

# **Introduktion til Digital Signalanalyse**

## **Eksamensforberedelse**

Jonas Lind

15-08-2017

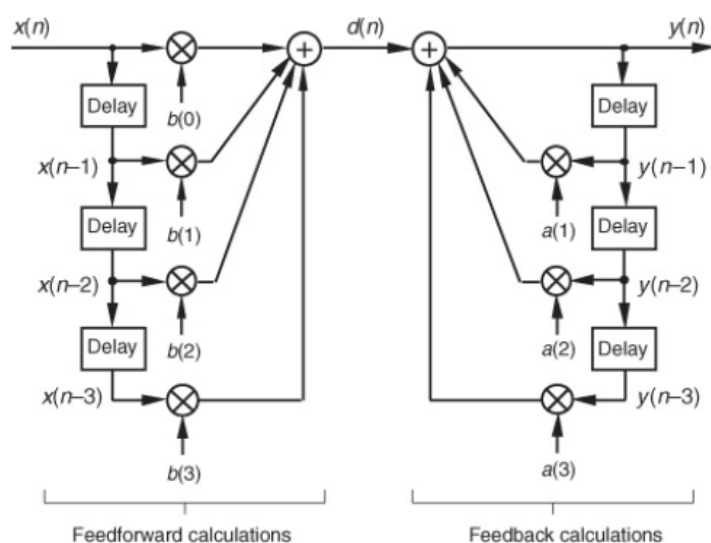
- 1 Analyse af digitale signaler med Diskret Fourier Transformation og Spektrogram**

## 2 Spektral forbredning, zero-padding og window functions i relation til DFT

### 3 FIR/IIR filter analyse og design vha. placering af poler/nuller i pol-nulpunkts-diagrammet

#### 3.1 FIR- og IIR-filtre generelt

- FIR filter output samples afhænger kun af tidligere input samples.
- IIR filter output samples afhænger af tidligere input samples og af tidligere output samples.
- FIR filter har et endeligt impuls-respons og  $h(n) = \text{filter-koefficienter}$ .
- IIR filter har et uendeligt impuls-respons og  $h(n)$  skal med tiden falde mod 0 for at det er stabilt.



Figur 1: IIR digital filter struktur med feedforward og feedback udregninger.

Differensligning - Finite Impulse Response (FIR)

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_Mx(n-M) \quad (1)$$

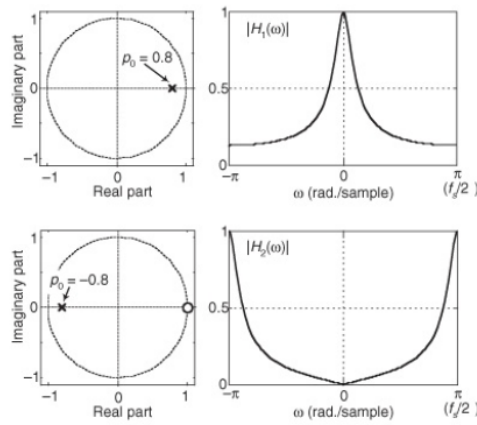
Differensligning - Infinite Impulse Responses (IIR)

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + \dots + b_Mx(n-M) + a_1y(n-1) + a_2y(n-2) + \dots + a_Ny(n-N) \quad (2)$$

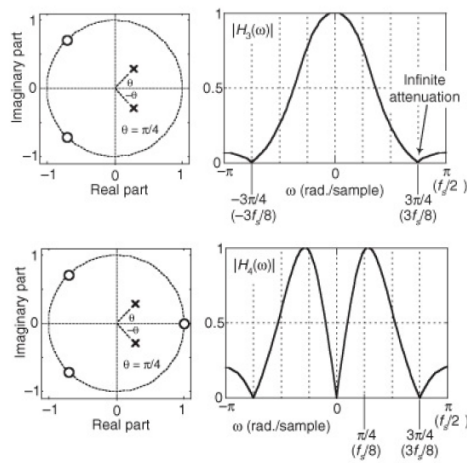
- Filtrets orden er største værdi af N og M.

#### 3.2 Pol-nulpunkts analyse

- FIR eller IIR-filtre?
  - FIR har kun poler i origo.
  - IIR har flere poler.
- Poler danner peaks.
  - Har betydning for hvor meget frekvenserne bliver forstærket, hvis den placeres på enhedscirklen forstærkes frekvenserne uendeligt meget.
- Nulpunkter danner dyk.
  - Har betydning for hvor meget frekvenserne bliver dæmpet, hvis den placeres på enhedscirklen dæmpes frekvenserne uendeligt meget.

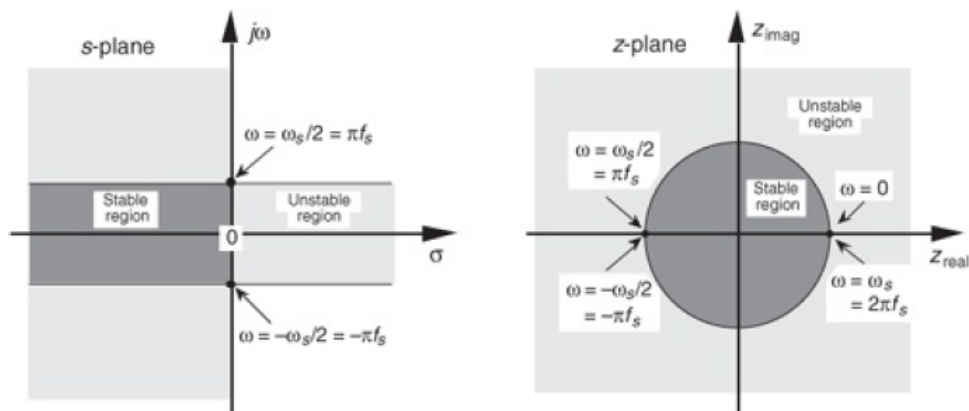


Figur 2: IIR filter poler/nulpunkter og normaliseret frekvens respons.



Figur 3: IIR filter poler/nulpunkter og normaliseret frekvens respons.

- Stabilitet.
  - Hvis alle poler er placeret inde i enhedscirklen vil filteret være stabilt.
  - Polen kan ophæves ved at have et nulpunkt med præcis samme afstand fra (0,0) og dermed samme længde.
  - Poler/nulpunkter placeret i (0,0) påvirker ikke filterets frekvens respons.



Figur 4: Enhedscirklen.

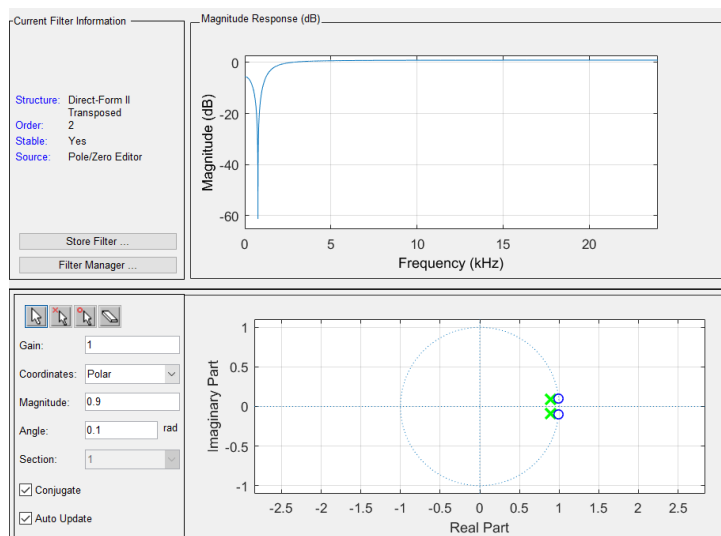
### 3.3 Design af 2. ordens IIR filter

- Et 2. ordens FIR notch filter designs ved at placere poler og nulpunkter i z-domænet.
- Nulpunkter/poler har en radius og vinkel da de er komplekse tal.
  - $r$  er nul-radius og  $\omega$  er nul-vinkel.
  - Nul-radius sættes til 1 og pol-radius sættes til 0,9 da det et skarpt filter ønskes.

$$z_0 = re^{j\omega} \mid p_0 = re^{j\omega} \quad (3)$$

- Vinklen af de to nulpunkter og to poler beregnes (kompleks konjugerede).

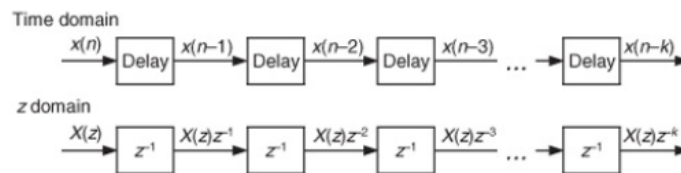
$$\omega = 2\pi \frac{f}{f_s} \quad (4)$$



Figur 5: Filter Designer tool i Matlab.

- Overførelsesfunktionen  $H(z)$  i z-domænet opstilles ud fra poler/nulpunkter.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = G \frac{(z - z_0)(z - \bar{z}_0)}{(z - p_0)(z - \bar{p}_0)} = G \frac{(z - e^{j\omega})(z - e^{-j\omega})}{(z - r \cdot e^{j\omega})(z - r \cdot e^{-j\omega})} \quad (5)$$



Figur 6: Tids- og z-domæne delay.

- Overførelsesfunktionen  $H(z)$  skrives om således at polynomierne er opløftet negativt.

$$H(z) = \frac{z^2 - z(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + e^{j\omega} \cdot e^{-j\omega}}{z^2 - z(r \cdot e^{j\omega} + r \cdot e^{-j\omega}) + r \cdot e^{j\omega} \cdot r \cdot e^{-j\omega}} \cdot \frac{z^{-2}}{z^{-2}} \rightarrow \quad (6)$$

$$\frac{1 - z^{-1}(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + z^{-2}(e^{j\omega} \cdot e^{-j\omega})}{1 - z^{-1}(r \cdot e^{j\omega} + r \cdot e^{-j\omega}) + z^{-2}(r \cdot e^{j\omega} \cdot r \cdot e^{-j\omega})} \quad (7)$$

- Brøkerne kan skrives ud.

$$Y(z)(1 - z^{-1}(r \cdot e^{j\omega} + r \cdot e^{-j\omega}) + z^{-2}(r \cdot e^{j\omega} \cdot r \cdot e^{-j\omega})) = X(z)(1 - z^{-1}(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + z^{-2}(e^{j\omega} \cdot e^{-j\omega})) \quad (8)$$

- Differensligningen kan opstilles ved at anvende invers z-transformation.

## 4 Window method til FIR filter design

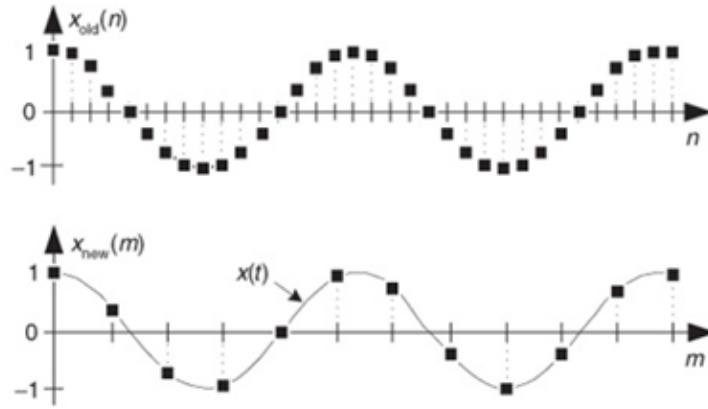
## 5 Interpolation og decimation

### 5.1 Decimation

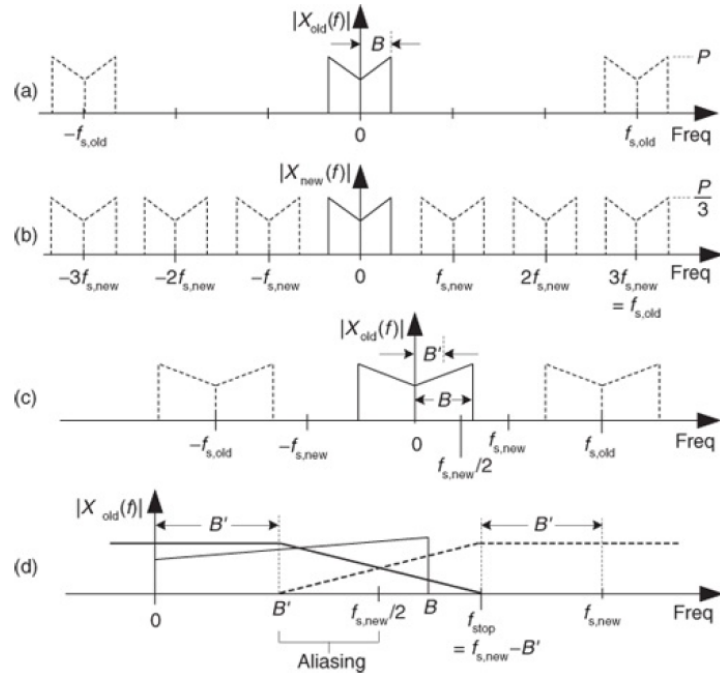
- To-trins proces med lavpasfiltrering efterfulgt af downsampling.
- Samplerate reduceres ved downsampling.
  - En sekvens af samplede signalværdier kan downsamples med en faktor  $M$  ved at beholde hver  $M$ -sample og kassere alle resterende samples.

$$f_{s\ new} = \frac{f_{s\ old}}{M} \quad (9)$$

$$x_{new}(m) = x_{old}(Mm) \quad (10)$$



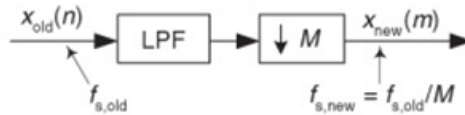
Figur 7: Sample rate konvertering med den originale sekvens øverst og den downsampled med  $M = 3$  sekvens nederst.



Figur 8: Spektrummet af et originalt båndbegrænset samplet  $x_{old}(n)$  signal er indikeret med solid lines. Spektralreplikationer er angivet med dashed lines.



- $X_{new}(f)$  kan være opnået direkte ved at sample det originale kontinuerlige  $x(t)$  signal med en samplefrekvens på  $f_{s\ new}$ , i modsætning til nedsampling  $x_{old}(n)$  med en faktor på tre.
- Der er en grænse for hvor meget der kan downsamples i forhold til båndbredden  $B$  af det originale signal.
  - Den nye samplefrekvens  $f_{s\ new} > 2B$  for at forhindre aliasering.
  - Hvis en decimation kræver  $f_{s\ new} < 2B$ , skal  $x_{old}(n)$  være lavpasfiltreret før downsampling udføres.
    - \* Hvis det originale signal har en båndbredde  $B$  og det kun er båndbredden  $B_v$  der er interessant at beholde skal signal spektrummet over  $B'$  lavpas-filtreres med fuld dæmpning i stopbåndet fra  $f_{stop}$ .
    - \* Lavpas filteret's  $f_{stop}$  frekvens kan være så høj som  $f_{stop} = f_{s\ new} - B'$  og der vil ikke opstå aliasering i båndbredden  $B'$ .
- Downsampling medfører ikke amplitudetab i tidsdomænet.
- Downsampling medfører derimod et amplitudetab med en faktor  $M$  i frekvensdomænet,  $A_{new} = \frac{A}{M}$ .
  - DFT amplituden er proportional med antallet af samples i tidsdomænet.

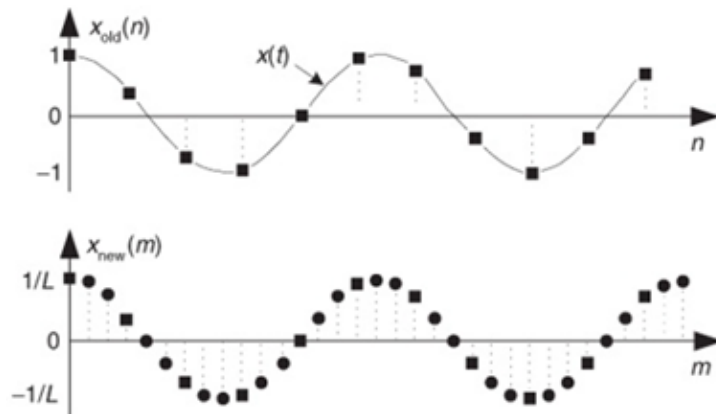


Figur 9: Decimation.

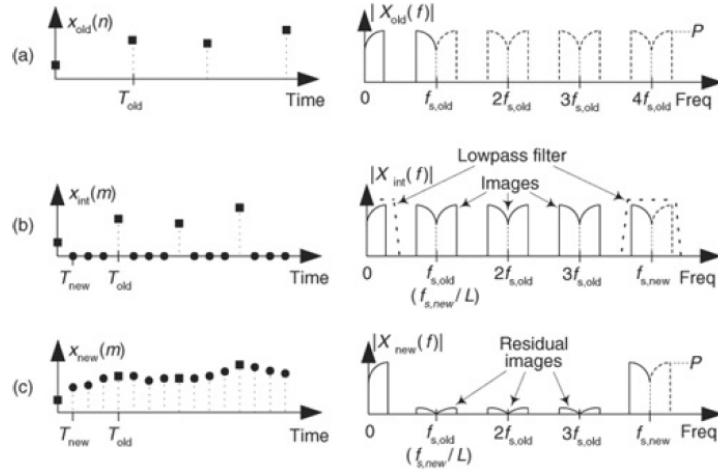
## 5.2 Interpolation

- Interpolation er en to-trins proces med upsampling efterfulgt af en lavpasfiltrering.
- Samplerate øges ved upsampling.
  - For at øge samplefrekvensen  $f_{s\ old}$  med en faktor  $L$  indsættes  $L - 1$  zero-valued samples mellem hver sample i  $x_{old}(n)$ , hvilket skaber en længere sekvens.
  - I slutningen af den forlængede sekvens tilføjes også  $L - 1$  zero-valued samples.

$$f_{s\ new} = L \cdot f_{s\ old} \quad (11)$$

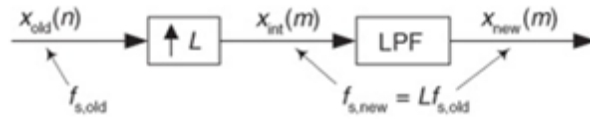


Figur 10: Interpolation med den originale sekvens øverst og den upsamlede med  $L = 3$  sekvens nederst.



Figur 11: Den originale sekvens øverst, den upsamlede med  $L = 4$  sekvens i midten og output sekvensen efter interpolation filter nederst.

- Lavpasfilteret sørger for at dæmpe de spektrale "images" i frekvensdomænet.
  - Dette filter kaldes for et interpolation filter.
- Interpolation medfører et amplitudetab med en faktor  $L$  i tidsdomænet, men det amplitudetab forsvinder i frekvensdomænet da sekvensen indeholder  $L$  gange flere samples.
  - DFT amplituden er proportional med antallet af samples i tidsdomænet.

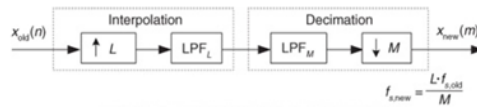


Figur 12: Interpolation.

### 5.3 Kombination af Interpolation og Decimation

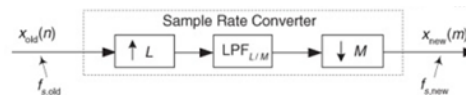
- Samplerate konvertering; Interpolation med en faktor  $L$  efterfulgt af Decimation med en faktor  $M$ .

$$\text{Sample rate conversion} = \frac{L}{M} \quad (12)$$



Figur 13: Kombination af interpolation/decimation.

- Interpolationsfiltret  $LPF_L$  og decimeringsfiltret  $LPF_M$  kan kombineres i et enkelt filter.
- Beregningsbyrden for at ændre sampreraten med  $L/M$  er mindre når filterne kombineres end ved en individuel interpolation efterfulgt af en individuel decimation.



Figur 14: Anvendelse af et multirate filter.

- Dette kaldes for en sample rate converter.
  - Hvis  $L > M$  har vi interpolation.
  - Hvis  $M > L$  har vi decimering.
- Filteret  $LPF_{L/M}$  kaldes ofte et multirate filter.
- For at undgå aliasering skal filteret,  $LPF_{L/M}$ , dæmpe alle frekvenser der ligger over:
  - $\frac{f_{s\ old}}{2}$
- Eller hvis  $LPF_{L/M}$  efter hvilen der er mindst:
  - $\frac{f_{s\ old}}{2} \left( \frac{L}{M} \right)$

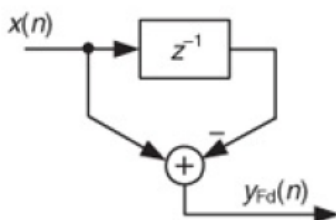
## 6 Differentiation og integration

Differentiation er godt beskrevet for kontinuerte signaler, men differation for diskrete signaler er ikke veldefineret. Derfor bruges der forskellige modeller for tilnærmelsesvis beregning af de afledte derativer i digital signal behandling.

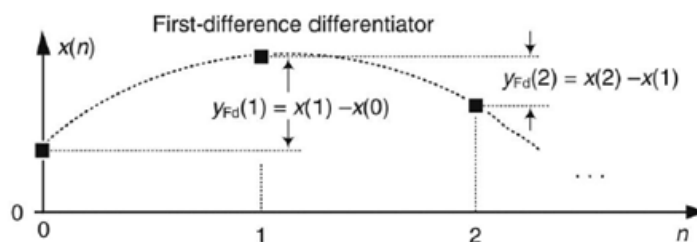
### 6.1 First-difference differentiator

- Beregner differencen mellem hver sample.
- Forstærker højfrekvente spektrale komponenter, har samme karakteristik som et højpas filter.

$$y_{Fd}(n) = x(n) - x(n-1] \quad (13)$$



Figur 15: First-difference differentiator.

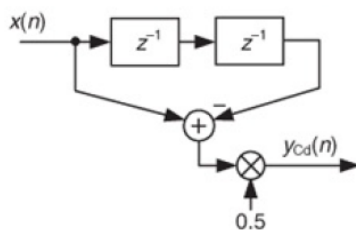


Figur 16: First-difference differentiator.

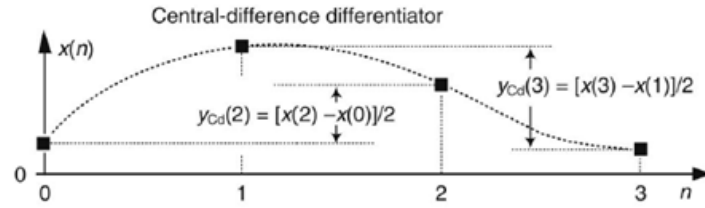
### 6.2 Central-difference differentiator

- Beregner den gennemsnitlige difference mellem hver 2. sample.
- Dæmper højfrekvente spektrale komponenter.

$$y_{Cd}(n) = \frac{x(n) - x(n-2]}{2} \quad (14)$$

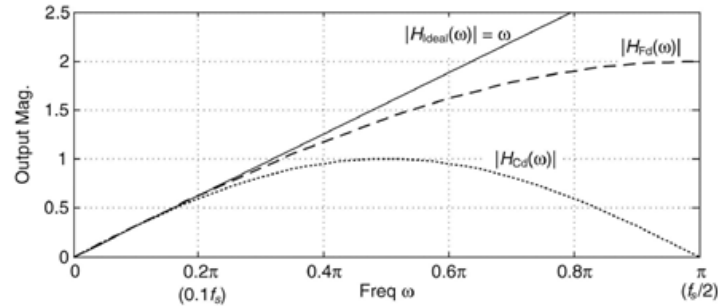


Figur 17: Central-difference differentiator.



Figur 18: Central-difference differentiator.

- First-difference og Central-difference differentiators er kun præcise når input signalets båndbredde er lille i forhold til input signalets sample rate  $f_s$ .
- Begge differentiators har lineære fase respons og dermed en konstant tidsforsinkelse kaldet *group delay*.
  - First-difference differentiator har en delayline på  $D = 1$  og dermed et group delay på  $G_{diff} = \frac{D}{2} = 1/2 = 0,5$  sample.
  - Central-difference differentiator har en delayline på  $D = 2$  og dermed et group delay på  $G_{diff} = \frac{D}{2} = 2/2 = 1$  sample.



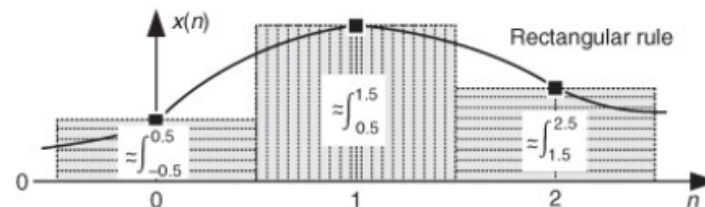
Figur 19: Frekvensrespons for simple differentiators.

### 6.3 Integration

Integration er godt beskrevet for kontinuerte signaler, men integration for diskrete signaler er ikke vel-defineret. Derfor bruges der forskellige modeller for tilnærmelsesvis kontinuert integration.

**Rectangular Rule Integrator** udregner summen af de skraverede rektangler. Den nuværende sum  $y_{Re}(n)$ , er den forhenværende sum  $y_{Re}(n-1)$  plus den nuværende input sample  $x(n)$ .

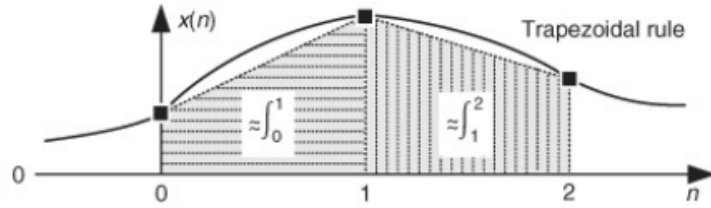
$$y_{Re}(n) = x(n) + y_{Re}(n-1) \quad (15)$$



Figur 20: Rectangular Rule Integrator.

**Trapezoidal Rule Integrator** udregner summen af  $y_{Tr}(n)$  ved at beregne arealet ved gennemsnittet af  $x(n) + x(n-1)$  i det skraverede areal til højre og addere det med værdien for den forhenstående sum  $y_{Tr}(n-1)$ .

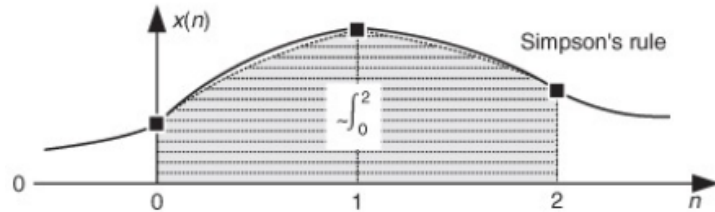
$$y_{Tr}(n) = 0.5x(n) + 0.5x(n-1)y_{Tr}(n-1) \quad (16)$$



Figur 21: Trapezoidal Rule Integrator.

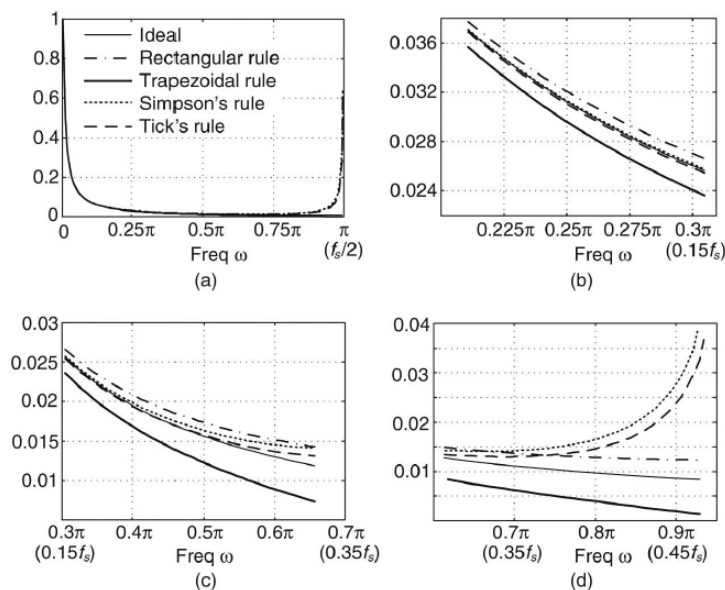
**Simpson's Rule Integrator** benytter tre samples til at beregne arealet under skraverede kurve.

$$y_{Si}(n) = \frac{x(n) + 4x(n-1)x(n-2)}{3} + y_{Si}(n-2) \quad (17)$$



Figur 22: Simpson's Rule Integrator.

- Simple integrators er præcise ved lave frekvenser (når input signalets båndbredde er lille i forhold til input signalets sample rate  $f_s$ ).
  - Det er her hvor det er mest nødvendigt med høj præcision.
- Ved højfrekvent støj scenarier skal Rectangular Rule eller Trapezoidal Rule integratorer anvendes, fordi de giver forbedret dæmpning af spektrale komponenter i nærheden af  $\frac{f_s}{2}$ .



Figur 23: Normaliseret frekvensrespons for fire integrators.

## 7 Stokastiske signaler, herunder middelværdi, varians, sandsynlighedstæthedsfunktion og histogram

## 8 Beregning af Signal-Noise Ratio i tids- og frekvens-domænet



## 9 Midlingsfiltre

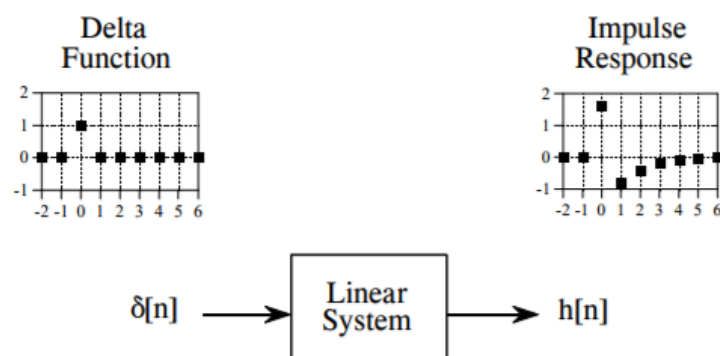
## 10 Auto- og kryds-korrelation

### 10.1 Foldning

Foldning er en matematisk måde at kombinere to signaler til at danne et tredje signal.

#### 10.1.1 Delta Funktion og Impuls Respons

- Delta-funktionen  $\delta[n]$  er en normaliseret impuls.
- Alle dens samples har en værdi på 0, bortset fra samplenummer 0, som har en værdi på 1.
- Impuls responset  $h[n]$  for et lineært system er outputtet fra systemet, når inputtet er en delta-funktion.

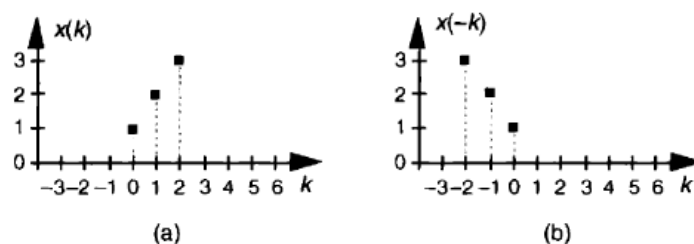


Figur 24: Definition af delta funktionen og impuls responset.

- Inputsignalet foldet med systemets impuls respons er svarende til outputsignalet.
- Hvis  $x[n]$  er et signal med  $N$  antal samples fra 0 til  $N-1$ , og  $h[n]$  er et signal med  $M$  antal samples fra 0 til  $M-1$ , bliver foldningen af de to signaler:  $y(n) = x(n) \otimes h(n)$ , et signal med  $N + M - 1$  antal samples fra 0 til  $N + M - 2$ .

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) \cdot x(n-k) = h(n) \otimes x(n) \quad (18)$$

- Inputsignalet  $x(k)$  flippes rundt så dette placerer sample 0 til højre og efterfølgende opadgående samples til venstre.
  - $x(k)$  bliver herved til  $x(-k)$ .
- Alle produkter af  $h(k)$  og  $x(0-k)$  for alle  $k$ -værdier summeres og herved fås  $y(0)$ .
- $x(-k)$  shiftes en sample til højre.
- Alle produkter af  $h(k)$  og  $x(1-k)$  for alle  $k$ -værdier summeres og herved fås  $y(1)$ .
- Der shiftes og summeres indtil der ikke er overlap mellem  $h(k)$  og  $x(n-k)$ .



Figur 25: (a) sekvensen  $x(k)$ ; (b) spejling af sekvensen  $x(k)$  omkring  $k = 0$ .

**Foldningsteorem I** betyder at foldning af to signaler i tidsdomænet er det samme som multiplikation af to signaler i frekvensdomænet.

$$h(n) \otimes x(n) \Leftrightarrow H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) \quad (19)$$

**Foldnings-teorem II** betyder at foldning af to signaler i frekvensdomænet er det samme som multiplikation af to signaler i tidsdomænet.

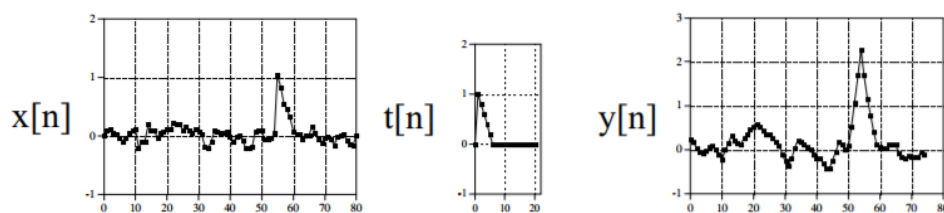
$$h(n) \cdot x(n) \Leftrightarrow H(e^{j\omega}) \otimes X(e^{j\omega}) \quad (20)$$

## 10.2 Krydskorrelation

Korrelation mellem 2 signaler. Kan bruges til at finde periodicitet i et signal, signaldetektion eller system identifikation

- Amplituden af hver sample i krydskorrelationssignalet er mål for hvor meget det signal der er optaget lignet det oprindelige target signal.
- $r(n)$  er derfor et mål for, hvor meget et signal ligner et andet signal - tidsforskuet med  $n$ .

$$r(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n+k) = h(n) \otimes x(-n) \quad (21)$$



Figur 26:  $y(n)$  er krydskorrelationen mellem  $x(n)$  og  $t(n)$ .

## 10.3 Autokorrelation

Korrelation af signal med sig selv tidsforskuet.

$$r(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot x(n+k) = x(n) \otimes x(-n) \quad (22)$$

## 11 CASE projekt 1 FSK transmission

## 12 CASE projekt 2 Audio filter

## 13 CASE projekt 3 Vejecelle

## 14 CASE projekt 4 - Sonar

### 14.1 Opgavebeskrivelse

- Afstandsbestemmelse ved et udsende et akustisk signal.
- Systemet vil afspille og optage ekko-signalet på Blackfin kittet.
- Afstanden findes ved hjælp af krydskorrelation.

### 14.2 Signal generation

- Krav til signalet er at samplefrekvensen er 48 kHz, da det er denne som Blackfin kittet arbejder med. Vi vælger 50 ms og derfor får vi en arraystørrelse på 2400 samples.
- Et unikt signal ønskes, hvorfor et sweep eller hvid støj er bedre end et sinus signal.
  - Et sinus signal er kontinuert og da den gentager sig selv er det et problem da vi med korrelation leder efter gentagelser.
- Længden af signalet skal sørge for at være langt nok til at optage både når signalet sendes afsted og indtil det er kommet tilbage.
- Præcisionen af målingen er ca. 7 mm per sample.

$$\frac{340 \text{ m s}^{-1}}{48 \text{ kHz}} \approx 7 \text{ mm} \quad (23)$$

- Systemet skal kunne måle afstande op til 10 m. Dette giver en forventning om at ekkoet skal rejse 20 m. Det vil tage ekkoet 59 ms at rejse 20 meter.

$$\frac{20 \text{ m}}{340 \text{ m s}^{-1}} \approx 59 \text{ ms} \quad (24)$$

- Antal samples der er brug for til at optage afspilningen er  $F_s \cdot T + 2400 \cdot 2 \approx 7600$ .
- Array størrelsen bliver hermed  $2^{13} = 8192$ .
- Optagetiden er herved 160 ms.

$$\frac{N}{F_s} = \frac{7600}{48 \text{ kHz}} \approx 160 \text{ ms} \quad (25)$$

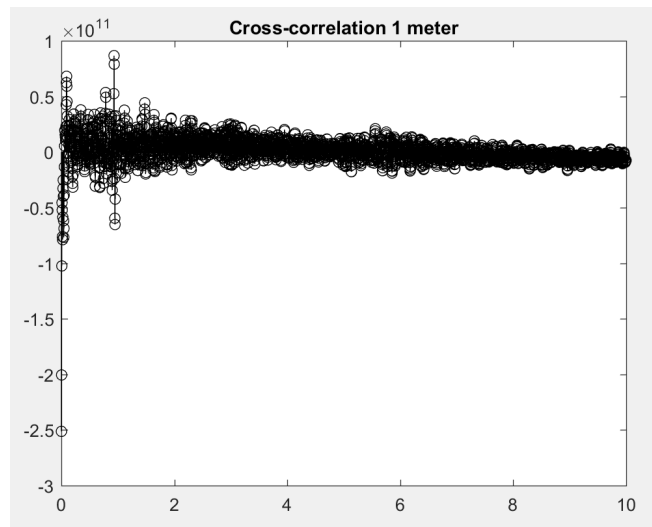
### 14.3 Signal analyse

- Krydskorrelation anvendes mellem det udsendte signal og de optagede signaler for at finde tidsforskydningen.
- Distancen kan beregnes ved den sample hvor der opstår peak i krydskorrelationen.

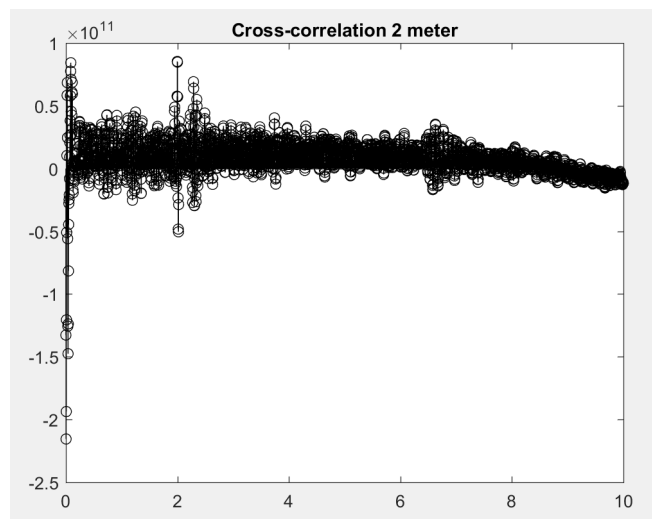
$$Distance = Sample \cdot 340 \text{ m s}^{-1} \cdot \frac{1}{48 \text{ kHz}} \cdot 0.5 \quad (26)$$

Afstand målt [m]	Afstand udregnet [m]	Difference [cm]
1	0,935	6,5
1,5	1,678	17,8
2	2,001	0,1
3	3,184	18,4
4,5	4,388	11,2

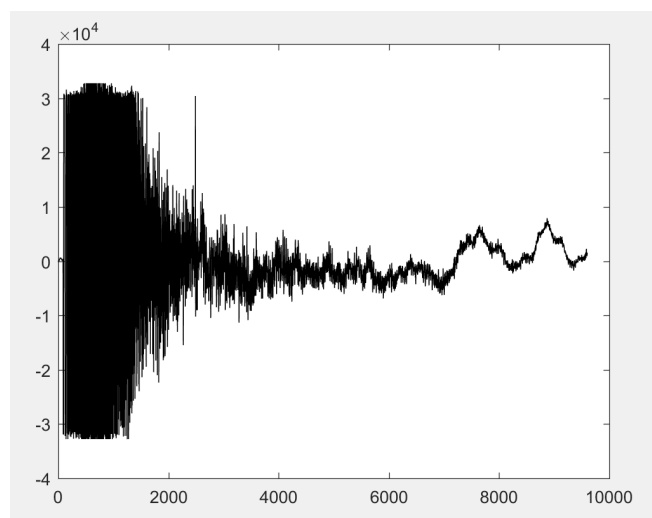
Tabel 1: Resultater af analyse.



Figur 27: Stem af krydskorrelation for 1 m.



Figur 28: Stem af krydskorrelation for 2 m.



Figur 29: Højttaleren er tæt på mikrofonen hvorfor signalet er meget kraftigere i starten af optagelsen.