Introduktion til Digital Signalanalyse

Eksamensforberedelse

Jonas Lind

15-08-2017

1 Analyse af digitale signaler med Diskret Fourier Transformation og Spektrogram

1.1 DFT

- Tidsinvariant (amplitude, frekvens og fase ændrer sig ikke med tiden indenfor vinduet der analyseres).
- Bruges til at transformere tidsdomæne data til frekvensdomæne data.
  - Et tidsdiskret signal i tidsdomænet transformeres til et signal angivet som et komplekst frekvensspektrum i frekvensdomænet.

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{\frac{-j2\pi mn}{N}} \tag{1}$$

n = tidsindex, m = frekvensindex, f_s = samplingsfrekvens, N = antal samples

- Eulers formel bruges for at beregne den reelle del og den imaginære del.

$$e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j\sin(\theta) \tag{2}$$

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)(\cos\left(\frac{-j2\pi mn}{N}\right)\sin\left(\frac{-j2\pi mn}{N}\right)) \tag{3}$$

Amplitudespektrum Amplituden af X(m) kan beregnes ved længden af den reelle og imaginære del.

$$|X(m)| = \sqrt{Re(X(m))^2 + Im(X(m))^2} \tag{4}$$

Effektspektrum Effekten af X(m) kan beregnes ved at opløfte amplituden i 2. potens.

$$|X(m)|^2 \tag{5}$$

Analyse frekvens Samplefrekvensen kan findes ved en sample periode.

$$f_s = \frac{1}{t_s} \tag{6}$$

$$f_{analyse}(m) = \frac{mf_s}{N} \tag{7}$$

1.2 Frekvensopløsning

- Længden af vinduet bestemmer frekvensopløsningen.
  - Et bredt vindue øger frekvens opløsningen, men der ting der forhindrer det praktisk.
  - Hvis ikke ΔR går op i sinus signalet kommer der spektral forbredning.
- Inputsignalet har en frekvens der ligger under ΔR, vil der opstå spektral forbredning og inputsignalet vil vise sig i alle output "bins".

$$\Delta R = \frac{f_s}{N} \tag{8}$$

- Et bredt vindue medfører
  - Sampletiden forlænges og det betyder lange delays og en større DFT udregning.
  - Et langt vindue vil resultere i et signal der varierer med tiden.
  - Det medfører en ukorrekt frekvensanalyse hvis DFT udføres på et signal der ændrer sig over tid.

1.3 Short-Time DFT

- Løsningen på at udføre DFT på et bredt vindue.
  - Bryder et langt signal ned til mindre segmenter og analysere hvert enkelt segment med DFT.
  - Segmenterne er i et fast interval fra $k = 0$ til $k = N - 1$.
  - Når n ændres glider vinduet over på et andet segment af signalet.

1.4 Spektrogram

- Der er et trade-off imellem en god frekvensopløsning eller en god tidsopløsning.
  - Et smalt vindue giver en god opløsning i tid, men giver en dårlig opløsning i frekvens.
  - Et bredt vindue giver en god opløsning i frekvens, men en dårlig opløsning i tid.

1.5 Invers-DFT

- Bruges til at transformere frekvensdomæne data til tidsdomæne data.

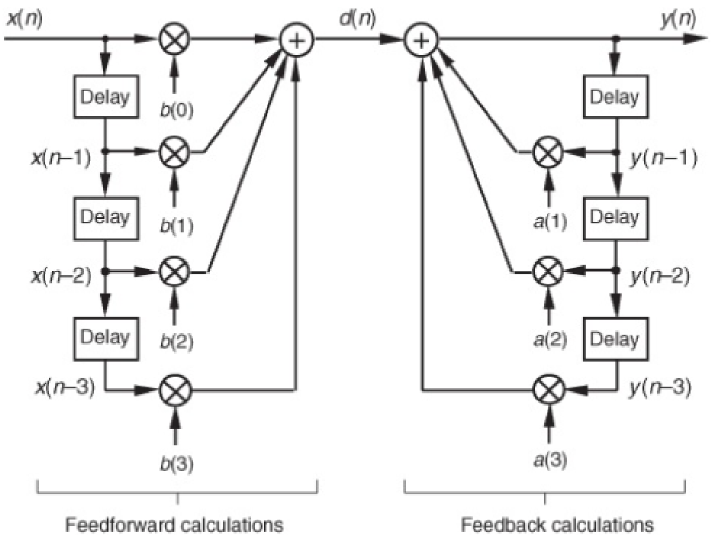
$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{\frac{j2\pi mn}{N}} \tag{9}$$

2 Spektral forbredning, zero-padding og window functions i relation til DFT

3 FIR/IIR filter analyse og design vha. placering af poler/nuller i pol-nulpunkts-diagrammet

3.1 FIR- og IIR-filtre generelt

- FIR filter output samples afhænger kun af tidligere input samples.
- IIR filter output samples afhænger af tidligere input samples og af tidligere output samples.
- FIR filter har et endeligt impuls-respons og $h(n)$ = filter-koefficienter.
- IIR filter har et uendeligt impuls-respons og $h(n)$ skal med tiden falde mod 0 for at det er stabilt.



Figur 1: IIR digital filter struktur med feedforward og feedback udregninger.

Differensligning - Finite Impulse Response (FIR)

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + ... + b_Mx(n-M) \tag{10}$$

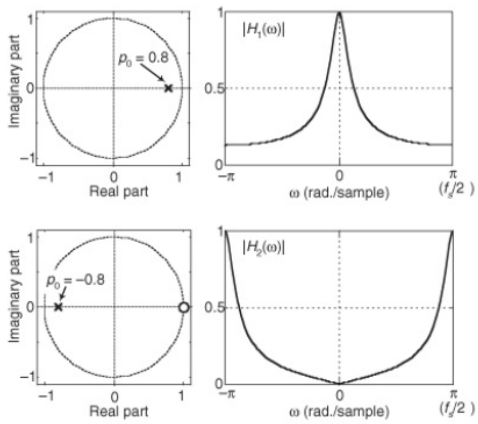
Differensligning - Infinite Impulse Respons (IIR)

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + ... + b_Mx(n-M) + a_1y(n-1) + a_2y(n-2) + ... + a_Ny(n-N) \tag{11}$$

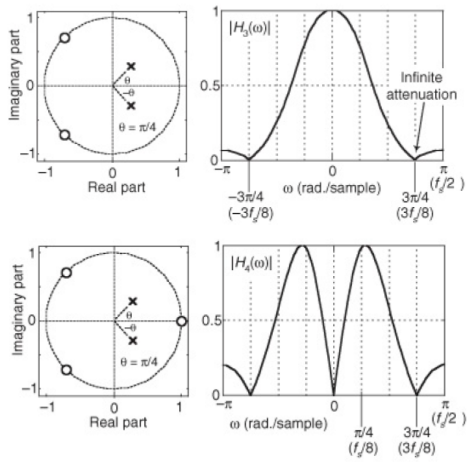
- Filtrets orden er største værdi af N og M.

3.2 Pol-nulpunkts analyse

- FIR eller IIR-filter?
  - FIR har kun poler i origo.
  - IIR har flere poler.
- Poler danner peaks.
  - Har betydning for hvor meget frekvenserne bliver forstærket, hvis den placeres på enhedscirklen forstærkes frekvenserne uendeligt meget.
- Nulpunkter danner dyk.
  - Har betydning for hvor meget frekvenserne bliver dæmpet, hvis den placeres på enhedscirklen dæmpes frekvenserne uendeligt meget.

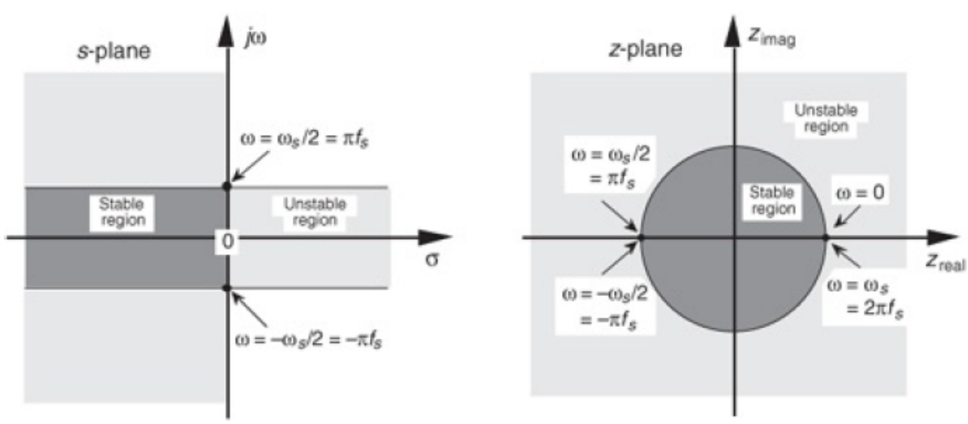


Figur 2: IIR filter poler/nulpunkter og normaliseret frekvens respons.



Figur 3: IIR filter poler/nulpunkter og normaliseret frekvens respons.

- Stabilitet.
  - Hvis alle poler er placeret inde i enhedscirklen vil filteret være stabilt.
  - Polen kan ophæves ved at have et nulpunkt med præcis samme afstand fra (0,0) og dermed samme længde.
  - Poler/nulpunkter placeret i (0,0) påvirker ikke filterets frekvens respons.



Figur 4: Enhedscirklen.

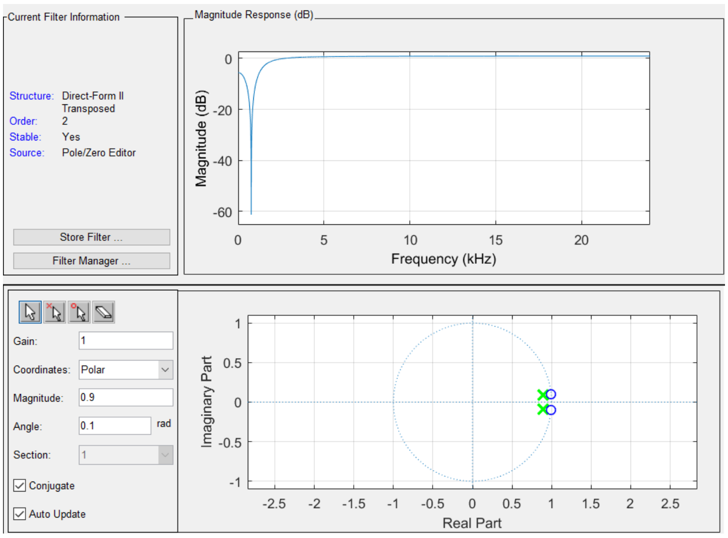
3.3 Design af 2. ordens IIR filter

- Et 2. ordens FIR notch filter designes ved at placere poler og nulpunkter i z-domænet.
- Nulpunkter/poler har en radius og vinkel da de er komplekse tal.
  - r er nul-radius og ω er nul-vinkel.
  - Nul-radius sættes til 1 og pol-radius sættes til 0,9 da det et skarpt filter ønskes.

$$z_0 = re^{j\omega} \mid p_0 = re^{j\omega} \tag{12}$$

- Vinklen af de to nulpunkter og to poler beregnes (kompleks konjugerede).

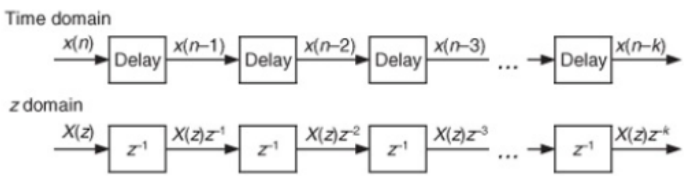
$$\omega = 2\pi \frac{f}{f_s} \tag{13}$$



Figur 5: Filter Designer tool i Matlab.

- Overførelsesfunktionen H(z) i z-domænet opstilles ud fra poler/nulpunkter.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = G\frac{(z - z_0)(z - \overline{z_0})}{(z - p_0)(z - \overline{p_0})} = G\frac{(z - e^{j\omega})(z - e^{-j\omega})}{(z - r \cdot e^{j\omega})(z - r \cdot e^{-j\omega})} \tag{14}$$



Figur 6: Tids- og z-domæne delay.

- Overførselsfunktionen H(z) skrives om således at polynomierne er opløftet negativt.

$$H(z) = \frac{z^2 - z(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + e^{j\omega} \cdot e^{-j\omega}}{z^2 - z(r \cdot e^{j\omega} + r \cdot e^{-j\omega}) + r \cdot e^{j\omega} \cdot r \cdot e^{-j\omega}} \cdot \frac{z^{-2}}{z^{-2}} \longrightarrow \tag{15}$$

$$\frac{1 - z^{-1}(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + z^{-2}(e^{j\omega} \cdot e^{-j\omega})}{1 - z^{-1}(r \cdot e^{j\omega} + r \cdot e^{-j\omega}) + z^{-2}(r \cdot e^{j\omega} \cdot r \cdot e^{-j\omega})} \tag{16}$$

- Brøkerne kan skrives ud.

$$Y(z)(1-z^{-1}(r\cdot e^{j\omega}+r\cdot e^{-j\omega})+z^{-2}(r\cdot e^{j\omega}\cdot r\cdot e^{-j\omega})=X(z)(1-z^{-1}(e^{j\omega}+e^{-j\omega})+z^{-2}(e^{j\omega}\cdot e^{-j\omega}) \quad (17)$$

- Differensligningen kan opstilles ved at anvende invers z-transformation.

4 Window method til FIR filter design

- Metode til design af FIR filtre, hvor man i frekvensdomænet vælger frekvenser man ønsker at fjerne.
- Der bruges vinduer for at undgå Gibbs fænomen, som er 'ører' på et firkantsignal.

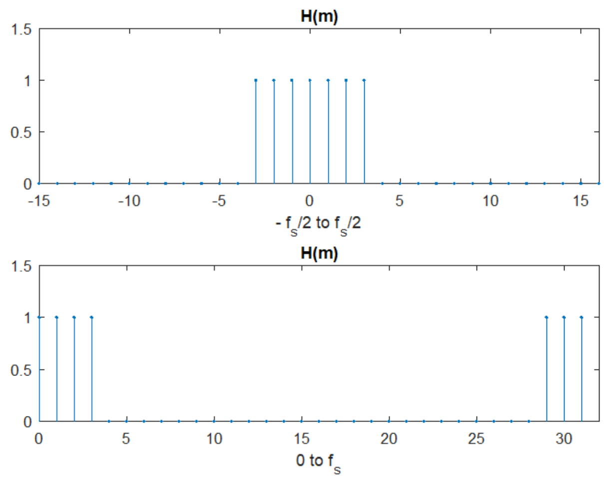
4.1 Filter design

- Fastlæg samplefrekvensen samt knækfrekvenser.
  - Antallet af filterkoefficienter/filterorden.
- Lav ideelt filter I frekvensdomænet.
  - Antal af bins bestemmer hvor præcist man kan ramme de valgte knækfrekvenser.
  - Giver et større group delay.
- Det ideelle filters overføringsfunktion konstrueres op til $\frac{f_s}{2}$, hvorefter det spejles omkring $\frac{f_s}{2}$ for at danne den fulde overføringsfunktion.

  $N = 32$

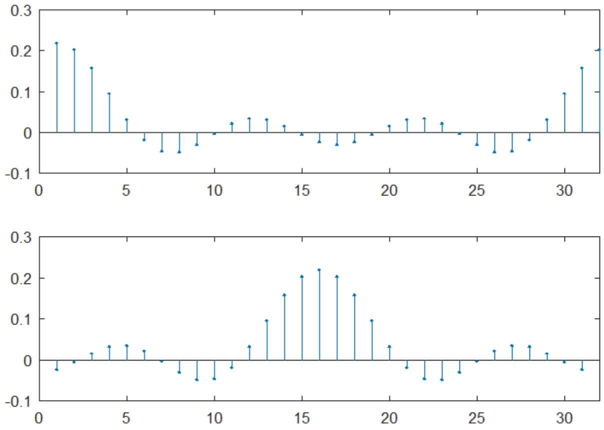
Normeret cut-off frekvens: $f_{cut} = 0,2$

Hvilket bin-nummer rammer tættest på cut-off frekvensen: $N_{cut} = \frac{f_{cut}}{2} \cdot N = 3,2 \approx 3$



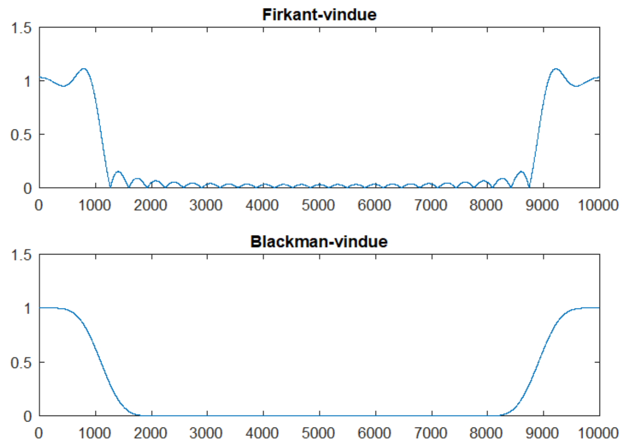
Figur 7: Ideelt lavpasfilter set med kontinuert frekvensrespons og diskret frekvensrespons.

- Der foretages en IDFT for at få filteret over i tidsdomænet.
  - I tidsdomænet bliver responset repræsenteret som en sinc-funktion.
- Sinc funktionen shiftes for at få peaket til at ligge midt i de valgte filterkoefficienter, da filterkoefficienterne skal være symmetriske for at få lineær fase.



Figur 8: IDFT af det diskrete respons efterfulgt af et symmetrisk respons der er blevet shiftet.

- Et vindue ganges på for at udvælge betydende filterkoefficienter.
  - Et vindue giver en kraftigere dæmpning.
- Filteret kan trækkes over i frekvensdomænet med en DFT, for at validere at der gør som ønsket.



Figur 9: Der anvendes DFT for at trække filteret over i frekvensdomænet for at validere det.

4.2 Typer af vinduer

- Et firkant vindue giver den skarpeste cut-off frekvens, men resultere i ripple på flankerne.
  - Skyldes at firkanten repræsenteres som en sinc i frekvensdomænet, som foldes med den ideelle overføringsfunktion.
- Et Blackman vindue giver en større dæmpning og mindre ripple, men derimod mindre skarpe flanker.

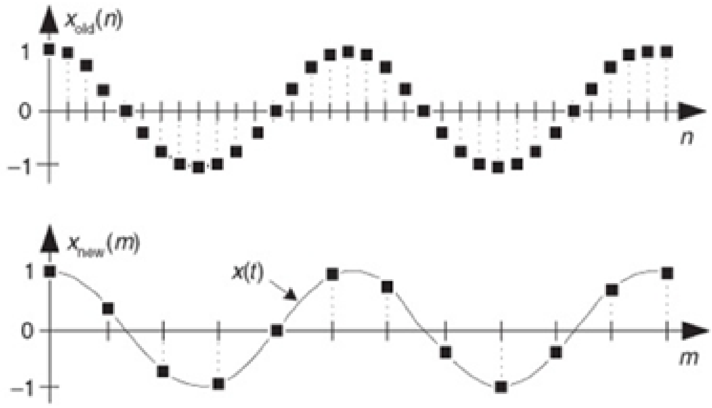
5 Interpolation og decimation

5.1 Decimation

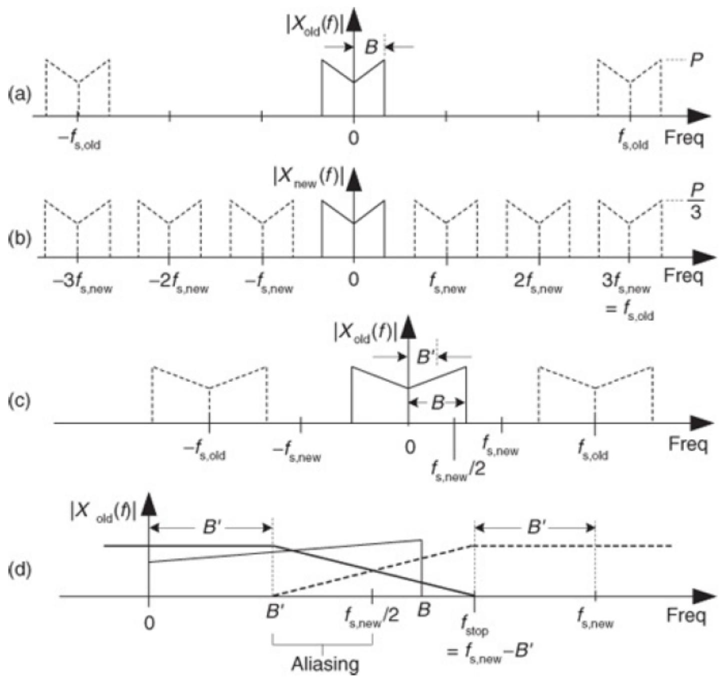
- To-trins proces med lavpasfiltrering efterfulgt af downsampling.
- Samplerate reduceres ved downsampling.
  - En sekvens af samplede signalværdier kan downsamples med en faktor M ved at beholde hver $M-$sample og kassere alle resterende samples.

$$f_{s\,new} = \frac{f_{s\,old}}{M} \tag{18}$$

$$x_{new}(m) = x_{old}(Mm) \tag{19}$$

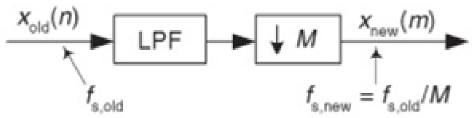


Figur 10: Sample rate konvertering med den originale sekvens øverst og den downsampled med $M = 3$ sekvens nederst.



Figur 11: Spektrummet af et originalt båndbegrænset samplet $x_{old}(n)$ signal er indikeret med solid lines. Spektralreplikationerne er angivet med dashed lines.

- $X_{new}(f)$ kan være opnået direkte ved at sample det originale kontinuerlige $x(t)$ signal med en samplefrekvens på $f_{s\,new}$, i modsætning til nedsampling $x_{old}(n)$ med en faktor på tre.
- Der er en grænse for hvor meget der kan downsamples i forhold til båndbredden B af det originale signal.
  - Den nye samplefrekvens $f_{s\,new} > 2B$ for at forhindre aliasering.
  - Hvis en decimation kræver $f_{s\,new} < 2B$, skal $x_{old}(n)$ være lavpasfiltreret før downsampling udføres.
    * Hvis det originale signal har en båndbredde B og det kun er båndbredden B_v der er interessant at beholde skal signal spektrummet over B' lavpas-filtreres med fuld dæmpning i stopbåndet fra f_{stop}.
    * Lavpas filteret's f_{stop} frekvens kan være så høj som $f_{stop} = f_{s\,new} - B'$ og der vil ikke opstå aliasering i båndbredden B'.
- Downsampling medfører ikke amplitudetab i tidsdomænet.
- Downsampling medfører derimod et amplitudetab med en faktor M i frekvensdomænet, $A_{new} = \frac{A}{M}$.
  - DFT amplituden er proportional med antallet af samples i tidsdomænet.

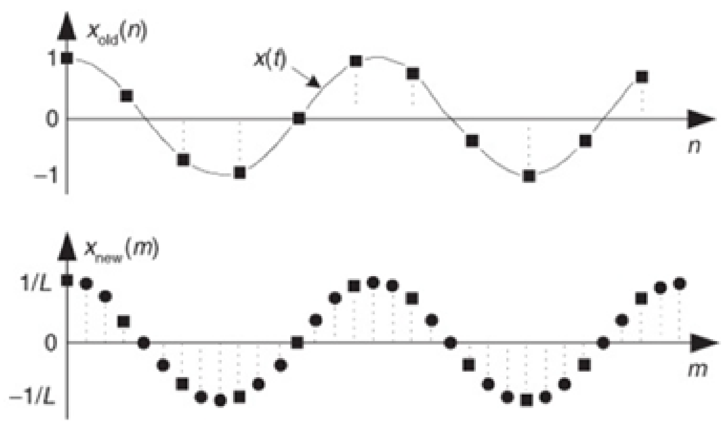


Figur 12: Decimation.

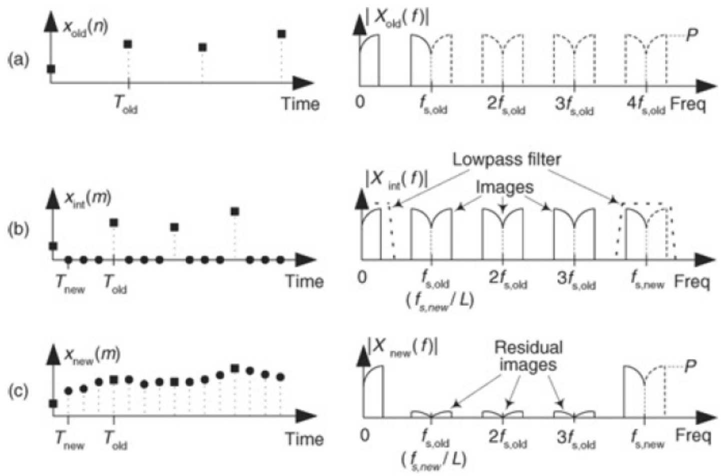
5.2 Interpolation

- Interpolation er en to-trins proces med upsampling efterfulgt af en lavpasfiltrering.
- Samplerate øges ved upsampling.
  - For at øge samplefrekvensen $f_{s\,old}$ med en faktor L indsættes $L-1$ zero-valued samples mellem hver sample i $x_{old}(n)$, hvilket skaber en længere sekvens.
  - I slutningen af den forlængede sekvens tilføjes også $L-1$ zero-valued samples.

$$f_{s\,new} = L \cdot f_{s\,old} \tag{20}$$

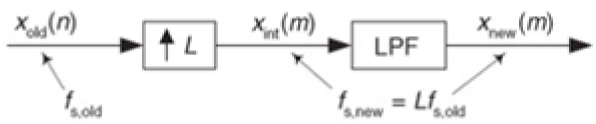


Figur 13: Interpolation med den originale sekvens øverst og den upsamplede med L = 3 sekvens nederst.



Figur 14: Den originale sekvens øverst, den upsamplede med L = 4 sekvens i midten og output sekvensen efter interpolation filter nederst.

- Lavpasfilteret sørger for at dæmpe de spektrale "*images*" i frekvensdomænet.
  - Dette filter kaldes for et interpolation filter.
- Interpolation medfører et amplitudetab med en faktor L i tidsdomænet, men det amplitudetab forsvinder i frekvensdomænet da sekvensen indeholder L gange flere samples.
  - DFT amplituden er proportional med antallet af samples i tidsdomænet.

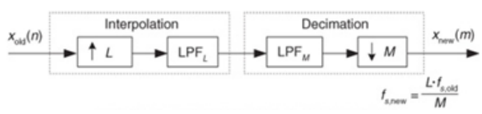


Figur 15: Interpolation.

5.3 Kombination af Interpolation og Decimation

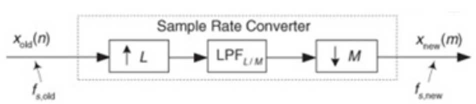
- Samplerate konvertering; Interpolation med en faktor L efterfulgt af Decimation med en faktor M.

$$Sample\ rate\ conversion = \frac{L}{M} \tag{21}$$



Figur 16: Kombination af interpolation/decimation.

- Interpolationsfiltret LPF_L og decimeringsfiltret LPF_M kan kombineres i et enkelt filter.
- Beregningsbyrden for at ændre sampleraten med L/M er mindre når filterne kombineres end ved en individuel interpolation efterfulgt af en individuel decimation.



Figur 17: Anvendelse af et multirate filter.

- Dette kaldes for en sample rate converter.
  - Hvis L > M har vi interpolation.
  - Hvis M > L har vi decimering.
- Filteret $LPF_{L/M}$ kaldes ofte et multirate filter.
- For at undgå aliasering skal filteret, $LPF_{L/M}$, dæmpe alle frekvenser der ligger over:
  - $\frac{f_{s\,old}}{2}$
- Eller hvis $LPF_{L/M}$ efter hvilen der er mindst:
  - $\frac{f_{s\,old}}{2}(\frac{L}{M})$

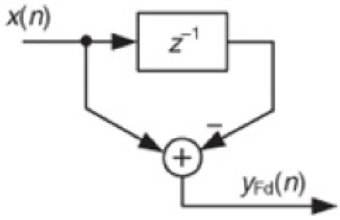
6 Differentiation og integration

Differentiation er godt beskrevet for kontinuerte signaler, men differation for diskrete signaler er ikke veldefineret. Derfor bruges der forskellige modeller for tilnærmelsesvis beregning af de afledte derativer i digital signal behandling.

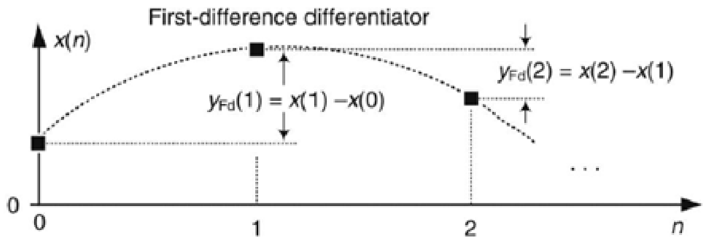
6.1 First-difference differentiator

- Beregner differencen mellem hver sample.
- Forstærker højfrekvente spektrale komponenter, har samme karakteristik som et højpas filter.

$$y_{Fd}(n) = x(n) - x(n-1) \tag{22}$$



Figur 18: First-difference differentiator.

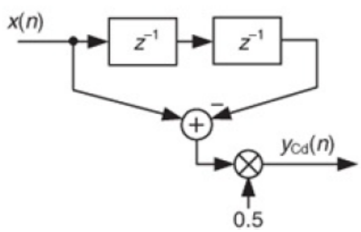


Figur 19: First-difference differentiator.

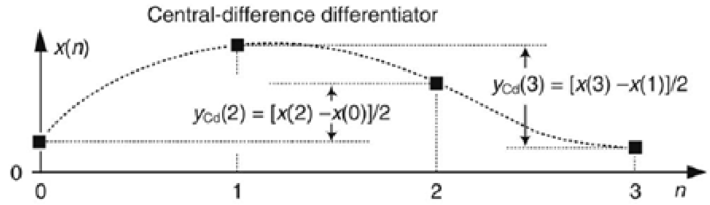
6.2 Central-difference differentiator

- Beregner den gennemsnitlige difference mellem hver 2. sample.
- Dæmper højfrekvente spektrale komponenter.

$$y_{Cd}(n) = \frac{x(n) - x(n-2)}{2} \tag{23}$$

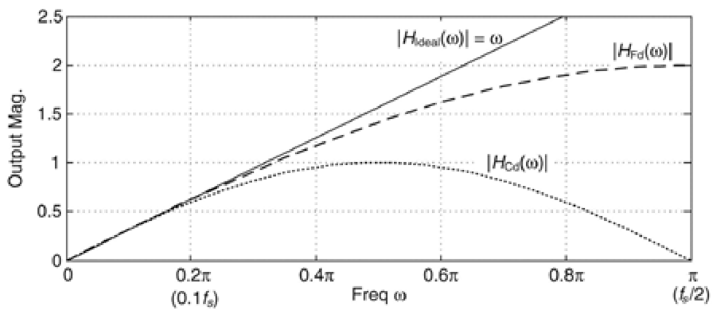


Figur 20: Central-difference differentiator.



Figur 21: Central-difference differentiator.

- First-difference og Central-difference differentiators er kun præcise når input signalets båndbredde er lille i forhold til input signalets sample rate f_s.
- Begge differentiators har lineære fase respons og dermed en konstant tidsforsinkelse kaldet *group delay*.
  - First-difference differentiator har en delayline på $D = 1$ og dermed et group delay på $G_{diff} = \frac{D}{2} = 1/2 = 0,5$ sample.
  - Central-difference differentiator har en delayline på $D = 2$ og dermed et group delay på $G_{diff} = \frac{D}{2} = 2/2 = 1$ sample.



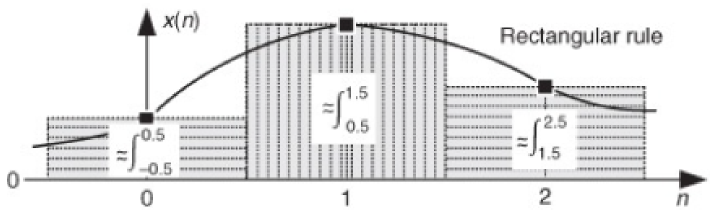
Figur 22: Frekvensrespons for simple differentiators.

6.3 Integration

Integration er godt beskrevet for kontinuerte signaler, men integration for diskrete signaler er ikke veldefineret. Derfor bruges der forskellige modeller for tilnærmelsesvis kontinuert integration.

Rectangular Rule Integrator udregner summen af de skraverede rektangler. Den nuværende sum $y_{Re}(n)$, er den forhenværende sum $y_{Re}(n-1)$ plus den nuværende input sample $x(n)$.

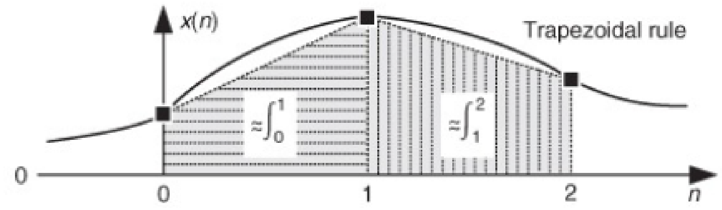
$$y_Re(n) = x(n) + y_{Re}(n-1) \tag{24}$$



Figur 23: Rectangular Rule Integrator.

Trapezoidal Rule Integrator udregner summen af $y_{Tr}(n)$ ved at beregne arealet ved gennemsnittet af $x(n) + x(n-1)$ i det skraverede areal til højre og addedere det med værdien for den forhenværende sum $y_{Tr}(n-1)$.

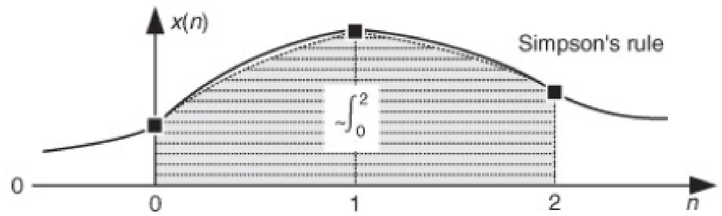
$$y_{Tr}(n) = 0.5x(n) + 0.5x(n-1)y_{Tr}(n-1) \tag{25}$$



Figur 24: Trapezoidal Rule Integrator.

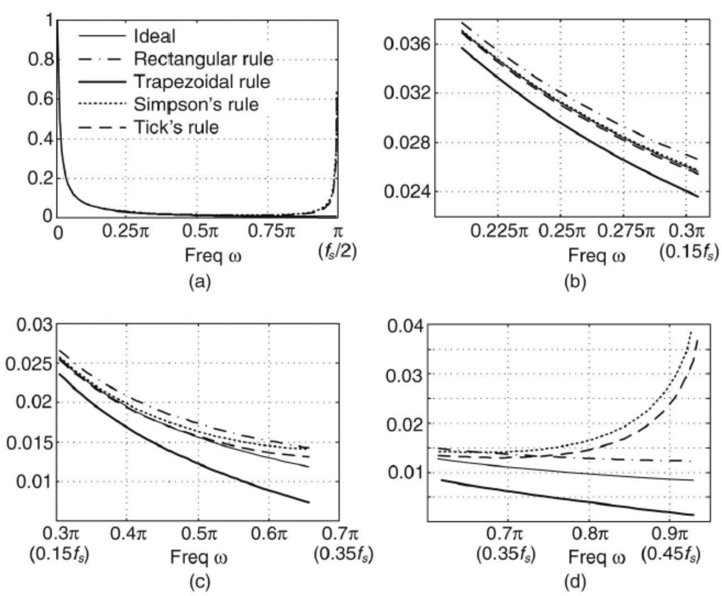
Simpson's Rule Integrator benytter tre samples til at beregne arealet under skraverede kurve.

$$y_{Si}(n) = \frac{x(n) + 4x(n-1)x(n-2)}{3} + y_{Si}(n-2) \tag{26}$$



Figur 25: Simpson's Rule Integrator.

- Simple integrators er præcise ved lave frekvenser (når input signalets båndbredde er lille i forhold til input signalets sample rate f_s).
  - Det er her hvor det er mest nødvendigt med høj præcision.
- Ved højfrekvent støj scenarier skal Rectangular Rule eller Trapezoidal Rule integratorer anvendes, fordi de giver forbedret dæmpning af spektrale komponenter i nærheden af $\frac{f_s}{2}$.



Figur 26: Normaliseret frekvensrespons for fire integrators.

7 Stokastiske signaler, herunder middelværdi, varians, sandsynligheds-tæthedsfunktion og histogram

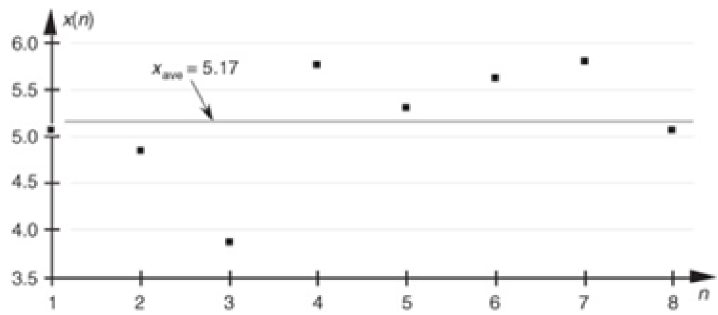
7.1 Stokastiske signaler

- Stokastisk ('tilfældig') signal.
  - Modsat deterministisk ('forudsigelig') som kunne være en sinus-tone eller et firkant-signal.
  - Kan ikke opskrive fast formel.
  - Kan beskrive signalet med middelværdi, varians, sandsynlighedsfunktion.

7.2 Middelværdi

- DC niveau.
  - Gennemsnittet af en sekvens af N samples er summen af disse samples divideret med N.
  - x_{ave} er den værdi som summen af forskellene mellem $x(n)$ og $x_{ave} = 0$.
  - Summen af sekvensen $d_{iff}(n) = x(n) - x_{ave} = 0$.
  - Lige meget værdi over som under gennemsnittet.

$$x_{ave} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x(n) \tag{27}$$

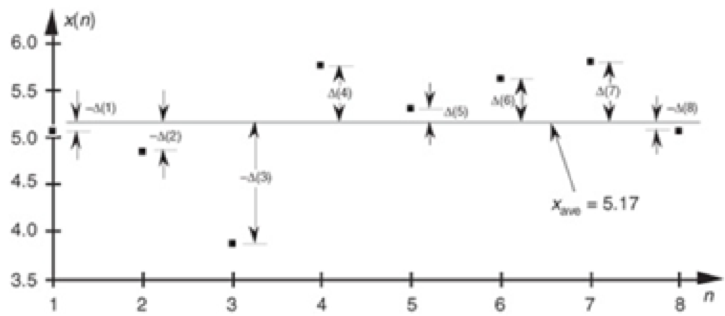


Figur 27: Gennemsnittet af en N lang sekvens.

7.3 Varians

- AC-middel-værdi.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x(n) - x_{ave})^2 \tag{28}$$



Figur 28: Variansen hvor $\Delta(n) = x(n) - x_{ave}$.

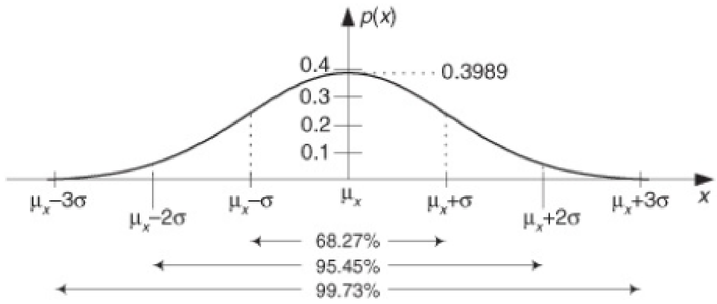
7.4 Standard afvigelse

- Standard afvigelsen svarer til RMS-værdien for en $DC = 0$.

$$\sigma = \sigma^2 \tag{29}$$

7.5 Sandsynligheds-tæthedsfunktion

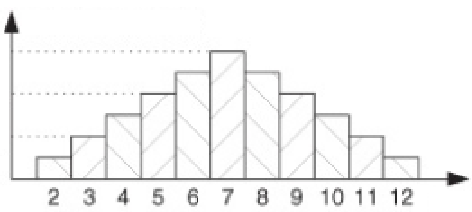
- Normal fordeling.
- Kurven topper ved gennemsnittet μ_x.
- Standardafvigelsen afgør faconen $\mu_x + \sigma$.



Figur 29: Normalfordeling med gennemsnit = μ_x.

7.6 Histogram

- Histogrammets vertikale akse er antallet af gange, som en bestemt værdi indtræffer i signalet.



Figur 30: Histogram.

8 Beregning af Signal-Noise Ratio i tids- og frekvens-domænet

Signal-to-noise ratio er forholdet mellem det ønskede signal og det uønskede signal (støj).

$$SNR = \frac{P_{signal}}{P_{noise}} \tag{30}$$

SNR i tidsdomænet

- Estimere SNR af et signal udfra signalets sampleværdier.
- Middel-effekt.

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)^2 \tag{31}$$

- AC middel-effekt.

$$P = \sigma^2 + x_{ave}^2 \tag{32}$$

- SNR for AC udtrykkes ved variansen.

$$SNR = \frac{\sigma_s^2}{\sigma_n^2} \tag{33}$$

- I praksis kan et signal variere meget i effekt.
  - Meget anvendt at bruge dB til at måle SNR.

$$SNR_{dB} = 10\log_{10}(SNR) \tag{34}$$

- Hvis rms er oplyst i stedet for effekt.
  - Da der bruges en amplitude (volt eller ampere) i stedet for effekt benyttes $20\log_{10}$ istedet for $10\log_{10}$.

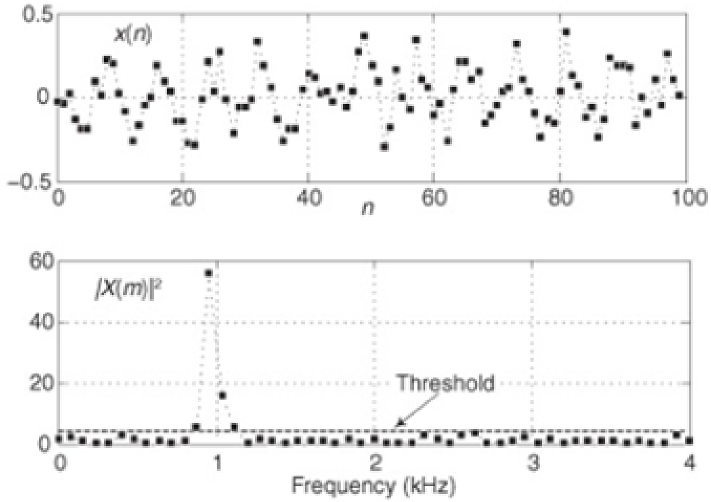
$$x_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)^2} \tag{35}$$

$$SNR_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{x_{rms signal}}{x_{rms noise}}\right) \tag{36}$$

SNR i frekvensdomænet kan groft estimateres baseret på signalets egenskaber i frekvensdomænet.

- Der anvendes DFT på signalet i tidsdomænet og herefter fås de positive amplitudestørrelser $|X(m)|^2$.
- En threshold værdi fastsættes.
  - Over threshold værdien er det ønskede signals amplitudestørrelse.
  - Under treshold værdien er det uønskede støjsignals amplitudestørrelse.

$$SNR = \frac{sum\ of\ samples\ above\ threshold}{sum\ of\ samples\ below\ threshold} \tag{37}$$



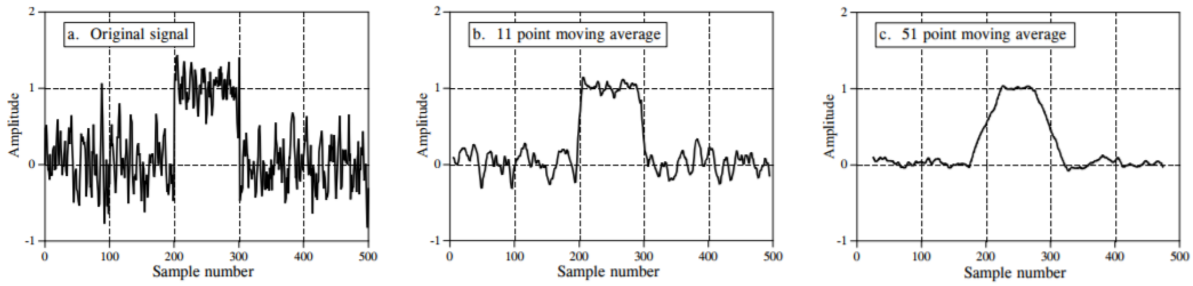
Figur 31: Øverst er støj afbildet i tidsdomænet. Nederst er støj afbildet i frekvensdomænet.

Parseval's sætning siger at energien bevares gennem Fourier's transformation således at summen af kvadrerede samples i tidsdomænet er lig med summen af kvadrerede samples i frekvensdomænet.

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} |X(m)|^2 \tag{38}$$

9 Midlingsfiltre

Midlingsfiltre benyttes til at beregne en løbende middelværdi for et signal.

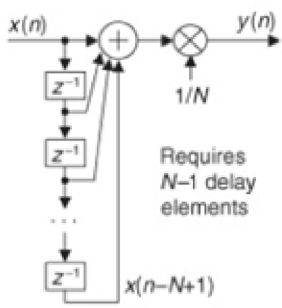


Figur 32: Signal før og efter det er filtreret med midlingsfilter.

9.1 Ikke-rekursiv

- FIR filter med N antal filterkoefficienter.
- Har $N-1$ delay elementer.

$$y(n) = \frac{1}{N}(x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-N+1)) \tag{39}$$

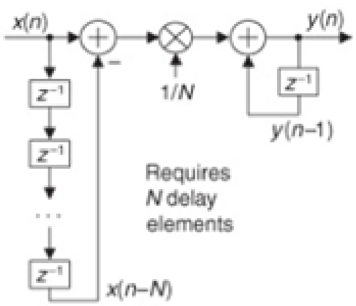


Figur 33: Ikke Rekursiv midlingsfilter.

9.2 Rekursiv

- Mindre beregningstung, da den kun kræver 2 adderinger pr. output sample uanset antallet af delays.
- Har N delay elementer, altså et ekstra delay iforhold til ikke-rekursiv midlingsfilter.

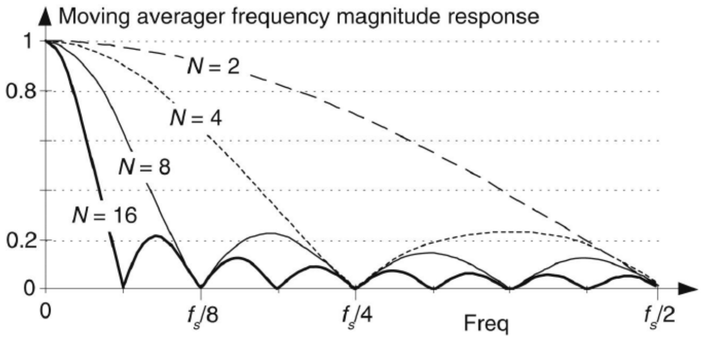
$$y(n) = \frac{1}{N}(x(n) - x(n-N)) + y(n-1) \tag{40}$$



Figur 34: Rekursiv midlingsfilter.

9.2.1 Frekvensrespons

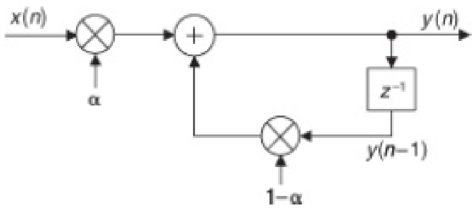
- Ikke-rekursiv og rekursiv midlingsfiltre har akkurat samme frekvensrespons.
- "The roll-off"er meget langsom og stopbåndets dæmpning er ringe.
- *Remember, good performance in the time domain results in poor performance in the frequency domain, and vice versa.*[1]
    - Midlingsfilteret er et fantastisk midlingsfilter i tidsdomænet, men en elendig lavpas filter i frekvensdomænet.



Figur 35: Frekvensrespons for et midlingsfilter med N antal filterkoefficienter.

9.3 Eksponentielt midlingsfilter

- Nyeste samples får størst vægt.
- Reagerer hurtigere på ændringer i input ifht. almindelig midlingsfilter.
- Faktoren $0 < \alpha < 1$ bestemmer hvor meget vægt tidligere output værdier skal have for nye output værdier.
    - Hvis $\alpha = 1$ ignoreres tidligere output værdier, da nye output værdier reagerer med det samme på nye input værdier samtidig giver det ingen dæmpning.

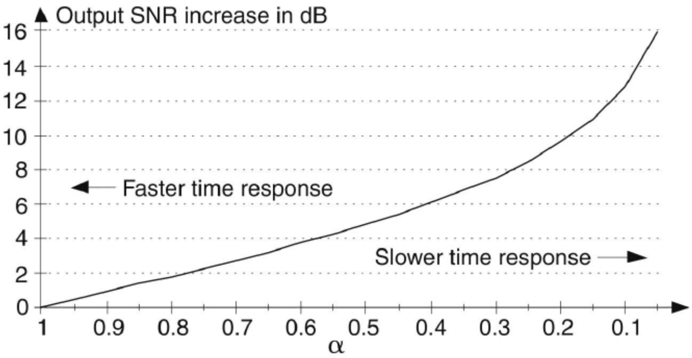


Figur 36: Eksponentielt midlingsfilter.

9.3.1 Støjreduktion

- En mindre α værdi giver en bedre støjreduktion men midlingsfilterets output tager samtidig længere tid om at reagere og stabilisere sig.

[1]The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing Moving Average Filters, Chapter 15, Page 180.



Figur 37: Eksponentielt midlingsfilterets SNR som en funktion af faktoren α.

- Midlingsfilterets SNR kan regnes herved.

$$SNR_{exp(dB)} = 10\log_{10}\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right) \tag{41}$$

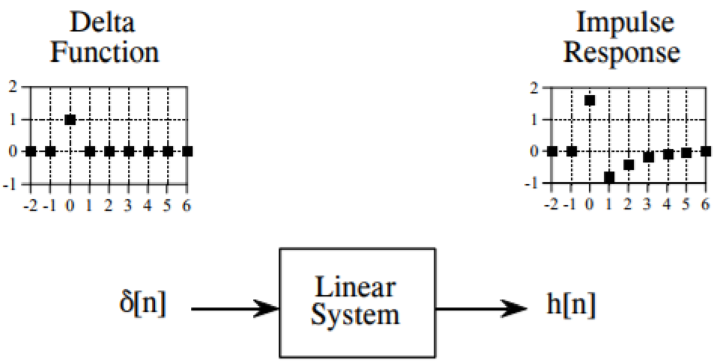
10 Auto- og kryds-korrelation

10.1 Foldning

Foldning er en matematisk måde at kombinere to signaler til at danne et tredje signal.

10.1.1 Delta Funktion og Impuls Respons

- Delta-funktionen $\delta[n]$ er en normaliseret impuls.
- Alle dens samples har en værdi på 0, bortset fra samplenummer 0, som har en værdi på 1.
- Impuls responset $h[n]$ for et lineært system er outputtet fra systemet, når inputtet er en delta-funktion.

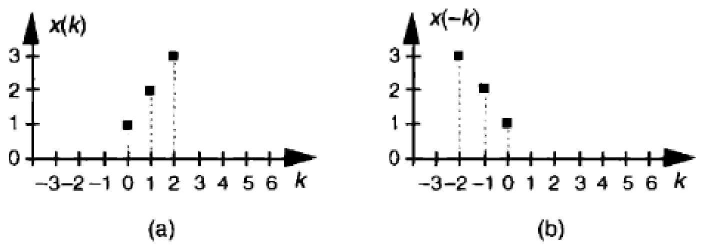


Figur 38: Definition af delta funktionen og impuls responset.

- Inputsignalet foldet med systemets impuls respons er svarende til outputsignalet.
- Hvis x[n] er et signal med N antal samples fra 0 til N-1, og h[n] er et signal med M antal samples fra 0 til M-1, bliver foldningen af de to signaler: $y(n) = x(n) \circledast y(n)$, et signal med $N + M - 1$ antal samples fra 0 til $N + M - 2$.

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k) \cdot x(n-k) = h(n) \circledast x(n) \tag{42}$$

- Inputsignalet x(k) flippes rundt så dette placerer sample 0 til højre og efterfølgende opadgående samples til venstre.
  - x(k) bliver herved til x(-k).
- Alle produkter af h(k) og x(0-k) for alle k-værdier summeres og herved fås y(0).
- x(-k) shiftes en sample til højre.
- Alle produkter af h(k) og x(1-k) for alle k-værdier summeres og herved fås y(1).
- Der shiftes og summeres indtil der ikke er overlap mellem h(k) og x(n-k).



Figur 39: (a) sekvensen $x(k)$; (b) spejling af sekvensen $x(k)$ omkring $k = 0$.

Foldnings-teorem I betyder at foldning af to signaler i tidsdomænet er det samme som multiplikation af to signaler i frekvensdomænet.

$$h(n) \circledast x(n) \Leftrightarrow H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega}) \tag{43}$$

Foldnings-teorem II betyder at foldning af to signaler i frekvensdomænet er det samme som multiplikation af to signaler i tidsdomænet.

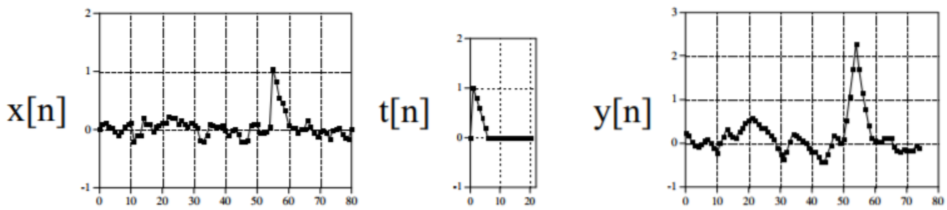
$$h(n) \cdot x(n) \Leftrightarrow H(e^{j\omega}) \circledast X(e^{j\omega}) \tag{44}$$

10.2 Krydskorrelation

Korrelation mellem 2 signaler. Kan bruges til at finde periodicitet i et signal, signaldetektion eller system identifikation

- Amplituden af hver sample i krydskorrelationssignalet er mål for hvor meget det signal der er optaget lignet det oprindelige target signal.
- r(n) er derfor et mål for, hvor meget et signal ligner et andet signal - tidsforskudt med n.

$$r(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot x(n+k) = h(n) \circledast x(-n) \tag{45}$$



Figur 40: y(n) er krydskorrelationen mellem x(n) og t(n).

10.3 Autokorrelation

Korrelation af signal med sig selv tidsforskudt.

$$r(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot x(n+k) = x(n) \circledast x(-n) \tag{46}$$

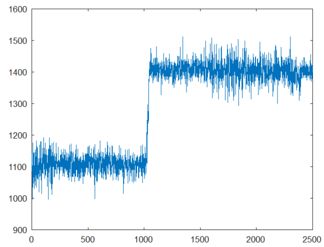
11 CASE projekt 1 – FSK transmission

12 CASE projekt 2 – Audio filter

13 CASE projekt 3 – Vejecelle

13.1 Opgavebeskrivelse

- Analysere og forbedre dataene fra en støjfyldt måling på en vejecelle.
- Der designes og implementeres forskellige midlingsfiltre i Matlab for at fjerne støj.



Figur 41: Vejecelle måling med 1 kg belastning og uden belastning.

13.2 Data analyse

- Den første del af signalet er med 1 kg belastning og næste del er uden belastning.
- Signalet deles derfor op for at kunne udregne middelværdi, spredning og varians af de to forskellige målinger.

Middelværdi er gennemsnittet af sekvensen på N samples er summen af disse samples divideret med N. Der er lige meget værdi over som under gennemsnittet.

$$x_{ave} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x(n) \approx 1100\ldots1400 \tag{47}$$

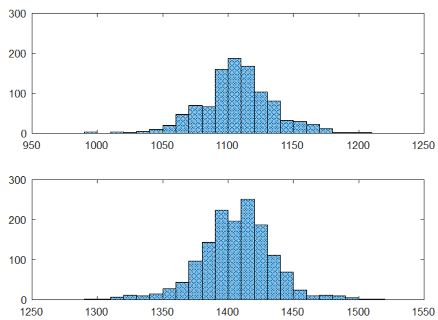
Varians er AC-middel-værdien.

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} (x(n) - x_{ave})^2 \approx 772\ldots794 \tag{48}$$

Standard afvigelse svarer til RMS-værdien for en $DC = 0$. Standard afvigelsen kaldes også for spredningen.

$$\sigma = \sigma^2 \approx 27\ldots28 \tag{49}$$

- Variansen og spredningen for de to målinger er cirka den samme.
  - Forventeligt da det kun er DC værdien der burde ændres.



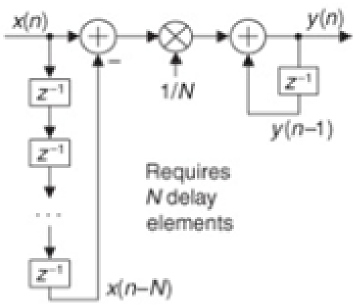
Figur 42: Histogram af de to signalniveauer normal fordelt rundt om deres middelværdi.

13.3 Midlingsfiltre

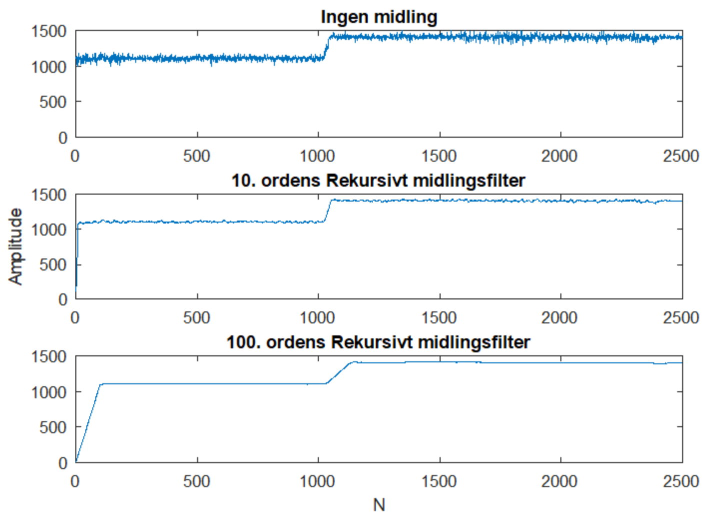
Ikke-rekursiv midlingsfilter

- Mindre beregningstung, da den kun kræver 2 adderinger pr. output sample uanset antallet af delays.
- Har N delay elementer, altså et ekstra delay iforhold til ikke-rekursiv midlingsfilter.

$$y(n) = \frac{1}{N}(x(n) - x(n-N)) + y(n-1) \tag{50}$$

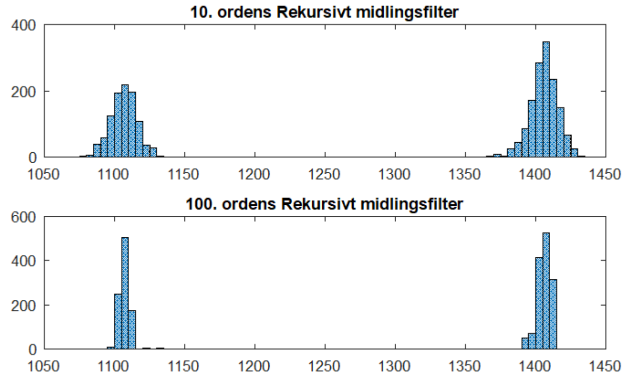


Figur 43: Rekursiv midlingsfilter.



Figur 44: Vejecelle måling med 1 kg belastning og uden belastning med et 10. og 100. ordens midlingsfilter.

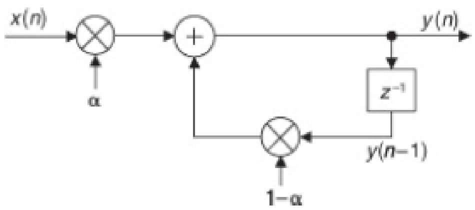
- Midlingsfilteret gør at der kommer en indsvingningstid.
  - Ved et 10. ordens filter nås DC værdien efter cirka 10 samples.
  - Ved et 100. ordens filter nås DC værdien efter cirka 100 samples.



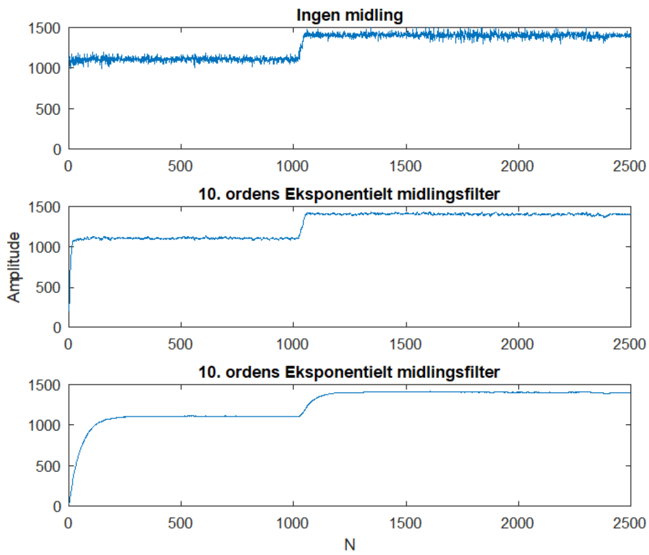
Figur 45: Histogram af de to signalniveauer normal fordelt efter midlingsfilteret. Dataen er mere samlet.

Eksponentielt midlingsfilter

- Nyeste samples får størst vægt.
- Reagerer hurtigere på ændringer i input ifht. almindelig midlingsfilter.
- Faktoren $0 < \alpha < 1$ bestemmer hvor meget vægt tidligere output værdier skal have for nye output værdier.
  - Hvis $\alpha = 1$ giver det ingen dæmpning og samtidig ignoreres tidligere output værdier, da nye output værdier reagerer med det samme på nye input værdier.



Figur 46: Eksponentielt midlingsfilter.



Figur 47: Vejecelle måling med 1 kg belastning og uden belastning med et 10. og 100. ordens eksponentielt midlingsfilter.

14 CASE projekt 4 - Sonar

14.1 Opgavebeskrivelse

- Afstandsbestemmelse ved et udsende et akustisk signal.
- Systemet vil afspille og optage ekko-signalet på Blackfin kittet.
- Afstanden findes ved hjælp af krydskorrelation.

14.2 Signal generation

- Krav til signalet er at samplefrekvensen er 48 kHz, da det er denne som Blackfin kittet arbejder med. Vi vælger 50 ms og derfor får vi en arraystørrelse på 2400 samples.
- Et unikt signal ønskes, hvorfor et sweep eller hvid støj er bedre end et sinus signal.
  - Et sinus signal er kontinuert og da den gentager sig selv er det et problem da vi med korrelation leder efter gentagelser.
- Længden af signalet skal sørge for at være langt nok til at optage både når signalet sendes afsted og indtil det er kommet tilbage.
- Præcisionen af målingen er ca. 7 mm per sample.

$$\frac{340\,\mathrm{m\,s^{-1}}}{48\,\mathrm{kHz}} \approx 7\,\mathrm{mm} \tag{51}$$

- Systemet skal kunne måle afstande op til 10 m. Dette giver en forventning om at ekkoet skal rejse 20 m. Det vil tage ekkoet 59 ms at rejse 20 meter.

$$\frac{20\,\mathrm{m}}{340\,\mathrm{m\,s^{-1}}} \approx 59\,\mathrm{ms} \tag{52}$$

- Antal samples der er brug for til at optage afspilningen er $F_s \cdot T + 2400 \cdot 2 \approx 7600$.
- Array størrelsen bliver hermed $2^{13} = 8192$.
- Optagetiden er herved 160 ms.

$$\frac{N}{F_s} = \frac{7600}{48\,\mathrm{kHz}} \approx 160\,\mathrm{ms} \tag{53}$$

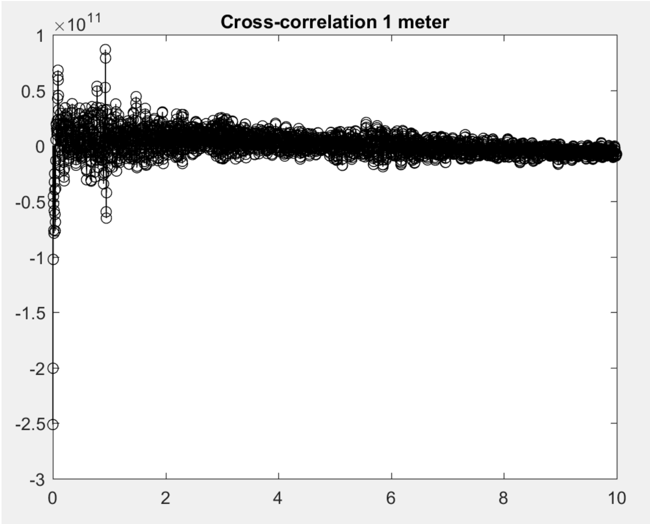
14.3 Signal analyse

- Krydskorrelation anvendes mellem det udsendte signal og de optagede signaler for at finde tidsforskydningen.
- Distancen kan beregnes ved den sample hvor der opstår peak i krydskorrelationen.

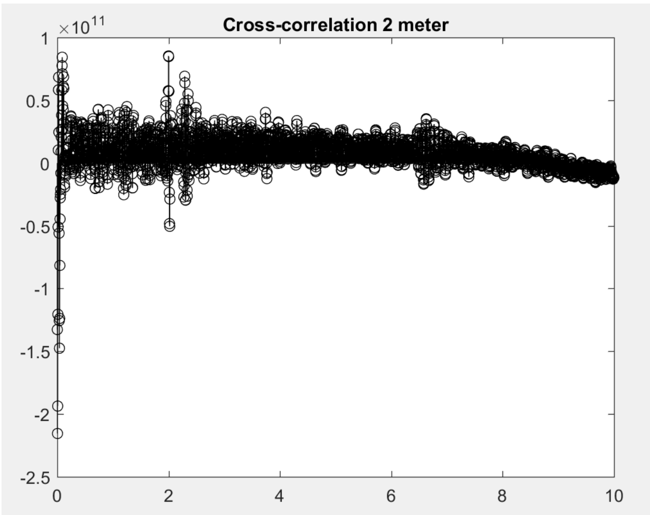
$$Distance = Sample \cdot 340\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot \frac{1}{48\,\mathrm{kHz}} \cdot 0.5 \tag{54}$$

Afstand målt [m]	Afstand udregnet [m]	Difference [cm]
1	0,935	6,5
1,5	1,678	17,8
2	2,001	0,1
3	3,184	18,4
4,5	4,388	11,2

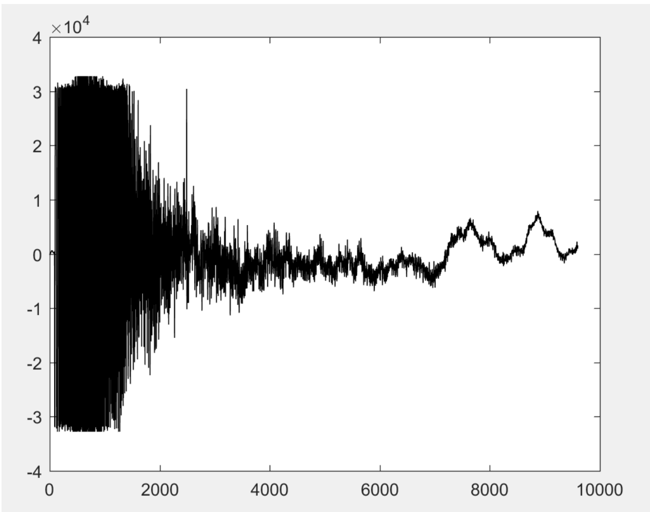
Tabel 1: Resultater af analyse.



Figur 48: Stem af krydskorrelation for 1 m.



Figur 49: Stem af krydskorrelation for 2 m.



Figur 50: Højtaleren er tæt på mikrofonen hvorfor signalet er meget kraftigere i starten af optagelsen.