Über Flächen

Aufgabe 1
Sammelt Beispiele von (Ober-)Flächen. Was sind Gemeinsamkeiten? Was sind Unterschiede?

Definition:
Eine **Fläche** besteht aus einer Menge X und einer *Distanzfunktion* $d_X : X \times X \to \mathbb{R}$, sodass es einen Radius $r > 0$ gibt, sodass für jedes $x \in X$ die *Kreisscheibe um* x *mit Radius* r

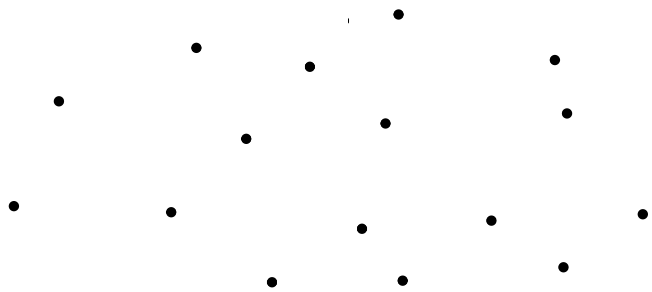
$$\mathbb{B}_X(x,r) = \{y \in X \mid d_X(x,y) < r\}$$

mit einer flachen Scheibe

$$\mathbb{B}_{\mathbb{R}^2}(p,r) = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid d_{\mathbb{R}^2}(p,z) < r\}$$

um einen beliebigen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ identifiziert werden kann.

Aufgabe 2
Betrachtet die folgende Punktwolke in der Ebene. Skizziert zwischen je zwei "nah aneinanderliegenden" Punkten P, Q die Mittelsenkrechte der Verbindungslinie $\overline{PQ}$. Verlängert dann alle eingezeichneten Mittelsenkrechten "gleichzeitig", bis sie sich schneiden. Was stellt ihr fest?

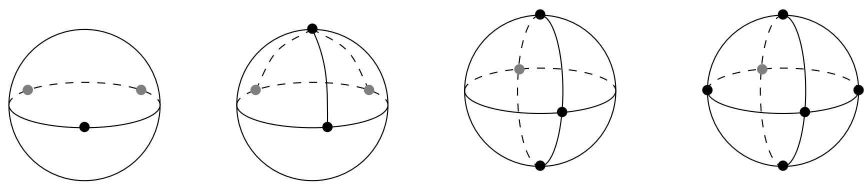


Definition:
- Ein **Dreiecksgebilde** G besteht aus einer Menge von Dreiecken $\Delta(G)$, die entlang ihrer Kanten nach den folgenden Regeln verklebt werden:
  1. Ecken werden mit Ecken verklebt, aber niemals die Endpunkte ein und derselben Kante miteinander.
  2. Es werden immer höchstens zwei Dreiecke entlang einer Kante verklebt.
  3. Zwischen zwei Ecken des Dreiecksgebildes gibt es immer höchstens eine Kante.
  4. Das Dreiecksgebilde ist zusammenhängend.
- Die **Eulercharakteristik** eines Dreiecksgebildes G ist definiert als

  $$\chi(G) = E - K + D$$

  wobei $E/K/D$ die Anzahl der Ecken / Kanten / Dreiecke von G sind.
- Eine **Triangulierung** einer Fläche X besteht aus einem Dreiecksgebilde G und einer Einbettung desselben in X. Die Eulercharakteristik von X ist die Eulercharakteristik einer Triangulierung G von X.

Aufgabe 3
Entscheidet, welche von den folgenden Bildern eine gültige Triangulierung der Sphäre darstellen.

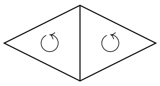


Aufgabe 4
Bastelt einen Zylinder und ein Möbiusband, indem ihr die mitgebrachten Papierstreifen an ihrer kurzen Seite wie folgt verklebt

Zylinder :  **Möbiusband** : 

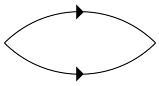
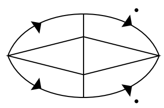
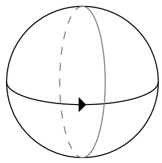
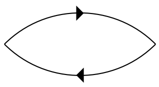
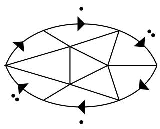
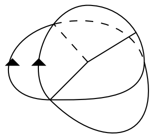
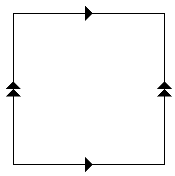
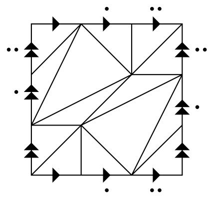
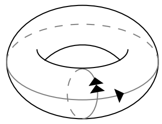
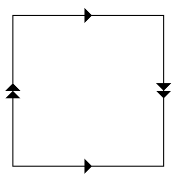
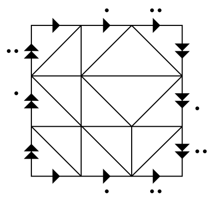
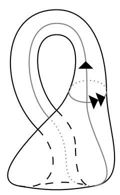
Nutzt jeweils die aufgedruckte Triangulierung, um die Eulercharakteristik vom Zylinder und vom Möbiusband auszurechnen. Inwiefern unterscheiden sich die zwei Flächen?

Definition:
Ein Dreiecksgebilde ist **orientierbar**, wenn jedes Dreieck so mit einer Drehrichtung ausgestattet werden kann, dass sich die Drehrichtungen benachbarter Dreiecke wie dargestellt "aufheben":



Eine Fläche ist orientierbar, wenn sie eine orientierbare Triangulierung besitzt.

Aufgabe 5
Die folgenden Verklebevorschriften definieren jeweils Flächen. Nutzt die eingezeichnete Triangulierung zur Berechnung der Eulercharakteristik. Bestimmt außerdem, ob die Flächen orientierbar sind.

Name	Verklebevorschrift	mit Triangulierung	Illustration	$\chi(X)$	$\circlearrowleft$?
Die **Sphäre** $\mathbb{S}^2$					
Die **projektive Ebene** $\mathbb{RP}^2$					
Der **Torus** $\mathbb{T}^2$					
Die **Kleinsche Flasche** $\mathbb{K}^2$					

Definition:
Die **zusammenhängende Summe** von zwei Flächen X und Y ist die Fläche, die entsteht, wenn man aus X und Y jeweils eine Scheibe rausschneidet und dann X und Y entlang der Kreisränder verklebt.

Klassifikationstheorem:
Jede geschlossene Fläche ist entweder die Sphäre, eine zusammenhängende Summe von mehreren Tori, oder eine zusammenhängende Summe von mehreren projektiven Ebenen.