Samenvatting Analyse op de Lijn

Jonas van der Schaaf

14 februari 2020

Inhoudsopgave

1 Metrieken **2**
1.1 Verschillende metrieken op $\mathbb{R}^k$ 2
1.2 Rijtjes in metrieken 2
1.3 Volledigheid 3

2 Open, gesloten en compacte verzamelingen **3**
2.1 Open verzamelingen 3
2.2 Gesloten verzamelingen 4
2.3 Compacte verzamelingen 4

A Equivalentie van convergentie in de Manhattan- en Euclidische metriek **5**

1 Metrieken

Wat is een metrische ruimte? Zij S een verzameling en een metriek $d\colon S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ een functie met de volgende eigenschappen:

i. Voor alle $x, y \in S$ geldt dat $d(x, y) = 0$ dan en slechts dan als geldt dat $x = y$.

ii. Voor alle $x, y \in S$ geldt dat $d(x, y) = d(y, x)$.

iii. Voor alle $x, y, z \in S$ geldt dat $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Dit is de driehoeksongelijkheid.

Als aan al deze eigenschappen volgaan wordt noemen we het paar (S, d) een metrische ruimte.

1.1 Verschillende metrieken op $\mathbb{R}^k$

Het is mogelijk om op dezelfde verzameling verschillende metrieken te definiëren. Hier zijn een paar belangrijke:

Euclidische metriek Gegeven twee vectoren[1] $x, y \in \mathbb{R}^k$, is de Euclidische metriek op $\mathbb{R}^k$ de functie:

$$d_2\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}_{\geq 0}\colon (x, y) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2}.$$

Deze functie voldoet aan alle drie de eigenschappen van een metriek. Als de metriek van een ruimte $\mathbb{R}^k$ niet vermeld wordt, wordt bedoeld dat de gebruikte metriek de Euclidische metriek is. Deze ruimte wordt ook wel de k-dimensionale Euclidische ruimte genoemd.

Manhattan-metriek Gegeven twee vectoren $x, y \in \mathbb{R}^k$, is de Manhattan-metriek op $\mathbb{R}^k$ de functie:

$$d_1\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k\colon (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{k} |x_i - y_i|$$

Convergentie volgens de Manhattan-metriek is equivalent aan convergentie volgens de Euclidische metriek. Het bewijs is te vinden in appendix A.

Discrete metriek Gegeven twee vectoren $x, y \in \mathbb{R}^k$, is de Discrete metriek op $\mathbb{R}^k$ de functie:

$$d\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k\colon (x, y) \mapsto \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

1.2 Rijtjes in metrieken

Convergentie Zij $\left(s^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ een rij[2] in een metrische ruimte (S, d). Voor deze rij geldt dat dat deze convergeert naar een $s \in S$ als

$$\lim_{n\to\infty} d\left(s^{(n)}, s\right) = 0.$$

Cauchy rijtjes Voor een rij $\left(s^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ in een metrische ruimte (S, d) geldt dat s_n Cauchy is als voor elke $\epsilon > 0$ er een N bestaat zodat voor alle $m, n > N$ geldt dat $d\left(s^{(m)}, s^{(n)}\right) < \epsilon$.

Een metrische ruimte is *volledig* als geldt dat elke Cauchy rij convergeert naar een element in de ruimte.

[1] Voor een vector $x \in \mathbb{R}^k$ geldt dat $x = (x_1, \ldots, x_k)$.

[2] Voor een rij in $\mathbb{R}^k$ wordt het n^e element aangeduid met een superscript n (geen macht), omdat het subscript i wordt gebruikt voor het i^e coördinaat.

Convergentie, Cauchy en Coördinaten Zij $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ een rij in $\mathbb{R}^k$ dan convergeert deze alleen dan en slechts dan als voor alle $j \in \{1, \ldots, k\}$ geldt dat de rij $x_j^{(n)}$ ook convergeert in $\mathbb{R}$.

Zij $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ een rij in $\mathbb{R}^k$. Deze is Cauchy dan en slechts dan als elke rij $(x_j^{(n)})$ een Cauchy rij is.

Begrensdheid Voor een verzameling $S \subseteq \mathbb{R}^k$ geldt dat deze begrensd is als er een $M > 0$ is zodat voor elke $x \in S$ geldt dat $\max\{|x_j| : j = 1, \ldots, k\} \leq M$.

Voor een rij $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ geldt dat $(x^{(n)})$ begrensd is als geldt dat de verzameling $\{x^{(n)} : n \in \mathbb{N}_0\}$ begrensd is.

1.3 Volledigheid

Volledigheid van $\mathbb{R}^k$ De k-dimensionale Euclidische ruimte $\mathbb{R}^k$ is volledig, dus elke Cauchy rij $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ convergeert naar een element $x \in \mathbb{R}^k$.

Bolzano-Weierstrass stelling in $\mathbb{R}^k$ Zij $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ een begrensde rij in $\mathbb{R}^k$. Dan geldt dat $x^{(n)}$ een convergerende deelrij heeft.

2 Open, gesloten en compacte verzamelingen

2.1 Open verzamelingen

Bollen Zij (S, d)[3] een metrische ruimte. Dan geeft de functie

$$B : S \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathcal{P}(S) : (s_0, r) \mapsto \{s \in S : d(s_0, s) < r\}$$

een bol met straal r en middelpunt s_0.

Inwendige punten Zij $E \subseteq S$, dan geldt dat een punt $s_0 \in E$ inwendig is als geldt dat er een $r > 0$ is zodat

$$B(s_0, r) \subseteq E.$$

Voor de verzameling E geldt dan dat $E^\circ := \{s \in E : s \text{ is inwendig}\}$. De verzameling E° heet dan het inwendige van E.

Open verzamelingen Een verzameling $E \subseteq S$ heet open als geldt dat $E = E^\circ$.

Stellingen over open verzamelingen De volgende stellingen over open verzamelingen zijn waar:

- De verzameling S is open in S
- De lege verzameling $\varnothing$ is open in S
- De vereniging van open verzamelingen is open[4].
- De doorsnede van *eindig* veel open verzameling is een open verzameling.

[3] In de rest van deze samenvatting wordt in elke definitie geïmpliceerd dat (S, d) een metrische ruimte is zonder dat het er explicitiet bij wordt gezegd.

[4] Dit geldt ook als je oneindig veel verzamelingen neemt.

2.2 Gesloten verzamelingen

Wat is een gesloten verzameling We noemen een verzameling $E \subseteq S$ gesloten als het complement $S \setminus E$ open is. Dat is equivalent met het idee dat er een open verzameling $U \in S$ is zodat $E = S \setminus U$.

Merk op dat open en gesloten ***niet*** tegenovergesteld aan elkaar zijn. Zo zijn bijvoorbeeld S en $\varnothing$ open én gesloten, en bijvoorbeeld $[1, 2)$ noch gesloten, noch open in $\mathbb{R}$.

Afsluiting van een verzameling Gegeven een verzameling $E \in S$ is de afsluiting $E^- = \overline{E}$ de doorsnede van alle gesloten verzamelingen die E bevatten. Als formule opgeschreven betekent dat dat gegeven een $E \subseteq S$, en $\mathcal{F} = \{F \subseteq S \colon E \subseteq F \text{ en } F \text{ is gesloten}\}$ geldt dat

$$\overline{E} := \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

Stellingen over gesloten verzamelingen De volgende stellingen over gesloten verzamelingen zijn waar:

- Een verzameling E is gesloten dan en slechts dan als $E = \overline{E}$.
- Een verzameling E is gesloten dan en slechts dan als E alle limieten bevat van alle rijen in E.
- Een element $s \in S$ is in $\overline{E}$ dan en slechts dan als het de limiet is van een rijtje in E.

Rand van een verzameling Voor een verzamelingen $E \subseteq S$ is de rand ∂E als volgt gedefiniëerd:

$$\partial E := \overline{E} \setminus E^\circ$$

Rijen van gesloten verzamelingen Zij $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij van gesloten, begrensde niet-lege verzamelingen in $\mathbb{R}^k$ die dalend is (voor alle $i \in \mathbb{N}$ geldt dat $F_i \supseteq F_{i+1}$). Dan geldt dat

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

ook gesloten, begrensd en niet leeg is.

2.3 Compacte verzamelingen

Open overdekkingen Zij $E \subseteq S$. Dan is de familie[5] $\mathcal{U}$ van open verzamelingen in S een open overdekking als geldt dat

$$E \subseteq \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Een deeloverdekking van $\mathcal{U}$ is een deelfamilie van $\mathcal{U}$ die ook een overdekking is van E.

Een overdekking is eindig als geldt dat deze slechts eindig veel elementen heeft.

Compactheid Een verzameling $E \subseteq S$ is compact als geldt dat elke open overdekking $\mathcal{U}$ een eindige deeloverdekking heeft van E.

Heine-Borel stelling Een verzameling $E \subseteq \mathbb{R}^k$ is compact dan en slechts dan als deze begrensd en gesloten is.

Compactheid van k-cellen Elke k-cel $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_k, b_k]$ in $\mathbb{R}^k$ is compact.

[5] Een familie is een collectie van verzamelingen.

A Equivalentie van convergentie in de Manhattan- en Euclidische metriek

Bewijs. Stel een rij $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ convergeert in $(\mathbb{R}^k, d_2)$ naar $x \in \mathbb{R}^k$. Dan geldt dat er voor elke $\epsilon > 0$ er een N is zodat voor alle $n > N$ geldt dat $d_2(x^{(n)}, x) < \epsilon$. Laat nu $\epsilon > 0$ en kies voor N het getal zodat voor alle $n > N$ geldt dat $d_2\left(x^{(n)}, x\right) < \frac{\epsilon}{k}$.

We weten dat voor alle $a, b \in \mathbb{R}^k$ geldt dat

$$|a_i - b_i| \leq \sqrt{\sum_{j=0}^{k}(a_j - b_j)^2}$$

Door dan aan beide kanten te sommeren over i krijgen we

$$\begin{aligned} d_1(a,b) &= \sum_{i=1}^{k} |a_i - b_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\sum_{j=0}^{k}(a_j - b_j)^2} \\ &= k \cdot \sqrt{\sum_{j=0}^{k}(a_j - b_j)^2} \\ &= k \cdot d_2(a,b) \end{aligned}$$

Dus geldt voor alle $a, b \in \mathbb{R}^k$ dat $d_1(a,b) \leq k \cdot d_2(a,b)$.

Maar we hebben N zo gekozen dat voor alle $n > N$ geldt dat $d_2(x^{(n)}, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Dus geldt ook dat $d_1(x^{(n)}, x) \leq k \cdot d_2(x^{(n)}, x) < \epsilon$. Dus voor elke $\epsilon > 0$ is er een N zodat voor alle $n > N$ geldt dat $d_1(x^{(n)}, x) < \epsilon$. Dus als een rij convergeert in $\mathbb{R}^k, d_2$, dan convergeert deze ook in $(\mathbb{R}^k, d_1)$.

Stel dat een rij $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ convergeert in $\mathbb{R}^k, d_1$. Dan geldt dat er voor elke $\epsilon > 0$ er een N is zodat voor alle $n > N$ geldt dat $d_2(x^{(n)}, x) < \epsilon$. Laat $\epsilon > 0$ en kies N zodat voor alle $n > N$ geldt dat $d_1(x^{(k)}, x) < \epsilon$.

Beschouw nu vervolgens voor $a, b \in \mathbb{R}^k$ de afstand volgens de Manhattan-metriek en volgens de Euclidische metriek. Hiervoor geldt dat

$$\begin{aligned} \left(d_2(a,b)\right)^2 &= \sum_{i=1}^{k} |a_i - b_i|^2 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{k} |a_i - b_i|\right)^2 \\ &= \left(d_1(a,b)\right)^2 \end{aligned}$$

, dus dan geldt ook dat $d_2(a,b) \leq d_1(a,b)$ voor alle $a, b \in \mathbb{R}^k$.

Daaruit kunnen we dan opmaken dat voor alle $n > N$ geldt dat $d_2(x^{(n)}, x) \leq d_1(x^{(n)}, x) < \epsilon$. Dus geldt dat voor elke $\epsilon > 0$ dat er een N is zodat voor alle $n > N$ geldt dat $d_2(x^{(n)}, x) < \epsilon$. Dus als $x^{(n)}$ convergeert naar x in $\mathbb{R}^k, d_1$, dan ook in $\mathbb{R}^k, d_2$.

Nu hebben we dus aangetoond dat convergentie in $(\mathbb{R}^k, d_2)$ convergentie in $(\mathbb{R}^k, d_1)$ impliceert en andersom, en dus zijn de twee begrippen equivalent. $\square$