# Samenvatting Analyse op de Lijn

Jonas van der Schaaf

20 oktober 2019

## Inhoudsopgave

# 1 Introductie

## 1.1 De verzameling $\mathbb{R}$

**Algebraïsche eigenschappen** De verzameling breuken $\mathbb{Q}$ heeft de volgende algebraïsche eigenschappen:

**A1.** $a + (b + c) = (a + b) + c$ voor elke $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

**A2.** $a + b = b + a$ voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$.

**A3.** $a + 0 = 0$ voor alle $a \in \mathbb{Q}$.

**A4.** Voor elke $a \in \mathbb{Q}$ is er een $-a \in \mathbb{Q}$ zodat $a + (-a) = 0$

**M1.** $a(bc) = (ab)c$ voor elke $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

**M2.** $ab = ba$ voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$.

**M3.** $a \cdot 1 = a$ voor alle $a \in \mathbb{Q}$.

**M4.** Voor elke $a \in \mathbb{Q}$ met $a \neq 0$ is er een $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ zodat $a \cdot a^{-1} = 1$

De eigenschappen **A1** en **M1** zijn de *associatieve* eigenschappen van $+$ en $\cdot$ en de eigenschappen **A2** en **M2** zijn de *commutatieve* eigenschappen van $+$ en $\cdot$.

**Consequenties van de veld eigenschappen** De volgende eigenschappen volgen uit de algebraïsche eigenschappen van $\mathbb{Q}$:

1. Als $a + c = b + c$ dan geldt dat $a = b$.
2. $a \cdot 0 = 0$ voor alle $a \in \mathbb{Q}$.
3. $(-a)b = -ab$ voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$.
4. $(-a)(-b) = ab$ voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$.
5. Als $ac = bc$ en $c \neq 0$ dan $a = b$.
6. Als $ab = 0$ dan geldt dat $a = 0$ of $b = 0$.

*De bewijzen van deze stellingen staan op pagina 16 van het boek.*

**Ordening** Ook heeft $\mathbb{Q}$ een ordening "$\leq$"die aan de volgende eigenschappen voldoet:

**O1.** Als $a, b \in \mathbb{Q}$ dan geldt dat $a \leq b$ of $b \leq a$.

**O2.** Als $a \leq b$ en $b \leq a$ dan $a = b$.

**O3.** Als $a \leq b$ en $b \leq c$ dan $a \leq c$.

**O4.** Als $a \leq b$ dan geldt ook dat $a + c \leq b + c$

**O5.** Als $a \leq b$ en $c \geq 0$, dan ook $ac \leq bc$.

De eigenschap **O3** heet de *transitieve* eigenschap. Een veld met een ordening die voldoet aan **O1** tot en met **O5** heet een geordend veld.

**Consequenties van de ordening "$\leq$"**

1. Als $a \leq b$ dan $-b \leq -a$.
2. Als $a \leq b$ en $c \leq 0$ dan $bc \leq ac$.
3. Als $0 \leq a$ en $0 \leq b$ dan $0 \leq ab$.
4. $0 \leq a^2$ voor elke $a \in \mathbb{Q}$.

5. $0 < 1$.
6. Als $0 < a$ dan ook $0 < a^{-1}$.
7. Als $0 < a < b$ dan geldt $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

*Dit wordt bewezen op pagina 16-17 van het boek.*

**Absolute waarde** De absolute waarde is gedefinieerd als volgt:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{als } a \geq 0 \\ -a & \text{als } a < 0 \end{cases}$$

**Stellingen over de absolute waarde** De volgende stellingen over de absolute waarde zijn waar:

1. $|a| \geq 0$.
2. $|ab| = |a| \cdot |b|$.
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$.

*Dit wordt bewezen op pagina 17-18 van het boek.*

**Afstand** De afstand tussen twee getallen $a, b$ is de $\mathrm{dist}(a, b)$ wat gedefiniëerd is als:

$$\mathrm{dist}(a, b) := |a - b|$$

**Stellingen over de afstand** De volgende stelling over afstand is waar:

**Afstand tussen de som van getallen** $\mathrm{dist}(a, c) \leq \mathrm{dist}(a, b) + \mathrm{dist}(b, c)$.
*Dit wordt bewezen op pagina 18 van het boek.*

**Stellingen uit opgaven** De volgende handige stellingen worden bewezen in een opgave uit paragraaf 3:

**Opgave 3.5a** Voor elke $a, b \in \mathbb{R}$ geldt dat $|b| \leq a$ dan en slechts dan als $-a \leq b \leq a$.

**Opgave 3.5b** Voor elke $a, b \in \mathbb{R}$ geldt dat $||b| - |a|| \leq |b - a|$.

**Opgave 3.6b** Laat $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$, dan geldt dat $|\sum_{i=1}^{n} a_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$

## 1.2 De compleetheid van $\mathbb{R}$

**Maxima en minima** Van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ zijn het maximum en minimum als volgt gedefiniëerd:

**Maximum** $s_0 = \max(S)$ dan en slechts dan als voor elke $s \in S$ geldt dat $s \leq s_0$ en $s_0 \in S$.

**Minimum** $s_0 = \min(S)$ dan en slechts dan als voor elke $s \in S$ geldt dat $s \geq s_0$ en $s_0 \in S$.

**Intervallen** Een interval is een speciaal soort deelverzameling van $\mathbb{R}$, er zijn 4 verschillende intervallen:

- $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ dit heet een gesloten interval. $\min([a,b]) = a$ en $\max([a,b]) = b$.
- $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ dit heet een half gesloten interval. $\min([a,b)) = a$ en $\max([a,b))$ bestaat niet.
- $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ dit heet een half gesloten interval. $\min((a,b]) = a$ en $\max((a,b])$ bestaat niet.
- $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ dit heet een open interval. $\min((a,b))$ bestaat niet en $\max((a,b))$ bestaat niet.

**Boven- en ondergrenzen** Boven- en ondergrenzen zijn als volgt gedefiniëerd: Laat $S \subseteq \mathbb{R}$ dan geldt

**Bovengrens** Een getal $M$ is een bovengrens van $S$ als voor elke $s \in S$ geldt dat $s \leq M$. Als een verzameling een bovengrens heeft dan heet die verzameling boven begrensd.

**Ondergrens** Een getal $m$ is een ondergrens van $S$ als voor elke $s \in S$ geldt dat $s \geq m$. Als een verzameling een ondergrens heeft dan heet die verzameling onder begrensd.

**Stellingen over boven- en ondergrenzen** De volgende stelling wordt gegeven over bovengrenzen:

**Intervallen en begrenzingen** Als $S$ boven en beneden begrensd is, dan zijn er twee getallen $m, M \in \mathbb{R}$ zodat $S \subseteq [m, M]$.

**Suprema en infima** Het supremum en infimum van een verzameling zijn als volgt gedefiniëerd:

**Sumpremum** $M = \sup(S)$ dan en slechts dan als voor elke $s \in S$ geldt dat $s \leq M$ en voor elke $M_1 < M$ geldt dat er een $s \in S$ is zodat $M_1 < s$. Dan is $M$ de kleinste bovengrens van $S$.

**Infimum** $m = \inf(S)$ dan en slechts dan als voor elke $s \in S$ geldt dat $m \geq s$ en voor elke $m > m_1$ geldt dat er een $s \in S$ waarvoor geldt dat $s < m$. Dan is $m$ de grootste ondergrens van $S$.

**Stellingen** In paragraaf 4 van hoofdstuk 1 staan de volgende stellingen:

**Volledigheidsaxioma van $\mathbb{R}$** Het volledgigheidsaxioma luidt als volgt: Voor elke $S \subseteq \mathbb{R}$ met $S \neq \emptyset$ met een bovengrens is er een $M \in \mathbb{R}$ zodat $M = \sup(S)$. *Dit is een axioma, er is geen bewijs.*

**"Omgekeerde" volledigheids "axioma"** Voor elke $S \in \mathbb{R}$ met $S \neq \emptyset$ met een ondergrens is er een $m \in \mathbb{R}$ zodat $m = \inf(S)$. Het is geen echt axioma want het volgt uit het volledigheidsaxioma. *Het bewijs staat op pagina 24-25 van het boek.*

**Archimedische eigenschap** Zij $a, b \in \mathbb{R}^+$ met $a < b$. Dan geldt dat er een $n \in \mathbb{N}$ zodat $na > b$. *Het bewijs staat op pagina 25 van het boek.*

**De dichtheid van $\mathbb{Q}$** Als $a, b \in \mathbb{R}$ en $a < b$ dan is er een $r \in \mathbb{Q}$ zodat $a < r < b$. *Het bewijs staat op pagina 25-26 van het boek.*

**Stellingen uit opgaven** De volgende stellingen worden bewezen in een opgave uit paragraaf 4:

**Opgave 4.7a** Laat $S$ en $T$ verzamelingen zijn met $S, T \subseteq \mathbb{R}$ zodat $S \subseteq T$. Dan geldt dat $\inf(T) \leq \inf(S) \leq \sup(S) \leq \sup(T)$.

**Opgave 4.7b** Laat $S$ en $T$ verzamelingen zijn met met $S, T \subseteq \mathbb{R}$. Dan geldt dat $\sup(S \cup T) = \max\{\sup(S), \sup(T)\}$.

**Opgave 4.8b** Laat $S$ en $T$ verzamelingen zijn zodat voor elke $s \in S$ en $t \in T$ geldt dat $s \leq t$. Dan geldt dat $\sup(S) \leq \inf(T)$.

**Opgave 4.9** Laat $S$ een verzameling zijn zodat $S \subseteq \mathbb{R}$, dan geldt dat $\inf(S) = -\sup(-S)$.

**Opgave 4.14a** Laat $A$ en $B$ verzamelingen zijn met $A, B \subseteq \mathbb{R}$ en $A+B = \{a+b : a \in A \text{ en } b \in B\}$. Dan geldt dat $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

**Opgave 4.14b** Laat $A$ en $B$ verzamelingen zijn met $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Dan geldt dat $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

# 2 Rijen

## 2.1 Limieten van rijen

**Wat is een rij?** Een rij is een functie $s : A \to B$ waar $A = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq M\}$. Een rij wordt vaak opgeschreven als $s_n$ in plaats van $s(n)$, andere notaties zijn $s_{n=m}^{\infty}$ of $(s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, ...)$. Bij Analyse op de Lijn is een rijtje vaak een functie $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dus voor zo'n rijtje $s_n$ geldt dat $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

**Het limiet van een rijtje** Een rijtje $(s_n)$ convergeert naar het getal $s \in \mathbb{R}$ dan en slechts dan als er voor elke $\epsilon > 0$ een $N$ is zodat voor elke $n > N$ geldt dat $|s_n - s| < \epsilon$. Dit is ook te schrijven als $\lim_{n\to\infty}(s_n) = s$. Als er geen $s \in \mathbb{R}$ is zodat $s_n$ naar $s$ convergeert, dan divergeert $s_n$.

**Het bewijzen van een limiet** Een formeel bewijs van het limiet van een rij $s_n$ volgt de volgende stappen:

1. De definitie van de rij $s_n$.
2. Het definiëren van $\epsilon > 0$.
3. Het kiezen van $N$ op basis van $\epsilon$.
4. Het aantonen dat $|s_n - s| < \epsilon$ als $n > N$.

**Afschatten** Vaak wordt een $N$ gevonden met behulp van afschatten van $|s_n - s|$. Afschatten houdt in dat er een rijtje $t_n$ gekozen wordt zodat $|s_n - s| < |t_n|$ en vervolgens wordt er aangetoond dat er een $N$ is zodat voor elke $n > N$ geldt $|t_n| < \epsilon$, dus geldt ook ook dat $|s_n - s| < \epsilon$.

Dit zijn enkele trucs voor het afschatten:

- Als $|s_n - s|$ een breuk is van de vorm $|\frac{a_n}{b_n}|$, waar $a_n, b_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dan geldt dat $|\frac{a_n}{b_n}| < |\frac{a_n}{c_n}|$ als $0 < |c_n| < |b_n|$. Als het mogelijk is om een $N$ te vinden zodat voor elke $n > N$ geldt dat $|\frac{a_n}{c_n}| < \epsilon$ voor elke $\epsilon$, dan geldt dus ook dat $|s_n - s| = |\frac{a_n}{b_n}| < \epsilon$, dus dan convergeert $s_n$ naar $s$.
- Als $|s_n - s|$ een breuk is van de vorm $|\frac{a_n}{b_n}|$, waar $a_n, b_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dan geldt dat $|\frac{c_n}{b_n}| < |\frac{a_n}{b_n}|$ als $|a_n| < |c_n|$. Als het dan mogelijk is om een $N$ te vinden zodat voor elke $n > N$ geldt dat $|\frac{c_n}{b_n}| < \epsilon$ voor elke $\epsilon$, dan geldt dus ook dat $|s_n - s| = |\frac{a_n}{b_n}| < \epsilon$, dus dan convergeert $s_n$ naar $s$.

- Als een rijtje $s_n$ van de vorm is $s_n = \sin(a_n) \cdot b_n$ met $a_n, b_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dan geldt dat $|s_n| < |b_n|$ omdat $-1 < sin(a_n) < 1$. Dus als er een $N$ is zodat voor elke $N < n$ geldt dat $|b_n| < \epsilon$ voor elke $\epsilon > 0$, dan geldt ook $|s_n| < \epsilon$.

**Stellingen uit de opgaven** De volgende stellingen worden bewezen in paragraaf 8:

**Opgave 8.5a** Als $a_n, b_n, s_n$ rijen zijn en voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt $a_n \leq s_n \leq b_n$ en $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}(b_n) = s$, dan geldt ook $\lim_{n\to\infty}(s_n) = s$.

**Opgave 8.9a** Zij $s_n$ een rij. Als $s_n \geq a$ voor een $a \in \mathbb{R}$ voor alle behalve een eindig aantal $n \in \mathbb{N}$, dan $\lim_{n\to\infty}(s_n) \geq a$.

**Opgave 8.9b** Zij $s_n$ een rij. Als $s_n \leq a$ voor een $a \in \mathbb{R}$ voor alle behalve een eindig aantal $n \in \mathbb{N}$, dan $\lim_{n\to\infty}(s_n) \leq a$.

**Opgave 8.9c** Zij $s_n$ een rij. Als $s_n \in [a, b]$ voor een $a, b \in \mathbb{R}$ en voor alle behalve een eindig aantal $n \in \mathbb{N}$, dan $\lim_{n\to\infty}(s_n) \in [a, b]$.

## 2.2 Limietstellingen voor rijen

**Begrensde rijen** Een rij $s_n$ is begrensd als er een $M$ bestaat zodat $|s_n| \leq M$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

**Convergent en begrensd** Als $s_n$ een convergente rij is, dan is er een $M$ zodat $|s_n| \leq M$. Als een rij convergeert dan is deze begrensd. *Het bewijs hiervoor staat op bladzijde* 45 *van het boek.*

**Rekenregels voor limieten** Voor limieten gelden bepaalde rekenregels. De volgende regels gelden **alleen** als de rijtjes $s_n$ en $t_n$ convergeren.

**De wortel van een rij** Als $\lim_{n\to\infty}(s_n) = s$ en $s_n$ is een rij met $s_n \in \mathbb{R}^+$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Dan geldt ook dat $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{s_n}) = \sqrt{s}$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 42 *van het boek.*

**Product van een getal en een limiet** De limiet $\lim_{n\to\infty}(k \cdot s_n) = k \cdot \lim_{n\to\infty}(s_n)$ als $s_n$ convergeert. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 46 *van het boek.*

**Som van limieten** De limiet $\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = \lim_{n\to\infty}(s_n) + \lim_{n\to\infty}(t_n)$ als $s_n$ en $t_n$ convergeren. *Het bewijs hiervoor staat op bladzijde 46 van het boek.*

**Product van limieten** De limiet $\lim_{n\to\infty}(s_n \cdot t_n) = \lim_{n\to\infty}(s_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(t_n)$ als $s_n$ en $t_n$ convergeren. *Het uitgewerkte bewijs hiervoor staat in appendix A.*

**Het limiet van de breuk van twee rijen** De limiet $\lim_{n\to\infty}(\frac{t_n}{s_n}) = \frac{\lim_{n\to\infty}(t_n)}{\lim_{n\to\infty}(s_n)}$ als $s_n$ en $t_n$ convergeren en als $s_n \neq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\lim_{n\to\infty}(s_n) \neq 0$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 47 *en* 48 *van het boek.*

**Enkele limieten** De limieten die hieronder staan zijn waar:

- De limiet $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^p}) = 0$ als $p > 0$.
- De limiet $\lim_{n\to\infty}(a^n) = 0$ als $|a| < 1$.
- De limiet $\lim_{n\to\infty}(n^{\frac{1}{n}}) = 1$.
- De limiet $\lim_{n\to\infty}(a^{\frac{1}{n}}) = 1$ voor $a > 0$.

*De bewijzen hiervoor staan op pagina 48-49 van het boek.*

**Limieten en oneindig** Als een limiet niet convergeert, dan divergeert deze. Maar soms divergeert een rij naar niks en soms naar $+\infty$ of $-\infty$.

**Divergeren naar oneindig** Een rij $s_n$ divergeert naar oneindig dan en slechts dan als er voor elke $M > 0$ een $N$ is zodat voor elke $N < n$ geldt dat $M < s_n$. Dit wordt opgeschreven als $\lim_{n\to\infty}(s_n) = +\infty$.

Een rij $s_n$ divergeert naar $-\infty$ dan en slechts dan als er voor elke $M < 0$ een $N$ is zodat voor elke $N < n$ geldt dat $s_n < M$. Dit wordt opgeschreven als $\lim_{n\to\infty}(s_n) = -\infty$.

Een rij $s_n$ heeft een limiet als $s_n$ convergeert of als $s_n$ divergeert naar $+\infty$ of $-\infty$.

**Rekenregels voor limieten naar $\pm\infty$** Als een rijtje divergeert naar $\pm\infty$ dan kunnen de eerder genoemde rekenregels niet gebruikt worden, de volgende regels wel.

**Het product van twee rijen** Zij $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ met $\lim_{n\to\infty}(s_n) = +\infty$ en $\lim_{n\to\infty}(t_n) > 0$ ($t_n$ kan convergeren of divergeren naar $+\infty$). Dan geldt dat $\lim_{n\to\infty}(s_n t_n) = +\infty$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 52-53.

**Limiet van de rij $\frac{1}{s_n}$** Zij $s_n$ een rij met $s_n > 0$. Dan geldt $\lim_{n\to\infty}(s_n) = +\infty$ dan en slechts dan als $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{s_n}) = 0$. *Het bewijs staat op pagina* 53-54.

**Stellingen uit de opgaven** De volgende stellingen worden bewezen in paragraaf 9:

**Opgave 9.9c** Zij $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zodat er een $N_0$ is zodat $s_n \leq t_n$ voor elke $n > N_0$. Als $s_n$ en $t)n$ convergeren dan geldt $\lim_{n\to\infty}(s_n) \leq \lim_{n\to\infty}(t_n)$.

**Opgave 9.10a** Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ met $\lim_{n\to\infty}(s_n) = +\infty$ en $k > 0$. Dan geldt dat $\lim_{n\to\infty}(ks_n) = +\infty$.

**Opgave 9.10c** Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ met $\lim_{n\to\infty}(s_n) = +\infty$ en $k < 0$. Dan geldt dat $\lim_{n\to\infty}(ks_n) = -\infty$.

**Opgave 9.11c** Zij $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ met $\lim_{n\to\infty}(s_n) = +\infty$ en $t_n$ is begrensd. Dan geldt dat $\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = +\infty$.

## 2.3 Monotone rijen

**Wat is een monotone rij?** Een rij is monotoon als het één van de volgende twee is:

**Monotoon stijgend** Een rij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ is monotoon stijgend als $s_n \leq s_{n+1}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

**Monotoon dalend** De rij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ is monotoon dalend als $s_{n+1} \leq s_n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

**Stellingen over monotoniciteit** De volgende stellingen over monotone rijen zijn waar:

**Gebonden monotone rijen** Elke begrensde monotone rij convergeert. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 57 *van het boek.*

**Onbegrense monotone rijen** Elke onbegrensde monotone rij divergeert naar $\pm\infty$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 59.

**Limieten van monotone rijen** Voor elke monotone rij $s_n$ geldt dat $s_n$ convergeert of divergeert naar $\pm\infty$.

## 2.4 Cauchy rijen

**Cauchy rijen** Een rij is Cauchy dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ er een getal $N$ bestaat zodat voor elke $m, n > N$ geldt dat $|s_n - s_m| < \epsilon$.

**Convergentie en Cauchy** De volgende stellingen zijn waar over de convergentie en het Cauchy zijn van een rij.

**Convergente rij is Cauchy** Als een rij $s_n$ convergeert, dan is de rij ook Cauchy. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 63.

**Begrensdheid en Cauchy** Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Als $s_n$ Cauchy is, dan is deze ook begrensd. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 63.

**Cauchy rij is convergent** Als een rij $s_n$ Cauchy is, dan convergeert deze. *Het bewijs hiervoor staat in appendix B.*

## 2.5 lim sup en lim inf

**Wat zijn de lim sup en lim inf** De $\limsup$ en $\liminf$ zijn als volgt gedefiniëerd:

**De lim sup** Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Dan geldt: $\limsup(s_n) := \lim\limits_{N \to \infty} \sup\{s_n : n > N\}$.

**De lim inf** Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ Dan geldt: $\liminf s_n := \lim\limits_{N \to \infty} \inf\{s_n : n > N\}$.

**Stellingen over de lim inf en lim sup** De volgende stellingen gelden over de $\limsup$ en de $\liminf$.

**lim en lim sup en lim inf** Als $\lim\limits_{n \to \infty}(s_n) = s$ , dan geldt dat $\liminf(s_n) = \limsup(s_n) = s$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 61-62.

**lim sup, lim inf en lim** Als $\limsup(s_n) = \limsup(s_n) = s$ dan geldt ook dat $\lim_{n\to\infty}(s_n)$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 62.

**Product van rijen en lim sup** Zij $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ waar $\lim_{n\to\infty}(s_n) = s$. Dan geldt dat $\limsup(s_nt_n) = s\limsup(t_n)$. *Het bewijs staat op pagina's* 79.

**Verhouding tussen elementen van een rij** Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Dan geldt $\liminf |\frac{s_{n+1}}{s_n}| \leq \liminf |s_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup |s_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup |\frac{s_{n+1}}{s_n}|$. *Het bewijs voor deze stelling staat op pagina* 79-80.

**Stellingen uit de opgaven** De volgende stellingen worden bewezen in paragraaf 10 en 12:

**Opgave 12.4** Zij $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dan geldt dat $\limsup(s_n + t_n) \leq \limsup(s_n) + \limsup(t_n)$.

**Opgave 12.6a** Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en $k \in \mathbb{R}$ met $k > 0$. Dan geldt dat $\limsup(ks_n) = k \cdot \limsup(s_n)$.

**Opgave 12.6c** Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en $k \in \mathbb{R}$ met $k < 0$. Dan geldt dat $\limsup(ks_n) = k \cdot \liminf(s_n)$.

**Opgave 12.7c** Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zodat $\limsup(s_n) = +\infty$ en $k \in \mathbb{R}$ zodat $k > 0$, dan geldt dat $\limsup(k \cdot s_n) = +\infty$.

**Opgave 12.9a** Zij $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zodat $\lim_{n\to\infty}(s_n) = +\infty$ en $\liminf(t_n) > 0$, dan geldt dat $\limsup(s_nt_n) = +\infty$.

**Opgave 12.9a** Zij $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zodat $\limsup(s_n) = +\infty$ en $\liminf(t_n) > 0$, dan geldt dat $\limsup(s_nt_n) = +\infty$.

## 2.6 Deelrijen

**Wat is een deelrij?** Stel $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is een deelrij. Dan is een deelrij van de vorm $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ waar er voor elke $k$ een getal $n_k \in \mathbb{N}$ is zodat $t_k = s_{n_k}$en $n_k < n_{k+1}$. De rij $t_k$ is dus een rij met een deel van de elementen van $s_n$ in dezelfde volgorde als in $s_n$.

**Deelrijen met verzamelingen** Zij $N$ een verzameling met $N \subseteq \mathbb{N}$, en $\sigma : \mathbb{Z} \to N$ zodat $\sigma$ een oplopende bijectieve functie is. Als $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dan is de deelrij $t_k$ (ook wel $t(k)$) de functie $(s \circ \sigma)(k)$.

**Stellingen over deelrijen** De volgende stellingen zijn waar over deelrijen:

**Limieten van deelrijen** Als $t \in \mathbb{R}$ dan is er een deelrij van $s_n$ die naar $t$ convergeert dan en slechts dan als de verzameling $\{n \in \mathbb{N} : |s_n - t| < \epsilon\}$ oneindig groot is voor elke $\epsilon > 0$. *Het bewijs hiervoor staat op bladzijden* 68-69.

**Boven onbegrensde deelrij en deelrijlimieten** Als een rij $s_n$ geen bovengrens heeft, dan is er een deelrij met limiet $+\infty$. *Het bewijs staat op pagina 69.*

**Onder onbegrensde deelrij en deelrijlimieten** Als een rij $s_n$ geen ondergrens heeft, dan is er een deelrij met limiet $-\infty$. *Het bewijs gaat hetzelfde als het bewijs van de stelling hiervoor.*

**Limiet van een rij en deelrijen** Als $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergeert naar $s$, dan convergeert elke deelrij van $s_n$ naar $s$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 71.

**Monotone deelrijen** Elke rij $s_n$ heeft een monotone deelrij. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 71.

**Bolzano-Weierstrass** Elke begrensde rij heeft een convergente deelrij. *Het bewijs hiervoor staat in appendix C.*

**Deelrijlimieten** Een deelrijlimiet is een getal $x \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat er een deelrij $s_{n_j}$ is met $\lim_{j\to\infty}(s_{n_j}) = x$.

**Stellingen over deelrijlimieten** De volgende stellingen over deelrijen zijn waar:

**Deelrijlimieten en lim inf en lim sup** Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Er bestaan monotone deelrijen $s_{n_m}$ en $s_{k_j}$ met $\lim_{n\to\infty}(s_{n_m}) = \limsup(s_n)$ en $\lim_{n\to\infty}(s_{k_j}) = \liminf(s_n)$.

**Grootte van deelrijlimietverzameling** Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en $S$ de verzameling deelrijlimieten zijn. Dan geldt dat $s \neq \emptyset$.

**Uitersten van deelrijlimietverzameling** Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en $S$ de verzameling deelrijlimieten zijn. Dan geldt $\sup(S) = \limsup(s_n)$ en $\inf(S) = \liminf(s_n)$.

**Limieten en deelrijlimieten** Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en $S$ de verzameling deelrijlimieten zijn. Als $\lim_{n\to\infty}(s_N)$ bestaat dan en slechts dan als $S$ precies één element heeft, namelijk $S = \{\lim_{n\to\infty}(s_n)\}$.

**Rijen in verzameling van deelrijlimieten** Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en $S$ de verzameling deelrijlimieten zijn. Laat $t_n \in (S \cap \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Als $\lim_{n\to\infty}(t_n) = t$, dan geldt dat $t \in S$.

# 3 Continue functies

## 3.1 Continuïteit

**Wat is continuïteit** Laat $A \subseteq \mathbb{R}$ Een functie $f : A \to \mathbb{R}$ is continu op $x_0$ dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodat voor elke $x \in \text{dom}(f)$ geldt dat als $|x - x_0| < \delta$ dan $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

**Continuïteit met rijen** Een functie $f : A \to \mathbb{R}$ is ook continu dan en slechts dan als voor elk rijtje $x_n \in \text{dom}(f)^{\mathbb{N}}$ met $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ geldt dat $\lim_{n\to\infty}(f(x_n)) = f(x_0)$.

**Continuïteit op een interval** Zij $f$ een functie zodat $\text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Dan is $f$ continu op $S \subseteq \text{dom}(f)$ dan en slechts dan als voor elke $x_0 \in S$ en $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ zodat voor elke $x \in \text{dom}(f)$ geldt dat als $|x - x_0| < \delta$ dan ook $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

**Continuïteit bewijzen** Een bewijs van continuïteit op een $x_0$ volgt de volgende stappen:

1. Zij $\epsilon > 0$.
2. Laat $\delta$ een combinatie zijn van $\epsilon$ en $x_0$.
3. Laat $x \in \text{dom}(f)$.
4. Aantonen dat als $|x - x_0| < \delta$ dan ook $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

**$\delta$ vinden** Om een $\delta$ te vinden voor elke $\epsilon$ en een $x_0$ is dit een handig stappenplan:

1. Probeer eerst $|f(x) - f(x_0)|$ om te schrijven tot $|x - x_0| \cdot g(x, x_0)$, waar $g$ een functie is met $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. Probeer vervolgens $g(x, x_0)$ af te schatten tot iets dat niet afhankelijk is van $x$ volgens de afschatregels voor rijtjes.
3. Laat $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de afgeschatte versie van $g(x, x_0)$ zijn.
4. Dan geldt dus dat $|f(x) - f(x_0)| < |x - x_0| \cdot g(x, x_0) < |x - x_0| \cdot g(x_0)$.
5. In het bewijs laat dan $\epsilon > 0$ en kies dan $\delta = \frac{\epsilon}{g(x_0)}$.
6. Als $|x-x_0| < \delta$, dan geldt dus $|x-x_0| < \frac{\epsilon}{g(x_0})$. Ga nu het afschat proces omgekeerd opschrijven. Door de keuzes die we gemaakt in het afschatproces hebben volgt dus $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

**Stellingen over continuïteit** De volgende stellingen over continue functies zijn waar:

**Absolute waarden, product met getallen en continuïteit** Zij $f$ een functie die continu is op $x_0$ met $\text{dom}(f) \in \mathbb{R}$. Dan geldt dat de functies $|f|$ en $k \cdot f$ met $k \in \mathbb{R}$ ook continu zijn op $x_0$. *Het bewijs staat op pagina* 128.

**Combineren van functies** Zij $f, g$ functies die continu zijn in $x_0$. Dan geldt dat de volgende functies ook continu zijn in $x_0$:

- $f + g$.
- $f \cdot g$.
- $\frac{f}{g}$ met $g(x_0) \neq 0$.

*Het bewijs hiervoor staat op de bladzijde* 129.

**Samenstellen van functies** Zij $f, g$ functies die continu zijn op $x_0$, dan geldt dat $f \circ g$ ook continu is op $x_0$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 129.

**Eigenschappen van continue functies** Voor functies die continu zijn op een bepaald interval gelden de volgende stellingen:

**Continuïteit, maxima en minima** Laat $f$ een continue functie zijn op $[a, b]$ dan is $f$ een begrensde functie en voor alle $x \in [a, b]$ zijn er $x_0, y_0 \in [a, b]$ zodat $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$, oftewel $f$ bereikt haar minimum en maximum op het interval $[a, b]$. *Het bewijs hiervoor staat in appendix D.*

**Tussenwaardestelling** Als de functie $f$ continu is op een interval $I$, dan geldt dat wanneer $a < b$ voor een $a, b \in I$ en $f(a) < y < f(b)$ of $f(b) < y < f(a)$, dan is er tenminste één $x \in (a, b)$ zodat $f(x) = y$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 134.

**Gevolg van de tussenwaardestelling** Als een functie $f$ continu is op een interval $I$, dan is $f(I)$ ook een interval. *Het bewijs staat op bladzijde* 135.

**Inverse en continuïteit** Zij $f$ een strikt stijgende continue functie, dan is $f^{-1}$ ook een continue functie. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 137.

**Stijgende functie, intervallen en continue functies** Zij $g$ een strikt stijgende functie op interval $J$. Als $g(J)$ een interval is, dan is $g$ continu op $J$. *Het bewijs staat op pagina* 137.

**Continuïteit en bijectiviteit** Zij $f$ een continuë bijectieve functie op een interval $I$. Dan is $f$ strikt stijgend of strikt dalend. *Het bewijs staat op pagina* 138.

**Stellingen uit de opgaven** De volgende stellingen worden bewezen in de opgaven van paragraaf 17 en 18.

**Opgave 17.5b** Elke polynoom $p$ is continu.

## 3.2 Uniforme continuïteit

**Wat is uniforme continuïteit** Zij $S$ een verzameling zodat $S \subseteq \mathbb{R}$. Een functie $f : S \to \mathbb{R}$ is uniform continu dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ zodat voor elke $x_0, x \in S$ geldt dat als $|x_0 - x| < \delta$ dan $|f(x_0) - f(x)| < \epsilon$.

**Uniforme continuïteit vs continuïteit** Het verschil tussen de definitie van continuïteit en die van uniforme continuïteit is de plek waar de $x_0$ gedefiniëerd wordt. Bij uniforme continuïteit wordt de $x_0$ gedefiniëerd na de $\delta$, en bij "gewone"continuïteit wordt de $x_0$ gedefiniëerd voor de $\delta$. Dus $\delta$ kan ook afhangen van $x_0$ bij "gewone"continuïteit, wat niet kan bij uniforme continuïteit.

**Stellingen over uniforme continuïteit** De volgende stellingen zijn waar over uniforme continuïteit:

**Continu op een interval en uniforme continuïteit** Als een functie $f$ continu is op een gesloten interval $[a, b]$, dan is $f$ uniform continu op $[a, b]$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 143.

**Uniform continue functies en Cauchy rijen** Zij $f$ een uniform continue functie op een verzameling $S \in \text{dom}(f)$ en $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zodat $s_n$ ee Cauchy-rij is. Dan geldt dat $(f(s_n))$ ook een Cauchy-rij is. *Het bewijs staat op pagina* 146.

**Uitbreiden van domein** Zij $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ een functie. Dan kan $f$ uitgebreid worden naar een continue functie $\widetilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ dan en slechts dan als $f$ uniform continu is op $(a, b)$. *Het bewijs staat op bladzijde* 148-149.

# 4 Appendices

## 4.1 Appendix A: Product van twee rijen

**Te bewijzen** Zij $s_n, t_n \in \mathbb{R}$. Als $\lim_{n\to\infty}(s_n) = s$ en $\lim_{n\to\infty}(t_n) = t$ dan geldt dat $\lim_{n\to\infty}(s_n t_n) = st$.

*Bewijs.* Zij $\epsilon > 0$. Omdat $s_n$ convergeert is er een $M > 0$ zodat $|s_n| < M$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Omdat $\lim_{n\to\infty}(t_n) = t$ is er een $N_1$ zodat $|t_n - t| < \frac{\epsilon}{2M}$. Dit is omdat ook $\frac{\epsilon}{2M} > 0$ en $|t_n - t|$ kan willekeurig klein worden, dus ook kleiner dan $\frac{\epsilon}{2M}$.

Ook weten we dat er een $N_2$ is zodat $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2(|t|+1)}$. De redenering daarvoor is hetzelfde als de redenering voor $t_n$.

Laat nu $N = \max\{N_1, N_2\}$. Dan geldt dat als $n > N$ dan zowel $|t_n - t| < \frac{\epsilon}{2M}$ als $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2(|t|+1)}$ als $n > N$.

We weten dat $|t_n - t| < \frac{\epsilon}{2M}$. Daarom geldt ook dat $|s_n||t_n - t| \leq |s_n| \cdot \frac{\epsilon}{2M}$. Merk op dat "$\leq$"niet omgedraaid wordt omdat $|s_n| \geq 0$. En omdat $|s_n| < M$ voor elke $n$ ($M$ is een bovengrens), geldt dat $|s_n| \cdot \frac{\epsilon}{2M} < M \cdot \frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2}$ dus ook dat $|s_n||t_n - t| < \frac{\epsilon}{2}$.

Ook weten we dat $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2(|t|+1)}$, waaruit volgt dat $|t||s_n - s| < |t| \cdot \frac{\epsilon}{2(|t|+1)}$. Omdat $\frac{\epsilon}{2(|t|+1)} > \frac{\epsilon}{2(|t|)}$ geldt dat $|t||s_n - s| < |t| \cdot \frac{\epsilon}{2(|t|)}$ dus dat $|t||s_n - s| < \frac{\epsilon}{2}$.

Omdat $|s_n||t_n - t| < \frac{\epsilon}{2}$ en $|t||s_n - s| < \frac{\epsilon}{2}$ geldt ook dat $|s_n||t_n - t| + |t||s_n - s| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Uit stellingen over het vermenigvuldigen van absolute waarden volgt
$|s_n||t_n - t| + |t||s_n - s| = |s_n t_n - s_n t| + |s_n t - st|$. Dus $|s_n t_n - s_n t| + |s_n t - st| < \epsilon$. Volgens de driehoeks-ongelijkheid geldt dan $|s_n t_n - s_n t + s_n t - st| \leq |s_n t_n - s_n t| + |s_n t - st|$.

Omdat $|s_n t_n - s_n t + s_n t - st| = |s_n t_n - st|$ en $|s_n t_n - s_n t| + |s_n t - st| < \epsilon$ geldt dat $|s_n t_n - st| < \epsilon$ als $n > N$ met $N = \max(N_1, N_2)$.

We hebben nu dus bewezen dat voor elke $\epsilon > 0$ er een $N$ bestaat, namelijk $\max(N_1, N_2)$, zodat voor elke $n > N$ geldt dat $|s_n t_n - st| < \epsilon$. Dit is wat we moesten bewijzen.

□

## 4.2 Appendix B: Cauchy en convergentie

**Te bewijzen** Een rij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. De rij $s_n$ convergeert dan en slechts dan als $s_n$ Cauchy is.

Voor dit bewijs tonen we aan dat een Cauchy rij convergeert, het bewijs de andere kant op is gegeven in een andere stelling.

**Bewijs dat een Cauchy rij convergeert**

Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en $s_n$ is Cauchy. Dan geldt dus dat er voor elke $\epsilon > 0$ een $N$ bestaat zodat voor elke $m, n > N$ geldt dat $|s_n - s_m| < \epsilon$.

Omdat $|s_n - s_m| < \epsilon$ waar is, is ook $-\epsilon < s_n - s_m < \epsilon$ waar, dus $s_n < s_m + \epsilon$. Dus is $s_m + \epsilon$ een bovengrens voor de verzameling $\{s_n : n > N\}$.

Omdat $\{s_n : n > N\}$ een bovengrens heeft heeft het dus ook een supremum, namelijk $\sup\{s_n : n > N\}$, we noemen dit supremum $v_N$.

Het supremum is altijd de kleinste bovengrens van een verzameling dus $v_N \leq s_m + \epsilon$. Maar dan geldt ook dat $v_N - \epsilon \leq s_m$, dus $v_N - \epsilon$ is een ondergrens van $s_m$. Dus geldt dat $s_m$ ook een infimum heeft, namelijk $v_N - \epsilon$.

Omdat het infimum de kleinste bovengrens is geldt dat $v_N - \epsilon \leq \inf\{s_m : m > N\}$. We noemen dit infimum $u_N$. Dus $v_N \leq u_N + \epsilon$.

Omdat $\limsup(s_n) \leq \sup\{s_n : n > N\}$ en $\liminf(s_n) + \epsilon \geq \inf\{s_n : n > N\} + \epsilon$ weten we dat $\limsup(s_n) \leq \sup\{s_n : n > N\} \leq \inf\{s_n : n > N\} + \epsilon \leq \liminf(s_n) + \epsilon$.

We hebben nu dus bewezen dat $\limsup(s_n) \leq \liminf(s_n) + \epsilon$ voor een willekeurige $\epsilon > 0$ als $s_n$ Cauchy is. Dus $\limsup(s_n) = \liminf(s_n)$.

We weten dat $\liminf(s_n) \leq \limsup(s_n)$ en $\limsup(s_n) \leq \liminf(s_n)$, dus moet wel gelden dat $\liminf(s_n) = \limsup(s_n)$.

Definieer nu $s$ als volgt $s := \limsup s_n = \liminf s_n$. Omdat $\liminf s_n = \limsup s_n$ waar is, geldt ook dat $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n) = s$, dus $s_n$ convergeert naar $s$.

We hebben nu dus bewezen dat als een rij $s_n$ Cauchy is,dat $s_n$ dan ook convergeert.

$\square$

## 4.3 Appendix C: Bolzano-Weierstrass

Deze appendix bevat twee bewijzen: namelijk dat elke rij een monotone deelrij heeft (1), en dat elke begrensde rij een convergente deelrij heeft (2).

**Bewijs van 1**

Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. De $n^e$ term van de rij is dominant als voor elke $m > n$ geldt dat $s_m < s_n$.

Er zijn nu twee verschillende mogelijkheden:

1. Er zijn oneindig veel dominante termen.
2. Er zijn eindig veel dominante termen.

Als 1 het geval is, laat dan de functie $(s \circ \sigma)(n)$ de $n^e$ dominante tern zijn van $s_n$. Dan is de deelrij $(s \circ \sigma)$ dus monotoon dalend, want elke term van $(s \circ \sigma)$ is dominant, dus groter dan alle daaropvolgende termen.

Als 2 het geval is dan is er dus een laatste dominante term. Oftewel een $N$, waar $s_N$ de laatste dominante term is, zodat voor elke $n > N$ geldt dat $s_n$ niet dominant is. Dus voor elke $n > N$ is er een $m > n$ zodat $s_n \leq s_m$.

Kies dan als $n_1$ het getal $N + 1$. Dan geldt dus dat er een $n_2 > n_1$ is zodat $s_1 \leq s_2$. Ook $s_{n_2}$ is niet dominant dus er is een $n_3 > n_2$ zodat $s_{n_2} \leq s_{n_3}$. Herhaal dit proces tot in het oneindige zodat je een rij krijgt $s_{n_k} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Dan geldt voor die rij dat $s_{n_i} \leq s_{n_j}$ als $i < j$, dus $s_{n_k}$ is een monotoon stijgende rij.

We hebben nu bewezen dat in zowel geval 1 als 2 de rij $s_n$ een monotone deelrij heeft. Dus $s_n$ heeft altijd een monotone deelrij. Dit is wat we moesten bewijzen.

$\square$

**Bewijs van 2**

Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zodat $s_n$ begrensd is. We weten dat $s_n$ begrensd is, dus elke deelrij van $s_n$ is ook begrensd.

Ook weten we dat $s_n$ een monotone deelrij $s_{n_k}$ heeft, die dus ook begrensd is. De rij $s_{n_k}$ is dus een monotone begrensde deelrij, dus $s_{n_k}$ convergeert.

Dus elke begrensde rij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ heeft een convergente deelrij, namelijk de monotone deelrij $s_{n_k}$. Dit is wat we moesten bewijzen.

$\square$

### 4.4 Appendix D: Continue functies, minima en maxima

Zij $f$ een continue functie op het interval $[a, b]$, dan is $f$ een begrensde functie en $f$ neemt haar maximum en minimum aan, dus er zijn een $x_0, y_0 \in [a, b]$ zodat voor elke $x \in [a, b]$ geldt dat $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$. We bewijzen eerst dat $f$ begrensd is (1) en vervolgens dat $f$ haar maximum en minimum aanneemt (2).

**Bewijs van 1**

Stel $f$ is een continue onbegrensde functie is op $[a, b]$, dan geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$ dat er een rij $x_n \in [a, b]$ bestaat zodat $|f(x_n)| > n$.

Volgens Bolzano-Weierstrass heeft $(x_{n_k})$ dan een deelrij die convergeert naar een reëel getal $x_0$ omdat $x_n$ begrensd is.

Dus $\lim\limits_{k\to\infty}(f(x_{n_k})) = f(\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k}) = f(x_0)$, maar we hebben ook dat $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)) = +\infty$ omdat de rij $f(x_n)$ boven onbegrensd is. Maar $f(x_0) \in \mathbb{R}$ en $\infty \notin \mathbb{R}$

Dit is een tegenspraak, dus moet wel gelden dat $f(x)$ begrensd is.

$\square$

**Bewijs van 2**

We weten dat $f(x)$ begrensd is dus er is een $M := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ die eindig is.

Omdat $M$ het supremum is geldt voor dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ er een $y_n \in [a, b]$ is zodat $M < \frac{1}{n} < f(y_n) \leq M$ omdat $M$ de kleinste bovengrens is. Volgens het “Squeeze Lemma”geldt dan dat $\lim\limits_{n\to\infty}(f(y_n)) = M$.

Omdat $f(x)$ continu is geldt dat $\lim\limits_{n\to\infty}(f(y_n)) = f(\lim\limits_{n\to\infty}(y_n))$ en omdat $y_n \in [a, b]$ ook $y_0 := \lim\limits_{n\to\infty}(y_n) \in [a, b]$, dus er is een $y_0$ zodat $f$ op $y_0$ een maximum aan neent.

We weten dat $-\sup\{-f(x) : x \in [a, b]\} = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$. We kunnen op dezelfde manier als hiervoor het supremum van $-f(x)$ bepalen. En dan is er dus ook een $x_0$ zodat $-f(x_0)$ het supremum is van $-f(x)$. En dan is het minimum van $f$ de waarde $f(x_0)$.

Dus als $f(x)$ continu is op $[a, b]$ neemt deze haar minimum en maximum aan op $[a, b]$. Dit is wat we moesten bewijzen.

$\square$