

Samenvatting Algebra 1

Jonas van der Schaaf

10 mei 2020

Inhoudsopgave

1 Groepen	2
2 Ondergroepen, homomorfismen en directe producten	3
2.1 Ondergroepen	3
2.2 Groepshomomorfismen	3
2.3 Directe producten	4
3 Groepen die misschien handig zijn	6

1 Groepen

Groepsaxioma's Een groep is een paar van een verzameling G met een bewerking $\circ: G \times G \rightarrow G$ met de volgende eigenschappen:

1. Associativiteit: voor elke $a, b, c \in G$ geldt dat

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$

2. Neutraal element: er is een $e \in G$ zodat voor elke $g \in G$ geldt dat

$$e \circ g = g \circ e = g,$$

3. Voor elke $a \in G$ is er een a^* zodat

$$a \circ a^* = a^* \circ a = e.$$

Abelse Groepen Zij G een groep. Als voor elke $a, b \in G$ geldt dat $a \circ b = b \circ a$, dan heet G abels, en dan zeggen we dat elk element in G commuteert.

Multiplicatieve notatie In de rest van deze samenvatting zal ik (bijna) altijd de multiplicatieve notatie gebruiken, dat komt overeen met $a \circ b = ab$, $\underbrace{a \circ \cdots \circ a}_{n \times} = a^n$ en $a^* = a^{-1}$.

Simpele stellingen over inverses Zij G een groep, dan geldt dat:

1. Er is precies 1 eenheidselement in een groep,
2. Elk element $a \in G$ heeft precies 1 inverse,
3. Voor elke $a, b \in G$ geldt dat

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

en dat

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

Verder geldt voor $n, m \in \mathbb{Z}$ dat $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ en dat $a^{nm} = (a^n)^m$.

Uniciteit van producten Zij G een groep en $a, b \in G$. Dan is er precies één $x \in G$ zodat $ax = b$, namelijk $x = a^{-1}b$.

Ook is er precies één $y \in G$ zodat $ya = b$, namelijk $y = ba^{-1}$.

Producten van meer dan 1 element Zij G een groep met $a_1, \dots, a_n \in G$ dan is het product $a_1 \cdots a_n$ inductief gedefinieerd als $(a_1 \cdots a_{n-1})a_n$. Ook volgt door inductie toe te passen uit deze definitie dat $(a_1 \cdots a_k)(a_{k+1} \cdots a_n) = a_1 \cdots a_n$.

2 Ondergroepen, homomorfismen en directe producten

2.1 Ondergroepen

Definitie van een ondergroep Zij G een groep en laat $H \subseteq G$ een deelverzameling zijn. Dan geldt dat H een ondergroep is precies als:

1. H niet leeg is ($H \neq \emptyset$),
2. voor elke $a, b \in H$ geldt dat $ab \in H$ (ook wel H is gesloten),
3. voor alle $a \in H$ ook geldt dat $a^{-1} \in H$.

Ondergroepen en groepen Zij G een groep en $H \subseteq G$ een ondergroep. Dan is H ook een groep met dezelfde werking als op G .

Equivalente eigenschappen van ondergroep Zij G een groep en $H \subseteq G$ een deelverzameling, dan is H ook een ondergroep als geldt dat

1. H niet leeg is,
2. voor elke $a, b \in H$ geldt dat $ab^{-1} \in H$.

Doorsnedes van ondergroepen Zij G een groep en $(H_i)_{i \in I}$ een collectie ondergroepen, dan geldt dat

$$\bigcap_{i \in I} H_i$$

ook een ondergroep is van G .

2.2 Groepshomomorfismen

Definitie van een homomorfisme Zij G_1, G_2 groepen. Dan is $f: G_1 \rightarrow G_2$ een groepshomomorfisme als voor elke $a, b \in G_1$ geldt dat

$$f(ab) = f(a)f(b).$$

De verzameling van homomorfismen van G_1 naar G_2 wordt als $\text{Hom}(G_1, G_2)$ genoteerd.

Isomorfismen Zij G_1, G_2 groepen en $f: G_1 \rightarrow G_2$ een bijtief homomorfisme, dan wordt het ook wel een isomorfisme genoemd. Als er een isomorfisme tussen twee groepen G_1, G_2 bestaat, dan heten deze isomorf, en dat wordt genoteerd als $G_1 \cong G_2$.

Endomorfismen Een homomorfisme van een groep naar zichzelf heet een endomorfisme. De verzameling endomorfismen van G wordt genoteerd als $\text{End}(G)$.

Automorfismen Een isomorfisme van een groep naar zichzelf heet een automorfisme. De verzameling automorfismen van G wordt genoteerd als $\text{Aut}(G)$.

Eigenschappen van een homomorfisme Zij G_1, G_2 groepen en $f: G_1 \rightarrow G_2$ een homomorfisme. Laat $e_1 \in G_1$ het eenheidselement van G_1 zijn en $e_2 \in G_2$ het eenheidselement van G_2 . Dan geldt dat

1. $f(e_1) = e_2$,
2. voor elke $a \in G_1$ geldt dat $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

Kernen van homomorfismen Zij G_1, G_2 groepen, $f: G_1 \rightarrow G_2$ een homomorfisme en e_2 het eenheidselement van G_2 . Dan is de kern van f als volgt gedefinieerd:

$$\ker(f) = \{g \in G \mid f(g) = e_2\}.$$

De kern is een ondergroep van G_1 . Ook is het beeld $f[G_1]$ een ondergroep van G_2 .

Injectiviteit Zij G_1, G_2 groepen, $f: G_1 \rightarrow G_2$ een homomorfisme en e_1 het eenheidselement van G_1 . Dan geldt dat f een injectieve functie is precies als

$$\ker(f) = \{e_1\}.$$

Samenstellingen van homomorfismen Zij G_1, G_2, G_3 groepen en $f: G_1 \rightarrow G_2$ en $g: G_2 \rightarrow G_3$ homomorfismen. Dan is $f \circ g$ ook een homomorfisme.

Inverses van isomorfismen Zij G_1, G_2 groepen en $f: G_1 \rightarrow G_2$ een isomorfisme, dan is f^{-1} ook een isomorfisme.

Equivalentie en isomorfismen Zij G_1, G_2, G_3 groepen, dan geldt dat

1. $G_1 \cong G_1$,
2. als $G_1 \cong G_2$, dan geldt ook dat $G_2 \cong G_1$,
3. als $G_1 \cong G_2$ en $G_2 \cong G_3$, dan geldt ook dat $G_1 \cong G_3$.

2.3 Directe producten

Definitie van het directe product Zij G_1, G_2 twee groepen, dan geldt dat $G_1 \times G_2$ met de bewerking

$$(G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \rightarrow G_1 \times G_2: ((g_1, h_1), (g_2, h_2)) \mapsto (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

een groep vormt.

Eigenschappen van het directe product Voor drie groepen G_1, G_2, G_3 geldt in zekere zin dat ze de volgende eigenschappen hebben

1. Commutativiteit: $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$,
2. associativiteit: $(G_1 \times G_2) \times G_3 \cong G_1 \times (G_2 \times G_3) \cong G_1 \times G_2 \times G_3$.

Isomorfisme tussen een groep en ondergroepen Zij G een ondergroep met twee ondergroepen H_1, H_2 met de volgende eigenschappen

1. Voor alle $h_1 \in H_1$ en $h_2 \in H_2$ geldt dat $h_1 h_2 = h_2 h_1$
2. $H_1 \cap H_2 = \{e\}$,
3. voor elke $g \in G$ geldt dat $g = h_1 h_2$ voor een $h_1 \in H_1$ en $h_2 \in H_2$.

Dan geldt dat $G \cong H_1 \times H_2$.

Chinese reststelling Zij $n, m \in \mathbb{N}$ met $\text{ggd}(n, m) = 1$. Dan geldt dat

$$\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

met het isomorfisme

$$f: \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}: a \pmod{nm} \rightarrow (a \pmod{n}, a \pmod{m}).$$

Algemene versie Zij n_1, \dots, n_t positieve gehele getallen zijn zodat voor alle $i, j \in \{1, \dots, t\}$ geldt dat $\text{ggd}(n_i, n_j) = 1$. Definieer $N := \prod_{i=1}^t n_i$. Dan geldt dat

$$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_t\mathbb{Z}$$

met het isomorfisme

$$f: \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_t\mathbb{Z}: a \bmod N \mapsto (a \bmod n_1, \dots, a \bmod n_t).$$

3 Groepen die misschien handig zijn

Quaternionen

Viergroep van Klein

Quaternionengroep (niet de quaternionen)

Symmetriegroep

Diëdergroep