(1)

Algèbre 8)

Chapitre I : Raisonnement et vocabulaire ensemble libre et application

Rudiments

(1) Eléments de logiques

Définition : une proposition (ou assertion) est un énoncé mathématique qui a une seule valeur vrai ou fausse.

Exemple.

- 4 est un nombre impaire est une proposition fausse.
- $3 \times 2 = 6$ est une proposition vraie
- $1 + 1 - 2$ et $(\sqrt{18})^3$ ne sont pas des propositions puisqu'on ne peut pas confirmer qu'ils sont vraies ou fausses. G sont des expressions mathématiques dont le résultat est un reél.

1 - 1) Connecteurs logiques :

Les connecteurs logiques suivants permettent de combiner deux propositions pour former une nouvelle proposition.

- La conjonction : soit p et q deux propositions, la nouvelle proposit "p et q" est vraie quand p et q sont simultanément vraies et fausses sinon.

Autrement dit la proposition "p et q" est fausse si au moins l'une des deux est fausse.

Exemple.

" $2 > 0$ et $3 < 1$ " est fausse

" $2 > 0$ et $3 \geqslant 1$ est vraie

- Disjonction : Soit p et q deux propositions. La proposition "p ou q" est fausse si les deux sont fausses et vraie sinon. Autrement dit, "p ou q" est vraie si au moins l'une des deux est vraie.

Exemple

"$2>0$ ou $3<1$" est vraie

"$2\leq 0$ ou $3<1$" est fausse

1.2) Négation

Définition: Soit p une proposition. La nouvelle proposition "Non(p)" est vraie lorsque p est fausse et fausse lorsque p est vraie.

Exemples:

- Non $(2>1)$ est $2\leq 1$
  vrai $\Rightarrow$ sa négation est fausse $\Uparrow$
- Non $(3\in\mathbb{N})$ et $3\notin\mathbb{N}$
- "p ou Non(p)" sont toujours vraie.

La valeur de verité de ces nouvelles propositions vérifient le tableau suivant

p	q	p et q	p ou q	Non (p)
V	V	V	V	F
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

1_3_ Implication.

Soit p et q deux propositions : si q est vrai $\Rightarrow$ $p \Rightarrow q$ est vrai ; si q est fausse $\Rightarrow$ $p \Rightarrow q$ est fausse

L'implication $p \Rightarrow q$ est une proposition qui est fausse si p est vraie et q est fausse et vraie dans les autres cas. Elle ~~est équivalente à Non (p)~~ ou q.

Vocabulaire. Lors que l'implication ~~l'implication~~ $p \Rightarrow q$ est vraie .

- p est une condition suffisante pour q (q est vraie dès que p l'est
- q est une condition nécessaire pour p (p ne peut pas être vraie que q le soit)

Exemple.

$\overset{a}{2>1} \Rightarrow \overset{b}{3>0}$ Vraie   a : V, b : V $\Rightarrow$ Vrai

$2>1 \Rightarrow 3\leq 0$ fausse   a : fausse, b : V

$2<1 \Rightarrow 3\geq 0$ Vraie

$2<1 \Rightarrow 3<0$ Vraie

$A \Rightarrow \text{Non}(A)$ fausse si A est vraie

- L'implication $p \Rightarrow q$ se lit en français, p implique q
l'implication $q \Rightarrow p$ s'appelle la réciproque de $p \Rightarrow q$
Soit p et q deux propositions. on note $p \Leftrightarrow q$ la proposition
qui est vraie si $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$ et fausse sinon
on dit que p est équivalent à q.

Proposition Soit p et q deux propositions
. Non (P et q) $\Leftrightarrow$ Non(P) ou Non(q)
. Non(P ou q) $\Leftrightarrow$ Non(P) et Non(q)
Non (Non(P)) $\Leftrightarrow$ P

Soit p et q et r trois propositions.

P ou (q et r) $\Leftrightarrow$ (P ou q) et (P ou r)

P et (q ou r) $\Leftrightarrow$ (p et q) ou (p et r)

1.4. quantification universels.

Le quantificateur "$\forall$" se lit « partout » ou « quelque soit »
. La proposition $\forall x \in E$, $P(x)$ est vraie lorsque les propositions
$P(x)$ est vraie pour tous les elements. de E est fausse sinon.

Exemples

. ($\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$) est vraie
$\forall x \in \mathbb{N}$, $P(x)$

$\forall x \in]-\infty; -1[\cup]1, +\infty[$, $x^2 > 1$ Vrai

$\forall x \in]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$, $x^2 > 1$ est fausse

. La quantificateur "$\exists$" se lit « il existe »
La proposition $\exists x \in E$, $P(x)$ est vraie lorsque il y a au
moins un élement x de E tq $P(x)$ est vraie

$\exists x$ ~~x de E~~ tq, $P(x)$ est fausse alorsque pour tous les élements de E les proposit
$P(x)$ est fausse

Exemple :

$\exists x \in \mathbb{R} \ / \ x > 6$ est vraie

$\exists x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 < 0$ est fausse

$\exists x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 \leq 0$ est vraie

Cas particulier : Dans ce cas, on ajoute un point d'exclamation au quantificateur " $\exists$ "

$$\underbrace{\exists ! x \in E \ , \ P(x)}_{P}$$

cette proposition est vraie lorsqu'il existe un unique élément x de E ou encore ~~un élém~~ il existe un élément x de E et un seul tel que $P(x)$ est vraie et fausse sinon.

Celte proposition équivaut en effet à $(\exists x \in E \ , P(x))$ et $\left(\forall x, y \ , \ \begin{matrix} P(x) = P(y) \\ x = y \end{matrix} \right)$

Nier (négation) une proposition avec quantificateur :

- $\text{Non}(\forall x \in E \ , \ P(x)) \iff (\exists x \in E \ , \text{Non}(P(x)))$
- $\text{Non}(\exists x \in E \ , \ P(x)) \iff (\forall x \in E \ , \text{Non}(P(x)))$
- $\text{Non}(\exists ! x \in E \ , \ P(x))$

$$=$$

$$\text{Non}(\exists x \in E \ , \ P(x)) \text{ ou } \text{Non}(\forall x, y \ , P(x) = P(y) \Rightarrow x = y)$$

$$\Updownarrow$$

$$(\forall x \in E \ , \ \text{Non}(P(x)) \text{ ou } (\exists (x, y) \in E \ , \ P(x) = P(y) \text{ et } x \neq y)$$

Enchaînement des quantificateurs :

Considérons la proposition

$$\forall x \in E \ , \ \exists y \in E \ , \ P(x, y)$$

Cette proposition est vraie quand pour tout $x \in E$, la proposition $\exists y \in E, P(x, y)$ est vraie, fausse sinon

Exemple

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! \, p \in \mathbb{Z}, \; x \in [n, n+1[$ est vraie
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \; y^2 = x$ est fausse. ($x = -1$, aucun y vérifie $y^2 = -1$)

La proposition : $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$
$\exists x \in E, P(x)$ avec $P(x) : \forall y \in F, P(x, y)$

Exemple :

$\exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{N}^* \; ; \; y \geq x)$: Cette proposition est vraie

$\exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{R}^* , y \geq x$ est fausse

Négation d'une proposition avec plusieurs quantificateurs :

Non $(\forall x \in E , \exists y \in F, P(x, y)$

$\forall x \in E, \; P(x)$ $\iff \exists x \in E / \text{Non} (P(x)$

avec $P(x) . \exists y \in F, P(x,y))$ $\iff \exists x \in E, \; \forall y \in F, \text{Non}(P(x,y))$

De même :

Non $(\exists x \in E, \forall y \in F, P(x, y)) \iff \forall x \in E, \exists y \in F \; ; \text{Non} (P(x, y))$

Remarque :

- L'ordre des quantificateurs est très imposition.

. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y > 0$ est vraie

. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$ est fausse.

* pour nier une proposition quantifiée, on inverse tous les quantificateurs et on nie la propriété

2) Mode de raisonnement.

- Raisonnement direct.

Pour montrer que « $p \Rightarrow q$ » est vraie

on suppose que p est vraie et on mq q est vraie

Exemple.

$\forall x \in \mathbb{R}$, x est pair $\Rightarrow x^2$ est pair.

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{Z} \; / \; x = 2K$

avec $x^2 = 4K^2 = 2(2K^2) \Rightarrow x^2$ est pair

- Raisonnement par contraposée.

Elle est basé sur l'équivalence entre les propositions.

$P \Rightarrow q$ ~~est vraie~~ équivaut à $Non(q) \Rightarrow Non(p)$

Exemple.

$\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 pair $\Rightarrow n$ est pair

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, n impair $\Rightarrow n^2$ est impaire

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque

Supposons que n est impair

$\Rightarrow \exists K \in \mathbb{Z} \; / \; n = 2K+1$

$\Rightarrow n^2 = (2K+1)^2 = 4K^2 + 4K + 1$

$= 2(\underbrace{2K^2 + 2K}_{K'}) + 1$

$\Rightarrow n^2$ est impair.

- Raisonnement par Récurrence:

Soit $(P(n_0), P(n_1), \ldots)$: une suite de propositions

Ex:

$P(n) = \dfrac{1}{n(n-1)(n-2)}$, $n \geqslant 3$

Pour Mq $\forall n \geqslant n_0$, $P(n)$

on Mq:

- $P(n_0)$ est vrai (initialisation)
- $\forall n \geqslant n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (Heridité)
- conclusion. $\forall n \geqslant n_0$, $P(n)$ est vraie

Raisonnement par absurde:

Pour montrer une proposition est vraie par l'absurde. On suppose que sa négation est vraie et on déduit d'elle une contraction.

Par exemple, pour Mq $p \Rightarrow q$ est vraie, on suppose à la fois que p est vraie et q est fausse et puis on cherche une contradiction

Exemple: Mq.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{a}{b+1} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$$

Raisonnement par absurde ~~en supposant que~~:

Soit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Supposons que $\frac{a}{b+1} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$

Alors $a(1+a) = b(b+1)$

$a + a^2 = b + b^2$

$a^2 - b^2 + a - b = 0$

$(a-b)(a+b) + (a-b) = 0$

$(a-b)(a+b) = b - a$

Or $a - b \neq 0$ on divise par $a - b$ on obtient

$a + b = -1$ (somme de 2 nbr ⊕ sur $\mathbb{R}^+$ est ⊕) contradiction avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$

Conclusion:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{a}{b+1} = \frac{b}{1+a} \Rightarrow a = b$$

Raisonnement par analyse synthèse.

Ce raisonnement s'applique lorsqu'on cherche une conditions nécessaire et suffisante pour une proposition P

Analyse: on suppose que P est vraie et on en déduit des conditions nécessaires.

Synthèse : on fixe ces conditions et on vérifie si elles sont suffisantes.
Selon le cas, on doit, parfois restreindre les conditions trouvées dans la partie « analyse »

Exemple : Résoudre l'équation :

$$x = 2\sqrt{2+x} \quad (*)$$

Analyse

Si x est une solution de $(*)$

$\Rightarrow x \geq 0$ et $x^2 = 2 + x$

$\Rightarrow x \geq 0$ et $x^2 - x - 2 = 0$

$\Rightarrow x \geq 0$ et $x = -1$ ou $x = 2$

Synthèse.

on teste les deux valeurs possibles dans l'équation $*$. on constate que $x = 2$ est une solution mais pas -1

② Ensembles.

Definition : Un ensemble est une collection d'éléments

Exemples :

$\{1, 2, 3\}$, $\{$Rouge, vert, Jaune$\}$, $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

on écrit $x \in E$, si x est un élément de E

Autre façon : un ensemble est une collection d'éléments qui vérifient une certaine proposition

Exemples :

$\{x \in \mathbb{R} \,/\, |x-2| < 1\} =]1, 3[$

$\{x \in \mathbb{R} \,/\, 0 \leq x < 1\} = [0, 1[$

. Ensemble vide : on appelle ensemble vide l'ensemble qui ne contient aucun élément, on le note $\emptyset$.

Soit E un ensemble. On dit que x est un élément de E lorsque x appartient à E on note alors $x \in E$.

- on appelle le singleton x, l'ensemble qui ne contient que l'élément x. Cet ensemble est noté $\{x\}$

2 - 2 - L'inclusion:

Soit A et B deux ensembles. On dit que A est inclu dans B lorsque tout élément de A est un élément de B, on le note $A \subset B$

autrement dit $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A, x \in B$

on dit aussi que A est une partie ou sous-element de B

Exemple $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset I$

$$\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$$

L'ensemble vide est inclu dans tous les ensembles.

Soit E un ensemble, on note $P(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Exemple: $E = \{1, 2, 3\}$

$$P(E) = \{\phi, E, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$$

Remarque: l'inclusion est transitive.

$$A \subset B \text{ et } B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

2 - 3 Egalité de deux ensembles

Deux ensembles A et B sont égaux si $A \subset B$ et $B \subset A$

$(\forall x \in A, x \in B)$ et $(\forall x \in B, x \in A)$

2 - 4 - La réunion:

Soit E un ensemble, A et B deux sous ~~ens~~ ensembles de E

on appelle la réunion de A et B le non-ensemble noté

$$A \cup B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$(\forall x \in E, x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B)$

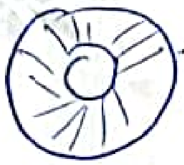
2.5 - L'intersection :

Soit E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E.
on appelle l'intersection de A et B le sous-ensemble noté $A \cap B = \{x \in E /$
$x \in A$ et $x \in B\}$ $\forall x \in E$, $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B$

2.6 - Complémentaire

Soit E un ensemble et A un sous ensemble de E $(A \in \mathcal{P}(E))$
on appelle complémentaire de A dans E qu'on le note C_E^A, $\bar{A}$ le sous ensemble
complémentaire de A

$C_E^A = \{x \in E / x \notin A\}$


$\rightarrow C_E^A$

Proposition (operation sur les ensembles)

Soit $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$

- $A \cap B = B \cap A$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B = C$
- $\bar{\bar{A}} = A$
- $A \subset B \Rightarrow C_E^B \subset C_E^A$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Preuve :

Soit $x \in E$, $x \in A \cap (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A$ et $x \in B \cup C$

$\Rightarrow x \in A$ et $(x \in B$ ou $x \in C)$

$\Rightarrow (x \in A$ et $x \in B)$ ou $(x \in A$ et $x \in C)$

$\Rightarrow x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Supposons que $A \subset B$
et Mq $C_E^B \subset C_E^A$

Soit $x \in C_E^A \Rightarrow x \in E$ et $x \notin B$

Comme $A \subset B$
alors $x \in E$ et $x \notin A$ (1)

(1) $\Rightarrow x \in C_E^A$

Soit $x \in E$, $x \in \overline{A \cup B}$

$\Leftrightarrow x \notin A \cup B$

$\Leftrightarrow x \notin A$ et $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in \bar{A}$ et $x \in \bar{B}$

$\Leftrightarrow x \in \bar{A} \cap \bar{B}$

d'où $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

de même on vérifie que:

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$