1 Lista de Exercícios de TP547

Jonas Vilasboas Moreira

OBS: Todos os códigos utilizados nas simulações dos exercícios se encontram na pasta códigos do mesmo repositório no qual se encontra este arquivo.

1. Mostre, usando análise e simulação, que o gerador de números aleatórios definido por Xi+1 = 5xi mod (7) é um gerador de período completo. Determine a sequência gerada para sementes x0 = 4 e x0 = 7.
Compare as sequências e comente os resultados.

Resposta:

Xi+1 = 5xi mod (7)

Para x0=4

x0=4
x1=5.(4)mod(7)=6
x2=5.(6)mod(7)=2
x3=5.(2)mod(7)=3
x4=5.(3)mod(7)=1
x5=5.(1)mod(7)=5
x6=5.(5)mod(7)=4 -> começa a repetir, logo o período vai até x5

Iniciando com a semente Xo=4 encontramos um período completo onde T={4, 6, 2, 3, 1, 5}. Como estamos utilizando um Gerador Congruente Linear, de acordo com sua definição, todos os valores da sequência se encontram entre a faixa de valores 0 e m-1, onde m=7. Ainda de acordo com a definição, para este tipo de gerador o período T nunca será maior que m. Nesta simulação, T=6 que é menor que m=7, que comprovam que os resultados estão dentro do esperado.

Para x0=7

x0=7
x1=5.(7)mod(7)=0 -> como encontramos um 0 no resultado, se fôssemos continuar a sequência, todos os resultados seriam zero.

Comparando as duas sequências, para o gerador proposto neste exercício, a melhor semente entre as fornecidas é x0=4.

Os resultados obtidos através de simulação (código em anexo) comprovam os resultados analíticos.

Gráfico para x0=4:

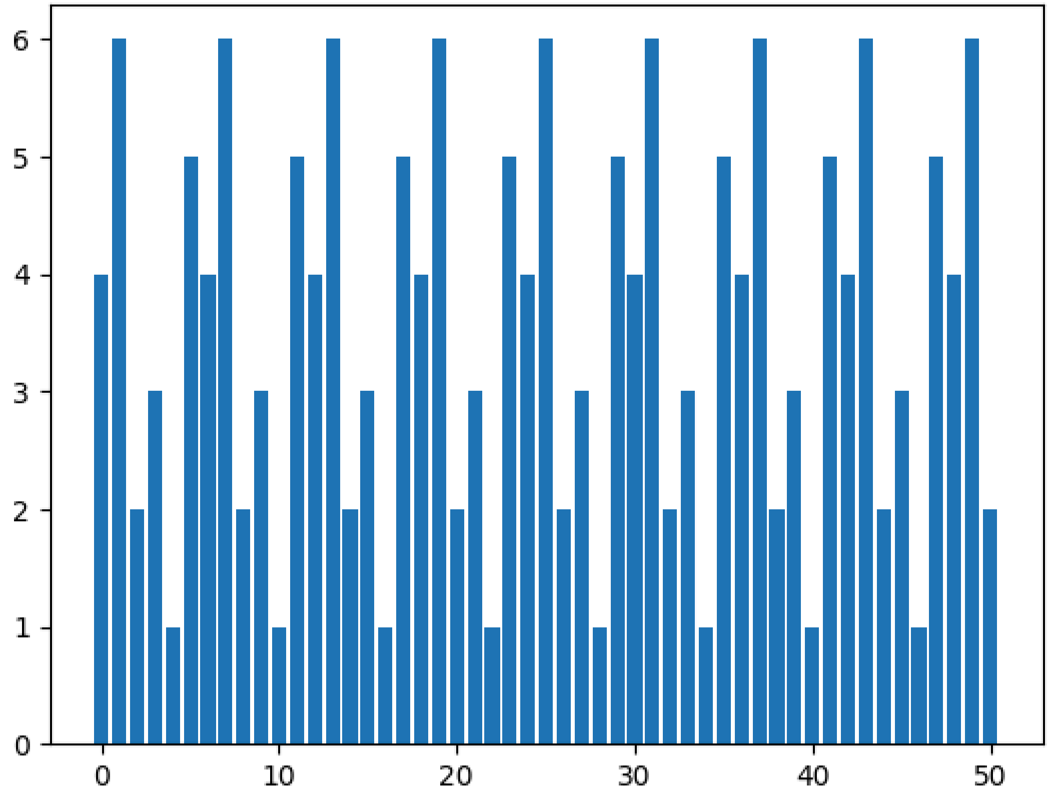
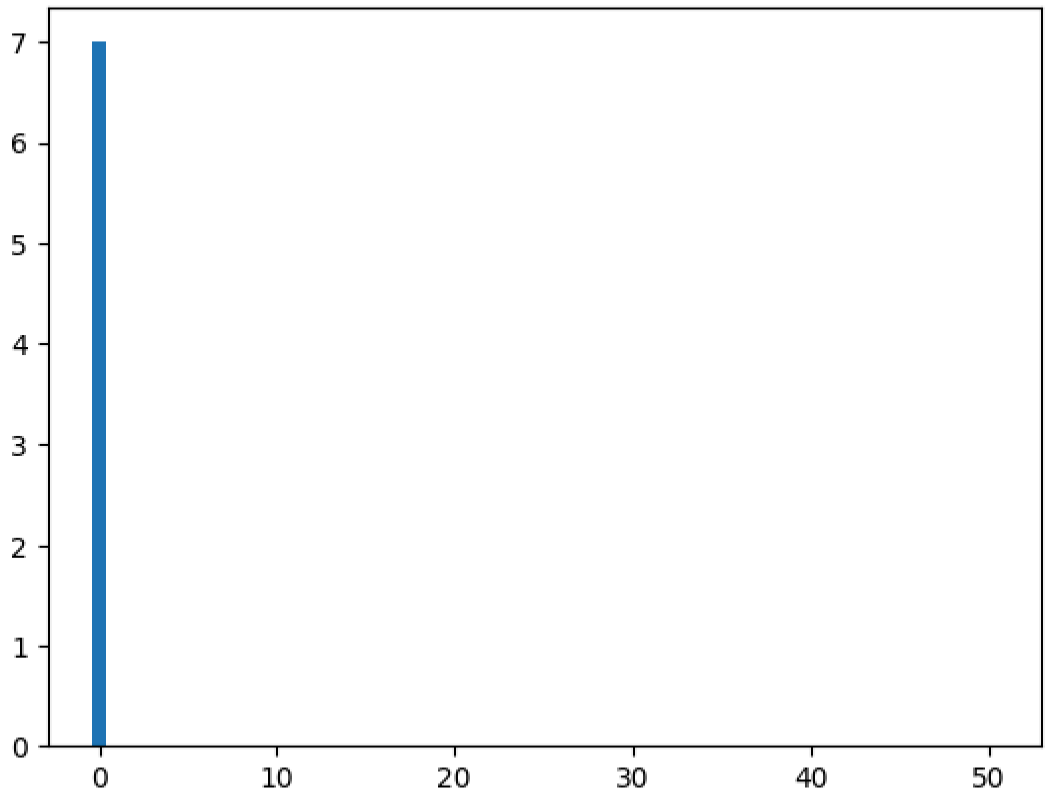


Gráfico para x0=7:



2. O número de chamadas para o help-desk de uma empresa tem uma distribuição de Poisson com 60 chamadas por um período de 10 horas. Se C = a variável aleatória para o número de chamadas por hora, encontre:

a. A probabilidade de que o suporte técnico não receba chamadas em uma determinada hora.

Resposta:

Pr(C=0) = [6^(0) . e^(-6)] / 0!
Pr(C=0) = [1 . 2.78^(-6)] / 1
Pr(C=0) = 0,00247

Através de simulação, utilizando um espaço amostral de 100000 amostras, o resultado encontrado foi:

0.00249

b. a probabilidade de que o suporte técnico receba menos de oito chamadas em uma determinada hora.

Resposta:

Pr(C<8) = 0.00247 + { [6^(1) . e^(-6)] / 1! } + { [6^(2) . e^(-6)] / 2! } + { [6^(3) . e^(-6)] / 3! } + { [6^(4) . e^(-6)] / 4! } + { [6^(5) . e^(-6)] / 5! } + { [6^(6) . e^(-6)] / 6! } + { [6^(7) . e^(-6)] / 7! }

Pr(C<8) = 0,0024 + 0,0148 + 0,0444 + 0,0889 + 0,1333 + 0,1600 + 0,1600 + 0,1371

Pr(C<8) = 0,7409

Através de simulação, utilizando um espaço amostral de 100000 amostras, o resultado encontrado foi:

0.74692

c. O número médio de chamadas por hora E (C).

Resposta:

O número médio de chamadas por hora é igual a:

60 chamadas / 10 horas = 6 chamadas por hora

d. A variância de C.

Resposta:

A variância de c = lambda = 6

e. O desvio padrão de C

Resposta:

O desvio padrão é igual a raiz quadrada da variância, que é igual a 2,4494

3) Um fabricante de pistões de metal descobre que, em média, 15% de seus pistões são rejeitados porque são superdimensionados ou subdimensionados. Qual é a probabilidade de um lote de 8 pistões conter

(a) não mais que 2 rejeitados?

Resposta:

Pr(x <= 2) = Pr(x=0) + Pr(x=1) + Pr(x=2)
Pr(x <= 2) = 0,272 + 0,384 + 0,237
Pr(x <= 2) = 0,893

Através de simulação, utilizando um espaço amostral de 100000 amostras, o resultado encontrado foi:

0.89463

(b) pelo menos 6 rejeitados?

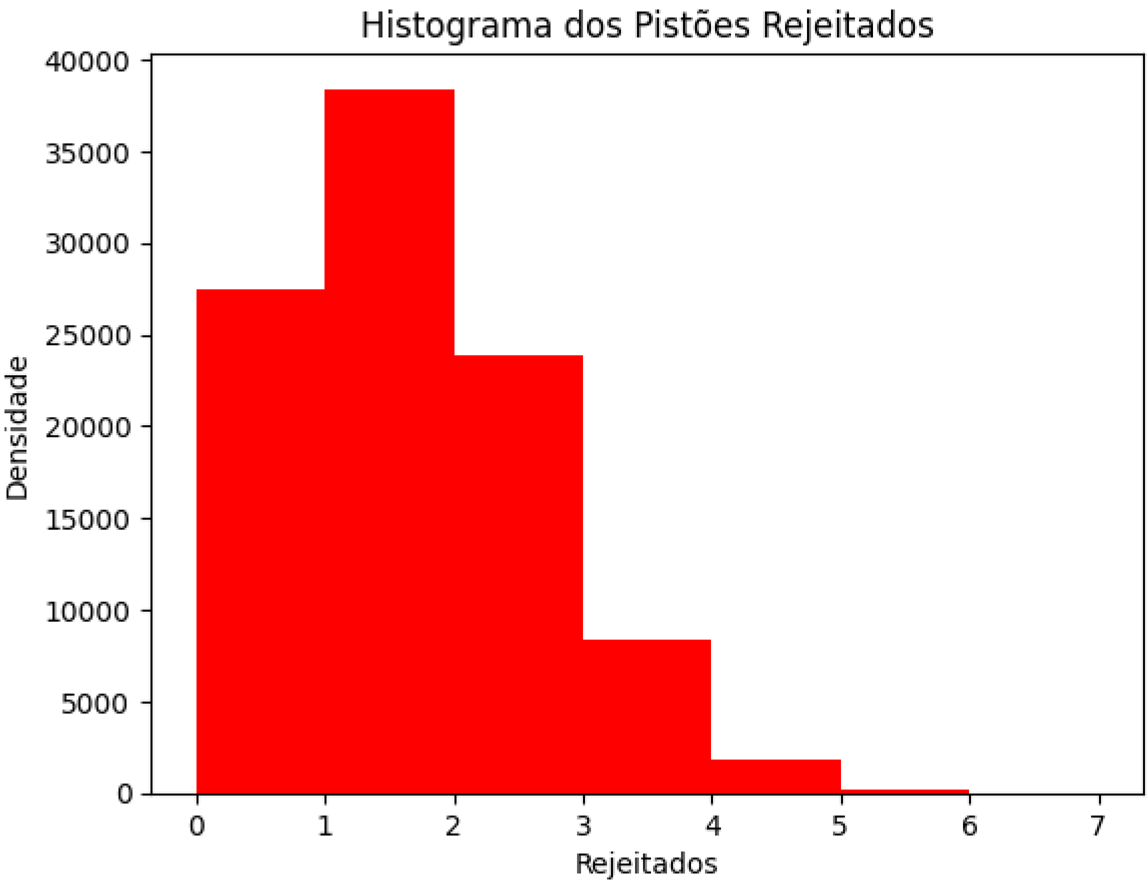
Resposta:

Pr(x >= 6) = Pr(x=6) + Pr(x=7) + Pr(x=8)
Pr(x >= 6) = (2,304 . 10^-4) + (1,162 . 10^-5) + (2,563 x 10^-7)
Pr(x >= 6) = 2.423 . 10^-4

Através de simulação, utilizando um espaço amostral de 100000 amostras, o resultado encontrado foi:

0.00023

- Traçar o histograma da variável analisada.



4) Se ocorrerem falhas de energia elétrica de acordo com uma distribuição de Poisson com uma média de 6 falhas a cada duas semanas, calcule a probabilidade de que haverá ao menos 2 falhas durante uma semana específica. Traçar o histograma da variável analisada.

Resposta:

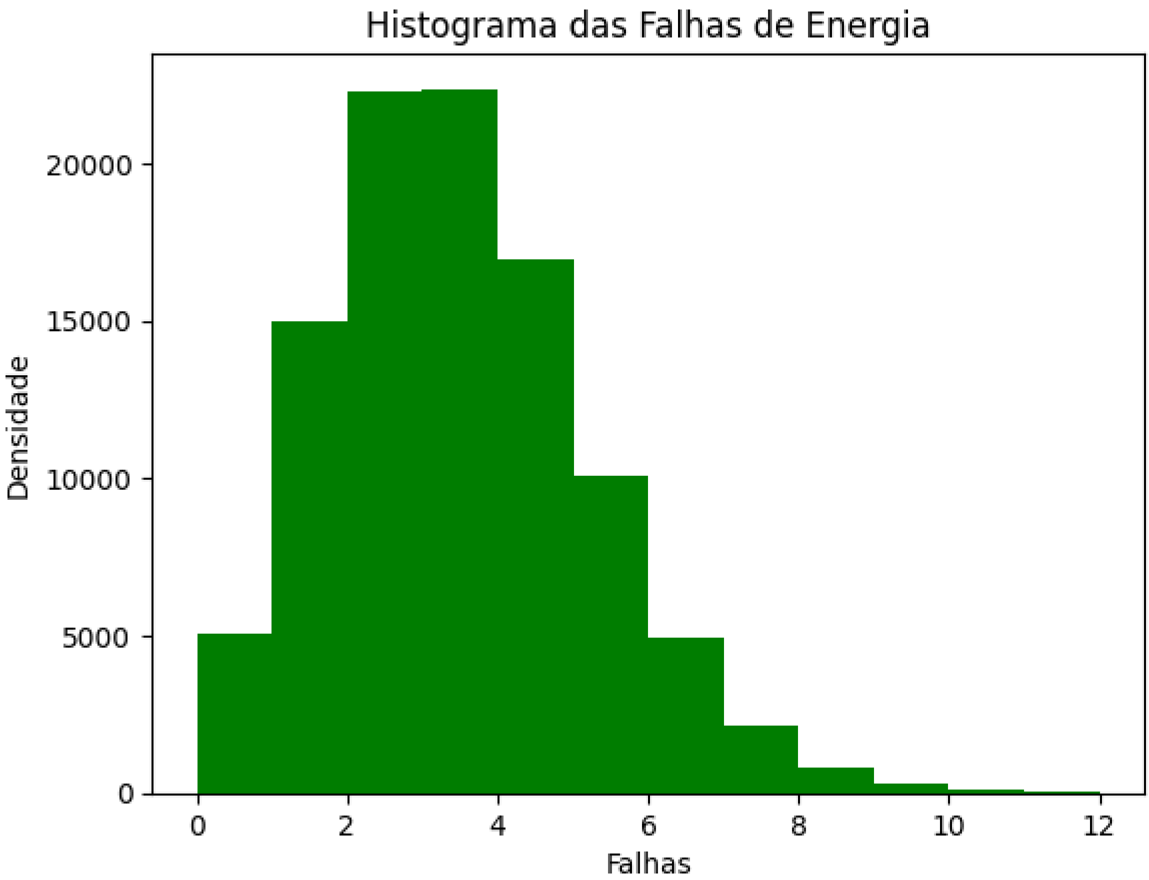
6 falhas em duas semanas = 3 falhas/semana

Pr(x>=2) = 1 - (e^-3 + 3 . e ^-3)
Pr(x>=2) = 1 - 0,199
Pr(x>=2) = 0,801

Através de simulação, utilizando um espaço amostral de 100000 amostras, o resultado encontrado foi:

0.79974

Histograma:



5) O número de dias que os viajantes compram com antecedência suas passagens aéreas pode ser modelado por uma distribuição exponencial com o tempo médio igual a 28 dias. Encontre a probabilidade de um viajante comprar uma passagem com menos de 4 dias de antecedência. Traçar a pdf da variável analisada.

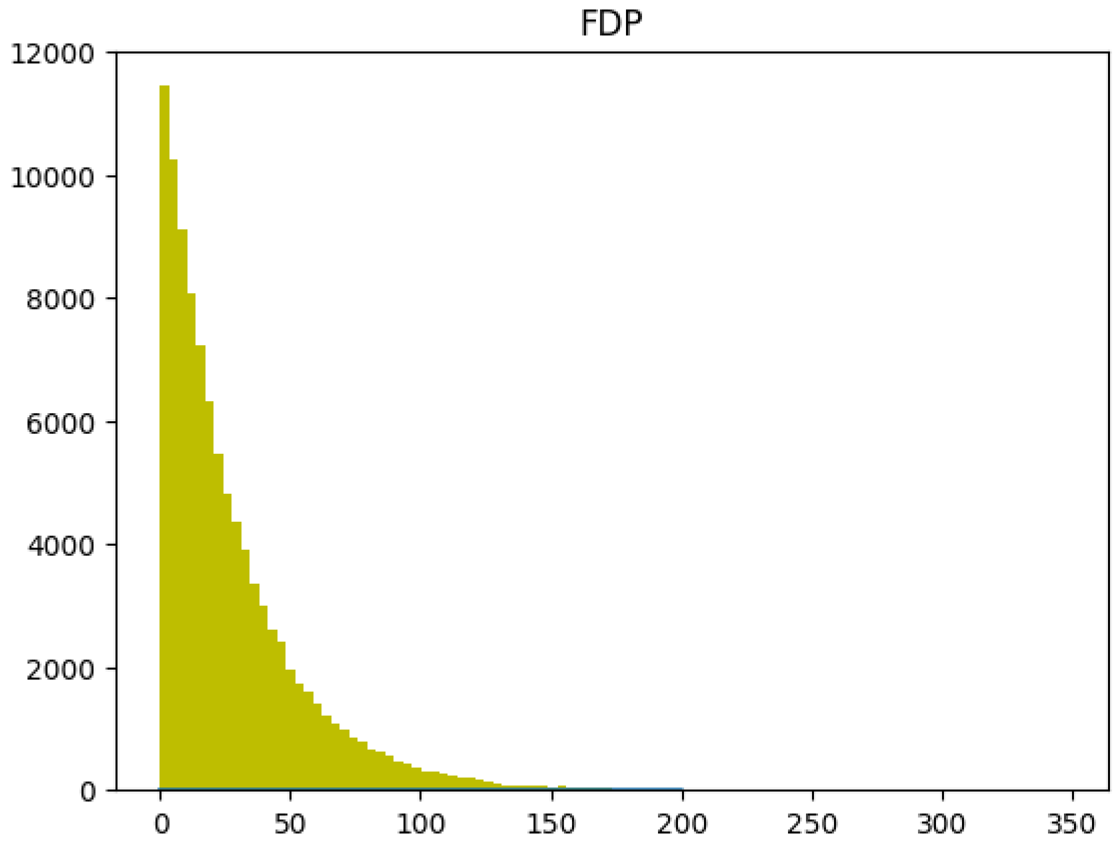
Resposta:

Pr(x<4) = 1 - e ^[(-1/28) . 4)]
Pr(x<4) = 0,133

Através de simulação, utilizando um espaço amostral de 100000 amostras, o resultado encontrado foi:

0.13105

Traçar a pdf da variável analisada.



6) A distribuição discreta geométrica conta o número de tentativas até o primeiro sucesso. A pmf é dada por f(x)=p(1-p)x-1, onde p representa a probabilidade de sucesso é x o número de tentativas. Fazer um algoritmo para a geração das variáveis aleatórias geométricas. Com o algoritmo proposto calcular:

Uma urna tem 30 bolas brancas e 20 bolas pretas. Qual a probabilidade de que a 6ª bola retirada com reposição seja a primeira bola preta?

Resposta:

```
import numpy as np

q=20/50 # Probabilidade de acerto (20 bolas pretas/total de bolas)
value=6 # Tentativas ate o primeiro acerto
N=100000 # Número de amostras

x=np.random.uniform(0,1,N)
av=np.array([])
count=0

av=np.floor(np.log10(x)/np.log10(1-q))+1

for amostra in av:
```

```
  if amostra == value : count=count+1

prob=count/N
print(av)
print("Probabilidade de que a 6ª bola retirada com reposição seja a primeira bola preta", prob)
```

7) Utilizando o método da inversa gerar amostras para a distribuição

f(x)=e^x/((e^2-1)) onde 0 <= x <= 2.

Resposta:

Passo 1 - encontrar a FDC de x:

Fx(x) = integral de menos infinito até x de -> e^t / (e^2 -1) dt
Fx(x) = e^x -1 / e^2 -1

Passo 2 - encontrar a inversa da função encontrada:

ln((e^2 -1) . x + 1)

Passo 3 - gerar as amostras:

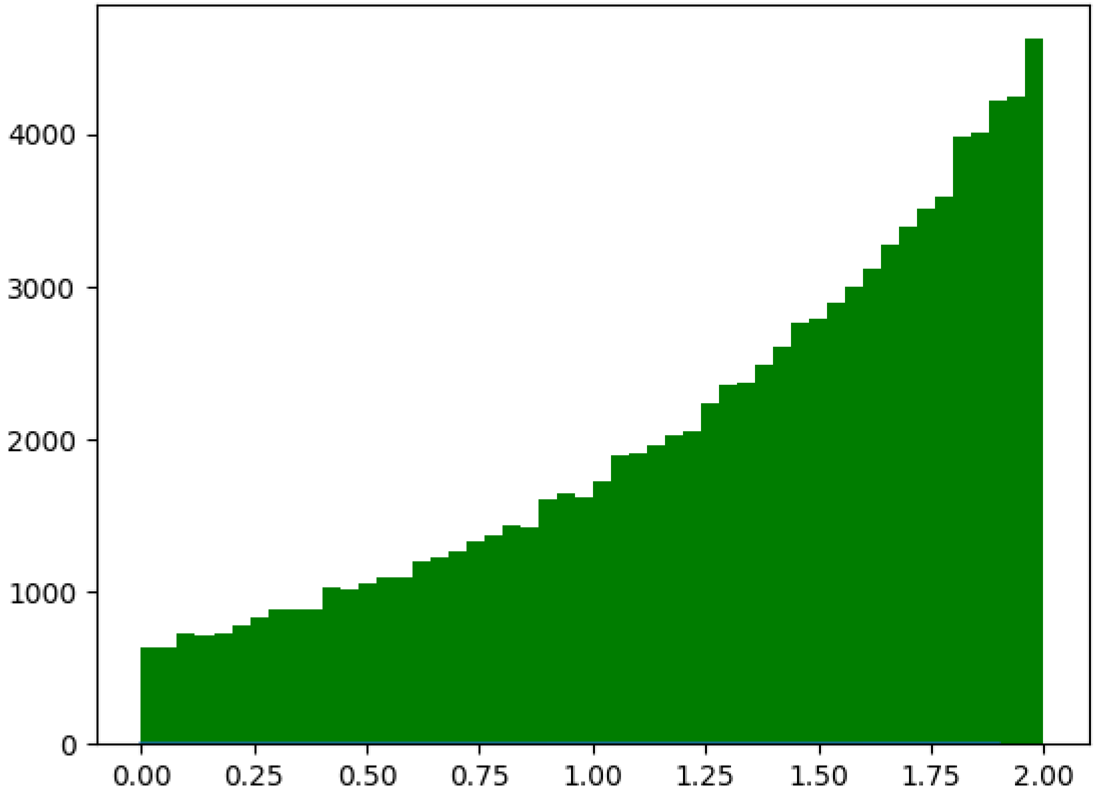
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = 100000                                 #meu espaço amostral
values = np.random.uniform(0, 1, n)        #gerando os valores
fx_inv = np.log((np.exp(2) - 1)*values + 1)    #minha função inversa

X=np.arange(0, 2, 0.1)                      #gerando valores de X de 0 a 2 com um passo de 0.1
fx = np.exp(X)/(np.exp(2)-1)                #calculando os valores de fx, de acordo com a função de Fx
plt.plot(X, fx)                            #plotando os valores

# Criando o gráfico
plt.hist(fx_inv, bins=50, color='g')

# Exibir o grafico
plt.show()
```



8) Utilizando o método da aceitação/rejeição gerar amostras para a distribuição

f(x)=1.5x2,−1<x<1

Resposta:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = 100000

xfunction = np.array([])
X = np.arange(-1, 1, 0.01)
fx = 1.5  * X ** 2

for i in range(n):
  x1 = np.random.uniform(-1, 1)
  x2 = np.random.uniform(0, 1.5)
  while (x2 >= 1.5  * x1 ** 2):
    x1 = np.random.uniform(-1, 1)
    x2 = np.random.uniform(0, 1.5)
  xfunction = np.append(xfunction, x1)
```

```
# Criando o gráfico
plt.plot(X, fx)
plt.hist(xfunction, bins=100, color='c')

# Exibir o grafico
plt.show()
```

Plotar a pdf analitica e o histograma normalizado.