Samenvatting Analyse 2

Jonas van der Schaaf

14 februari 2020

Inhoudsopgave

1 Convergerende reeksen

1.1 Reeksen

Wat is een reeks? Gegeven een rij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, is de partiële som $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ de volgende som:

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Dan definiëren we de oneindige som als volgt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty}(s_n).$$

We zeggen dat deze som convergeert als deze limiet convergeert.

Cauchy criterium Zij $\sum a_n$ een reeks. Dan voldoet deze aan het Cauchy criterium als geldt dat de rij van de partiële sommen s_n voldoet aan het Cauchy criterium:

Voor alle $\epsilon > 0$ is er een N zodat voor alle $n, m > N$ geldt dat $|s_n - s_m| < \epsilon$.

Omdat deze definitie symmetrisch is over n en m kunnen we aannemen dat $n \geq m$, en dus geldt dat $|s_n - s_m| = \left|\sum_{i=m}^{i=n} a_n\right| < \epsilon$.

Een rij convergeert dan en slechts dan als het voldoet aan het Cauchy criterium.

Convergentie van reeksen en rijen Zij $\sum a_n$ een reeks die convergeert, dan geldt dat $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

1.2 Convergentie testen

Er zijn verschillende manieren om convergentie van een reeks te bepalen, hier volgen nu enkele simpele manieren:

Vergelijkingstest Gegeven een rij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ van positieve getallen gelden de volgende twee dingen:

- Als voor een rij $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ geldt dat $|b_n| \leq a_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ dan geldt dat $\sum b_n$ convergeert.
- Als voor een rij $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ geldt dat $b_n \geq a_n$ en $\sum a_n = \infty$, dan geldt dat $\sum b_n = \infty$.

Absolute convergentie Zij $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij zodat geldt dat de reeks $\sum |b_n|$ convergeert, dan geldt dat $\sum b_n$ ook convergeert.

Verhoudingscriterium Zij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij. Dan geldt dat:

i. De reeks $\sum a_n$ convergeert als $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

ii. De reeks $\sum a_n$ divergeert als $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$.

iii. Als geldt dat $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, dan is er niks te zeggen over de convergentie van de reeks.

Wortercriterium Zij $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ een rij. Dan geldt dat:

i. Als $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$, dan convergeert de reeks $\sum a_n$.

ii. Als $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$, dan divergeert de reeks $\sum a_n$.

iii. Net als bij het verhoudingscriterium geldt dat als $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1$, dat de test dan geen uitslag geeft.