Samenvatting Analyse op de Lijn

Jonas van der Schaaf

10 december 2019

Inhoudsopgave

1 Introductie

1.1 De verzameling $\mathbb{R}$

Algebraïsche eigenschappen De verzameling breuken $\mathbb{Q}$ heeft de volgende algebraïsche eigenschappen:

A1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ voor elke $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

A2. $a + b = b + a$ voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$.

A3. $a + 0 = 0$ voor alle $a \in \mathbb{Q}$.

A4. Voor elke $a \in \mathbb{Q}$ is er een $-a \in \mathbb{Q}$ zodat $a + (-a) = 0$

M1. $a(bc) = (ab)c$ voor elke $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

M2. $ab = ba$ voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$.

M3. $a \cdot 1 = a$ voor alle $a \in \mathbb{Q}$.

M4. Voor elke $a \in \mathbb{Q}$ met $a \neq 0$ is er een $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ zodat $a \cdot a^{-1} = 1$

De eigenschappen **A1** en **M1** zijn de *associatieve* eigenschappen van + en $\cdot$ en de eigenschappen **A2** en **M2** zijn de *commutatieve* eigenschappen van + en $\cdot$.

Consequenties van de veld eigenschappen De volgende eigenschappen volgen uit de algebraïsche eigenschappen van $\mathbb{Q}$:

1. Als $a + c = b + c$ dan geldt dat $a = b$.
2. $a \cdot 0 = 0$ voor alle $a \in \mathbb{Q}$.
3. $(-a)b = -ab$ voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$.
4. $(-a)(-b) = ab$ voor alle $a, b \in \mathbb{Q}$.
5. Als $ac = bc$ en $c \neq 0$ dan $a = b$.
6. Als $ab = 0$ dan geldt dat $a = 0$ of $b = 0$.

De bewijzen van deze stellingen staan op pagina 16 van het boek.

Ordening Ook heeft $\mathbb{Q}$ een ordening "$\leq$"die aan de volgende eigenschappen voldoet:

O1. Als $a, b \in \mathbb{Q}$ dan geldt dat $a \leq b$ of $b \leq a$.

O2. Als $a \leq b$ en $b \leq a$ dan $a = b$.

O3. Als $a \leq b$ en $b \leq c$ dan $a \leq c$.

O4. Als $a \leq b$ dan geldt ook dat $a + c \leq b + c$

O5. Als $a \leq b$ en $c \geq 0$, dan ook $ac \leq bc$.

De eigenschap **O3** heet de *transitieve* eigenschap. Een veld met een ordening die voldoet aan **O1** tot en met **O5** heet een geordend veld.

Consequenties van de ordening "$\leq$"

1. Als $a \leq b$ dan $-b \leq -a$.
2. Als $a \leq b$ en $c \leq 0$ dan $bc \leq ac$.
3. Als $0 \leq a$ en $0 \leq b$ dan $0 \leq ab$.
4. $0 \leq a^2$ voor elke $a \in \mathbb{Q}$.

5. $0 < 1$.
6. Als $0 < a$ dan ook $0 < a^{-1}$.
7. Als $0 < a < b$ dan geldt $0 < b^{-1} < a^{-1}$.

Dit wordt bewezen op pagina 16-17 van het boek.

Absolute waarde De absolute waarde is gedefinieerd als volgt:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{als } a \geq 0 \\ -a & \text{als } a < 0 \end{cases}$$

Stellingen over de absolute waarde De volgende stellingen over de absolute waarde zijn waar:

1. $|a| \geq 0$.
2. $|ab| = |a| \cdot |b|$.
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Dit wordt bewezen op pagina 17-18 van het boek.

Afstand De afstand tussen twee getallen a, b is de $\text{dist}(a, b)$ wat gedefiniëerd is als:

$$\text{dist}(a, b) := |a - b|$$

Stellingen over de afstand De volgende stelling over afstand is waar:

Afstand tussen de som van getallen $\text{dist}(a, c) \leq \text{dist}(a, b) + \text{dist}(b, c)$.
Dit wordt bewezen op pagina 18 van het boek.

Stellingen uit opgaven De volgende handige stellingen worden bewezen in een opgave uit paragraaf 3:

Opgave 3.5a Voor elke $a, b \in \mathbb{R}$ geldt dat $|b| \leq a$ dan en slechts dan als $-a \leq b \leq a$.

Opgave 3.5b Voor elke $a, b \in \mathbb{R}$ geldt dat $||b| - |a|| \leq |b - a|$.

Opgave 3.6b Laat $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$, dan geldt dat $|\sum_{i=1}^{n} a_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|$

1.2 De compleetheid van $\mathbb{R}$

Maxima en minima Van een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}$ zijn het maximum en minimum als volgt gedefiniëerd:

Maximum $s_0 = \max(S)$ dan en slechts dan als voor elke $s \in S$ geldt dat $s \leq s_0$ en $s_0 \in S$.

Minimum $s_0 = \min(S)$ dan en slechts dan als voor elke $s \in S$ geldt dat $s \geq s_0$ en $s_0 \in S$.

Intervallen Een interval is een speciaal soort deelverzameling van $\mathbb{R}$, er zijn 4 verschillende intervallen:

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ dit heet een gesloten interval. $\min([a, b]) = a$ en $\max([a, b]) = b$.
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ dit heet een half gesloten interval. $\min([a, b)) = a$ en $\max([a, b))$ bestaat niet.
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ dit heet een half gesloten interval. $\min((a, b]) = a$ en $\max((a, b])$ bestaat niet.
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ dit heet een open interval. $\min((a, b))$ bestaat niet en $\max((a, b))$ bestaat niet.

Boven- en ondergrenzen Boven- en ondergrenzen zijn als volgt gedefiniëerd: Laat $S \subseteq \mathbb{R}$ dan geldt

Bovengrens Een getal M is een bovengrens van S als voor elke $s \in S$ geldt dat $s \leq M$. Als een verzameling een bovengrens heeft dan heet die verzameling boven begrensd.

Ondergrens Een getal m is een ondergrens van S als voor elke $s \in S$ geldt dat $s \geq m$. Als een verzameling een ondergrens heeft dan heet die verzameling onder begrensd.

Stellingen over boven- en ondergrenzen De volgende stelling wordt gegeven over bovengrenzen:

Intervallen en begrenzingen Als S boven en beneden begrensd is, dan zijn er twee getallen $m, M \in \mathbb{R}$ zodat $S \subseteq [m, M]$.

Suprema en infima Het supremum en infimum van een verzameling zijn als volgt gedefiniëerd:

Sumpremum $M = \sup(S)$ dan en slechts dan als voor elke $s \in S$ geldt dat $s \leq M$ en voor elke $M_1 < M$ geldt dat er een $s \in S$ is zodat $M_1 < s$. Dan is M de kleinste bovengrens van S.

Infimum $m = \inf(S)$ dan en slechts dan als voor elke $s \in S$ geldt dat $m \geq s$ en voor elke $m > m_1$ geldt dat er een $s \in S$ waarvoor geldt dat $s < m$. Dan is m de grootste ondergrens van S.

Stellingen In paragraaf 4 van hoofdstuk 1 staan de volgende stellingen:

Volledigheidsaxioma van $\mathbb{R}$ Het volledgigheidsaxioma luidt als volgt: Voor elke $S \subseteq \mathbb{R}$ met $S \neq \emptyset$ met een bovengrens is er een $M \in \mathbb{R}$ zodat $M = \sup(S)$. *Dit is een axioma, er is geen bewijs.*

"Omgekeerde" volledigheids "axioma" Voor elke $S \in \mathbb{R}$ met $S \neq \emptyset$ met een ondergrens is er een $m \in \mathbb{R}$ zodat $m = \inf(S)$. Het is geen echt axioma want het volgt uit het volledigheidsaxioma. *Het bewijs staat op pagina 24-25 van het boek.*

Archimedische eigenschap Zij $a, b \in \mathbb{R}^+$ met $a < b$. Dan geldt dat er een $n \in \mathbb{N}$ zodat $na > b$. *Het bewijs staat op pagina 25 van het boek.*

De dichtheid van $\mathbb{Q}$ Als $a, b \in \mathbb{R}$ en $a < b$ dan is er een $r \in \mathbb{Q}$ zodat $a < r < b$. *Het bewijs staat op pagina 25-26 van het boek.*

Stellingen uit opgaven De volgende stellingen worden bewezen in een opgave uit paragraaf 4:

Opgave 4.7a Laat S en T verzamelingen zijn met $S, T \subseteq \mathbb{R}$ zodat $S \subseteq T$. Dan geldt dat $\inf(T) \leq \inf(S) \leq \sup(S) \leq \sup(T)$.

Opgave 4.7b Laat S en T verzamelingen zijn met met $S, T \subseteq \mathbb{R}$. Dan geldt dat $\sup(S \cup T) = \max\{\sup(S), \sup(T)\}$.

Opgave 4.8b Laat S en T verzamelingen zijn zodat voor elke $s \in S$ en $t \in T$ geldt dat $s \leq t$. Dan geldt dat $\sup(S) \leq \inf(T)$.

Opgave 4.9 Laat S een verzameling zijn zodat $S \subseteq \mathbb{R}$, dan geldt dat $\inf(S) = -\sup(-S)$.

Opgave 4.14a Laat A en B verzamelingen zijn met $A, B \subseteq \mathbb{R}$ en $A+B = \{a+b : a \in A \text{ en } b \in B\}$. Dan geldt dat $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Opgave 4.14b Laat A en B verzamelingen zijn met $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Dan geldt dat $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$.

2 Rijen

2.1 Limieten van rijen

Wat is een rij? Een rij is een functie $s : A \to B$ waar $A = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq M\}$. Een rij wordt vaak opgeschreven als s_n in plaats van $s(n)$, andere notaties zijn $s_{n=m}^{\infty}$ of $(s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, ...)$. Bij Analyse op de Lijn is een rijtje vaak een functie $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dus voor zo'n rijtje s_n geldt dat $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Het limiet van een rijtje Een rijtje (s_n) convergeert naar het getal $s \in \mathbb{R}$ dan en slechts dan als er voor elke $\epsilon > 0$ een N is zodat voor elke $n > N$ geldt dat $|s_n - s| < \epsilon$. Dit is ook te schrijven als $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n) = s$. Als er geen $s \in \mathbb{R}$ is zodat s_n naar s convergeert, dan divergeert s_n.

Het bewijzen van een limiet Een formeel bewijs van het limiet van een rij s_n volgt de volgende stappen:

1. De definitie van de rij s_n.
2. Het definiëren van $\epsilon > 0$.
3. Het kiezen van N op basis van ϵ.
4. Het aantonen dat $|s_n - s| < \epsilon$ als $n > N$.

Afschatten Vaak wordt een N gevonden met behulp van afschatten van $|s_n - s|$. Afschatten houdt in dat er een rijtje t_n gekozen wordt zodat $|s_n - s| < |t_n|$ en vervolgens wordt er aangetoond dat er een N is zodat voor elke $n > N$ geldt $|t_n| < \epsilon$, dus geldt ook ook dat $|s_n - s| < \epsilon$.

Dit zijn enkele trucs voor het afschatten:

- Als $|s_n - s|$ een breuk is van de vorm $|\frac{a_n}{b_n}|$, waar $a_n, b_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dan geldt dat $|\frac{a_n}{b_n}| < |\frac{a_n}{c_n}|$ als $0 < |c_n| < |b_n|$. Als het mogelijk is om een N te vinden zodat voor elke $n > N$ geldt dat $|\frac{a_n}{c_n}| < \epsilon$ voor elke ϵ, dan geldt dus ook dat $|s_n - s| = |\frac{a_n}{b_n}| < \epsilon$, dus dan convergeert s_n naar s.
- Als $|s_n - s|$ een breuk is van de vorm $|\frac{a_n}{b_n}|$, waar $a_n, b_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dan geldt dat $|\frac{c_n}{b_n}| < |\frac{a_n}{b_n}|$ als $|a_n| < |c_n|$. Als het dan mogelijk is om een N te vinden zodat voor elke $n > N$ geldt dat $|\frac{c_n}{b_n}| < \epsilon$ voor elke ϵ, dan geldt dus ook dat $|s_n - s| = |\frac{a_n}{b_n}| < \epsilon$, dus dan convergeert s_n naar s.

- Als een rijtje s_n van de vorm is $s_n = \sin(a_n) \cdot b_n$ met $a_n, b_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dan geldt dat $|s_n| < |b_n|$ omdat $-1 < sin(a_n) < 1$. Dus als er een N is zodat voor elke $N < n$ geldt dat $|b_n| < \epsilon$ voor elke $\epsilon > 0$, dan geldt ook $|s_n| < \epsilon$.

Stellingen uit de opgaven De volgende stellingen worden bewezen in paragraaf 8:

Opgave 8.5a Als a_n, b_n, s_n rijen zijn en voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt $a_n \leq s_n \leq b_n$ en $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = s$, dan geldt ook $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n) = s$.

Opgave 8.9a Zij s_n een rij. Als $s_n \geq a$ voor een $a \in \mathbb{R}$ voor alle behalve een eindig aantal $n \in \mathbb{N}$, dan $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n) \geq a$.

Opgave 8.9b Zij s_n een rij. Als $s_n \leq a$ voor een $a \in \mathbb{R}$ voor alle behalve een eindig aantal $n \in \mathbb{N}$, dan $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n) \leq a$.

Opgave 8.9c Zij s_n een rij. Als $s_n \in [a, b]$ voor een $a, b \in \mathbb{R}$ en voor alle behalve een eindig aantal $n \in \mathbb{N}$, dan $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n) \in [a, b]$.

2.2 Limietstellingen voor rijen

Begrensde rijen Een rij s_n is begrensd als er een M bestaat zodat $|s_n| \leq M$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Convergent en begrensd Als s_n een convergente rij is, dan is er een M zodat $|s_n| \leq M$. Als een rij convergeert dan is deze begrensd. *Het bewijs hiervoor staat op bladzijde* 45 *van het boek.*

Rekenregels voor limieten Voor limieten gelden bepaalde rekenregels. De volgende regels gelden **alleen** als de rijtjes s_n en t_n convergeren.

De wortel van een rij Als $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n) = s$ en s_n is een rij met $s_n \in \mathbb{R}^+$ voor elke $n \in \mathbb{N}$. Dan geldt ook dat $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{s_n}) = \sqrt{s}$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 42 *van het boek.*

Product van een getal en een limiet De limiet $\lim\limits_{n\to\infty}(k \cdot s_n) = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(s_n)$ als s_n convergeert. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 46 *van het boek.*

Som van limieten De limiet $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n + t_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(t_n)$ als s_n en t_n convergeren. *Het bewijs hiervoor staat op bladzijde 46 van het boek.*

Product van limieten De limiet $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n \cdot t_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n) \cdot \lim\limits_{n\to\infty}(t_n)$ als s_n en t_n convergeren. *Het uitgewerkte bewijs hiervoor staat in appendix A.*

Het limiet van de breuk van twee rijen De limiet $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{t_n}{s_n}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(t_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(s_n)}$ als s_n en t_n convergeren en als $s_n \neq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ en $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n) \neq 0$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 47 *en* 48 *van het boek.*

Enkele limieten De limieten die hieronder staan zijn waar:

- De limiet $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^p}) = 0$ als $p > 0$.
- De limiet $\lim_{n\to\infty}(a^n) = 0$ als $|a| < 1$.
- De limiet $\lim_{n\to\infty}(n^{\frac{1}{n}}) = 1$.
- De limiet $\lim_{n\to\infty}(a^{\frac{1}{n}}) = 1$ voor $a > 0$.

De bewijzen hiervoor staan op pagina 48-49 van het boek.

Limieten en oneindig Als een limiet niet convergeert, dan divergeert deze. Maar soms divergeert een rij naar niks en soms naar $+\infty$ of $-\infty$.

Divergeren naar oneindig Een rij s_n divergeert naar oneindig dan en slechts dan als er voor elke $M > 0$ een N is zodat voor elke $N < n$ geldt dat $M < s_n$. Dit wordt opgeschreven als $\lim_{n\to\infty}(s_n) = +\infty$.

Een rij s_n divergeert naar $-\infty$ dan en slechts dan als er voor elke $M < 0$ een N is zodat voor elke $N < n$ geldt dat $s_n < M$. Dit wordt opgeschreven als $\lim_{n\to\infty}(s_n) = -\infty$.

Een rij s_n heeft een limiet als s_n convergeert of als s_n divergeert naar $+\infty$ of $-\infty$.

Rekenregels voor limieten naar $\pm\infty$ Als een rijtje divergeert naar $\pm\infty$ dan kunnen de eerder genoemde rekenregels niet gebruikt worden, de volgende regels wel.

Het product van twee rijen Zij $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ met $\lim_{n\to\infty}(s_n) = +\infty$ en $\lim_{n\to\infty}(t_n) > 0$ (t_n kan convergeren of divergeren naar $+\infty$). Dan geldt dat $\lim_{n\to\infty}(s_n t_n) = +\infty$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 52-53.

Limiet van de rij $\frac{1}{s_n}$ Zij s_n een rij met $s_n > 0$. Dan geldt $\lim_{n\to\infty}(s_n) = +\infty$ dan en slechts dan als $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{s_n}) = 0$. *Het bewijs staat op pagina* 53-54.

Stellingen uit de opgaven De volgende stellingen worden bewezen in paragraaf 9:

Opgave 9.9c Zij $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zodat er een N_0 is zodat $s_n \leq t_n$ voor elke $n > N_0$. Als s_n en $t)n$ convergeren dan geldt $\lim_{n\to\infty}(s_n) \leq \lim_{n\to\infty}(t_n)$.

Opgave 9.10a Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ met $\lim_{n\to\infty}(s_n) = +\infty$ en $k > 0$. Dan geldt dat $\lim_{n\to\infty}(ks_n) = +\infty$.

Opgave 9.10c Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ met $\lim_{n\to\infty}(s_n) = +\infty$ en $k < 0$. Dan geldt dat $\lim_{n\to\infty}(ks_n) = -\infty$.

Opgave 9.11c Zij $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ met $\lim_{n\to\infty}(s_n) = +\infty$ en t_n is begrensd. Dan geldt dat $\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = +\infty$.

2.3 Monotone rijen

Wat is een monotone rij? Een rij is monotoon als het één van de volgende twee is:

Monotoon stijgend Een rij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ is monotoon stijgend als $s_n \leq s_{n+1}$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Monotoon dalend De rij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ is monotoon dalend als $s_{n+1} \leq s_n$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Stellingen over monotoniciteit De volgende stellingen over monotone rijen zijn waar:

Gebonden monotone rijen Elke begrensde monotone rij convergeert. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 57 *van het boek.*

Onbegrense monotone rijen Elke onbegrensde monotone rij divergeert naar $\pm\infty$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 59.

Limieten van monotone rijen Voor elke monotone rij s_n geldt dat s_n convergeert of divergeert naar $\pm\infty$.

2.4 Cauchy rijen

Cauchy rijen Een rij is Cauchy dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ er een getal N bestaat zodat voor elke $m, n > N$ geldt dat $|s_n - s_m| < \epsilon$.

Convergentie en Cauchy De volgende stellingen zijn waar over de convergentie en het Cauchy zijn van een rij.

Convergente rij is Cauchy Als een rij s_n convergeert, dan is de rij ook Cauchy. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 63.

Begrensdheid en Cauchy Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Als s_n Cauchy is, dan is deze ook begrensd. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 63.

Cauchy rij is convergent Als een rij s_n Cauchy is, dan convergeert deze. *Het bewijs hiervoor staat in appendix B.*

2.5 lim sup en lim inf

Wat zijn de lim sup en lim inf De lim sup en lim inf zijn als volgt gedefiniëerd:

De lim sup Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Dan geldt: $\limsup(s_n) := \lim_{N \to \infty} \sup\{s_n : n > N\}$.

De lim inf Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ Dan geldt: $\liminf s_n := \lim_{N \to \infty} \inf\{s_n : n > N\}$.

Stellingen over de lim inf en lim sup De volgende stellingen gelden over de lim sup en de lim inf.

lim en lim sup en lim inf Als $\lim_{n \to \infty} (s_n) = s$, dan geldt dat $\liminf(s_n) = \limsup(s_n) = s$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 61-62.

lim sup, lim inf en lim Als $\limsup(s_n) = \limsup(s_n) = s$ dan geldt ook dat $\lim_{n \to \infty} (s_n)$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 62.

Product van rijen en lim sup Zij $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ waar $\lim_{n\to\infty}(s_n) = s$. Dan geldt dat $\limsup(s_n t_n) = s \limsup(t_n)$. *Het bewijs staat op pagina's* 79.

Verhouding tussen elementen van een rij Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Dan geldt $\liminf |\frac{s_{n+1}}{s_n}| \leq \liminf |s_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup |s_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup |\frac{s_{n+1}}{s_n}|$. *Het bewijs voor deze stelling staat op pagina* 79-80.

Stellingen uit de opgaven De volgende stellingen worden bewezen in paragraaf 10 en 12:

Opgave 12.4 Zij $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dan geldt dat $\limsup(s_n + t_n) \leq \limsup(s_n) + \limsup(t_n)$.

Opgave 12.6a Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en $k \in \mathbb{R}$ met $k > 0$. Dan geldt dat $\limsup(ks_n) = k \cdot \limsup(s_n)$.

Opgave 12.6c Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en $k \in \mathbb{R}$ met $k < 0$. Dan geldt dat $\limsup(ks_n) = k \cdot \liminf(s_n)$.

Opgave 12.7c Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zodat $\limsup(s_n) = +\infty$ en $k \in \mathbb{R}$ zodat $k > 0$, dan geldt dat $\limsup(k \cdot s_n) = +\infty$.

Opgave 12.9a Zij $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zodat $\lim_{n\to\infty}(s_n) = +\infty$ en $\liminf(t_n) > 0$, dan geldt dat $\limsup(s_n t_n) = +\infty$.

Opgave 12.9a Zij $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zodat $\limsup(s_n) = +\infty$ en $\liminf(t_n) > 0$, dan geldt dat $\limsup(s_n t_n) = +\infty$.

2.6 Deelrijen

Wat is een deelrij? Stel $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is een deelrij. Dan is een deelrij van de vorm $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ waar er voor elke k een getal $n_k \in \mathbb{N}$ is zodat $t_k = s_{n_k}$en $n_k < n_{k+1}$. De rij t_k is dus een rij met een deel van de elementen van s_n in dezelfde volgorde als in s_n.

Deelrijen met verzamelingen Zij N een verzameling met $N \subseteq \mathbb{N}$, en $\sigma : \mathbb{Z} \to N$ zodat σ een oplopende bijectieve functie is. Als $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dan is de deelrij t_k (ook wel $t(k)$) de functie $(s \circ \sigma)(k)$.

Stellingen over deelrijen De volgende stellingen zijn waar over deelrijen:

Limieten van deelrijen Als $t \in \mathbb{R}$ dan is er een deelrij van s_n die naar t convergeert dan en slechts dan als de verzameling $\{n \in \mathbb{N} : |s_n - t| < \epsilon\}$ oneindig groot is voor elke $\epsilon > 0$. *Het bewijs hiervoor staat op bladzijden* 68-69.

Boven onbegrensde deelrij en deelrijlimieten Als een rij s_n geen bovengrens heeft, dan is er een deelrij met limiet $+\infty$. *Het bewijs staat op pagina 69.*

Onder onbegrensde deelrij en deelrijlimieten Als een rij s_n geen ondergrens heeft, dan is er een deelrij met limiet $-\infty$. *Het bewijs gaat hetzelfde als het bewijs van de stelling hiervoor.*

Limiet van een rij en deelrijen Als $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergeert naar s, dan convergeert elke deelrij van s_n naar s. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 71.

Monotone deelrijen Elke rij s_n heeft een monotone deelrij. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 71.

Bolzano-Weierstrass Elke begrensde rij heeft een convergente deelrij. *Het bewijs hiervoor staat in appendix C.*

Deelrijlimieten Een deelrijlimiet is een getal $x \in \mathbb{R}$ waarvoor geldt dat er een deelrij s_{n_j} is met $\lim\limits_{j\to\infty}(s_{n_j}) = x$.

Stellingen over deelrijlimieten De volgende stellingen over deelrijen zijn waar:

Deelrijlimieten en lim inf en lim sup Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Er bestaan monotone deelrijen s_{n_m} en s_{k_j} met $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{n_m}) = \limsup(s_n)$ en $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{k_j}) = \liminf(s_n)$.

Grootte van deelrijlimietverzameling Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en S de verzameling deelrijlimieten zijn. Dan geldt dat $s \neq \emptyset$.

Uitersten van deelrijlimietverzameling Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en S de verzameling deelrijlimieten zijn. Dan geldt $\sup(S) = \limsup(s_n)$ en $\inf(S) = \liminf(s_n)$.

Limieten en deelrijlimieten Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en S de verzameling deelrijlimieten zijn. Als $\lim\limits_{n\to\infty}(s_N)$ bestaat dan en slechts dan als S precies één element heeft, namelijk $S = \{\lim\limits_{n\to\infty}(s_n)\}$.

Rijen in verzameling van deelrijlimieten Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en S de verzameling deelrijlimieten zijn. Laat $t_n \in (S \cap \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. Als $\lim\limits_{n\to\infty}(t_n) = t$, dan geldt dat $t \in S$.

3 Continuiteit en limieten

3.1 Continuïteit

Wat is continuïteit Laat $A \subseteq \mathbb{R}$ Een functie $f : A \to \mathbb{R}$ is continu op x_0 dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ bestaat zodat voor elke $x \in \mathrm{dom}(f)$ geldt dat als $|x - x_0| < \delta$ dan $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Continuïteit met rijen Een functie $f : A \to \mathbb{R}$ is ook continu dan en slechts dan als voor elk rijtje $x_n \in \mathrm{dom}(f)^{\mathbb{N}}$ met $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ geldt dat $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)) = f(x_0)$.

Continuïteit op een interval Zij f een functie zodat $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$. Dan is f continu op $S \subseteq \mathrm{dom}(f)$ dan en slechts dan als voor elke $x_0 \in S$ en $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ zodat voor elke $x \in \mathrm{dom}(f)$ geldt dat als $|x - x_0| < \delta$ dan ook $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Continuïteit bewijzen Een bewijs van continuïteit op een x_0 volgt de volgende stappen:

1. Zij $\epsilon > 0$.
2. Laat δ een combinatie zijn van ϵ en x_0.
3. Laat $x \in \mathrm{dom}(f)$.
4. Aantonen dat als $|x - x_0| < \delta$ dan ook $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

δ **vinden** Om een δ te vinden voor elke ϵ en een x_0 is dit een handig stappenplan:

1. Probeer eerst $|f(x) - f(x_0)|$ om te schrijven tot $|x - x_0| \cdot g(x, x_0)$, waar g een functie is met $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. Probeer vervolgens $g(x, x_0)$ af te schatten tot iets dat niet afhankelijk is van x volgens de afschatregels voor rijtjes en altijd groter is dan $g(x, x_0)$.
3. Laat $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de afgeschatte versie van $g(x, x_0)$ zijn.
4. Dan geldt dus dat $|f(x) - f(x_0)| < |x - x_0| \cdot g(x, x_0) < |x - x_0| \cdot h(x_0)$.
5. In het bewijs laat dan $\epsilon > 0$ en kies dan $\delta = \frac{\epsilon}{h(x_0)}$.
6. Als $|x - x_0| < \delta$, dan geldt dus $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{h(x_0)}$. Ga nu het afschat proces omgekeerd opschrijven. Door de keuzes die we gemaakt in het afschatproces hebben volgt dus $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Stellingen over continuïteit De volgende stellingen over continue functies zijn waar:

Absolute waarden, product met getallen en continuïteit Zij f een functie die continu is op x_0 met $\mathrm{dom}(f) \in \mathbb{R}$. Dan geldt dat de functies $|f|$ en $k \cdot f$ met $k \in \mathbb{R}$ ook continu zijn op x_0. *Het bewijs staat op pagina* 128.

Combineren van functies Zij f, g functies die continu zijn in x_0. Dan geldt dat de volgende functies ook continu zijn in x_0:

- $f + g$.
- $f \cdot g$.
- $\frac{f}{g}$ met $g(x_0) \neq 0$.

Het bewijs hiervoor staat op de bladzijde 129.

Samenstellen van functies Zij f, g functies die continu zijn op x_0, dan geldt dat $f \circ g$ ook continu is op x_0. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 129.

Eigenschappen van continue functies Voor functies die continu zijn op een bepaald interval gelden de volgende stellingen:

Continuïteit, maxima en minima Laat f een continue functie zijn op $[a, b]$ dan is f een begrensde functie en voor alle $x \in [a, b]$ zijn er $x_0, y_0 \in [a, b]$ zodat $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$, oftewel f bereikt haar minimum en maximum op het interval $[a, b]$. *Het bewijs hiervoor staat in appendix D.*

Tussenwaardestelling Als de functie f continu is op een interval I, dan geldt dat wanneer $a < b$ voor een $a, b \in I$ en $f(a) < y < f(b)$ of $f(b) < y < f(a)$, dan is er tenminste één $x \in (a, b)$ zodat $f(x) = y$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 134.

Gevolg van de tussenwaardestelling Als een functie f continu is op een interval I, dan is $f(I)$ ook een interval. *Het bewijs staat op bladzijde* 135.

Inverse en continuïteit Zij f een strikt stijgende continue functie, dan is f^{-1} ook een continue functie. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 137.

Stijgende functie, intervallen en continue functies Zij g een strikt stijgende functie op interval J. Als $g(J)$ een interval is, dan is g continu op J. *Het bewijs staat op pagina* 137.

Continuïteit en bijectiviteit Zij f een continue bijectieve functie op een interval I. Dan is f strikt stijgend of strikt dalend. *Het bewijs staat op pagina* 138.

Stellingen uit de opgaven De volgende stellingen worden bewezen in de opgaven van paragraaf 17 en 18.

Opgave 17.5b Elke polynoom p is continu.

3.2 Uniforme continuïteit

Wat is uniforme continuïteit Zij S een verzameling zodat $S \subseteq \mathbb{R}$. Een functie $f : S \to \mathbb{R}$ is uniform continu dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ zodat voor elke $x_0, x \in S$ geldt dat als $|x_0 - x| < \delta$ dan $|f(x_0) - f(x)| < \epsilon$.

Uniforme continuïteit vs continuïteit Het verschil tussen de definitie van continuïteit en die van uniforme continuïteit is de plek waar de x_0 gedefiniëerd wordt. Bij uniforme continuïteit wordt de x_0 gedefiniëerd na de δ, en bij "gewone"continuïteit wordt de x_0 gedefiniëerd voor de δ. Dus δ kan ook afhangen van x_0 bij "gewone"continuïteit, wat niet kan bij uniforme continuïteit.

Stellingen over uniforme continuïteit De volgende stellingen zijn waar over uniforme continuïteit:

Continu op een interval en uniforme continuïteit Als een functie f continu is op een gesloten interval $[a, b]$, dan is f uniform continu op $[a, b]$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 143.

Uniform continue functies en Cauchy rijen Zij f een uniform continue functie op een verzameling $S \in \text{dom}(f)$ en $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zodat s_n ee Cauchy-rij is. Dan geldt dat $(f(s_n))$ ook een Cauchy-rij is. *Het bewijs staat op pagina* 146.

Uitbreiden van domein Zij $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ een functie. Dan kan f uitgebreid worden naar een continue functie $\widetilde{f} : [a, b] \to \mathbb{R}$ dan en slechts dan als f uniform continu is op (a, b). *Het bewijs staat op bladzijde* 148-149.

3.3 Limieten van functies

Definitie van de limiet van functies De limiet van een functie is als volgt gedefiniëerd, afhankelijk van a en L: $\lim\limits_{x \to a}(f(x)) = L \Leftrightarrow$

	$a \in \mathbb{R}$	$a = \infty$	$a = -\infty$
$L \in \mathbb{R}$	$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :$ $0 < \|x - a\| < \delta$ $\Rightarrow \|f(x) - L\| < \epsilon$	$\forall \epsilon > 0\ \exists \alpha :$ $x > \alpha$ $\Rightarrow \|f(x) - L\| < \epsilon$	$\forall \epsilon > 0\ \exists \alpha :$ $x < \alpha$ $\Rightarrow \|f(x) - L\| < \epsilon$
$L = \infty$	$\forall M > 0\ \exists \delta > 0 :$ $0 < \|x - a\| < \delta$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M > 0\ \exists \alpha :$ $x > \alpha$ $\Rightarrow f(x) > M$	$\forall M > 0\ \exists \alpha :$ $x < \alpha$ $\Rightarrow f(x) > M$
$L = -\infty$	$\forall M < 0\ \exists \delta > 0 :$ $0 < \|x - a\| < \delta$ $\Rightarrow f(x) < M$	$\forall M < 0\ \exists \alpha :$ $x > \alpha$ $\Rightarrow f(x) < M$	$\forall M < 0\ \exists \alpha :$ $x < \alpha$ $\Rightarrow f(x) < M$

Speciale limieten Er zijn ook nog enkele speciale limieten, namelijk de volgende:

Limiet van beneden De limiet van beneden wordt als volgt genoteerd $\lim\limits_{x\uparrow a}(f(x)) = L$ of $\lim\limits_{x\to a^-}(f(x)) = L$. Deze is als volgt gedefiniëerd: voor elke $\epsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zodat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat als $0 < a - x < \delta$, dan geldt dat $|f(x) - L| < \epsilon$.

Limiet van boven De limiet van boven wordt genoteerd als volgt: $\lim\limits_{x\downarrow a}(f(x)) = L$. Dit is zo gedefiniëerd: voor elke $\epsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zodat voor elke $x \in \mathbb{R}$ geldt dat als $0 < x - a < \delta$ dan geldt dat $|f(x) - L| < \epsilon$.

Limiet op een verzameling Zij $S \subseteq \mathbb{R}$ een verzameling. Dan is de limiet op die verzameling gedefiniëerd als volgt: $\lim\limits_{x\to a^s}(f(x))$ dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat voor elke $x \in S$ geldt dat als $0 < |x - a| < \delta$ dan geldt ook dat $|f(x) - L| < \epsilon$.

Als $L = \infty$ of $L = -\infty$, dan geldt dit uiteraard niet maar dan moet de corresponderende voorwaarde overgenomen worden die in de tabel staat, maar alleen de voorwaarde op x ($0 < x - a < \delta$ of $0 < a - x < \delta$) blijft dan wel staan.

Limieten en rijen Net als bij continuïteit is het ook mogelijk om deze limieten te definiëren met behulp van rijtjes. Hierbij is het belangrijkste punt om te maken dat het domein van het rijtje verandert, afhankelijk van welk limiet je wil berekenen. Specifieke definities ga ik hier niet opschrijven.

Stellingen over limieten De volgende stellingen over limieten van functies zijn waar:

Wanneer bestaat de limiet Als geldt dat $\lim\limits_{x\uparrow a}(f(x)) = L$ en $\lim\limits_{x\downarrow a}(f(x)) = L$, dan geldt dat $\lim\limits_{x\to a}(f(x)) = L$ en andersom.

Continuiteit en limieten Als een functie continu is, dan geldt voor elke $a \in \mathrm{dom}(f)$ dat $\lim\limits_{x\to a}(f(x)) = f(a)$.

4 Differentiatie en integratie

4.1 Afgeleides

Wat is de afgeleide Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is differentieerbaar dan en slechts dan als de limiet $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ bestaat en eindig is. De waarde van de limiet is dan de afgeleide op dat punt. Op elk punt a waar f differentieerbaar is, is $f'(a)$ gedefinieerd als $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Het domein van f' Omdat $\mathrm{dom}(f')$ de verzameling punten is waarop f differentieerbaar is, geldt dat $\mathrm{dom}(f') \subseteq \mathrm{dom}(f)$.

Afgeleides en continuïteit Als een functie differentieerbaar is op een punt a, dan is de functie ook continu. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 225.

Eigenschappen van de afgeleide Zij f en g differentieerbare functies op een punt a, dan gelden de volgende stellingen:

Het bepalen van de afgeleide Om de afgeleide te bepalen zijn de volgende regels. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* $226 - 227$.

1. $(cf)'(a) = c \cdot f'(a)$
2. $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
3. Voor het vermenigvuldigen van functies is de productregel: $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
4. Voor het berekenen van het quotient van twee functies is de quotientregel: als $f(a) \neq 0$, dan geldt dat $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{g(a)f'(a)-g'(a)f(a)}{g^2(a)}$

Kettingregel Zij f een op a differentieerbare functie en g op $f(a)$, dan geldt dat de samengestelde functie $g \circ f$ differentieerbaar is op a en als afgeleide heeft het $(f \circ g)'(a) = g'(f(x))f'(a)$.

4.2 Middenwaardestelling

Maxima, minima en afgeleiden Als f gedefinieerd is op een open interval (a, b) en een maximum aanneemt op x_0 en f differentieerbaar is op x_0, dan geldt dat $f'(x_0) = 0$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina's* 232 *en* 233.

Stelling van Rolle Zij f een continue functie op $[a, b]$ die differentieerbaar is op (a, b) met $f(a) = f(b)$. Dan is er tenminste één $x \in (a, b)$ zodat $f'(x) = 0$.

Middenwaardestelling Zij f een continue functie op $[a, b]$ die differentieerbaar is op (a, b). Dan is er tenminste één $x \in (a, b)$ zodat geldt dat $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. *Het bewijs hiervoor staat in appendix E.*

Gevolgen van de middenwaardestelling De volgende stellingen zijn gevolgen van de middenwaardestelling:

Afgeleide gelijk aan 0 Zij f een differentieerbare functie op (a, b) met $f'(x) = 0$ voor alle $x \in (a, b)$, dan is f een constante functie.

Functies met gelijke afgeleides Zij f en g differentieerbare functies op (a, b) waarvoor geldt dat $f' = g'$ op (a, b). Dan is er een $c \in \mathbb{R}$ zodat $f(x) = g(x) + c$ voor elke $x \in (a, b)$.

Stijgende en dalende functies Zij f een differentieerbare functie op (a, b), dan geldt het volgende:

1. De functie f is strict stijgend, als geldt dat $f'(x) > 0$ voor alle $x \in (a, b)$
2. De functie f is strict dalend , als geldt dat $f'(x) < 0$ voor alle $x \in (a, b)$
3. De functie f is stijgend, als geldt dat $f'(x) \geq 0$ voor alle $x \in (a, b)$
4. De functie f is dalend, als geldt dat $f'(x) \leq 0$ voor alle $x \in (a, b)$

Tussenwaardestelling voor afgeleides Zij f een differentieerbare functie op (a, b). Kies vervolgens $x_1, x_2 \in (a, b)$ met $x_1 < x_2$. Dan is er voor elke c waarvoor geldt dat $f(x_1) < c < f(x_2)$ dat er een $x \in (x_1, x_2)$ is zodat $f'(x) = c$.

Inverses en afgeleiden Zij f een injectieve functie op een open interval I en laat $J := f(I)$. Als f differentieerbaar is op een punt $x_0 \in I$ en als $f'(x_0) \neq 0$, dan geldt dat f^{-1} differentieerbaar is op y_0 met als afgeleide $f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

4.3 Integratie

Definitie van de integraal De definitie van de integraal vereist bepaalde kennis, die stap voor stap hier wordt toegelicht:

Maximum en minimum op een verzameling Zij f een functie gedefinieerd op de verzameling $[a,b]$, en zij $S \subseteq [a,b]$. Dan zijn de functies $M(f,S)$ en $m(f,S)$ als volgt gedefinieerd:

- $M(f,S) := \sup\{f(x) : x \in S\}$
- $m(f,S) := \inf\{f(x) : x \in S\}$

Partities Een partitie van een interval $[a,b]$ is een eindige verzameling van de vorm $P = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$.

Darboux sommen De boven Darboux som $U(f,P)$ is gedefinieerd als volgt: $U(f,P) := \sum_{k=1}^{n} M(f,[t_{k-1},t_k]) \cdot (t_k - t_{k-1})$. De onder Darboux som is als volgt gedefinieerd: $L(f,P) := \sum_{k=1}^{n} m(f,[t_{k-1},t_k]) \cdot (t_k - t_{k-1})$.

Darboux integralen De boven Darboux integraal van f over $[a,b]$ $U(f)$ is gedefinieerd op de volgende wijze: $U(f) := \inf\{U(f,P) : P \text{ is een partitie van } [a,b]\}$. Voor de onder Darboux integraal geldt dat $L(f) := \sup\{L(f,P) : P \text{ is een partitie van } [a,b]\}$

Integreerbaarheid We zeggen dat een functie f integreerbaar is op een interval $[a,b]$ als geldt dat $U(f) = L(f)$, dan geldt dat $\int_a^b f := U(f) = L(f)$. Deze specifieke definitie van de integraal heet de **Darboux integraal**.

Stellingen over de Darboux integraal De volgende stellingen over de Darboux integraal zijn waar:

Deelpartities Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een begrensde functie op $[a,b]$ en P en Q partities van $[a,b]$ zodat $P \subseteq Q$, dan geldt dat $L(f,P) \leq L(f,Q) \leq U(f,Q) \leq U(f,P)$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 273.

Boven- en ondergrenzen Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een begrensde functie op $[a,b]$ en P en Q partities van $[a,b]$. Dan geldt dat $L(f,P) \leq U(f,Q)$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 273.

Boven en onderintegralen Zij f een begrensde functie op $[a,b]$, dan geldt dat $L(f) \leq U(f)$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina* 274.

Cauchy integratie Een functie f die begrensd is op $[a,b]$ is integreerbaar als en slechts als voor elke $\epsilon > 0$ er een partitie P van $[a,b]$ bestaat zodat $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$. Het bewijs hiervoor staat in appendix F

***Mesh* van een partitie** De *mesh* van een partitie is de maximale lengte van de deelintervallen van de partitie. Dus voor een partitie P met n deelintervallen geldt: $\text{mesh}(P) := \max\{t_k - t_{k-1} : k = 1, 2, ..., n\}$.

Nog een Cauchy-criterium Zij f een begrensde functie op $[a, b]$, dan is f integreerbaar dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat voor elke partitie P van $[a, b]$ geldt dat als $\text{mesh}(P) < \delta$ dan geldt ook dat $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$. *Het bewijs hiervoor staat op bladzijden* 275 *en* 276.

Riemann integratie De Riemann integraal wordt gedefinieerd vanuit Riemann sommen, vervolgens wordt de integraal gedefinieerd.

Riemann sommen Zij f een begrensde functie op $[a, b]$ en P een partitie van $[a, b]$. Dan is een Riemann som een som van de vorm $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)(t_k - t_{k-1})$. De rij x_k is een willekeurig gekozen rij waarvoor geldt dat voor elke $k = 1, 2, ..., n$ geldt dat $x_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Er zijn dus oneindig veel Riemann sommen voor een functie en partitie.

Riemann integraal Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is Riemann integreerbaar dan en slechts dan als er een getal r bestaat zodat voor elke $\epsilon > 0$ er een $\delta > 0$ is zodat voor elke Riemann som S met bijbehorende partitie P waarvoor geldt dat $\text{mesh}(P) < \delta$ geldt dat $|S - r| < \epsilon$. Dan zeggen we $\mathcal{R} \int_a^b f := r$.

Riemann en Darboux integralen Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die begrensd is op $[a, b]$ is Riemann integreerbaar dan en slechts dan als f Darboux integreerbaar is, dan komen de waarden van de twee integralen overeen. Dus $\int_a^b f = \mathcal{R} \int_a^b f$. *Het bewijs hiervoor staat op pagina's* 277-238.

Rij van Riemann sommen Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een begrensde functie op $[a, b]$ en (S) een rij Riemannsommen met voor elke S_n bijbehorende partitie P_n zodat $\lim\limits_{n\to\infty}(\text{mesh}(P_n)) = 0$. Dan geldt dat $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n) = \int_a^b f$. *Het bewijs staat op pagina* 278-279.

5 Appendices

5.1 Appendix A: Product van twee rijen

Te bewijzen Zij $s_n, t_n \in \mathbb{R}$. Als $\lim_{n\to\infty}(s_n) = s$ en $\lim_{n\to\infty}(t_n) = t$ dan geldt dat $\lim_{n\to\infty}(s_n t_n) = st$.

Bewijs. Zij $\epsilon > 0$. Omdat s_n convergeert is er een $M > 0$ zodat $|s_n| < M$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

Omdat $\lim_{n\to\infty}(t_n) = t$ is er een N_1 zodat $|t_n - t| < \frac{\epsilon}{2M}$. Dit is omdat ook $\frac{\epsilon}{2M} > 0$ en $|t_n - t|$ kan willekeurig klein worden, dus ook kleiner dan $\frac{\epsilon}{2M}$.

Ook weten we dat er een N_2 is zodat $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2(|t|+1)}$. De redenering daarvoor is hetzelfde als de redenering voor t_n.

Laat nu $N = \max\{N_1, N_2\}$. Dan geldt dat als $n > N$ dan zowel $|t_n - t| < \frac{\epsilon}{2M}$ als $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2(|t|+1)}$ als $n > N$.

We weten dat $|t_n - t| < \frac{\epsilon}{2M}$. Daarom geldt ook dat $|s_n||t_n - t| \leq |s_n| \cdot \frac{\epsilon}{2M}$. Merk op dat "$\leq$"niet omgedraaid wordt omdat $|s_n| \geq 0$. En omdat $|s_n| < M$ voor elke n (M is een bovengrens), geldt dat $|s_n| \cdot \frac{\epsilon}{2M} < M \cdot \frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2}$ dus ook dat $|s_n||t_n - t| < \frac{\epsilon}{2}$.

Ook weten we dat $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2(|t|+1)}$, waaruit volgt dat $|t||s_n - s| < |t| \cdot \frac{\epsilon}{2(|t|+1)}$. Omdat $\frac{\epsilon}{2(|t|+1)} > \frac{\epsilon}{2(|t|)}$ geldt dat $|t||s_n - s| < |t| \cdot \frac{\epsilon}{2(|t|)}$ dus dat $|t||s_n - s| < \frac{\epsilon}{2}$.

Omdat $|s_n||t_n - t| < \frac{\epsilon}{2}$ en $|t||s_n - s| < \frac{\epsilon}{2}$ geldt ook dat $|s_n||t_n - t| + |t||s_n - s| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

Uit stellingen over het vermenigvuldigen van absolute waarden volgt
$|s_n||t_n - t| + |t||s_n - s| = |s_n t_n - s_n t| + |s_n t - st|$. Dus $|s_n t_n - s_n t| + |s_n t - st| < \epsilon$. Volgens de driehoeks-ongelijkheid geldt dan $|s_n t_n - s_n t + s_n t - st| \leq |s_n t_n - s_n t| + |s_n t - st|$.

Omdat $|s_n t_n - s_n t + s_n t - st| = |s_n t_n - st|$ en $|s_n t_n - s_n t| + |s_n t - st| < \epsilon$ geldt dat $|s_n t_n - st| < \epsilon$ als $n > N$ met $N = \max(N_1, N_2)$.

We hebben nu dus bewezen dat voor elke $\epsilon > 0$ er een N bestaat, namelijk $\max(N_1, N_2)$, zodat voor elke $n > N$ geldt dat $|s_n t_n - st| < \epsilon$. Dit is wat we moesten bewijzen.

$\square$

5.2 Appendix B: Cauchy en convergentie

Te bewijzen Een rij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. De rij s_n convergeert dan en slechts dan als s_n Cauchy is.

Voor dit bewijs tonen we aan dat een Cauchy rij convergeert, het bewijs de andere kant op is gegeven in een andere stelling.

Bewijs dat een Cauchy rij convergeert

Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en s_n is Cauchy. Dan geldt dus dat er voor elke $\epsilon > 0$ een N bestaat zodat voor elke $m, n > N$ geldt dat $|s_n - s_m| < \epsilon$.

Omdat $|s_n - s_m| < \epsilon$ waar is, is ook $-\epsilon < s_n - s_m < \epsilon$ waar, dus $s_n < s_m + \epsilon$. Dus is $s_m + \epsilon$ een bovengrens voor de verzameling $\{s_n : n > N\}$.

Omdat $\{s_n : n > N\}$ een bovengrens heeft heeft het dus ook een supremum, namelijk $\sup\{s_n : n > N\}$, we noemen dit supremum v_N.

Het supremum is altijd de kleinste bovengrens van een verzameling dus $v_N \leq s_m + \epsilon$. Maar dan geldt ook dat $v_N - \epsilon \leq s_m$, dus $v_N - \epsilon$ is een ondergrens van s_m. Dus geldt dat s_m ook een infimum heeft, namelijk $v_N - \epsilon$.

Omdat het infimum de kleinste bovengrens is geldt dat $v_N - \epsilon \leq \inf\{s_m : m > N\}$. We noemen dit infimum u_N. Dus $v_N \leq u_N + \epsilon$.

Omdat $\limsup(s_n) \leq \sup\{s_n : n > N\}$ en $\liminf(s_n) + \epsilon \geq \inf\{s_n : n > N\} + \epsilon$ weten we dat $\limsup(s_n) \leq \sup\{s_n : n > N\} \leq \inf\{s_n : n > N\} + \epsilon \leq \liminf(s_n) + \epsilon$.

We hebben nu dus bewezen dat $\limsup(s_n) \leq \liminf(s_n) + \epsilon$ voor een willekeurige $\epsilon > 0$ als s_n Cauchy is. Dus $\limsup(s_n) = \liminf(s_n)$.

We weten dat $\liminf(s_n) \leq \limsup(s_n)$ en $\limsup(s_n) \leq \liminf(s_n)$, dus moet wel gelden dat $\liminf(s_n) = \limsup(s_n)$.

Definieer nu s als volgt $s := \limsup s_n = \liminf s_n$. Omdat $\liminf s_n = \limsup s_n$ waar is, geldt ook dat $\lim_{n\to\infty}(s_n) = s$, dus s_n convergeert naar s.

We hebben nu dus bewezen dat als een rij s_n Cauchy is,dat s_n dan ook convergeert.

$\square$

5.3 Appendix C: Bolzano-Weierstrass

Deze appendix bevat twee bewijzen: namelijk dat elke rij een monotone deelrij heeft (1), en dat elke begrensde rij een convergente deelrij heeft (2).

Bewijs van 1

Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. De n^e term van de rij is dominant als voor elke $m > n$ geldt dat $s_m < s_n$.

Er zijn nu twee verschillende mogelijkheden:

1. Er zijn oneindig veel dominante termen.
2. Er zijn eindig veel dominante termen.

Als 1 het geval is, laat dan de functie $(s \circ \sigma)(n)$ de n^e dominante tern zijn van s_n. Dan is de deelrij $(s \circ \sigma)$ dus monotoon dalend, want elke term van $(s \circ \sigma)$ is dominant, dus groter dan alle daaropvolgende termen.

Als 2 het geval is dan is er dus een laatste dominante term. Oftewel een N, waar s_N de laatste dominante term is, zodat voor elke $n > N$ geldt dat s_n niet dominant is. Dus voor elke $n > N$ is er een $m > n$ zodat $s_n \leq s_m$.

Kies dan als n_1 het getal $N + 1$. Dan geldt dus dat er een $n_2 > n_1$ is zodat $s_1 \leq s_2$. Ook s_{n_2} is niet dominant dus er is een $n_3 > n_2$ zodat $s_{n_2} \leq s_{n_3}$. Herhaal dit proces tot in het oneindige zodat je een rij krijgt $s_{n_k} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Dan geldt voor die rij dat $s_{n_i} \leq s_{n_j}$ als $i < j$, dus s_{n_k} is een monotoon stijgende rij.

We hebben nu bewezen dat in zowel geval 1 als 2 de rij s_n een monotone deelrij heeft. Dus s_n heeft altijd een monotone deelrij. Dit is wat we moesten bewijzen.

□

Bewijs van 2

Zij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zodat s_n begrensd is. We weten dat s_n begrensd is, dus elke deelrij van s_n is ook begrensd.

Ook weten we dat s_n een monotone deelrij s_{n_k} heeft, die dus ook begrensd is. De rij s_{n_k} is dus een monotone begrensde deelrij, dus s_{n_k} convergeert.

Dus elke begrensde rij $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ heeft een convergente deelrij, namelijk de monotone deelrij s_{n_k}. Dit is wat we moesten bewijzen.

□

5.4 Appendix D: Continue functies, minima en maxima

Zij f een continue functie op het interval $[a, b]$, dan is f een begrensde functie en f neemt haar maximum en minimum aan, dus er zijn een $x_0, y_0 \in [a, b]$ zodat voor elke $x \in [a, b]$ geldt dat $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$. We bewijzen eerst dat f begrensd is (1) en vervolgens dat f haar maximum en minimum aanneemt (2).

Bewijs van 1

Stel f is een continue onbegrensde functie is op $[a, b]$, dan geldt voor elke $n \in \mathbb{N}$ dat er een rij $x_n \in [a, b]$ bestaat zodat $|f(x_n)| > n$.

Volgens Bolzano-Weierstrass heeft (x_{n_k}) dan een deelrij die convergeert naar een reëel getal x_0 omdat x_n begrensd is.

Dus $\lim\limits_{k\to\infty}(f(x_{n_k})) = f(\lim\limits_{k\to\infty}(x_{n_k}) = f(x_0)$, maar we hebben ook dat $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)) = +\infty$ omdat de rij $f(x_n)$ boven onbegrensd is. Maar $f(x_0) \in \mathbb{R}$ en $\infty \notin \mathbb{R}$

Dit is een tegenspraak, dus moet wel gelden dat $f(x)$ begrensd is.

$\square$

Bewijs van 2

We weten dat $f(x)$ begrensd is dus er is een $M := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$ die eindig is.

Omdat M het supremum is geldt voor dat voor elke $n \in \mathbb{N}$ er een $y_n \in [a, b]$ is zodat $M < \frac{1}{n} < f(y_n) \leq M$ omdat M de kleinste bovengrens is. Volgens het "Squeeze Lemma"geldt dan dat $\lim\limits_{n\to\infty}(f(y_n)) = M$.

Omdat $f(x)$ continu is geldt dat $\lim\limits_{n\to\infty}(f(y_n)) = f(\lim\limits_{n\to\infty}(y_n))$ en omdat $y_n \in [a, b]$ ook $y_0 := \lim\limits_{n\to\infty}(y_n) \in [a, b]$, dus er is een y_0 zodat f op y_0 een maximum aan neent.

We weten dat $-\sup\{-f(x) : x \in [a, b]\} = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$. We kunnen op dezelfde manier als hiervoor het supremum van $-f(x)$ bepalen. En dan is er dus ook een x_0 zodat $-f(x_0)$ het supremum is van $-f(x)$. En dan is het minimum van f de waarde $f(x_0)$.

Dus als $f(x)$ continu is op $[a, b]$ neemt deze haar minimum en maximum aan op $[a, b]$. Dit is wat we moesten bewijzen.

$\square$

5.5 Appendix E: de stelling van Rolle en de middenwaardestelling

De stelling van Rolle Zij f een functie die continu is op $[a, b]$ en differentieerbaar op (a, b) waarvoor geldt dat $f(a) = f(b)$, dan is er minstens één $x \in (a, b)$ waarvoor geldt dat $f'(x) = 0$. Dit heet de stelling van Rolle.

Bewijs. Omdat f continu is weten we dat er $x_0, y_0 \in [a, b]$ zodat voor elke $x \in [a, b]$ geldt dat $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$. Dan zijn er twee gevallen:

1. De punten x_0 en y_0 zijn beiden eindpunten, dan is de functie f constant, en dan is de afgeleide overal 0
2. Anders neemt f een maximum of minimum aan op x_0 of y_0, dus dan is op x_0 of op y_0 de afgeleide 0.

In beide gevallen geldt dan dat er een punt is waar de afgeleide 0 is, dus we hebben de stelling van Rolle bewezen. □

Middenwaardestelling Zij f een functie die continu is op $[a, b]$ die differentieerbaar is op (a, b). Dan is er tenminste één $x \in (a, b)$ waarvoor geldt dat $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Dit heet de middenwaardestelling.

Bewijs. Zij L een functie die een rechte lijn trekt tussen $(a, f(a))$ en $(b, f(b))$. Dan geldt dat $L(a) = f(a)$ en $L(b) = f(b)$. Ook geldt dat $L'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ voor alle x.

Zij $g(x) = f(x) - L(x)$ voor $x \in [a, b]$, dan geldt dat $g(a) = 0 = g(b)$, dus volgens de stelling van Rolle geldt dan dat er een $x \in (a, b)$ is zodat $g'(x) = 0$. En volgens de regels van afgeleides nemen geldt dat $g'(x) = L'(x) - f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(x)$. Hieruit volgt dan duidelijk dat $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x)$.

□

5.6 Appendix F: Cauchy integratie

Te bewijzen Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ begrensd op $[a, b]$, dan is f integreerbaar dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ er een partitie P is zodat $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.

Bewijs. We bewijzen eerst dat als f integreerbaar is, dat er dan voor elke ϵ een partitie P bestaat zodat $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$. Dan zijn er partities P_1 en P_2 van $[a, b]$ waarvoor geldt dat $L(f, P_1) > L(f) - \frac{\epsilon}{2}$ en $U(f, P_2) < U(f) + \frac{\epsilon}{2}$. Dit is zo omdat $L(f)$ het supremum is van alle mogelijke $L(f, P)$ en $U(f)$ het infimum van de waarden van $U(f, P)$.

Zij $P = P_1 \cup P_2$, dan geldt dat $U(f, P) - L(f, P) \leq U(f, P_2) - L(f, P_1) < U(f) + \frac{\epsilon}{2} - (L(f) - \frac{\epsilon}{2}) = \epsilon + U(f) - L(f)$. En omdat f integreerbaar is geldt dat $U(f) = L(f)$, dus $\epsilon + U(f) - L(f) = \epsilon$. Dus geldt dat $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.

Dan is er dus voor elke $\epsilon > 0$ een partitie P zodat $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$.

Nu bewijzen we dat als voor elke $\epsilon > 0$ er een partitie P bestaat zodat $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$, dat f dan integreerbaar is. We weten dat $U(f) \leq U(f, P) = U(f, P) - L(f, P) + L(f, P) < \epsilon + L(f, P) \leq \epsilon + L(f)$. Hieruit volgt dan dat voor elke ϵ geldt dat $U(f) < \epsilon + L(f)$, dus voor elke $\epsilon > 0$ geldt dat $U(f) - L(f) < \epsilon$, du(s $U(f) \leq L(f)$. Omdat ook geldt dat $L(f) \leq U(f)$, weten we dat $U(f) = L(f)$, dus f is integreerbaar.

We hebben nu de stelling beide kanten op bewezen, dus f is integreerbaar dan en slechts dan als voor elke $\epsilon > 0$ er een partitie bestaat zodat $U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$. $\square$

5.7 Voetnoten en bedankjes

Heel erg bedankt aan Quirijn voor het delen van de latex uitwerking van de tabel in paragraaf 3.3. Je bent een held!