Aflevering 4

Jonas Trepiakas - hvn548@alumni.ku.dk

1. Vi har, at

$$(n, n+6, n+12, n+18, n+24) \equiv (n, n+1, n+2, n+3, n+4) \pmod 5.$$

Dvs. de 5 primtal har forskellige rester modulo 5. Per skuffe princippet, må en af disse da være kongruent med 0 modulo 5, så 5 går op i primtallet, men dermed må primtallet være 5. Da $n + 6k > 5$ for $k \geq 1$, må $n = 5$.

2. Lad p og q være to forskellige primtal. Da har vi $\Lambda(pq) = 0$ per definition, men $\log(p)$ og $\log(q) \neq 0$, da $\log(1) = 0$ og log er injektiv på $(0, \infty)$. Dermed er $\Lambda(pq) \neq \log(p)\log(q) = \Lambda(p)\Lambda(q)$. Så Λ er ikke multiplikativ.
Vi har nu, at da $\log(mn) = \log(m) + \log(n)$ for all $m, n \in (0, \infty)$, har vi for $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$

$$\begin{aligned} \log(n) &= \sum_{i=1}^{k} \log\left(p_i^{\alpha_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \log\left(p_i\right) \end{aligned}$$

Lad nu d være en divisor af n. Da kan vi skrive $d = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$ med $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ for alle $i \in \{1, \dots, k\}$. Hvis vi for $1 \leq i < j \leq k$ har $\beta_i, \beta_j > 0$, er $\Lambda(d) = 0$ per definition. Dermed er

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \Lambda(p_i^j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \log(p_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \log(p_i).$$

Hvormed vi får $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log(n)$.
Vi bemærker, at

$$\Lambda * u(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d) = \log(n).$$

Da Λ og u er aritmetiske funktioner, fås ved Möbius inversion, at $\Lambda(n) = \log * \mu(n)$. Nu har vi, at $|\log n| \leq n$ for alle n; $|\mu(n)| \leq 1$ og $|\Lambda(n)| \leq n$ for alle n udfra definitionen. Altså er de alle begrænset af n. Ved sætning 5.2.3 fås nu for σ tilstrækkeligt stor, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Som givet i opgaven kan vi udregne $\zeta(s)$ ved ledvis differentiering for $\Re(s) > 1$:

$$\zeta'(s) = \frac{d}{ds} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{ds} e^{-\log(n)s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\log(n)}{n^s}$$

Kombinerer vi dette med eksempel 5.5, fås for $\sigma > 1$ tilstrækkeligt stort, at

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} \\ &= -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \end{aligned}$$

3. Idet $\mathbb{F}_{523}$ er et integritetsområde, har ligningen løsninger, hvis og kun hvis enten $8x^2 + 6x + 4 \equiv 0 \pmod{523}$ har løsninger eller $x^2 + 7x + 10 \equiv 0 \pmod{523}$ har løsninger. Vi undersøger $x^2 + 7x + 10 \equiv 0 \pmod{523}$. Vi har

$$0 = x^2 + 7x + 10 = \frac{1}{4}\left((2x+7)^2 - \left(7^2 - 40\right)\right).$$

Så ligningen har løsninger, hvis og kun hvis $7^2 - 40 = 9$ er en kvadratisk rest modulo 523, men det er den trivielt, da $9 = 3^2$. Dermed er f.eks. $2x + 7 \equiv 3 \pmod{523} \iff x \equiv -2 \equiv 521 \pmod{523}$ en løsning, så specielt er 521 en løsning til systemet. Her har vi brugt, at $(523, 2) = 1$ til eksistensen af en invers.