

# Numerisk løsning av to-dimensjonal PDE

Jonas Linset

March 2024

## Abstract

All the effects of Nature are only the mathematical consequences of a small number of immutable laws.

-Pierre Simon Laplace

## 1 Innledning

Denne oppgaven skal ta for seg å løse en *PDE*, *partial differential equation*, numerisk med minst to romlige koordinater. Den partielle differensial ligningen som jeg skal ta for meg er Laplace ligningen for to romlige dimensjoner. Laplace ligningen er en 2. ordens PDE, og er oppkalt etter den franske matematikeren Pierre-Simon Laplace. Presentasjonen av oppgaven blir å løse ligningen analytisk, for så å sammenligne resultatet med de numeriske metodene brukt til å løse PDE'ene. Matematikkprogrammet MatLab blir tatt i bruk for plotting av løsningene.

## 2 Teori

### 2.1 Analytisk

Vi begynner først med å løse ligningen analytisk for at vi kan senere sammenligne de numeriske resultatene. Vi har den differensielle ligningen:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u(x, y) &= 0 \\ \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} &= 0\end{aligned}\tag{1}$$

Vi vil da bruke separasjon av variable og definerer funksjonen  $u$ , som en funksjon av  $v(x)$  multiplisert med  $w(y)$ .

$$u(x, y) = v(x)w(y)\tag{2}$$

Setter inn definisjonen av  $u$  inn i ligning 1, og ser da at vi får:

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x^2} w(y) + v(x) \frac{\partial^2 w(y)}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

$$v_{xx}w + vw_{yy} = 0$$

Ved å sett  $vw_{yy}$  på andre siden av likhetstegnet og dividere med  $vw$  får vi separert de ulike variablene på hver sin side.

$$\frac{v_{xx}}{v} = -\frac{w_{yy}}{w} = \lambda = \begin{cases} v_{xx} - \lambda v = 0 \\ w_{yy} + \lambda w = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Hvis vi ser på tilfellet hvor  $\lambda$  er lik null, vil de dobbelderiverte funksjonene være lik null. Når en dobbelderivert er lik null vet vi at en hver lineærfunksjon tilfredstiller likningnen.

$$\begin{cases} v_{xx} = 0 \implies v(x) = c_1x + c_2 \\ w_{yy} = 0 \implies w(y) = c_3y + c_4 \end{cases} \quad (5)$$

Hvis vi ser på på ligning 2.1 og tar for oss nå at  $\lambda \neq 0$ . Da kan vi gjøre en kvalitativ gjetning på løsningen.

$$w(y) = e^{\sigma y} \implies w_{yy} = \sigma^2 e^{\sigma y} \quad (6)$$

Setter vi denne løsningen inn i ligning 2.1 kan vi løse for  $\sigma$ :

$$\sigma^2 e^{\sigma y} + \lambda e^{\sigma y} = 0 \implies \sigma^2 + \lambda = 0 \implies \sigma = \pm \sqrt{-\lambda} \quad (7)$$

Ved muligheten for  $+\sqrt{-\lambda}$  og  $-\sqrt{-\lambda}$ , vil en lineær kombinasjon av disse løsningene tilfredstille ligningen 2.1.

$$w(y) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}y} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}y} \begin{cases} \lambda < 0 & \lambda = -w^2 \implies w(y) = c_1 e^{wy} + c_2 e^{-wy} \\ \lambda > 0 & -1 = i^2 \implies w(y) = c_1 e^{i\sqrt{\lambda}y} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}y} \end{cases} \quad (8)$$

Når  $\lambda < 0$  definerer vi en ny parameter og setter  $\lambda = -w^2$  og hvis vi substituerer  $\lambda$  i ligningen ser vi en løsning for  $w(y)$ . For  $\lambda > 0$  substituerer vi  $i^2$  inn i ligningen. Videre kan vi forenkle uttrykkene yttligere. For  $\lambda < 0$

$$\begin{aligned}
w(y) &= c_1 e^{\omega y} + c_2 e^{-\omega y} \\
w(y) &= c_1 (\cosh(\omega y) + \sinh(\omega y)) + c_2 (\cosh(\omega y) - \sinh(\omega y)) \\
w(y) &= \cosh(\omega y)(c_1 + c_2) + \sinh(\omega y)(c_1 - c_2) \\
A &= c_1 + c_2 \quad B = c_1 - c_2 \\
w(y) &= A \cosh(\omega y) + B \sinh(\omega y)
\end{aligned} \tag{9}$$

Vi regner også løsningen for  $w(y)$  når  $\lambda > 0$ :

$$\begin{aligned}
w(y) &= c_1 e^{i\sqrt{\lambda}y} + c_2 e^{-i\sqrt{\lambda}y} \\
w(y) &= c_1 (\cos(\sqrt{\lambda}y) + i\sin(\sqrt{\lambda}y)) + c_2 (\cos(\sqrt{\lambda}y) - i\sin(\sqrt{\lambda}y)) \\
w(y) &= \cos(\sqrt{\lambda}y)(c_1 + c_2) + i\sin(\sqrt{\lambda}y)(c_1 - c_2) \\
C &= c_1 + c_2 \quad D = i(c_1 - c_2) \quad \omega^2 = \lambda \\
w(y) &= C \cos(\omega y) + D \sin(\omega y)
\end{aligned} \tag{10}$$

Hvis vi ser på løsning 2.1 ser vi at  $v_{xx}$  kun skiller seg med fortegn før  $\lambda$ . Så, når vi nå har funnet løsningen for  $w_{yy}$  kan vi si at løsningene for  $v(x)$  er:

$$\begin{aligned}
v(x) &= A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) \quad \lambda < 0 \\
v(x) &= C \cosh(\omega y) + D \sinh(\omega y) \quad \lambda > 0 \\
v(x) &= Ex + F \quad \lambda = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Vi ser nå at det begynner å hope seg opp med løsninger og flere blir det når vi slår sammen  $v(x)$  og  $w(y)$  til  $u(x,y)$ . Men, for å begrense oss til en eksplisitt løsning burde vi sette noen grense betingelser. Så vi vil nå se de satte betingelsene for differensialligningen og begrense løsningene til et gitt område.

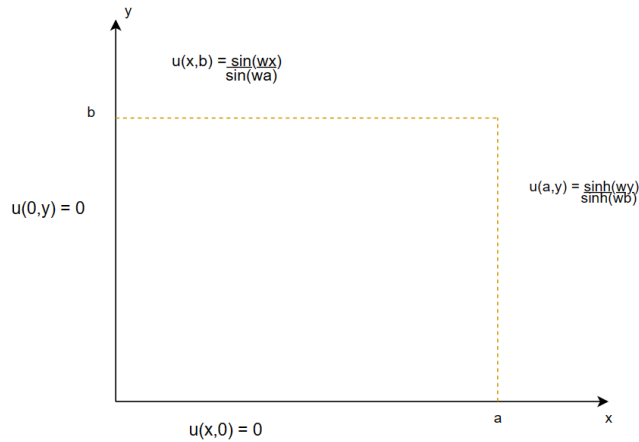


Figure 1: Grense betingelser

Setter  $u(0,y) = 0$ , slik at når  $x$  er null vil det gjelde for alle  $y$ . Det vil også implisere at  $v(x) = 0$ . Deretter, setter jeg  $u(x,0) = 0$ , slik at når  $y$  er null vil det gjelde for alle  $x$ , også vil  $w(y) = 0$ . Videre definerer jeg grensene for et gitt punkt på hver av aksene,  $u(x,b)$  og  $u(a,y)$ . Disse er satt slik at vi får enkle kanselleringer. Hvis vi tar for oss  $u(x,b)$ , bestemmer vi at  $v(x) = \frac{\sin(\omega x)}{\sin(\omega a)}$  og  $w(b) = 1$ . Samme blir det for  $u(a,y)$ , der  $v(a) = 1$  og  $w(y) = \frac{\sinh(\omega y)}{\sinh(\omega b)}$ .

Ser vi nærmere på ligningene 11 og setter inn grense betingelsene ser vi at for,

$$v(0) = 0 = \begin{cases} A \cos(\omega 0) + B \sin(\omega 0) & \lambda < 0 \\ C \cosh(\omega 0) + D \sinh(\omega 0) & \lambda > 0 \\ E 0 + F & \lambda = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Som da forteller oss at  $A = C = F = 0$ . Videre så ser vi på den andre grensen for  $v(x)$ :

$$v(x) = \frac{\sin \omega x}{\sin \omega a} = \begin{cases} B \sin(\omega x) & \lambda < 0 \\ D \sinh(\omega x) & \lambda > 0 \\ E x & \lambda = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Vi ser først da at  $B = \frac{1}{\sin \omega a}$ . Hvis vi ser på løsningen for  $\lambda > 0$ , så kan det være en spesifikk løsning for  $x$ , men vi er avhengig av en generell løsning for alle  $x$  mellom 0 og  $a$ . For at dette skal være mulig kan vi sette  $D = 0$ . Samme gjelder for løsningen  $\lambda = 0$ , og vi kan sette  $E = 0$ . Vi står da igjen med ligningen,

$$v(x) = \frac{\sin \omega x}{\sin \omega a} \quad (14)$$

for å finne  $w(y)$  trenger vi bare å se raskt på grenseverdiene igjen. vi husker at,

$$w(y) = A \cosh(\omega y) + B \sinh(\omega y),$$

med grensebetingelsen gir oss,

$$w(0) = 0 = A \cosh(\omega 0) + B \sinh(\omega 0) \implies A = 0 \implies w(y) = B \sinh(\omega y) \quad (15)$$

den andre grensebetingelsen sier at

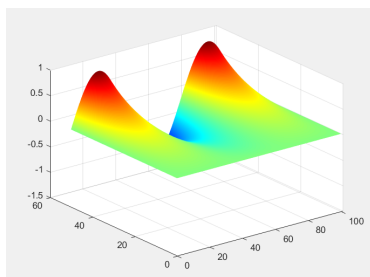
$$w(y) = \frac{\sinh(\omega y)}{\sinh(\omega b)} = B \sinh(\omega y) \implies B = \frac{1}{\sinh(\omega b)} \implies w(y) = \frac{\sinh(\omega y)}{\sinh(\omega b)} \quad (16)$$

og nå som vi har funnet to definisjoner på  $v(x)$  og  $w(y)$ , kan vi kan endelig beskrive  $u(x,y)$  som.

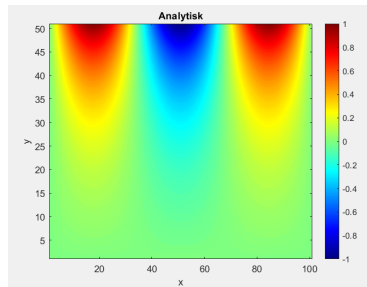
$$u(x, y) = v(x)w(y) = \frac{\sin(\omega x)}{\sin(\omega a)} \frac{\sinh(\omega y)}{\sinh(\omega b)} \quad (17)$$

## Grafisk plott av løsningen

Før vi går videre på den numeriske løsningsmetoden, skal vi se på den grafiske fremstillingen av den analytiske løsningen. Dette er to MatLab plot av løsninger, vist i både 3-D og 2-D. Koden til plotene skal følge med i besvarelsen. Plottet fremstiller løsningen i et område gitt med grensepunktene  $a = 3\pi$  og  $b = \pi$ . For enkelhets skyld ble  $w$  satt til å være lik 1.



(a) Laplace-funksjonen i 3D



(b) Laplacefunksjonen i 2D

Figure 2: resultatet av den to dimensjonale laplace-funksjonen i kartesiske koordinater.

## 2.2 Numerisk ved bruk av *Finite Difference Method*

Nå skal vi løse det samme problemet ved bruk av den numeriske metoden, endelig-differanse-approksimasjon. Dette er en av flere metoder å løse PDE'er på, hvor denne tar for seg en approksimasjon med endelige intervaller. Både tidsdomenet og det romlige domenet er diskretisert, eller brytt ned i et endelig antall intervaller, og verdiene av løsningen på endepunktene av disse intervallene blir approksimert ved å løse algebraiske ligninger med endelige differanser og verdier fra nærliggende punkter.

La oss nå se på hvordan vi kan definere 2. ordens derivativ løsning ved den numeriske metoden. Vi viser da til Taylor rekka rundt et punkt

$$u(x + a) = u(x) + \frac{u'(x)}{1!}a + \frac{u''(x)}{2!}a^2 + \frac{u^{(3)}(x)}{3!}a^3 + \dots \quad (18)$$

Hva om vi nå ser på  $a$  som den endelige differansen mellom to punkter,  $\Delta x$ . Merk at vi ser nå kun i en retning, kun for å definere uttrykkene. Vi tar for oss den negative og positive verdien av differansen og vi får da

$$\begin{aligned} u(x - \Delta x) &= u(x) - \frac{u'(x)}{1!}\Delta x + \frac{u''(x)}{2!}\Delta x^2 - \frac{u^{(3)}(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots \quad a \rightarrow -\Delta x \\ u(x + \Delta x) &= u(x) + \frac{u'(x)}{1!}\Delta x + \frac{u''(x)}{2!}\Delta x^2 + \frac{u^{(3)}(x)}{3!}\Delta x^3 + \dots \quad a \rightarrow \Delta x \end{aligned} \quad (19)$$

Videre kan vi legge disse sammen og vi ser at leddene hvor nevneren har en oddetals fakultet kansellerer hverandre. Vi står da igjen med

$$\begin{aligned}
u(x + \Delta x) + u(x - \Delta x) &= 2u(x) + 2\frac{u''(x)}{2!}\Delta x^2 \\
u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x) &= u''(x)\Delta x^2 \\
u''(x) &= \frac{u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \\
\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i &\approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \quad (20)
\end{aligned}$$

Vi neglisjerer elementer med høyere orden derivativ siden vi sier at  $\Delta x$  er en svært liten verdi. Ligning 20 er definisjonen for 2. ordens derivativ endelig approksimasjon. Hvis vi ser på brøken i ligningen ser vi at den inneholder en funksjon for det neste intervallet, en funksjon for nåværende posisjon multiplisert med to, og en funksjon for det tidligere intervallet, samt så har vi intervallet  $\Delta x$  opphøyd i andre i nevneren.

En ting som er vært å nevne før vi går videre er hvordan kan vi vite hva funksjonene er, for stegene før og etter et punkt vi befinner oss i? Med et kvalitativ gjett kan vi mer eller mindre kunne gjøre videre beregninger, men dette fører til en usikkerhet. For å overkomme denne feilen er det vanlig å bruke en iterativ metode.

Hvis vi nå ser videre på den samme figuren (figur 7a) vi hadde ved den analytiske problemstillingen med samme grensebetingelser. Hvis vi ser på figuren og deler den opp i en grid, med mange ruter, vil funksjonen  $u(x,y)$  fortelle oss hvilket punkt vi befinner oss i, mens  $u_{i+1}$  vil tar for seg neste punktet i gridd. dette er forsøkt illustrert i figur 3.

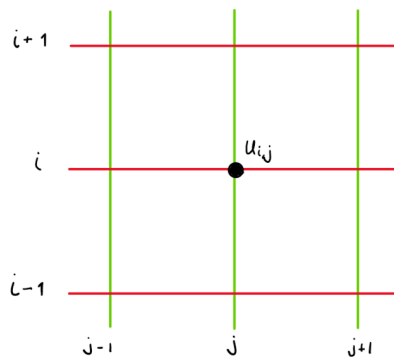


Figure 3: Fremstilling av punkter

Vi husker at Laplace ligningen var,

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0,$$

og vi setter inn vår nye definisjon for den dobbelderiverte. Vi har dermed

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta y^2} = 0 \quad (21)$$

Vi kan videre forenkle ligning 21 til

$$u_{i,j} = \frac{\Delta x^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \Delta y^2(u_{i,j+1} + u_{i,j-1})}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \quad (22)$$

Så vi har nå funnet ut dersom vi har lyst til å regne ut den partielle differensialligningen 1 numerisk, er det nok å finne verdien til funksjon 22 for hvert punkt, der vi kjenner til verdier av funksjonen i nabopunktene.

## 2.3 Sammenligning

Videre skal vi sammenligne vår analytiske funksjon, med vår numeriske. Jeg har tatt i bruk Matlab for å plote resultatene. Resultatene vil bestå av tre plott; et analytisk, et numerisk og et feilmargins plott. For hver kolonne nedover er det blitt gjort flere iterasjoner over funksjonen. Det utføres dermed med en iterativ metode, som ble så vidt nevnt tidligere. Vi skal se at antall iterasjoner sier mye om presisjonen til den numeriske løsningen.

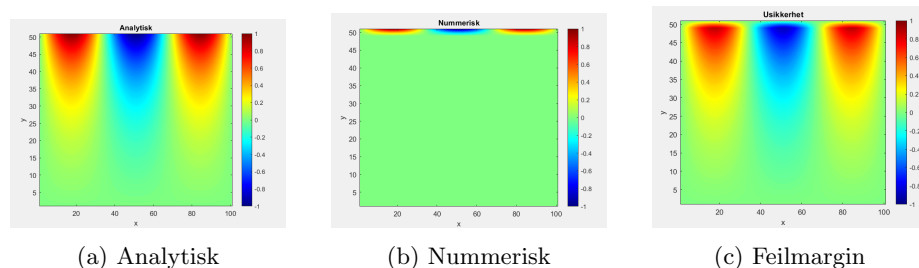


Figure 4: Resultater ved iterasjon  $n = 1$ .

Vi ser her en stor forskjell på den numeriske og analytiske. Det er også vist frem i feilmarginsplottet. Grunnen til dette er at vi tar utgangspunkt i nabopunkter, og i koden tar vi utgangspunkt fra grensbetingelsene. Uten å iterere over flere instanser, vil vi ikke kunne løse funksjonen for hele området. Vi ser tendenser til likhet ved grensene. Hva skjer dersom vi øker iterasjon ytterligere.

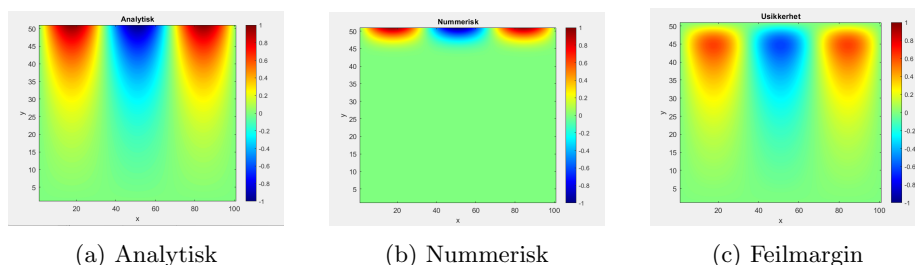


Figure 5: Resultater ved iterasjon  $n = 10$ .

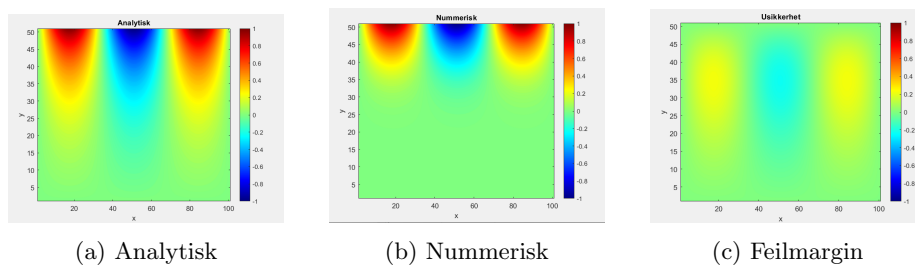


Figure 6: Resultater ved iterasjon  $n = 100$ .

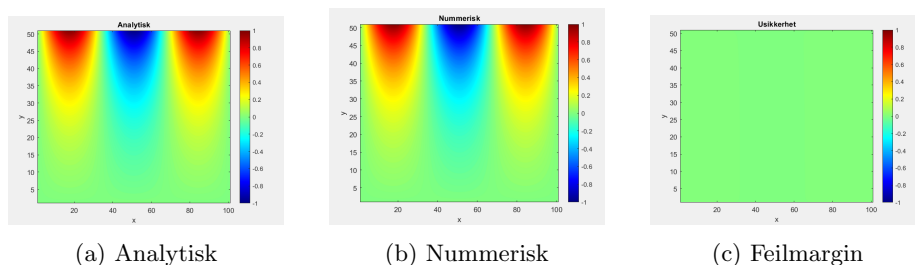


Figure 7: Resultater ved iterasjon  $n = 1000$ .

Vi ser nå at den numeriske og analytiske løsningen er identiske, med feilmargin på 0 over hele område.

### 3 Konklusjon

Vi finner en god løsning på problemstillingen som ble satt til å begynne med. Den numeriske løsningen ble til slutt av flere iterasjoner en god approksimasjon sammenlignet med den analytiske løsningen.



## References

- [1] Anne Kvernø. (2020). Partial differential equations and finite difference method
- [2] (2021). Finite Differance Method
- [3] NTNU. (2018). Finite diffrences. Notation
- [4] Laplaces equation
- [5] The mathsWork, inc. (2023) Graphics