Aflevering 1

Jonas Trepiakas - hvn548@alumni.ku.dk

Opgave 1: Vi har

$$\begin{aligned}(1216, 551) &= (1216 - 551 \cdot 2, 551) \\ &= (114, 551) \\ &= (114, 551 - 4 \cdot 114) \\ &= (114, 95) \\ &= (114 - 95, 95) \\ &= (19, 95) \\ &= (19, 0) \\ &= 19,\end{aligned}$$

ved gentagen brug af proposition 1.2.3. Da $19 \nmid 56$ findes ingen heltallige løsninger ifølge sætning 1.3.1. til $1216x + 551y = 56$. Da $19 \cdot 4 = 76$, har vi $19 \mid 76$, og ifølge sætning 1.3.1 er samtlige løsninger givet ved:

$$(x, y) = 4\,(x_0, y_0) + n\left(\frac{551}{19}, -\frac{1216}{19}\right),$$

hvor (x_0, y_0) er en vilkårlig løsning til systemet. En sådan løsning finder vi ved:

$$\begin{aligned}19 &= 114 - 95 \\ &= (1216 - 551 \cdot 2) - (551 - 4 \cdot 114) \\ &= (1216 - 551 \cdot 2) - (551 - 4 \cdot (1216 - 551 \cdot 2)) \\ &= 5 \cdot 1216 - 11 \cdot 551.\end{aligned}$$

Hvormed $76 = 19 \cdot 4 = 20 \cdot 1216 - 44 \cdot 551$, så $(x_0, y_0) = (20, -44)$ er en løsning.
Samtlige reelle løsninger findes ved

$$1216x + 551y = 76 \iff y = \frac{76 - 1216x}{551}$$

og

$$1216x + 551y = 56 \iff y = \frac{56 - 1216x}{551}.$$

Hvormed $(x, y) = \left(x, \frac{76-1216x}{551}\right), (x, y) = \left(x, \frac{56-1216x}{551}\right)$ for $x \in \mathbb{R}$ er samtlige løsninger til ligningssystemerne $1216x + 551y = 76$ og $1216x + 551y = 56$ henholdsvis.

Opgave 2: Vi har

$$51 \cdot 41 = 2091 = 110 \cdot 19 + 1,$$

så $51 \cdot 41 \equiv 1 \pmod{110}$, dvs. $51^{-1} \equiv 41 \pmod{110}$, hvormed

$$51x \equiv 4 \iff x \equiv 4 \cdot 41 \equiv 164 \equiv 54 \pmod{110}.$$

Dermed er samtlige løsninger til kongruensligningen netop $x = 54 + 110n, n \in \mathbb{Z}$.

Opgave 3: Vi har $3 \cdot 5 = 15 \equiv 1 \pmod 7$, så ligningssystemet er ækvivalent med

$$\begin{aligned}x &\equiv 2 \pmod{13} \\ x &\equiv 5 \cdot 5 \equiv 4 \pmod 7.\end{aligned}$$

Da $(13, 7) = 1$, eksisterer en løsning til systemet, der er unikt modulo $13 \cdot 7$ ifølge den kinesiske restklassesætning. Vi har $2 + 13t \equiv 4 \pmod 7 \iff 13t \equiv 2 \pmod 7 \iff t \equiv 6 \cdot 2 \equiv 5 \pmod 7$, så $x = 2 + 13 \cdot 5 = 67$ løser systemet. Samtlige løsninger er dermed givet ved

$$x = 67 + 13 \cdot 7n = 67 + 91n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Opgave 4: Vi har $4^2 + 7^2 = 16 + 49 = 65$. Nu har vi fra sætning 1.4.6, at de primitive heltallige løsninger til

$$X^2 + Y^2 = 65^2$$

med X ulige og Y lige, er netop

$$(X, Y, 65) = \left(p^2 - q^2, -2pq, p^2 + q^2\right)$$

hvor $(p, q) = 1$ med $p \geq 0$ og $p - q$ er ulige. Vi har, at $p = 7, q = 4$ opfylder betingelserne, så $(X, Y) = \left(7^2 - 4^2, -2 \cdot 4 \cdot 7\right) = (33, -56)$ løser ligningen med $\gcd(X, Y) = 1$.

Opgave 5: Antag, at en Pythagoræisk tripel (x, y, z) findes med $z \geq 0$ og $z \equiv 2 \pmod 4$ eller $z \equiv 3 \pmod 4$. Da er

$$x^2 + y^2 = z^2 \equiv 2 \text{ eller } 3 \pmod 4.$$

Men da 2 og 3 ikke er kvadratiske rester modulo 4, findes ingen heltalige løsninger til systemet og dermed ingen Pythagoræisk tripel med ovenstående betingelser.