Samenvatting Algebra 1

Jonas van der Schaaf

9 mei 2020

Inhoudsopgave

1 Groepen **2**

2 Groepen die misschien handig zijn **3**

1 Groepen

Groepsaxioma's Een groep is een paar van een verzameling G met een bewerking $\circ\colon G \times G \to G$ met de volgende eigenschappen:

1. Associativiteit: voor elke $a, b, c \in G$ geldt dat
$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c),$$
2. Neutraal element: er is een $e \in G$ zodat voor elke $g \in G$ geldt dat
$$e \circ g = g \circ e = g,$$
3. Voor elke $a \in G$ is er een a^* zodat
$$a \circ a^* = a^* \circ a = e.$$

Abelse Groepen Zij G een groep. Als voor elke $a, b \in G$ geldt dat $a \circ b = b \circ a$, dan heet G abels, en dan zeggen we dat elk element in G commuteert.

Multiplicatieve notatie In de rest van deze samenvatting zal ik (bijna) altijd de multiplicatieve notatie gebruiken, dat komt overeen met $a \circ b = ab$, $\underbrace{a \circ \cdots \circ a}_{n\times} = a^n$ en $a^* = a^{-1}$.

Simpele stellingen over inverses Zij G een groep, dan geldt dat:

1. Er is precies 1 eenheidselement in een groep,
2. Elk element $a \in G$ heeft precies 1 inverse,
3. Voor elke $a, b \in G$ geldt dat
$$\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$$
en dat
$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

Verder geldt voor $n, m \in \mathbb{Z}$ dat $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ en dat $a^{nm} = (a^n)^m$.

Uniciteit van producten Zij G een groep en $a, b \in G$. Dan is er precies één $x \in G$ zodat $ax = b$, namelijk $x = a^{-1}b$.

Ook is er precies één $y \in G$ zodat $ya = b$, namelijk $y = ba^{-1}$.

Producten van meer dan 1 element Zij G een groep met $a_1, \ldots, a_n \in G$ dan is het product $a_1 \cdots a_n$ inductief gedefinieerd als $(a_1 \cdots a_{n-1})a_n$. Ook volgt door inductie toe te passen uit deze definitie dat $(a_1 \cdots a_k)(a_{k+1} \cdots a_n) = a_1 \cdots a_n$.

2 Groepen die misschien handig zijn

Quaternionen

Viergroep van Klein

Quaternionengroep (niet de quaternionen)

Symmetriegroep

Diëdergroep