

Projeto e Análise de Algoritmos

Recorrências

Teorema Mestre

Prof. Humberto Brandão

humberto@dcc.ufmg.br

Universidade Federal de Alfenas

Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento (LP&D)

Instituto de Ciências Exatas (ICEx)

versão da aula: 0.3

Última aula...

- Recorrências...

$$T(n) = T(n-1) + 1$$

$$T(n-1) = T(n-2) + 2$$

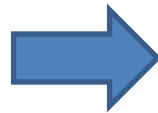
$$T(n-2) = T(n-3) + 3$$

$$T(n-3) = T(n-4) + 4$$

...

$$T(2) = T(1) + n - 2$$

$$T(1) = n - 1$$



$$T(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-2) + (n-1)$$

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \left(\sum_{i=1}^n i \right) - n = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) - n$$

$$T(n) = \frac{n^2 + n}{2} - n = \frac{n^2 + n - 2n}{2}$$

$$T(n) = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$T(n) = \frac{n^2 - n}{2} \in \Theta(n^2)$$

Métodos gerais para resolver recorrências

Método de substituição
Método de Árvore de Recursão
Teorema Mestre

Método geral para resolver recorrências

- **Método da Substituição:** estabelecemos um **limite hipotético** e depois empregamos a **indução matemática** para provar que nossa suposição era correta.

Método geral para resolver recorrências

- **Método da Substituição:** estabelecemos um limite hipotético e depois empregamos a indução matemática para provar que nossa suposição era correta.
- **Método de Árvore de Recursão:** converte a recorrência em uma árvore cujos **nós representam os custos envolvidos em diversos níveis** da recursão.
- Mais detalhes em Cormen (2002).

Método geral para resolver recorrências

- **Teorema mestre:**
 - O teorema mestre fornece um “livro de receitas” para resolver algumas equações de recorrência.

Método geral para resolver recorrências

- Teorema mestre:

- O teorema mestre fornece um “livro de receitas” para resolver algumas equações de recorrência.
- Resolve recorrências no formato $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
 - onde $a \geq 1$ e $b > 1$ são constantes e $f(n)$ é uma função assintoticamente positiva podem ser resolvidas usando o Teorema Mestre.

Método geral para resolver recorrências

- Teorema mestre: $T(n) = aT(n/b) + f(n)$

Método geral para resolver recorrências

- Teorema mestre: $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
- Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$, então
$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$$

Método geral para resolver recorrências

- Teorema mestre: $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
- Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$, então
$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$$
- Se $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$ então
$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

Método geral para resolver recorrências

- **Teorema mestre:** $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
- Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$, então
$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$$
- Se $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$ então
$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$
- Se $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$,
e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e para todo n suficientemente grande, então
$$T(n) \in \Theta(f(n))$$

Método geral para resolver recorrências

- Teorema mestre: $T(n) = aT(n/b) + f(n)$

- Exemplo 01

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

$$a = 9$$

$$b = 3$$

$$f(n) = n$$

- Qual caso do Teorema mestre?

Método geral para resolver recorrências

- Teorema mestre: $T(n) = aT(n/b) + f(n)$

- Exemplo 01

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

$$a = 9$$

$$b = 3$$

$$f(n) = n$$

- Aplicando o caso 1 do teorema mestre:
 - Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$, então

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$$

Método geral para resolver recorrências

- Teorema mestre: $T(n) = aT(n/b) + f(n)$

- Exemplo 01

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

$$a = 9$$

$$b = 3$$

$$f(n) = n$$

- Aplicando o caso 1 do teorema mestre:
 - Se $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$, então

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$$

$$n \in O(n^{1,999})$$

$$T(n) \in \Theta(n^2)$$

Método geral para resolver recorrências

- Teorema mestre:
 - Exemplo 02
 - $T(n) = aT(n/b) + f(n)$
 - $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$
 - $a = 2$
 - $b = 4$
 - $f(n) = \sqrt{n}$
 - Qual caso do Teorema mestre?

Método geral para resolver recorrências

- Teorema mestre: $T(n) = aT(n/b) + f(n)$

- Exemplo 02

$$T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$$

$$a = 2$$

$$b = 4$$

$$f(n) = \sqrt{n}$$

- Aplicando o caso 2 do teorema mestre:

- Se $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$ então

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

Método geral para resolver recorrências

- Teorema mestre:
 - Exemplo 02
- $$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$
- $$T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$$
- $$a = 2$$
- $$b = 4$$
- $$f(n) = \sqrt{n}$$
- Aplicando o caso 2 do teorema mestre:
 - Se $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$ então
- $$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

$$\sqrt{n} \in \Theta(n^{\log_4 2}) \in \Theta(n^{1/2})$$
$$T(n) \in \Theta(\sqrt{n} \log n)$$

Método geral para resolver recorrências

$$T(n) = 3T(n/4) + n \log n$$

$$a = 3$$

$$b = 4$$

$$f(n) = n \log n$$

- **Teorema mestre:**

- Exemplo 03

- Qual caso do Teorema mestre?

Método geral para resolver recorrências

$$T(n) = 3T(n/4) + n \log n$$

$$a = 3$$

- **Teorema mestre:**

- Exemplo 03

$$b = 4$$

$$f(n) = n \log n$$

- Aplicando o caso 3 do teorema mestre:

- Se $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ para alguma constante $\varepsilon > 0$,

e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e para todo n suficientemente grande, então

$$T(n) \in \Theta(f(n))$$

$$n \log n \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}) = \Omega(n^{0,7925})$$

Método geral para resolver recorrências

$$T(n) = 3T(n/4) + n \log n$$

$$a = 3$$

$$b = 4$$

$$f(n) = n \log n$$

- Aplicando o caso 3 do teorema mestre:
 - Precisamos mostrar também que a condição de regularidade é válida para $f(n)$.
 - ...e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e para todo n suficientemente grande, então $T(n) \in \Theta(f(n))$

$$af(n/b) \leq cf(n)$$

$$3f(n/4) \leq cf(n)$$

$$3[(n/4) \log(n/4)] \leq \frac{3}{4} n \log n$$

$$\frac{3n}{4} (\log n - \log 4) \leq \frac{3}{4} n \log n$$

$$\frac{3}{4} n \log n - 2 \leq cn \log n$$

$$\text{para } c = 3/4$$

Portanto,

$$T(n) \in \Theta(n \log n)$$

Exercícios

- No site!!!

Bibliografia

- CORMEN, T. H.; LEISERSON, C. E.; RIVEST, R. L.; (2002).
Algoritmos – Teoria e Prática. Tradução da 2ª edição americana.
Rio de Janeiro. Editora Campus.
- TAMASSIA, ROBERTO; GOODRICH, MICHAEL T. (2004).
Projeto de Algoritmos - Fundamentos, Análise e Exemplos da
Internet.

