

# Samenvatting Analyse op de Lijn

Jonas van der Schaaf

9 december 2019

## Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Introductie</b>	<b>2</b>
1.1	De verzameling $\mathbb{R}$ . . . . .	2
1.2	De compleetheid van $\mathbb{R}$ . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Rijen</b>	<b>5</b>
2.1	Limieten van rijen . . . . .	5
2.2	Limietstellingen voor rijen . . . . .	6
2.3	Monotone rijen . . . . .	7
2.4	Cauchy rijen . . . . .	8
2.5	lim sup en lim inf . . . . .	8
2.6	Deelrijen . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Continuïteit en limieten</b>	<b>10</b>
3.1	Continuïteit . . . . .	10
3.2	Uniforme continuïteit . . . . .	12
3.3	Limieten van functies . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Differentiatie en integratie</b>	<b>13</b>
4.1	Afgeleides . . . . .	13
4.2	Middenwaardestelling . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Appendices</b>	<b>15</b>
5.1	Appendix A: Product van twee rijen . . . . .	15
5.2	Appendix B: Cauchy en convergentie . . . . .	16
5.3	Appendix C: Bolzano-Weierstrass . . . . .	17
5.4	Appendix D: Continue functies, minima en maxima . . . . .	18
5.5	Appendix E: de stelling van Rolle en de middenwaardestelling . . . . .	19
5.6	Voetnoten en bedankjes . . . . .	19

# 1 Introductie

## 1.1 De verzameling $\mathbb{R}$

**Algebraïsche eigenschappen** De verzameling breuken  $\mathbb{Q}$  heeft de volgende algebraïsche eigenschappen:

- A1.**  $a + (b + c) = (a + b) + c$  voor elke  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ .
- A2.**  $a + b = b + a$  voor alle  $a, b \in \mathbb{Q}$ .
- A3.**  $a + 0 = 0$  voor alle  $a \in \mathbb{Q}$ .
- A4.** Voor elke  $a \in \mathbb{Q}$  is er een  $-a \in \mathbb{Q}$  zodat  $a + (-a) = 0$
- M1.**  $a(bc) = (ab)c$  voor elke  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ .
- M2.**  $ab = ba$  voor alle  $a, b \in \mathbb{Q}$ .
- M3.**  $a \cdot 1 = a$  voor alle  $a \in \mathbb{Q}$ .
- M4.** Voor elke  $a \in \mathbb{Q}$  met  $a \neq 0$  is er een  $a^{-1} \in \mathbb{Q}$  zodat  $a \cdot a^{-1} = 1$

De eigenschappen **A1** en **M1** zijn de *associatieve* eigenschappen van  $+$  en  $\cdot$  en de eigenschappen **A2** en **M2** zijn de *commutatieve* eigenschappen van  $+$  en  $\cdot$ .

**Consequenties van de veld eigenschappen** De volgende eigenschappen volgen uit de algebraïsche eigenschappen van  $\mathbb{Q}$ :

1. Als  $a + c = b + c$  dan geldt dat  $a = b$ .
2.  $a \cdot 0 = 0$  voor alle  $a \in \mathbb{Q}$ .
3.  $(-a)b = -ab$  voor alle  $a, b \in \mathbb{Q}$ .
4.  $(-a)(-b) = ab$  voor alle  $a, b \in \mathbb{Q}$ .
5. Als  $ac = bc$  en  $c \neq 0$  dan  $a = b$ .
6. Als  $ab = 0$  dan geldt dat  $a = 0$  of  $b = 0$ .

*De bewijzen van deze stellingen staan op pagina 16 van het boek.*

**Ordering** Ook heeft  $\mathbb{Q}$  een ordening " $\leq$ " die aan de volgende eigenschappen voldoet:

- O1.** Als  $a, b \in \mathbb{Q}$  dan geldt dat  $a \leq b$  of  $b \leq a$ .
- O2.** Als  $a \leq b$  en  $b \leq a$  dan  $a = b$ .
- O3.** Als  $a \leq b$  en  $b \leq c$  dan  $a \leq c$ .
- O4.** Als  $a \leq b$  dan geldt ook dat  $a + c \leq b + c$
- O5.** Als  $a \leq b$  en  $c \geq 0$ , dan ook  $ac \leq bc$ .

De eigenschap **O3** heet de *transitieve* eigenschap. Een veld met een ordening die voldoet aan **O1** tot en met **O5** heet een geordend veld.

**Consequenties van de ordening " $\leq$ "**

1. Als  $a \leq b$  dan  $-b \leq -a$ .
2. Als  $a \leq b$  en  $c \leq 0$  dan  $bc \leq ac$ .
3. Als  $0 \leq a$  en  $0 \leq b$  dan  $0 \leq ab$ .
4.  $0 \leq a^2$  voor elke  $a \in \mathbb{Q}$ .

5.  $0 < 1$ .
6. Als  $0 < a$  dan ook  $0 < a^{-1}$ .
7. Als  $0 < a < b$  dan geldt  $0 < b^{-1} < a^{-1}$ .

*Dit wordt bewezen op pagina 16-17 van het boek.*

**Absolute waarde** De absolute waarde is gedefinieerd als volgt:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{als } a \geq 0 \\ -a & \text{als } a < 0 \end{cases}$$

**Stellingen over de absolute waarde** De volgende stellingen over de absolute waarde zijn waar:

1.  $|a| \geq 0$ .
2.  $|ab| = |a| \cdot |b|$ .
3.  $|a + b| \leq |a| + |b|$ .

*Dit wordt bewezen op pagina 17-18 van het boek.*

**Afstand** De afstand tussen twee getallen  $a, b$  is de  $\text{dist}(a, b)$  wat gedefiniëerd is als:

$$\text{dist}(a, b) := |a - b|$$

**Stellingen over de afstand** De volgende stelling over afstand is waar:

**Afstand tussen de som van getallen**  $\text{dist}(a, c) \leq \text{dist}(a, b) + \text{dist}(b, c)$ .

*Dit wordt bewezen op pagina 18 van het boek.*

**Stellingen uit opgaven** De volgende handige stellingen worden bewezen in een opgave uit paragraaf 3:

**Opgave 3.5a** Voor elke  $a, b \in \mathbb{R}$  geldt dat  $|b| \leq a$  dan en slechts dan als  $-a \leq b \leq a$ .

**Opgave 3.5b** Voor elke  $a, b \in \mathbb{R}$  geldt dat  $||b| - |a|| \leq |b - a|$ .

**Opgave 3.6b** Laat  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , dan geldt dat  $|\sum_{i=1}^n a_i| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$

## 1.2 De compleetheid van $\mathbb{R}$

**Maxima en minima** Van een verzameling  $S \subseteq \mathbb{R}$  zijn het maximum en minimum als volgt gedefiniëerd:

**Maximum**  $s_0 = \max(S)$  dan en slechts dan als voor elke  $s \in S$  geldt dat  $s \leq s_0$  en  $s_0 \in S$ .

**Minimum**  $s_0 = \min(S)$  dan en slechts dan als voor elke  $s \in S$  geldt dat  $s \geq s_0$  en  $s_0 \in S$ .

**Intervallen** Een interval is een speciaal soort deelverzameling van  $\mathbb{R}$ , er zijn 4 verschillende intervallen:

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  dit heet een gesloten interval.  $\min([a, b]) = a$  en  $\max([a, b]) = b$ .
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  dit heet een half gesloten interval.  $\min([a, b)) = a$  en  $\max([a, b))$  bestaat niet.
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  dit heet een half gesloten interval.  $\min((a, b]) = a$  en  $\max((a, b])$  bestaat niet.
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  dit heet een open interval.  $\min((a, b))$  bestaat niet en  $\max((a, b))$  bestaat niet.

**Boven- en ondergrenzen** Boven- en ondergrenzen zijn als volgt gedefiniëerd: Laat  $S \subseteq \mathbb{R}$  dan geldt

**Bovengrens** Een getal  $M$  is een bovengrens van  $S$  als voor elke  $s \in S$  geldt dat  $s \leq M$ . Als een verzameling een bovengrens heeft dan heet die verzameling boven begrensd.

**Ondergrens** Een getal  $m$  is een ondergrens van  $S$  als voor elke  $s \in S$  geldt dat  $s \geq m$ . Als een verzameling een ondergrens heeft dan heet die verzameling onder begrensd.

**Stellingen over boven- en ondergrenzen** De volgende stelling wordt gegeven over bovengrenzen:

**Intervallen en begrenzingen** Als  $S$  boven en beneden begrensd is, dan zijn er twee getallen  $m, M \in \mathbb{R}$  zodat  $S \subseteq [m, M]$ .

**Suprema en infima** Het supremum en infimum van een verzameling zijn als volgt gedefiniëerd:

**Supremum**  $M = \sup(S)$  dan en slechts dan als voor elke  $s \in S$  geldt dat  $s \leq M$  en voor elke  $M_1 < M$  geldt dat er een  $s \in S$  is zodat  $M_1 < s$ . Dan is  $M$  de kleinste bovengrens van  $S$ .

**Infimum**  $m = \inf(S)$  dan en slechts dan als voor elke  $s \in S$  geldt dat  $m \leq s$  en voor elke  $m > m_1$  geldt dat er een  $s \in S$  waarvoor geldt dat  $s < m$ . Dan is  $m$  de grootste ondergrens van  $S$ .

**Stellingen** In paragraaf 4 van hoofdstuk 1 staan de volgende stellingen:

**Volledigheidsaxioma van  $\mathbb{R}$**  Het volledigheidaxioma luidt als volgt: Voor elke  $S \subseteq \mathbb{R}$  met  $S \neq \emptyset$  met een bovengrens is er een  $M \in \mathbb{R}$  zodat  $M = \sup(S)$ . *Dit is een axioma, er is geen bewijs.*

**“Omgekeerde” volledigheid “axioma”** Voor elke  $S \subseteq \mathbb{R}$  met  $S \neq \emptyset$  met een ondergrens is er een  $m \in \mathbb{R}$  zodat  $m = \inf(S)$ . Het is geen echt axioma want het volgt uit het volledigheidaxioma. *Het bewijs staat op pagina 24-25 van het boek.*

**Archimedische eigenschap** Zij  $a, b \in \mathbb{R}^+$  met  $a < b$ . Dan geldt dat er een  $n \in \mathbb{N}$  zodat  $na > b$ . *Het bewijs staat op pagina 25 van het boek.*

**De dichtheid van  $\mathbb{Q}$**  Als  $a, b \in \mathbb{R}$  en  $a < b$  dan is er een  $r \in \mathbb{Q}$  zodat  $a < r < b$ . *Het bewijs staat op pagina 25-26 van het boek.*

**Stellingen uit opgaven** De volgende stellingen worden bewezen in een opgave uit paragraaf 4:

**Opgave 4.7a** Laat  $S$  en  $T$  verzamelingen zijn met  $S, T \subseteq \mathbb{R}$  zodat  $S \subseteq T$ . Dan geldt dat  $\inf(T) \leq \inf(S) \leq \sup(S) \leq \sup(T)$ .

**Opgave 4.7b** Laat  $S$  en  $T$  verzamelingen zijn met  $S, T \subseteq \mathbb{R}$ . Dan geldt dat  $\sup(S \cup T) = \max\{\sup(S), \sup(T)\}$ .

**Opgave 4.8b** Laat  $S$  en  $T$  verzamelingen zijn zodat voor elke  $s \in S$  en  $t \in T$  geldt dat  $s \leq t$ . Dan geldt dat  $\sup(S) \leq \inf(T)$ .

**Opgave 4.9** Laat  $S$  een verzameling zijn zodat  $S \subseteq \mathbb{R}$ , dan geldt dat  $\inf(S) = -\sup(-S)$ .

**Opgave 4.14a** Laat  $A$  en  $B$  verzamelingen zijn met  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  en  $A+B = \{a+b : a \in A \text{ en } b \in B\}$ . Dan geldt dat  $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$ .

**Opgave 4.14b** Laat  $A$  en  $B$  verzamelingen zijn met  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ . Dan geldt dat  $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$ .

## 2 Rijen

### 2.1 Limieten van rijen

**Wat is een rij?** Een rij is een functie  $s : A \rightarrow B$  waar  $A = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq M\}$ . Een rij wordt vaak opgeschreven als  $s_n$  in plaats van  $s(n)$ , andere notaties zijn  $s_{n=m}^\infty$  of  $(s_m, s_{m+1}, s_{m+2}, \dots)$ . Bij Analyse op de Lijn is een rijtje vaak een functie  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , dus voor zo'n rijtje  $s_n$  geldt dat  $s_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ .

**Het limiet van een rijtje** Een rijtje  $(s_n)$  convergeert naar het getal  $s \in \mathbb{R}$  dan en slechts dan als er voor elke  $\epsilon > 0$  een  $N$  is zodat voor elke  $n > N$  geldt dat  $|s_n - s| < \epsilon$ . Dit is ook te schrijven als  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = s$ . Als er geen  $s \in \mathbb{R}$  is zodat  $s_n$  naar  $s$  convergeert, dan divergeert  $s_n$ .

**Het bewijzen van een limiet** Een formeel bewijs van het limiet van een rij  $s_n$  volgt de volgende stappen:

1. De definitie van de rij  $s_n$ .
2. Het definiëren van  $\epsilon > 0$ .
3. Het kiezen van  $N$  op basis van  $\epsilon$ .
4. Het aantonen dat  $|s_n - s| < \epsilon$  als  $n > N$ .

**Afschatten** Vaak wordt een  $N$  gevonden met behulp van afschatten van  $|s_n - s|$ . Afschatten houdt in dat er een rijtje  $t_n$  gekozen wordt zodat  $|s_n - s| < |t_n|$  en vervolgens wordt er aangetoond dat er een  $N$  is zodat voor elke  $n > N$  geldt  $|t_n| < \epsilon$ , dus geldt ook dat  $|s_n - s| < \epsilon$ .

Dit zijn enkele trucs voor het afschatten:

- Als  $|s_n - s|$  een breuk is van de vorm  $|\frac{a_n}{b_n}|$ , waar  $a_n, b_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ , dan geldt dat  $|\frac{a_n}{b_n}| < |\frac{a_n}{c_n}|$  als  $0 < |c_n| < |b_n|$ . Als het mogelijk is om een  $N$  te vinden zodat voor elke  $n > N$  geldt dat  $|\frac{a_n}{c_n}| < \epsilon$  voor elke  $\epsilon$ , dan geldt dus ook dat  $|s_n - s| = |\frac{a_n}{b_n}| < \epsilon$ , dus dan convergeert  $s_n$  naar  $s$ .
- Als  $|s_n - s|$  een breuk is van de vorm  $|\frac{a_n}{b_n}|$ , waar  $a_n, b_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ , dan geldt dat  $|\frac{c_n}{b_n}| < |\frac{a_n}{b_n}|$  als  $|a_n| < |c_n|$ . Als het dan mogelijk is om een  $N$  te vinden zodat voor elke  $n > N$  geldt dat  $|\frac{c_n}{b_n}| < \epsilon$  voor elke  $\epsilon$ , dan geldt dus ook dat  $|s_n - s| = |\frac{a_n}{b_n}| < \epsilon$ , dus dan convergeert  $s_n$  naar  $s$ .

- Als een rijtje  $s_n$  van de vorm is  $s_n = \sin(a_n) \cdot b_n$  met  $a_n, b_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  dan geldt dat  $|s_n| < |b_n|$  omdat  $-1 < \sin(a_n) < 1$ . Dus als er een  $N$  is zodat voor elke  $N < n$  geldt dat  $|b_n| < \epsilon$  voor elke  $\epsilon > 0$ , dan geldt ook  $|s_n| < \epsilon$ .

**Stellingen uit de opgaven** De volgende stellingen worden bewezen in paragraaf 8:

**Opgave 8.5a** Als  $a_n, b_n, s_n$  rijen zijn en voor elke  $n \in \mathbb{N}$  geldt  $a_n \leq s_n \leq b_n$  en  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = s$ , dan geldt ook  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = s$ .

**Opgave 8.9a** Zij  $s_n$  een rij. Als  $s_n \geq a$  voor een  $a \in \mathbb{R}$  voor alle behalve een eindig aantal  $n \in \mathbb{N}$ , dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) \geq a$ .

**Opgave 8.9b** Zij  $s_n$  een rij. Als  $s_n \leq a$  voor een  $a \in \mathbb{R}$  voor alle behalve een eindig aantal  $n \in \mathbb{N}$ , dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) \leq a$ .

**Opgave 8.9c** Zij  $s_n$  een rij. Als  $s_n \in [a, b]$  voor een  $a, b \in \mathbb{R}$  en voor alle behalve een eindig aantal  $n \in \mathbb{N}$ , dan  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) \in [a, b]$ .

## 2.2 Limietstellingen voor rijen

**Begrensde rijen** Een rij  $s_n$  is begrensd als er een  $M$  bestaat zodat  $|s_n| \leq M$  voor elke  $n \in \mathbb{N}$ .

**Convergent en begrensd** Als  $s_n$  een convergente rij is, dan is er een  $M$  zodat  $|s_n| \leq M$ . Als een rij convergeert dan is deze begrensd. *Het bewijs hiervoor staat op bladzijde 45 van het boek.*

**Rekenregels voor limieten** Voor limieten gelden bepaalde rekenregels. De volgende regels gelden **alleen** als de rijtjes  $s_n$  en  $t_n$  convergeren.

**De wortel van een rij** Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = s$  en  $s_n$  is een rij met  $s_n \in \mathbb{R}^+$  voor elke  $n \in \mathbb{N}$ . Dan geldt ook dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{s_n}) = \sqrt{s}$ . *Het bewijs hiervoor staat op pagina 42 van het boek.*

**Product van een getal en een limiet** De limiet  $\lim_{n \rightarrow \infty} (k \cdot s_n) = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)$  als  $s_n$  convergeert. *Het bewijs hiervoor staat op pagina 46 van het boek.*

**Som van limieten** De limiet  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n)$  als  $s_n$  en  $t_n$  convergeren. *Het bewijs hiervoor staat op bladzijde 46 van het boek.*

**Product van limieten** De limiet  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n \cdot t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n)$  als  $s_n$  en  $t_n$  convergeren. *Het uitgewerkte bewijs hiervoor staat in appendix A.*

**Het limiet van de breuk van twee rijen** De limiet  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{t_n}{s_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)}$  als  $s_n$  en  $t_n$  convergeren en als  $s_n \neq 0$  voor alle  $n \in \mathbb{N}$  en  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) \neq 0$ . *Het bewijs hiervoor staat op pagina 47 en 48 van het boek.*

**Enkele limieten** De limieten die hieronder staan zijn waar:

- De limiet  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^p}) = 0$  als  $p > 0$ .
- De limiet  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n) = 0$  als  $|a| < 1$ .
- De limiet  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{\frac{1}{n}}) = 1$ .
- De limiet  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{\frac{1}{n}}) = 1$  voor  $a > 0$ .

*De bewijzen hiervoor staan op pagina 48-49 van het boek.*

**Limieten en oneindig** Als een limiet niet convergeert, dan divergeert deze. Maar soms divergeert een rij naar niks en soms naar  $+\infty$  of  $-\infty$ .

**Divergeren naar oneindig** Een rij  $s_n$  divergeert naar oneindig dan en slechts dan als er voor elke  $M > 0$  een  $N$  is zodat voor elke  $N < n$  geldt dat  $M < s_n$ . Dit wordt opgeschreven als  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = +\infty$ .

Een rij  $s_n$  divergeert naar  $-\infty$  dan en slechts dan als er voor elke  $M < 0$  een  $N$  is zodat voor elke  $N < n$  geldt dat  $s_n < M$ . Dit wordt opgeschreven als  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = -\infty$ .

Een rij  $s_n$  heeft een limiet als  $s_n$  convergeert of als  $s_n$  divergeert naar  $+\infty$  of  $-\infty$ .

**Rekenregels voor limieten naar  $\pm\infty$**  Als een rijtje divergeert naar  $\pm\infty$  dan kunnen de eerder genoemde rekenregels niet gebruikt worden, de volgende regels wel.

**Het product van twee rijen** Zij  $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  met  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = +\infty$  en  $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n) > 0$  ( $t_n$  kan convergeren of divergeren naar  $+\infty$ ). Dan geldt dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n t_n) = +\infty$ . *Het bewijs hiervoor staat op pagina 52-53.*

**Limiet van de rij  $\frac{1}{s_n}$**  Zij  $s_n$  een rij met  $s_n > 0$ . Dan geldt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = +\infty$  dan en slechts dan als  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{s_n}) = 0$ . *Het bewijs staat op pagina 53-54.*

**Stellingen uit de opgaven** De volgende stellingen worden bewezen in paragraaf 9:

**Opgave 9.9c** Zij  $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  zodat er een  $N_0$  is zodat  $s_n \leq t_n$  voor elke  $n > N_0$ . Als  $s_n$  en  $t_n$  convergeren dan geldt  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n)$ .

**Opgave 9.10a** Zij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  met  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = +\infty$  en  $k > 0$ . Dan geldt dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (ks_n) = +\infty$ .

**Opgave 9.10c** Zij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  met  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = +\infty$  en  $k < 0$ . Dan geldt dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (ks_n) = -\infty$ .

**Opgave 9.11c** Zij  $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  met  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = +\infty$  en  $t_n$  is begrensds. Dan geldt dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n + t_n) = +\infty$ .

## 2.3 Monotone rijen

**Wat is een monotone rij?** Een rij is monotoon als het één van de volgende twee is:

**Monotoon stijgend** Een rij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  is monotoon stijgend als  $s_n \leq s_{n+1}$  voor elke  $n \in \mathbb{N}$ .

**Monotoon dalend** De rij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  is monotoon dalend als  $s_{n+1} \leq s_n$  voor elke  $n \in \mathbb{N}$ .

**Stellingen over monotonieiteit** De volgende stellingen over monotone rijen zijn waar:

**Gebonden monotone rijen** Elke begrensde monotone rij convergeert. *Het bewijs hiervoor staat op pagina 57 van het boek.*

**Onbegrense monotone rijen** Elke onbegrense monotone rij divergeert naar  $\pm\infty$ . *Het bewijs hiervoor staat op pagina 59.*

**Limieten van monotone rijen** Voor elke monotone rij  $s_n$  geldt dat  $s_n$  convergeert of divergeert naar  $\pm\infty$ .

## 2.4 Cauchy rijen

**Cauchy rijen** Een rij is Cauchy dan en slechts dan als voor elke  $\epsilon > 0$  er een getal  $N$  bestaat zodat voor elke  $m, n > N$  geldt dat  $|s_n - s_m| < \epsilon$ .

**Convergentie en Cauchy** De volgende stellingen zijn waar over de convergentie en het Cauchy zijn van een rij.

**Convergente rij is Cauchy** Als een rij  $s_n$  convergeert, dan is de rij ook Cauchy. *Het bewijs hiervoor staat op pagina 63.*

**Begrensdheid en Cauchy** Zij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Als  $s_n$  Cauchy is, dan is deze ook begrensd. *Het bewijs hiervoor staat op pagina 63.*

**Cauchy rij is convergent** Als een rij  $s_n$  Cauchy is, dan convergeert deze. *Het bewijs hiervoor staat in appendix B.*

## 2.5 lim sup en lim inf

**Wat zijn de lim sup en lim inf** De lim sup en lim inf zijn als volgt gedefiniëerd:

**De lim sup** Zij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Dan geldt:  $\limsup(s_n) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sup\{s_n : n > N\}$ .

**De lim inf** Zij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Dan geldt:  $\liminf s_n := \lim_{N \rightarrow \infty} \inf\{s_n : n > N\}$ .

**Stellingen over de lim inf en lim sup** De volgende stellingen gelden over de lim sup en de lim inf.

**lim en lim sup en lim inf** Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = s$ , dan geldt dat  $\liminf(s_n) = \limsup(s_n) = s$ . *Het bewijs hiervoor staat op pagina 61-62.*

**lim sup, lim inf en lim** Als  $\limsup(s_n) = \liminf(s_n) = s$  dan geldt ook dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = s$ . *Het bewijs hiervoor staat op pagina 62.*



**Product van rijen en lim sup** Zij  $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  waar  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = s$ . Dan geldt dat  $\limsup(s_n t_n) = s \limsup(t_n)$ . *Het bewijs staat op pagina's 79.*

**Verhouding tussen elementen van een rij** Zij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Dan geldt  $\liminf \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right| \leq \liminf |s_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup |s_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup \left| \frac{s_{n+1}}{s_n} \right|$ . *Het bewijs voor deze stelling staat op pagina 79-80.*

**Stellingen uit de opgaven** De volgende stellingen worden bewezen in paragraaf 10 en 12:

**Opgave 12.4** Zij  $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , dan geldt dat  $\limsup(s_n + t_n) \leq \limsup(s_n) + \limsup(t_n)$ .

**Opgave 12.6a** Zij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  en  $k \in \mathbb{R}$  met  $k > 0$ . Dan geldt dat  $\limsup(k s_n) = k \cdot \limsup(s_n)$ .

**Opgave 12.6c** Zij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  en  $k \in \mathbb{R}$  met  $k < 0$ . Dan geldt dat  $\limsup(k s_n) = k \cdot \liminf(s_n)$ .

**Opgave 12.7c** Zij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  zodat  $\limsup(s_n) = +\infty$  en  $k \in \mathbb{R}$  zodat  $k > 0$ , dan geldt dat  $\limsup(k \cdot s_n) = +\infty$ .

**Opgave 12.9a** Zij  $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  zodat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = +\infty$  en  $\liminf(t_n) > 0$ , dan geldt dat  $\limsup(s_n t_n) = +\infty$ .

**Opgave 12.9a** Zij  $s_n, t_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  zodat  $\limsup(s_n) = +\infty$  en  $\liminf(t_n) > 0$ , dan geldt dat  $\limsup(s_n t_n) = +\infty$ .

## 2.6 Deelrijen

**Wat is een deelrij?** Stel  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  is een deelrij. Dan is een deelrij van de vorm  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  waar er voor elke  $k$  een getal  $n_k \in \mathbb{N}$  is zodat  $t_k = s_{n_k}$  en  $n_k < n_{k+1}$ . De rij  $t_k$  is dus een rij met een deel van de elementen van  $s_n$  in dezelfde volgorde als in  $s_n$ .

**Deelrijen met verzamelingen** Zij  $N$  een verzameling met  $N \subseteq \mathbb{N}$ , en  $\sigma : \mathbb{Z} \rightarrow N$  zodat  $\sigma$  een oplopende bijectieve functie is. Als  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , dan is de deelrij  $t_k$  (ook wel  $t(k)$ ) de functie  $(s \circ \sigma)(k)$ .

**Stellingen over deelrijen** De volgende stellingen zijn waar over deelrijen:

**Limieten van deelrijen** Als  $t \in \mathbb{R}$  dan is er een deelrij van  $s_n$  die naar  $t$  convergeert dan en slechts dan als de verzameling  $\{n \in \mathbb{N} : |s_n - t| < \epsilon\}$  oneindig groot is voor elke  $\epsilon > 0$ . *Het bewijs hiervoor staat op bladzijden 68-69.*

**Boven onbegrensde deelrij en deelrijlimieten** Als een rij  $s_n$  geen bovengrens heeft, dan is er een deelrij met limiet  $+\infty$ . *Het bewijs staat op pagina 69.*

**Onder onbegrensde deelrij en deelrijlimieten** Als een rij  $s_n$  geen ondergrens heeft, dan is er een deelrij met limiet  $-\infty$ . *Het bewijs gaat hetzelfde als het bewijs van de stelling hiervoor.*

**Limiet van een rij en deelrijen** Als  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  convergeert naar  $s$ , dan convergeert elke deelrij van  $s_n$  naar  $s$ . *Het bewijs hiervoor staat op pagina 71.*

**Monotone deelrijen** Elke rij  $s_n$  heeft een monotone deelrij. *Het bewijs hiervoor staat op pagina 71.*

**Bolzano-Weierstrass** Elke begrensde rij heeft een convergente deelrij. *Het bewijs hiervoor staat in appendix C.*

**Deelrijlimieten** Een deelrijlimiet is een getal  $x \in \mathbb{R}$  waarvoor geldt dat er een deelrij  $s_{n_j}$  is met  $\lim_{j \rightarrow \infty} (s_{n_j}) = x$ .

**Stellingen over deelrijlimieten** De volgende stellingen over deelrijen zijn waar:

**Deelrijlimieten en lim inf en lim sup** Zij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Er bestaan monotone deelrijen  $s_{n_m}$  en  $s_{k_j}$  met  $\lim_{m \rightarrow \infty} (s_{n_m}) = \limsup(s_n)$  en  $\lim_{j \rightarrow \infty} (s_{k_j}) = \liminf(s_n)$ .

**Grootte van deelrijlimietverzameling** Zij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  en  $S$  de verzameling deelrijlimieten zijn. Dan geldt dat  $s \neq \emptyset$ .

**Uitersten van deelrijlimietverzameling** Zij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  en  $S$  de verzameling deelrijlimieten zijn. Dan geldt  $\sup(S) = \limsup(s_n)$  en  $\inf(S) = \liminf(s_n)$ .

**Limieten en deelrijlimieten** Zij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  en  $S$  de verzameling deelrijlimieten zijn. Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n)$  bestaat dan en slechts dan als  $S$  precies één element heeft, namelijk  $S = \{ \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) \}$ .

**Rijen in verzameling van deelrijlimieten** Zij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  en  $S$  de verzameling deelrijlimieten zijn. Laat  $t_n \in (S \cap \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ . Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n) = t$ , dan geldt dat  $t \in S$ .

## 3 Continuïteit en limieten

### 3.1 Continuïteit

**Wat is continuïteit** Laat  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Een functie  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  is continu op  $x_0$  dan en slechts dan als voor elke  $\epsilon > 0$  er een  $\delta > 0$  bestaat zodat voor elke  $x \in \text{dom}(f)$  geldt dat als  $|x - x_0| < \delta$  dan  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

**Continuïteit met rijen** Een functie  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  is ook continu dan en slechts dan als voor elk rijtje  $x_n \in \text{dom}(f)^{\mathbb{N}}$  met  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x_0$  geldt dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) = f(x_0)$ .

**Continuïteit op een interval** Zij  $f$  een functie zodat  $\text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ . Dan is  $f$  continu op  $S \subseteq \text{dom}(f)$  dan en slechts dan als voor elke  $x_0 \in S$  en  $\epsilon > 0$  er een  $\delta > 0$  zodat voor elke  $x \in \text{dom}(f)$  geldt dat als  $|x - x_0| < \delta$  dan ook  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

**Continuïteit bewijzen** Een bewijs van continuïteit op een  $x_0$  volgt de volgende stappen:

1. Zij  $\epsilon > 0$ .
2. Laat  $\delta$  een combinatie zijn van  $\epsilon$  en  $x_0$ .
3. Laat  $x \in \text{dom}(f)$ .
4. Aantonen dat als  $|x - x_0| < \delta$  dan ook  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

**$\delta$  vinden** Om een  $\delta$  te vinden voor elke  $\epsilon$  en een  $x_0$  is dit een handig stappenplan:

1. Probeer eerst  $|f(x) - f(x_0)|$  om te schrijven tot  $|x - x_0| \cdot g(x, x_0)$ , waar  $g$  een functie is met  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
2. Probeer vervolgens  $g(x, x_0)$  af te schatten tot iets dat niet afhankelijk is van  $x$  volgens de afschatregels voor rijtjes en altijd groter is dan  $g(x, x_0)$ .
3. Laat  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de afgeschatte versie van  $g(x, x_0)$  zijn.
4. Dan geldt dus dat  $|f(x) - f(x_0)| < |x - x_0| \cdot g(x, x_0) < |x - x_0| \cdot h(x_0)$ .
5. In het bewijs laat dan  $\epsilon > 0$  en kies dan  $\delta = \frac{\epsilon}{h(x_0)}$ .
6. Als  $|x - x_0| < \delta$ , dan geldt dus  $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{h(x_0)}$ . Ga nu het afschat proces omgekeerd opschrijven. Door de keuzes die we gemaakt in het afschatproces hebben volgt dus  $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ .

**Stellingen over continuïteit** De volgende stellingen over continue functies zijn waar:

**Absolute waarden, product met getallen en continuïteit** Zij  $f$  een functie die continu is op  $x_0$  met  $\text{dom}(f) \in \mathbb{R}$ . Dan geldt dat de functies  $|f|$  en  $k \cdot f$  met  $k \in \mathbb{R}$  ook continu zijn op  $x_0$ . *Het bewijs staat op pagina 128.*

**Combineren van functies** Zij  $f, g$  functies die continu zijn in  $x_0$ . Dan geldt dat de volgende functies ook continu zijn in  $x_0$ :

- $f + g$ .
- $f \cdot g$ .
- $\frac{f}{g}$  met  $g(x_0) \neq 0$ .

*Het bewijs hiervoor staat op de bladzijde 129.*

**Samenstellen van functies** Zij  $f, g$  functies die continu zijn op  $x_0$ , dan geldt dat  $f \circ g$  ook continu is op  $x_0$ . *Het bewijs hiervoor staat op pagina 129.*

**Eigenschappen van continue functies** Voor functies die continu zijn op een bepaald interval gelden de volgende stellingen:

**Continuïteit, maxima en minima** Laat  $f$  een continue functie zijn op  $[a, b]$  dan is  $f$  een begrensde functie en voor alle  $x \in [a, b]$  zijn er  $x_0, y_0 \in [a, b]$  zodat  $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$ , oftewel  $f$  bereikt haar minimum en maximum op het interval  $[a, b]$ . *Het bewijs hiervoor staat in appendix D.*

**Tussenwaardestelling** Als de functie  $f$  continu is op een interval  $I$ , dan geldt dat wanneer  $a < b$  voor een  $a, b \in I$  en  $f(a) < y < f(b)$  of  $f(b) < y < f(a)$ , dan is er tenminste één  $x \in (a, b)$  zodat  $f(x) = y$ . *Het bewijs hiervoor staat op pagina 134.*

**Gevolg van de tussenwaardestelling** Als een functie  $f$  continu is op een interval  $I$ , dan is  $f(I)$  ook een interval. *Het bewijs staat op bladzijde 135.*

**Inverse en continuïteit** Zij  $f$  een strikt stijgende continue functie, dan is  $f^{-1}$  ook een continue functie. *Het bewijs hiervoor staat op pagina 137.*

**Stijgende functie, intervallen en continue functies** Zij  $g$  een strikt stijgende functie op interval  $J$ . Als  $g(J)$  een interval is, dan is  $g$  continu op  $J$ . *Het bewijs staat op pagina 137.*

**Continuïteit en bijectiviteit** Zij  $f$  een continue bijectieve functie op een interval  $I$ . Dan is  $f$  strikt stijgend of strikt dalend. *Het bewijs staat op pagina 138.*

**Stellingen uit de opgaven** De volgende stellingen worden bewezen in de opgaven van paragraaf 17 en 18.

**Opgave 17.5b** Elke polynoom  $p$  is continu.

### 3.2 Uniforme continuïteit

**Wat is uniforme continuïteit** Zij  $S$  een verzameling zodat  $S \subseteq \mathbb{R}$ . Een functie  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  is uniform continu dan en slechts dan als voor elke  $\epsilon > 0$  er een  $\delta > 0$  zodat voor elke  $x_0, x \in S$  geldt dat als  $|x_0 - x| < \delta$  dan  $|f(x_0) - f(x)| < \epsilon$ .

**Uniforme continuïteit vs continuïteit** Het verschil tussen de definitie van continuïteit en die van uniforme continuïteit is de plek waar de  $x_0$  gedefinieerd wordt. Bij uniforme continuïteit wordt de  $x_0$  gedefinieerd na de  $\delta$ , en bij “gewone” continuïteit wordt de  $x_0$  gedefinieerd voor de  $\delta$ . Dus  $\delta$  kan ook afhangen van  $x_0$  bij “gewone” continuïteit, wat niet kan bij uniforme continuïteit.

**Stellingen over uniforme continuïteit** De volgende stellingen zijn waar over uniforme continuïteit:

**Continu op een interval en uniforme continuïteit** Als een functie  $f$  continu is op een gesloten interval  $[a, b]$ , dan is  $f$  uniform continu op  $[a, b]$ . *Het bewijs hiervoor staat op pagina 143.*

**Uniform continue functies en Cauchy rijen** Zij  $f$  een uniform continue functie op een verzameling  $S \in \text{dom}(f)$  en  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  zodat  $s_n$  ee Cauchy-rij is. Dan geldt dat  $(f(s_n))$  ook een Cauchy-rij is. *Het bewijs staat op pagina 146.*

**Uitbreiden van domein** Zij  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  een functie. Dan kan  $f$  uitgebreid worden naar een continue functie  $\tilde{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dan en slechts dan als  $f$  uniform continu is op  $(a, b)$ . *Het bewijs staat op bladzijde 148-149.*

### 3.3 Limieten van functies

**Definitie van de limiet van functies** De limiet van een functie is als volgt gedefinieerd, afhankelijk van  $a$  en  $L$ :  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = L \Leftrightarrow$

	$a \in \mathbb{R}$	$a = \infty$	$a = -\infty$
$L \in \mathbb{R}$	$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \\ 0 <  x - a  < \delta \\ \Rightarrow  f(x) - L  < \epsilon$	$\forall \epsilon > 0 \exists \alpha : \\ x > \alpha \\ \Rightarrow  f(x) - L  < \epsilon$	$\forall \epsilon > 0 \exists \alpha : \\ x < \alpha \\ \Rightarrow  f(x) - L  < \epsilon$
$L = \infty$	$\forall M > 0 \exists \delta > 0 : \\ 0 <  x - a  < \delta \\ \Rightarrow f(x) > M$	$\forall M > 0 \exists \alpha : \\ x > \alpha \\ \Rightarrow f(x) > M$	$\forall M > 0 \exists \alpha : \\ x < \alpha \\ \Rightarrow f(x) > M$
$L = -\infty$	$\forall M < 0 \exists \delta > 0 : \\ 0 <  x - a  < \delta \\ \Rightarrow f(x) < M$	$\forall M < 0 \exists \alpha : \\ x > \alpha \\ \Rightarrow f(x) < M$	$\forall M < 0 \exists \alpha : \\ x < \alpha \\ \Rightarrow f(x) < M$

**Speciale limieten** Er zijn ook nog enkele speciale limieten, namelijk de volgende:

**Limiet van beneden** De limiet van beneden wordt als volgt genoteerd  $\lim_{x \uparrow a} (f(x)) = L$  of  $\lim_{x \rightarrow a^-} (f(x)) = L$ . Deze is als volgt gedefiniëerd: voor elke  $\epsilon > 0$  is er een  $\delta > 0$  zodat voor elke  $x \in \mathbb{R}$  geldt dat als  $0 < a - x < \delta$ , dan geldt dat  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

**Limiet van boven** De limiet van boven wordt genoteerd als volgt:  $\lim_{x \downarrow a} (f(x)) = L$ . Dit is zo gedefiniëerd: voor elke  $\epsilon > 0$  is er een  $\delta > 0$  zodat voor elke  $x \in \mathbb{R}$  geldt dat als  $0 < x - a < \delta$  dan geldt dat  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

**Limiet op een verzameling** Zij  $S \subseteq \mathbb{R}$  een verzameling. Dan is de limiet op die verzameling gedefiniëerd als volgt:  $\lim_{x \rightarrow a^s} (f(x))$  dan en slechts dan als voor elke  $\epsilon > 0$  er een  $\delta > 0$  is zodat voor elke  $x \in S$  geldt dat als  $0 < |x - a| < \delta$  dan geldt ook dat  $|f(x) - L| < \epsilon$ .

Als  $L = \infty$  of  $L = -\infty$ , dan geldt dit uiteraard niet maar dan moet de corresponderende voorwaarde overgenomen worden die in de tabel staat, maar alleen de voorwaarde op  $x$  ( $0 < x - a < \delta$  of  $0 < a - x < \delta$ ) blijft dan wel staan.

**Limieten en rijen** Net als bij continuïteit is het ook mogelijk om deze limieten te definiëren met behulp van rijtjes. Hierbij is het belangrijkste punt om te maken dat het domein van het rijtje verandert, afhankelijk van welk limiet je wil berekenen. Specifieke definities ga ik hier niet opschrijven.

**Stellingen over limieten** De volgende stellingen over limieten van functies zijn waar:

**Wanneer bestaat de limiet** Als geldt dat  $\lim_{x \uparrow a} (f(x)) = L$  en  $\lim_{x \downarrow a} (f(x)) = L$ , dan geldt dat  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = L$  en andersom.

**Continuïteit en limieten** Als een functie continu is, dan geldt voor elke  $a \in \text{dom}(f)$  dat  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = f(a)$ .

## 4 Differentiatie en integratie

### 4.1 Afgeleides

**Wat is de afgeleide** Een functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is differentieerbaar dan en slechts dan als de limiet  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  bestaat en eindig is. De waarde van de limiet is dan de afgeleide op dat punt. Op elk punt  $a$  waar  $f$  differentieerbaar is, is  $f'(a)$  gedefinieerd als  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ .

**Het domein van  $f'$**  Omdat  $\text{dom}(f')$  de verzameling punten is waarop  $f$  differentieerbaar is, geldt dat  $\text{dom}(f') \subseteq \text{dom}(f)$ .

**Afgeleides en continuïteit** Als een functie differentieerbaar is op een punt  $a$ , dan is de functie ook continu. *Het bewijs hiervoor staat op pagina 225.*

**Eigenschappen van de afgeleide** Zij  $f$  en  $g$  differentieerbare functies op een punt  $a$ , dan gelden de volgende stellingen:

**Het bepalen van de afgeleide** Om de afgeleide te bepalen zijn de volgende regels. *Het bewijs hiervoor staat op pagina 226 – 227.*

1.  $(cf)'(a) = c \cdot f'(a)$
2.  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
3. Voor het vermenigvuldigen van functies is de productregel:  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
4. Voor het berekenen van het quotient van twee functies is de quotientregel: als  $f(a) \neq 0$ , dan geldt dat  $(\frac{f}{g})'(a) = \frac{g(a)f'(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}$

**Kettingregel** Zij  $f$  een op  $a$  differentieerbare functie en  $g$  op  $f(a)$ , dan geldt dat de samengestelde functie  $g \circ f$  differentieerbaar is op  $a$  en als afgeleide heeft het  $(f \circ g)'(a) = g'(f(a))f'(a)$ .

## 4.2 Middenwaardestelling

**Maxima, minima en afgeleiden** Als  $f$  gedefinieerd is op een open interval  $(a, b)$  en een maximum aanneemt op  $x_0$  en  $f$  differentieerbaar is op  $x_0$ , dan geldt dat  $f'(x_0) = 0$ . *Het bewijs hiervoor staat op pagina's 232 en 233.*

**Stelling van Rolle** Zij  $f$  een continue functie op  $[a, b]$  die differentieerbaar is op  $(a, b)$  met  $f(a) = f(b)$ . Dan is er tenminste één  $x \in (a, b)$  zodat  $f'(x) = 0$ .

**Middenwaardestelling** Zij  $f$  een continue functie op  $[a, b]$  die differentieerbaar is op  $(a, b)$ . Dan is er tenminste één  $x \in (a, b)$  zodat geldt dat  $f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . *Het bewijs hiervoor staat in appendix E.*

## 5 Appendices

### 5.1 Appendix A: Product van twee rijen

**Te bewijzen** Zij  $s_n, t_n \in \mathbb{R}$ . Als  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = s$  en  $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n) = t$  dan geldt dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n t_n) = st$ .

*Bewijs.* Zij  $\epsilon > 0$ . Omdat  $s_n$  convergeert is er een  $M > 0$  zodat  $|s_n| < M$  voor elke  $n \in \mathbb{N}$ .

Omdat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n) = t$  is er een  $N_1$  zodat  $|t_n - t| < \frac{\epsilon}{2M}$ . Dit is omdat ook  $\frac{\epsilon}{2M} > 0$  en  $|t_n - t|$  kan willekeurig klein worden, dus ook kleiner dan  $\frac{\epsilon}{2M}$ .

Ook weten we dat er een  $N_2$  is zodat  $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2(|t|+1)}$ . De redenering daarvoor is hetzelfde als de redenering voor  $t_n$ .

Laat nu  $N = \max\{N_1, N_2\}$ . Dan geldt dat als  $n > N$  dan zowel  $|t_n - t| < \frac{\epsilon}{2M}$  als  $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2(|t|+1)}$  als  $n > N$ .

We weten dat  $|t_n - t| < \frac{\epsilon}{2M}$ . Daarom geldt ook dat  $|s_n||t_n - t| \leq |s_n| \cdot \frac{\epsilon}{2M}$ . Merk op dat “ $\leq$ ” niet omgedraaid wordt omdat  $|s_n| \geq 0$ . En omdat  $|s_n| < M$  voor elke  $n$  ( $M$  is een bovengrens), geldt dat  $|s_n| \cdot \frac{\epsilon}{2M} < M \cdot \frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2}$  dus ook dat  $|s_n||t_n - t| < \frac{\epsilon}{2}$ .

Ook weten we dat  $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2(|t|+1)}$ , waaruit volgt dat  $|t||s_n - s| < |t| \cdot \frac{\epsilon}{2(|t|+1)}$ . Omdat  $\frac{\epsilon}{2(|t|+1)} > \frac{\epsilon}{2(|t|)}$  geldt dat  $|t||s_n - s| < |t| \cdot \frac{\epsilon}{2(|t|)}$  dus dat  $|t||s_n - s| < \frac{\epsilon}{2}$ .

Omdat  $|s_n||t_n - t| < \frac{\epsilon}{2}$  en  $|t||s_n - s| < \frac{\epsilon}{2}$  geldt ook dat  $|s_n||t_n - t| + |t||s_n - s| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ .

Uit stellingen over het vermenigvuldigen van absolute waarden volgt

$|s_n||t_n - t| + |t||s_n - s| = |s_n t_n - s_n t| + |s_n t - st|$ . Dus  $|s_n t_n - s_n t| + |s_n t - st| < \epsilon$ . Volgens de driehoeks-ongelijkheid geldt dan  $|s_n t_n - s_n t + s_n t - st| \leq |s_n t_n - s_n t| + |s_n t - st|$ .

Omdat  $|s_n t_n - s_n t + s_n t - st| = |s_n t_n - st|$  en  $|s_n t_n - s_n t| + |s_n t - st| < \epsilon$  geldt dat  $|s_n t_n - st| < \epsilon$  als  $n > N$  met  $N = \max(N_1, N_2)$ .

We hebben nu dus bewezen dat voor elke  $\epsilon > 0$  er een  $N$  bestaat, namelijk  $\max(N_1, N_2)$ , zodat voor elke  $n > N$  geldt dat  $|s_n t_n - st| < \epsilon$ . Dit is wat we moesten bewijzen. □

## 5.2 Appendix B: Cauchy en convergentie

**Te bewijzen** Een rij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . De rij  $s_n$  convergeert dan en slechts dan als  $s_n$  Cauchy is.

Voor dit bewijs tonen we aan dat een Cauchy rij convergeert, het bewijs de andere kant op is gegeven in een andere stelling.

### Bewijs dat een Cauchy rij convergeert

Zij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  en  $s_n$  is Cauchy. Dan geldt dus dat er voor elke  $\epsilon > 0$  een  $N$  bestaat zodat voor elke  $m, n > N$  geldt dat  $|s_n - s_m| < \epsilon$ .

Omdat  $|s_n - s_m| < \epsilon$  waar is, is ook  $-\epsilon < s_n - s_m < \epsilon$  waar, dus  $s_n < s_m + \epsilon$ . Dus is  $s_m + \epsilon$  een bovengrens voor de verzameling  $\{s_n : n > N\}$ .

Omdat  $\{s_n : n > N\}$  een bovengrens heeft heeft het dus ook een supremum, namelijk  $\sup\{s_n : n > N\}$ , we noemen dit supremum  $v_N$ .

Het supremum is altijd de kleinste bovengrens van een verzameling dus  $v_N \leq s_m + \epsilon$ . Maar dan geldt ook dat  $v_N - \epsilon \leq s_m$ , dus  $v_N - \epsilon$  is een ondergrens van  $s_m$ . Dus geldt dat  $s_m$  ook een infimum heeft, namelijk  $v_N - \epsilon$ .

Omdat het infimum de kleinste bovengrens is geldt dat  $v_N - \epsilon \leq \inf\{s_m : m > N\}$ . We noemen dit infimum  $u_N$ . Dus  $v_N \leq u_N + \epsilon$ .

Omdat  $\limsup(s_n) \leq \sup\{s_n : n > N\}$  en  $\liminf(s_n) + \epsilon \geq \inf\{s_n : n > N\} + \epsilon$  weten we dat  $\limsup(s_n) \leq \sup\{s_n : n > N\} \leq \inf\{s_n : n > N\} + \epsilon \leq \liminf(s_n) + \epsilon$ .

We hebben nu dus bewezen dat  $\limsup(s_n) \leq \liminf(s_n) + \epsilon$  voor een willekeurige  $\epsilon > 0$  als  $s_n$  Cauchy is. Dus  $\limsup(s_n) = \liminf(s_n)$ .

We weten dat  $\liminf(s_n) \leq \limsup(s_n)$  en  $\limsup(s_n) \leq \liminf(s_n)$ , dus moet wel gelden dat  $\liminf(s_n) = \limsup(s_n)$ .

Definieer nu  $s$  als volgt  $s := \limsup s_n = \liminf s_n$ . Omdat  $\liminf s_n = \limsup s_n$  waar is, geldt ook dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = s$ , dus  $s_n$  convergeert naar  $s$ .

We hebben nu dus bewezen dat als een rij  $s_n$  Cauchy is, dat  $s_n$  dan ook convergeert.

□



### 5.3 Appendix C: Bolzano-Weierstrass

Deze appendix bevat twee bewijzen: namelijk dat elke rij een monotone deelrij heeft (1), en dat elke begrensde rij een convergente deelrij heeft (2).

#### Bewijs van 1

Zij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . De  $n^e$  term van de rij is dominant als voor elke  $m > n$  geldt dat  $s_m < s_n$ .

Er zijn nu twee verschillende mogelijkheden:

1. Er zijn oneindig veel dominante termen.
2. Er zijn eindig veel dominante termen.

Als 1 het geval is, laat dan de functie  $(s \circ \sigma)(n)$  de  $n^e$  dominante term zijn van  $s_n$ . Dan is de deelrij  $(s \circ \sigma)$  dus monotoon dalend, want elke term van  $(s \circ \sigma)$  is dominant, dus groter dan alle daaropvolgende termen.

Als 2 het geval is dan is er dus een laatste dominante term. Oftewel een  $N$ , waar  $s_N$  de laatste dominante term is, zodat voor elke  $n > N$  geldt dat  $s_n$  niet dominant is. Dus voor elke  $n > N$  is er een  $m > n$  zodat  $s_n \leq s_m$ .

Kies dan als  $n_1$  het getal  $N + 1$ . Dan geldt dus dat er een  $n_2 > n_1$  is zodat  $s_1 \leq s_2$ . Ook  $s_{n_2}$  is niet dominant dus er is een  $n_3 > n_2$  zodat  $s_{n_2} \leq s_{n_3}$ . Herhaal dit proces tot in het oneindige zodat je een rij krijgt  $s_{n_k} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Dan geldt voor die rij dat  $s_{n_i} \leq s_{n_j}$  als  $i < j$ , dus  $s_{n_k}$  is een monotoon stijgende rij.

We hebben nu bewezen dat in zowel geval 1 als 2 de rij  $s_n$  een monotone deelrij heeft. Dus  $s_n$  heeft altijd een monotone deelrij. Dit is wat we moesten bewijzen. □

#### Bewijs van 2

Zij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  zodat  $s_n$  begrensd is. We weten dat  $s_n$  begrensd is, dus elke deelrij van  $s_n$  is ook begrensd.

Ook weten we dat  $s_n$  een monotone deelrij  $s_{n_k}$  heeft, die dus ook begrensd is. De rij  $s_{n_k}$  is dus een monotone begrensde deelrij, dus  $s_{n_k}$  convergeert.

Dus elke begrensde rij  $s_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  heeft een convergente deelrij, namelijk de monotone deelrij  $s_{n_k}$ . Dit is wat we moesten bewijzen. □

## 5.4 Appendix D: Continue functies, minima en maxima

Zij  $f$  een continue functie op het interval  $[a, b]$ , dan is  $f$  een begrensde functie en  $f$  neemt haar maximum en minimum aan, dus er zijn een  $x_0, y_0 \in [a, b]$  zodat voor elke  $x \in [a, b]$  geldt dat  $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$ . We bewijzen eerst dat  $f$  begrensd is (1) en vervolgens dat  $f$  haar maximum en minimum aanneemt (2).

### Bewijs van 1

Stel  $f$  is een continue onbegrensde functie op  $[a, b]$ , dan geldt voor elke  $n \in \mathbb{N}$  dat er een rij  $x_n \in [a, b]$  bestaat zodat  $|f(x_n)| > n$ .

Volgens Bolzano-Weierstrass heeft  $(x_{n_k})$  dan een deelrij die convergeert naar een reëel getal  $x_0$  omdat  $x_n$  begrensd is.

Dus  $\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_{n_k})) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k})) = f(x_0)$ , maar we hebben ook dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) = +\infty$  omdat de rij  $f(x_n)$  boven onbegrensd is. Maar  $f(x_0) \in \mathbb{R}$  en  $\infty \notin \mathbb{R}$

Dit is een tegenspraak, dus moet wel gelden dat  $f(x)$  begrensd is. □

### Bewijs van 2

We weten dat  $f(x)$  begrensd is dus er is een  $M := \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$  die eindig is.

Omdat  $M$  het supremum is geldt voor dat voor elke  $n \in \mathbb{N}$  er een  $y_n \in [a, b]$  is zodat  $M < \frac{1}{n} < f(y_n) \leq M$  omdat  $M$  de kleinste bovengrens is. Volgens het “Squeeze Lemma” geldt dan dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(y_n)) = M$ .

Omdat  $f(x)$  continu is geldt dat  $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(y_n)) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n))$  en omdat  $y_n \in [a, b]$  ook  $y_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} (y_n) \in [a, b]$ , dus er is een  $y_0$  zodat  $f$  op  $y_0$  een maximum aan neemt.

We weten dat  $-\sup\{-f(x) : x \in [a, b]\} = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$ . We kunnen op dezelfde manier als hiervoor het supremum van  $-f(x)$  bepalen. En dan is er dus ook een  $x_0$  zodat  $-f(x_0)$  het supremum is van  $-f(x)$ . En dan is het minimum van  $f$  de waarde  $f(x_0)$ .

Dus als  $f(x)$  continu is op  $[a, b]$  neemt deze haar minimum en maximum aan op  $[a, b]$ . Dit is wat we moesten bewijzen. □

## 5.5 Appendix E: de stelling van Rolle en de middenwaardestelling

**De stelling van Rolle** Zij  $f$  een functie die continu is op  $[a, b]$  en differentieerbaar op  $(a, b)$  waarvoor geldt dat  $f(a) = f(b)$ , dan is er minstens één  $x \in (a, b)$  waarvoor geldt dat  $f'(x) = 0$ . Dit heet de stelling van Rolle.

*Bewijs.* Omdat  $f$  continu is weten we dat er  $x_0, y_0 \in [a, b]$  zodat voor elke  $x \in [a, b]$  geldt dat  $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$ . Dan zijn er twee gevallen:

1. De punten  $x_0$  en  $y_0$  zijn beiden eindpunten, dan is de functie  $f$  constant, en dan is de afgeleide overal 0
2. Anders neemt  $f$  een maximum of minimum aan op  $x_0$  of  $y_0$ , dus dan is op  $x_0$  of op  $y_0$  de afgeleide 0.

In beide gevallen geldt dan dat er een punt is waar de afgeleide 0 is, dus we hebben de stelling van Rolle bewezen.  $\square$

**Middenwaardestelling** Zij  $f$  een functie die continu is op  $[a, b]$  die differentieerbaar is op  $(a, b)$ . Dan is er tenminste één  $x \in (a, b)$  waarvoor geldt dat  $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ . Dit heet de middenwaardestelling.

*Bewijs.* Zij  $L$  een functie die een rechte lijn trekt tussen  $(a, f(a))$  en  $(b, f(b))$ . Dan geldt dat  $L(a) = f(a)$  en  $L(b) = f(b)$ . Ook geldt dat  $L'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  voor alle  $x$ .

Zij  $g(x) = f(x) - L(x)$  voor  $x \in [a, b]$ , dan geldt dat  $g(a) = 0 = g(b)$ , dus volgens de stelling van Rolle geldt dan dat er een  $x \in (a, b)$  is zodat  $g'(x) = 0$ . En volgens de regels van afgeleides nemen geldt dat  $g'(x) = L'(x) - f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(x)$ . Hieruit volgt dan duidelijk dat  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x)$ .  $\square$

## 5.6 Voetnoten en bedankjes

Heel erg bedankt aan Quirijn voor het delen van de latex uitwerking van de tabel in paragraaf 3.3. Je bent een held!