1		1		

Subtrair 6 de 4, isso indica que ainda faltam representar duas unidades (6 – 4 = 2). A coluna que satisfaz a condição é a que possui o valor 2. Colocar o próximo dígito 1 nessa coluna.

256	128	64	32	16	8	4	2	1
	1			1		1	1	

Ao ser feita a nova subtração, descobre-se que o resultado é zero, portanto não é necessário colocar mais nenhum dígito 1.

VII. Terminada a colocação dos dígitos 1 (um), as colunas restantes devem ser preenchidas com dígitos 0 (zero), sendo um para cada coluna vazia. Não é necessário colocar o zero à esquerda, pois não tem valor.

No exemplo, a tabela fica da seguinte forma:

256	128	64	32	16	8	4	2	1
	1	0	0	1	0	1	1	0

Portanto, o resultado da conversão é:

$$150_{10} \Leftrightarrow 10010110_2$$

Curiosidade

No sistema de numeração binário, todo número ímpar apresenta o último dígito igual a 1 (um), pois todos os outros valores correspondentes às posições são pares e a soma deles nunca resultaria em um valor ímpar. Portanto, é esse dígito que determina se o número binário é ímpar ou par.

1.6 Operações Aritméticas com Números Binários

Como em qualquer sistema de numeração, os números binários também podem ser utilizados em operações aritméticas.

1.6.1 Soma Binária

Essa operação é simples e semelhante àquela realizada com números decimais. Basta utilizar a tabela ao lado:

Observação: A soma $1_2 + 1_2$ também apresentará o resultado igual a dois, mas com o número representado na base 2, ou seja, 10_2. Na soma binária, será colocado zero no resultado e "vai um", como na soma em base 10 (decimal) quando existe "estouro" de valor.

+	1_2	0_2
1_2	10_2	1_2
0_2	1_2	0_2

$$\begin{array}{r r r r r r r l}
\text{"vai um"} \rightarrow & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1_2 \\
 & & & & & & & + \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0_2 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1_2
\end{array}$$

1.6.2 Multiplicação Binária

É uma operação simples e semelhante àquela realizada com números decimais. A seguir, a "tabuada" binária:

X	1_2	0_2
1_2	1_2	0_2
0_2	0_2	0_2

$$\begin{array}{r r r r r r r l}
 & & & 1 & 1 & 0 & 1_2 & \\
 & & & & 1 & 0 & 1_2 & \text{X} \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & & & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1_2 &
\end{array}$$

1.6.3 Subtração Binária

Assemelha-se à subtração realizada entre números decimais, mas com algumas características especiais. Para facilitar, pode-se utilizar a tabela ao lado:

–	1_2	0_2
1_2	0_2	1_2
0_2	Não existe	0_2

Observando a tabela, quando ocorre a subtração binária $0_2 - 1_2$, não existe uma resposta direta. Nesse caso, é necessário realizar um processo semelhante ao que ocorre na subtração no sistema decimal: o dígito à esquerda deve "emprestar" 1 ao dígito da direita.

Mas, no sistema binário, ao subtrair 1_2 do dígito imediatamente à esquerda, esse dígito que "emprestou" 1_2 se transforma em 0_2 e o 0_2 da operação em questão assume o valor 10_2 (correspondente ao valor 2_{10}). A subtração $10_2 - 1_2$ tem como resultado 1_2.

Isso pode ser explicado de duas formas. A primeira explicação utiliza a tabela de soma anteriormente apresentada, pois se a soma binária é $1_2 + 1_2 = 10_2$, a subtração binária $10_2 - 1_2$ resulta em 1_2.

A segunda explicação baseia-se nos valores representados, pois 10_2 corresponde ao valor 2 (dois) e 1_2 corresponde ao valor 1 (um). Portanto, se subtrairmos os valores, o resultado será 1 representado em binário (1_2).

Caso o número imediatamente à esquerda não seja igual a 1, deve-se procurar à esquerda até encontrar, mas tomando o cuidado de lembrar que a cada deslocamento é necessário se preocupar com o detalhe de que, quando o valor 10_2 empresta 1_2, ele muda o valor para 1_2.

Operação no Sistema Decimal

Para entender melhor o que acontece quando em uma operação aritmética binária encontra-se a subtração de um dígito de menor valor por outro de maior valor, observe o sistema decimal na mesma situação:

$$\begin{array}{rl} {}^{10} & \\ 9\ 3 & - \\ 1\ 7 & \\ \hline \end{array}$$

Nesta operação é necessário subtrair o dígito 3_{10} do dígito 7_{10}. Nesse caso, é "emprestado" 1 do dígito imediatamente à esquerda (9_{10}). Mas como ele se encontra à esquerda, ele vale dez vezes mais que o dígito à direita, então, quando ele empresta o dígito 1, na verdade ele está emprestando o valor 10_{10}, ou seja, uma base (lembre-se de que o 3 está na posição das unidades e o 9 está na posição das dezenas). Ele deixa de valer 90 e passa a valer 80.

A mesma coisa acontece em binário, portanto, quando ocorre o "empréstimo", ele vale uma base, ou seja, 2 em binário, que é representado como 10_2.

Exemplo:

Primeiro passo

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1_2 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1_2 & - \\ \hline & & & & 0 & \end{array}$$

Segundo passo

$$\begin{array}{ccccc|c} & 0 & 10 & & & \\ 1 & \cancel{1} & \cancel{0} & 0 & 1_2 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1_2 & - \\ \hline & & & & 0 & \end{array}$$

O dígito à esquerda é 0_2, portanto é necessário procurar mais à esquerda até encontrar o primeiro dígito 1_2. Então os empréstimos vão sendo realizados.

Terceiro passo

$$\begin{array}{ccccc|c} & & 1 & & & \\ & 0 & \cancel{10} & 10 & & \\ 1 & \cancel{1} & \cancel{0} & 0 & 1_2 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1_2 & - \\ \hline & & & 1 & 0 & \end{array}$$

Quando o 10_2 empresta 1_2 para o número à direita, ele se torna 1_2 ($10_2 - 1_2$).

Quarto passo

$$\begin{array}{ccccc|c} & & 1 & & & \\ & 0 & \cancel{10} & 10 & & \\ 1 & \cancel{1} & \cancel{0} & 0 & 1_2 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1_2 & - \\ \hline & & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

Quinto passo

$$\begin{array}{ccccc|c} & & 1 & & & \\ & 0 & \cancel{10} & 10 & & \\ 1 & \cancel{1} & \cancel{0} & 0 & 1_2 & \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1_2 & - \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0_2 & \end{array}$$

1.6.4 Divisão Binária

É realizada da mesma forma que o sistema decimal, apenas levando em consideração que as multiplicações e as subtrações devem seguir as regras apresentadas para essas operações com números binários.

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & 0 & 0_2 & \underline{10_2} \\ 1 & 0 & & & 1\ 1\ 0_2 \\ \hline & 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & & \\ \hline & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

1.7 Sistema de Numeração Hexadecimal

O **sistema de numeração hexadecimal** utiliza 16 dígitos para representar os números (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F). Esse sistema de numeração derivou do sistema de numeração binário para facilitar a interação entre o homem e o computador, que seria bem mais difícil se fossem utilizados somente zeros e uns.

Esse sistema de numeração é muito utilizado na informática por ser "uma conciliação razoável entre o que está mais próximo do equipamento e o que é prático para as pessoas utilizarem". (NORTON, 1996, p.383)

Cada dígito hexadecimal corresponde a um grupo diferente de quatro dígitos binários, o que diminui a quantidade de numerais necessários para representar um determinado número.

Decimal	Binário	Hexadecimal
0	0000	0
1	0001	1
2	0010	2
3	0011	3
4	0100	4
5	0101	5
6	0110	6
7	0111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

1.7.1 Conversão de um Número Hexadecimal em um Número Binário

Utilizar a tabela anterior e substituir cada dígito hexadecimal pelos quatro dígitos binários correspondentes.

$9D8F_{16} \rightarrow$ **1001 1101 1000 1111**

9 D 8 F

$\mathbf{9D8F_{16} \Leftrightarrow 1001110110001111_2}$

Observação: Alguns autores utilizam o símbolo "H" como índice para representar o número no sistema de numeração hexadecimal, em vez do "16". Portanto, $\mathbf{9D8F_{16} \Leftrightarrow 9D8F_H}$

1.7.2 Conversão de um Número Binário em um Número Hexadecimal

Agrupar o número binário em blocos de quatro dígitos binários, da direita para a esquerda, e converter no número em hexadecimal correspondente apresentado na tabela. Caso faltem dígitos binários na esquerda, completar com zeros, lembrando que o total de dígitos binários deve ser um múltiplo de 4.

$0101\ 0111\ 1000\ 1010_2 \rightarrow$ 0101 0111 1000 1010

5 7 8 A

$\mathbf{0101011110001010_2 \Leftrightarrow 578A_{16}}$

1.7.3 Conversão de Número Decimal em Número Hexadecimal

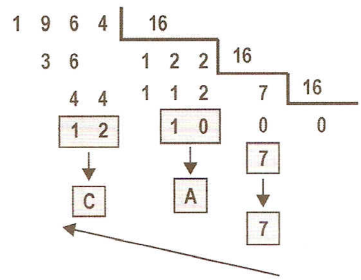
Converter o número decimal em número binário e, então, convertê-lo no número hexadecimal.

$115_{10} \rightarrow 0111 \quad 0011_2$

$7 \quad 3_H$

$$\mathbf{115_{10} \Leftrightarrow 01110011_2 \Leftrightarrow 73_H}$$

Observação: A conversão de um número decimal (base 10) em um número hexadecimal (base 16) também pode ser realizada usando o método das divisões sucessivas. Só que, nesse caso, deve-se fazer divisões sucessivas por 16 (a base é igual a 16) e os restos devem utilizar todos os numerais encontrados no sistema de numeração hexadecimal.



$$\mathbf{1964_{10} \Leftrightarrow 7AC_H}$$

1.7.4 Conversão de Número Hexadecimal em Número Decimal

Converter o número hexadecimal em número binário e, então, convertê-lo em número decimal.

$9 \quad A_H$

$1001 \quad 1010_2 \rightarrow 154_{10}$

1.8 Sistema de Numeração Octal

O sistema de numeração octal utiliza oito dígitos para representar os valores (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) e também derivou do sistema de numeração binário, só que, no seu caso, representa o agrupamento de três diferentes dígitos binários.

As conversões entre os números nesse sistema de numeração e os números nos sistemas de numeração apresentados anteriormente seguem as mesmas regras, respeitando-se apenas a tabela apresentada ao lado.

Decimal	Binário	Octal
0	000	0
1	001	1
2	010	2
3	011	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7

Considerações Importantes

Todos os sistemas de numeração apresentados neste capítulo possuem algumas características comuns:

- O dígito 0 (zero) pode ser omitido quando colocado à esquerda do número representado, pois nessa posição ele não altera o valor representado.
- Todos os sistemas de numeração devem apresentar infinitos valores.

- Quando ocorre o "estouro" da base, ou seja, o valor não pode ser representado somente por um numeral, o próximo numeral será sempre 10, ou seja, no sistema decimal, após o 9_{10} vem o numeral 10_{10}, no sistema binário, após o 1_2 vem o numeral 10_2, e no sistema hexadecimal, após o F_{16} vem o numeral 10_{16}.