KomAn

2022/2023

Opgavesæt C

Besvarelsen afleveres via Absalon inden deadline! Husk navn og KU-brugernavn. Besvarelsen godkendes hvis mindst 70 % er rigtigt besvaret.

Hvis du skal have dette opgavesæt godkendt for at kunne gå til eksamen er det nødvendigt at skrive tydeligt på forsiden, at det er tilfældet. Det er ikke muligt at genaflevere dette opgavesæt.

Hvis du ikke behøver at få dette opgavesæt godkendt for at kunne gå til eksamen, er det selvfølgeligt ikke nødvendigt aflevere det, men et godt råd: gør det alligevel!

Opgave 1 (50%) Lad

$$f(z) = \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{(e^z-1)^2}.$$

(a) Begrund, at f er meromorf i $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$.

(b) Vis, at $z = 0$ er en simpel pol for f og bestem $\operatorname{Res}(f, 0)$.

(c) Bestem samtlige øvrige poler for f og angiv deres ordener.

(d) Vis, at

$$\operatorname{Res}(f, 2\pi i p) = \frac{1}{1+2\pi i p} - 2\operatorname{Log}(1+2\pi i p), \quad p \in \mathbb{Z}.$$

(e) Vis, at

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} f(z)\,dz = \frac{2}{1+4\pi^2} + 1 - 2\ln\left(1+4\pi^2\right),$$

hvor $R = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Re z| \le 1/2, |\Im z| \le 7\}$ og hvor ∂R gennemløbes én gang i positiv omløbsretning.

Opgave 2 (30%) Lad f være holomorf i G, og antag, at $w, 0 \in G$ ($w \neq 0$). Lad $n \in \mathbb{N}_0$ og definér

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-w)z^{n+1}}.$$

(a) Vis, at $z = w$ er en pol for g netop hvis $f(w) \neq 0$. Bestem i bekræftende tilfælde polens orden og det tilhørende residuum.

(b) Antag, at $f(0) \neq 0$. Bestem ordenen af polen $z = 0$ for g og vis, at der gælder følgende relation mellem residuet for g in 0 og Taylor polynomiet med centrum i 0 for f:

$$\operatorname{Res}(g, 0) = -\frac{1}{w^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}w^k.$$

Opgave 3 (20%) Udregn værdien af integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+i)(x-i)^3}$$

vha. residueregning.

Supplerende opgave

Du er velkommen til at prøve kræfter med nedenstående supplerende opgave. Besvarelsen kan afleveres via Absalon (Assigment: "Supplerende opgaver") og så vil jeg rette den. Opgaven tæller ikke med i bedømmelsen af Opgavesæt C.

Supplerende C Vis, at

$$\lim_{R\to\infty, r\to 0} \int_r^R \frac{\ln x}{x^2-1}\, dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Vink til opgaverne

- Opgave 1: I (d) brug regel 3 på side 141 i bogen. Start med at vise omskrivningen

  $$(z-2\pi ip)^2 f(z) = \frac{\mathrm{Log}(1+z)}{g(z)^2},$$

  hvor

  $$g(z) = \frac{e^z - 1}{z - 2\pi ip} = \frac{e^{z-2\pi ip} - 1}{z - 2\pi ip} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}(z-2\pi ip)^k.$$

  Heraf kan værdierne $g(2\pi ip)$ og $g'(2\pi ip)$ aflæses.

- Opgave 2: I (b) brug regel 3 på side 141 og Leibniz' formel (Exercise 1.16) til at udregne den n-te afledede.

- Supplerende C: Integrér langs randen af en passende "kvart-annulus".

Henrik Laurberg Pedersen (henrikp@math.ku.dk)