

RECORRÊNCIAS DO TIPO FIBONACCI E APLICAÇÕES

JOSÉ H. DA CRUZ, MARINA T. MIZUKOSHI E RONALDO A. DOS SANTOS

RESUMO. O clássico problema envolvendo populações de coelhos proposto por Fibonacci em 1202 foi a base para o estabelecimento da sequência (números) de Fibonacci, a saber,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

dados pela equação de recorrência linear

$$(1) \quad x(n) = x(n-1) + x(n-2),$$

com $x(1) = x(2) = 1$, para $n > 2$.

Consideraremos alguns problemas em outras áreas do conhecimento tais como Biologia, Economia que podem ser modelados por equações de recorrência lineares do tipo

$$(2) \quad x(n) = ax(n-1) + bx(n-2),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$, para $n > 2$.

Faremos uma análise qualitativa de (2) que só depende do estudo de equações do 2º grau e utilizaremos o *winplot* para ilustrar os resultados.

Finalmente, apresentaremos resultados recentes para as seqüências dadas por

$$(3) \quad x(n) = ax(n-r) + bx(n-s),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $r, s \in \mathbb{N}$, para $n > 2$.

1. INTRODUÇÃO

São objetos de estudo, no ensino básico, dois tipos de seqüências bastante conhecidas, a saber: as progressões aritméticas e as progressões geométricas, ver[?].

Uma progressão aritmética é uma seqüência na qual, dado um primeiro termo obtemos o segundo termo acrescentando uma certa quantidade, obtemos o terceiro acrescentando esta mesma quantidade, e assim sucessivamente. Por exemplo,

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

Neste caso, cada termo, a partir do segundo, é obtido do anterior acrescentado de uma unidade.

De uma forma geral, uma seqüência

$$x(1), x(2), x(3), \dots, x(n-1), x(n), \dots,$$

é uma progressão aritmética se dado um valor real para $x(1)$, digamos $x_1 \in \mathbb{R}$, existir um número r tal que

$$\begin{aligned} x(1) &:= x_1, \\ x(2) &= x(1) + r = x_1 + r := x_2, \\ x(3) &= x(2) + r = x_2 + r := x_3, \\ x(4) &= x(3) + r = x_3 + r := x_4, \\ &\dots\dots\dots \\ x(n) &= x(n-1) + r = x_{n-1} + r := x_n, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Assim, podemos dizer que a recorrência

$$(4) \quad x(n) = x(n-1) + r$$

define uma progressão aritmética de razão r e primeiro termo $x(1)$, dado.

Uma progressão geométrica é uma seqüência na qual, dado um primeiro termo obtemos o segundo termo multiplicando uma certa quantidade, obtemos o terceiro multiplicando esta mesma quantidade, e assim sucessivamente. Por exemplo,

$$1, 2, 4, 8, 16, \dots$$

Neste caso, cada termo, a partir do segundo, é obtido do anterior multiplicando-o por dois.

De uma forma geral, uma seqüência

$$x(1), x(2), x(3), \dots, x(n-1), x(n), \dots,$$

é uma progressão geométrica se dado um valor real para $x(1)$, digamos $x_1 \in \mathbb{R}$, existir um número q tal que

$$\begin{aligned} x(1) &:= x_1, \\ x(2) &= x(1) + r = qx_1 := x_2, \\ x(3) &= x(2) + r = qx_2 := x_3, \\ x(4) &= x(3) + r = qx_3 := x_4, \\ &\dots\dots\dots \\ x(n) &= x(n-1) + r = qx_{n-1} := x_n, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Assim, podemos dizer que a recorrência

$$(5) \quad x(n) = qx(n-1)$$

define uma progressão geométrica de razão q e primeiro termo $x(1)$, dado.

Dizemos que as recorrências (4) e (5) são de primeira ordem.

1.1. A seqüência de Fibonacci.

Em 1202, Leonardo de Pisa, conhecido por Fibonacci, formulou o seguinte problema dos coelhos: no primeiro mês temos um casal de coelhos que acabaram de nascer; os coelhos só atingem a maturidade sexual ao fim de um mês; o período de gestação de um coelho dura um mês; Ao atingirem a maturidade sexual, a fêmea irá dar à luz todos os meses; A mãe terá todos os meses um casal de coelhos; Os coelhos nunca morrem; nas hipóteses dadas, quantos casais de coelhos existirão daqui a um ano? Fazendo a análise do diagrama

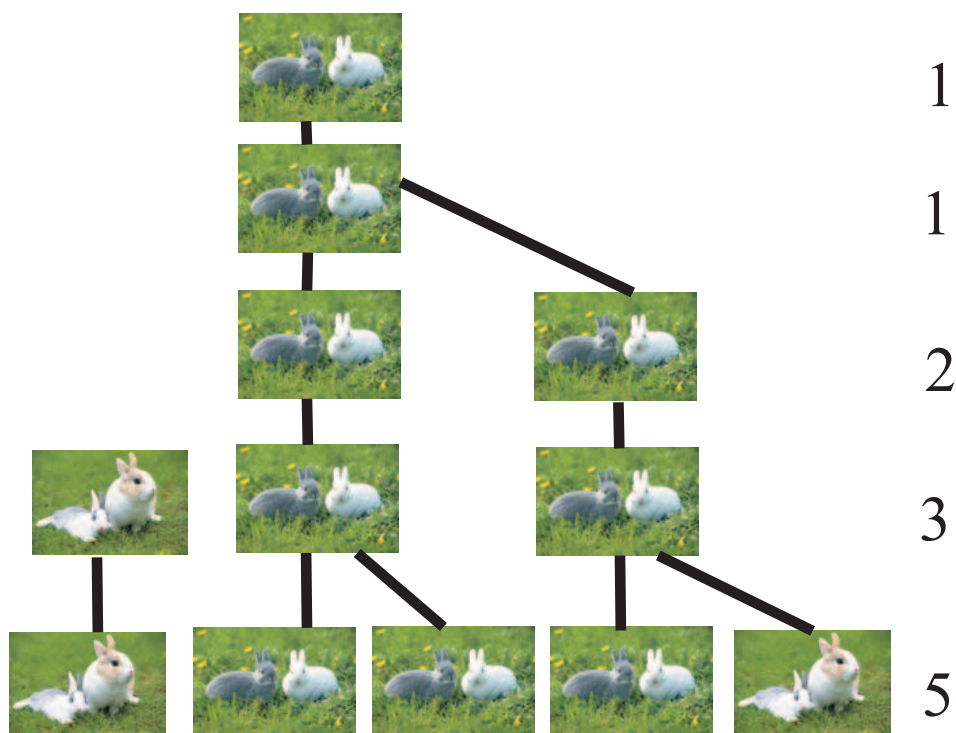
Assim sendo, o número de casal de coelhos em cada mês é dado por

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots$$

É fácil verificar que está seqüência não é uma progressão aritmética e nem uma progressão geométrica.

Não é difícil observar que, se dado um valor real para $x(1)$, digamos x_1 e um para $x(2)$, que podemos denotar por x_2 , obtemos outros termos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x(1) &:= x_1, \\ x(2) &:= x_2, \\ x(3) &= x(2) + x(1) := x_3, \\ x(4) &= x(3) + x(2) := x_4, \\ x(5) &= x(4) + x(3) := x_5, \\ &\dots\dots\dots \\ x(n) &= x(n-1) + x(n-2) := x_n, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$



Assim, podemos dizer que a recorrência

$$(6) \quad x(n) = x(n-1) + x(n-2)$$

define a sequência de Fibonacci, se considerarmos $x(1) = 1$ e $x(2) = 1$.

Dizemos que a recorrência (6) é de segunda ordem.

2. MODELOS E APLICAÇÕES

O fascínio pelo número de ouro, data de há mais de 2000 anos. Os antigos perceberam que a arte e a arquitetura baseadas na razão de ouro, eram agradáveis aos olhos. Assim, a razão de ouro começou a ser definida em termos geométricos.

Dizemos que C entre A e B determina a divisão áurea se: quando uma das partes é média proporcional entre a outra parte e o segmento todo, $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC}$, onde $AB = a$, $BC = x$, $AC = a - x$, e assim,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Rightarrow x^2 - ax - a^2 = 0,$$

cujas soluções são dadas por $x = \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{5})$. Se considerarmos $a = 1$, temos o número de ouro $x \cong 1,6$.

Mas o que é que o número de ouro tem a ver com a sucessão de Fibonacci?

Lembremos que a sequência de Fibonacci é dada por:

$$\begin{aligned} x(1) &= 1, x(2) = 1, x(3) = 2, x(4) = 3, x(5) = 5, \\ x(6) &= 8, \dots, x(n-1) + x(n-2), \dots \end{aligned}$$

Se dividirmos cada um destes números pelo seu antecedente, reparamos que essa razão vai tender para um certo valor, ou seja,

$$\frac{x(2)}{x(1)} = 1; \frac{x(3)}{x(2)} = 2; \frac{x(4)}{x(3)} = 1,5; \frac{x(5)}{x(4)} \cong 1,66; \frac{x(6)}{x(5)} \cong 1,6.$$

Observe que

$$\frac{x(n)}{x(n-1)} = \frac{x(n-1) + x(n-2)}{x(n-1)} = 1 + \frac{x(n-2)}{x(n-1)} = 1 + \frac{1}{\frac{x(n-1)}{x(n-2)}}.$$

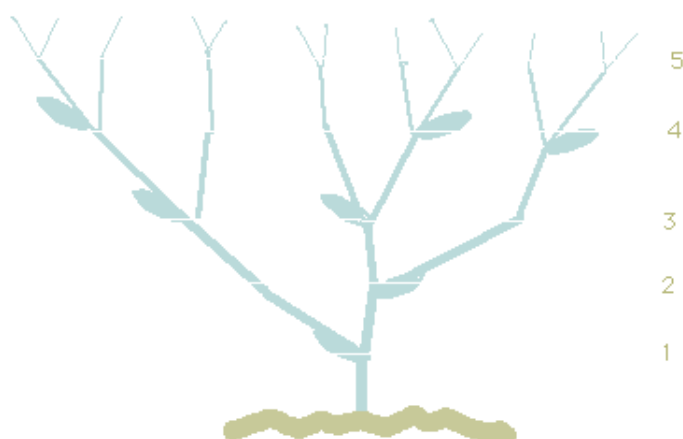
Assim, se existir $0 < \varphi \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(n)}{x(n-1)} = \varphi$ temos que

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \quad \text{e, portanto, } \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{o número de ouro.}$$

2.1. Aplicações na Biologia.

2.1.1. *Crescimento de Plantas* [8]. Uma planta em particular, mostra os números da sucessão de Fibonacci nos seus “pontos de crescimento”. Quando a planta nasce leva dois meses para crescer até que as ramificações fiquem suficientemente fortes. Sabendo que após este período a planta se ramifica todos os meses, obtemos a seguinte figura :

Uma planta que cresce de forma semelhante a esta, é a espiroleira (oleandro, louro rosa) ou cevadilha.



2.1.2. *Descendentes* [8]: Em uma colméia temos:

- (1) Existe uma abelha especial: a rainha;
- (2) Os zangões são machos. Alguns deles não trabalham. Os machos são produzidos pelos ovos não fertilizados da rainha. Logo, só têm uma mãe e não têm pai;
- (3) Todas as fêmeas são produzidas quando a rainha acasalou com um macho e assim têm pai e mãe.

Pergunta: Quantos trisavôs têm cada abelha fêmea e cada abelha macho?

Para os machos, repare no seguinte diagrama:

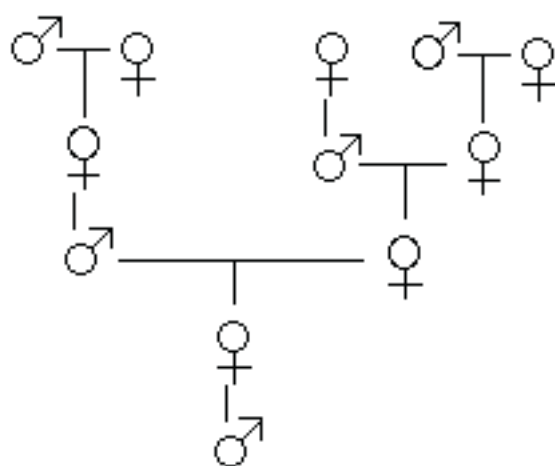


FIGURA 1. Diagrama dos zangões

Para as fêmeas, obtemos uma resolução semelhante ao problema dos coelhos. Então se z e f são representantes da árvore genética dos zangões e da abelha fêmea, respectivamente. Então temos,

Qt	Pai	Avô	Bisavô	Trisavô	Tetravô
z	1	2	3	5	8
f	2	3	5	8	13

Se n representar a geração das abelhas, para as fêmeas, $f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 5, \dots$. Então para se saber o número de avô de n -ésimo grau calcula-se através da seguinte seqüência de Fibonacci,

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n).$$

Para as machos,

$$z(3) = 2, z(4) = 3, z(5) = 5, \dots, z(n+3) = z(n+1) + z(n+2).$$

2.2. Economia.

2.2.1. *Bolsa de Valores* [4]: O uso dos números de Fibonacci no mercado de ações funda-se nos trabalhos pioneiros de Ralph Nelson Elliott (1871-1948), um analista financeiro norte-americano que estudou o comportamento do índice Dow Jones, da Bolsa de Valores de Nova Iorque, a partir da década de 20 do século passado. Elliot baseava-se em um pressuposto da psicologia social, o de que grupos de pessoas têm comportamentos que se tornam mais previsíveis a medida que aumenta o número de pessoas envolvidas, este é o caso da bolsa de valores. A idéia básica é a de que as flutuações do mercado seguem um padrão de crescimento e decrescimento que podem ser analisados segundo os números de Fibonacci, uma vez determinada a escala de observação. Temos assim que existem relações entre picos e vales do gráfico da flutuação de bolsa e estas tendem a seguir razões numéricas aproximadas das razões de dois números consecutivos da seqüência de Fibonacci.

Como exemplo, tomemos o gráfico abaixo:

Segundo Elliot, o padrão típico de flutuação da Bolsa têm duas fases distintas, uma ascendente e outra corretiva, cada qual formada por ondas, momentos de crescimento ou de decrescimento. O percurso que vai do momento zero até o número 1 é chamado de onda 1; o que vai do número 1 até o número 2 é chamado de onda 2, e assim por diante. A primeira fase, também chamada otimista, mostra que o percurso geral do valor dos papéis é de crescimento, com breves momentos de queda. Na fase otimista podemos notar 5 ondas. A segunda fase, também chamada pessimista, não é numerada, mas marcada com letras. Do pico até o ponto C , temos 3 ondas. Dessa forma, temos um total de 8 ondas no ciclo todo. Note que os números 3, 5 e 8 são números de Fibonacci. Este é um dos ciclos padrões das flutuações. Na escala do tempo, temos a seguinte situação:

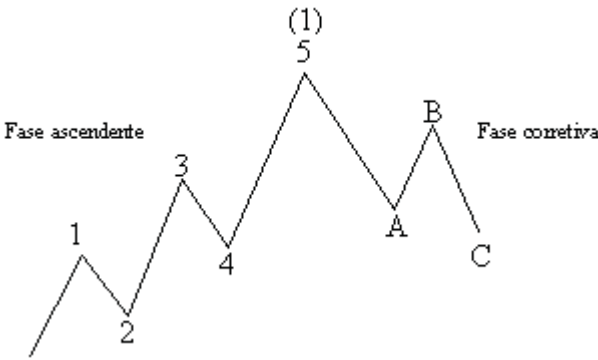


FIGURA 2. Bolsa de Valores

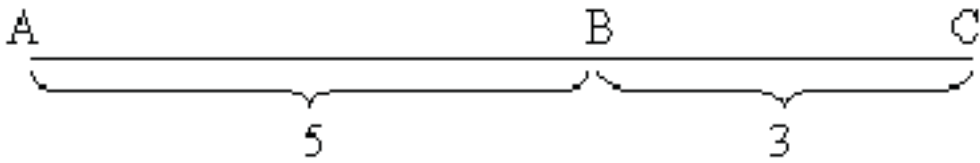
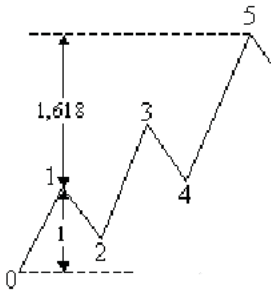


FIGURA 3. Ciclo da Bolsa de Valores

momento A , de partida, até o momento B , de pico, temos 5 ondas. Do momento de pico até o momento final da queda (e início de um novo ciclo), temos 3 ondas. A razão entre os segmentos AB/BC é $5/3$, ou seja, $1,666\dots$, próximo do número de ouro. Fossem as ondas da fase ascendente em número de 34, e as da fase descendente em número de 21, a razão seria $34/21$, ou seja, $1,619\dots$, um valor ainda mais próximo do número de ouro. A previsão é feita observando-se as primeiras ondas de um ciclo e determinando-se as ondas subseqüentes, de acordo com uma tabela de padrões de Fibonacci previamente determinados. Nos respectivos momentos de pico ou vale, venda ou compra de ações. Livros recentes avançam essas idéias, e encontram relações “de ouro” entre os pontos de pico e os de vale, como no gráfico



Se tomarmos o valor entre o início do ciclo e o primeiro pico, e o compararmos com o valor entre este pico e o pico máximo, encontraremos também o número de ouro. O ciclo, naturalmente, pode estar invertido, e os momentos de pico podem se tornar momentos de vale, e vice-versa.

2.2.2. *Moedas de um País* [8]: Problema das moedas: cada país tem a sua moeda monetária. Por exemplo, na Grã-Bretanha existem moedas que podem valer 1 penny ($1p$) ou 2 pence ($2p$). Se existirem apenas moedas no valor de $1p$ e $2p$, de quantas maneiras podemos amontoar uma certa quantia de dinheiro?

Por exemplo:

$1p = 1p$ (uma única maneira);

$2p = 1p + 1p$ ou $2p$ (duas maneiras);

$3p = 1p + 1p + 1p$ ou $1p + 2p$ ou $2p + 1p$ (três maneiras);

E assim sucessivamente.

Se considerar $1p + 2p$ e $2p + 1p$ como soluções diferentes, então é porque está interessado em todas as ordens possíveis de moedas. Será que consegue adivinhar quantas maneiras existem de juntar uma quantia de dinheiro com o valor de $4p$? Será que consegue adivinhar uma fórmula para determinar o caso geral?

Mas o desafio vai ser o seguinte: consegue explicar como é que os números de Fibonacci aparecem neste problema? Supondo que está interessado apenas na coleção de moedas em vez da sequência destas. Então $1p + 2p$ é a mesma coleção de $2p + 1p$. Assim quantas coleções existem?

2.3. Transmissão de Informação.

Suponhamos que tenhamos um sistema de informação que tenha somente dois sinais, s_1 e s_2 . As mensagens são enviadas codificando-os através de um “string” ou sequência destes símbolos. Suponhamos que para enviarmos s_1 e s_2 sejam necessários k_1 e k_2 unidades de tempo, respectivamente. Assim sendo, para um tempo finito k , podemos enviar somente um número finito de “string” de mensagens distintas. Se $m(k)$ denotar o número de “string” distintos de duração k , encontre uma equação que permita obter $m(k)$.

Primeiro consideremos todas as mensagens de duração k que se encerram com o sinal s_1 . Como s_1 leva k_1 unidades de tempo, o último sinal deverá iniciar no tempo $k - k_1$. No entanto, até o tempo $k - k_1$ existem $m(k - k_1)$ mensagens possíveis para os quais o sinal s_1 poderá ser adicionado. Então, temos

$$m(k) = m(k - 1).$$

Como o número total de duração k que são finalizados com s_2 é dado por $m(k - 2)$, temos que uma mensagem de duração k que são finalizados com sinal s_1 ou s_2 é dado por

$$(7) \quad m(k) = m(k - k_1) + m(k - k_2).$$

Se $k_1 = 1$ e $k_2 = 2$, então (7) é dado por

$$m(k) = m(k - 1) + m(k - 2).$$

Observemos ainda que, como os sinais s_1 e s_2 são de duração de uma unidade de tempo e duas, respectivamente, um “string” cuja duração total é k poderá ser representado por uma seqüência finita de 1’s e 2’s. Para $k = 1$, é possível ter somente um “string”, que consiste do sinal s_1 , $m(1) = 1$; para $k = 2$, existem 2 possibilidades, um de s_1 e um de s_2 , ou seja, $m(2) = 2$; para $k = 3$, um de s_1 e dois de s_2 , $m(3) = 3$. E assim sucessivamente. Para maiores detalhes veja [5].

2.4. Números de Fibonacci e a Matemática.

Os números de Fibonacci podem relacionar-se com várias outras temas de matemática, veja [6, 8].

Embora a sucessão de Fibonacci seja freqüentemente representada por: $x(n) = x(n + 1) + x(n + 2)$ com n natural, existem diversas fórmulas e propriedades relacionadas com esta sucessão.

2.4.1. Propriedades:

- (1) A soma dos n primeiros termos é:

$$x(1) + x(2) + \dots + x(n) = x(n + 2) - 1.$$

Notemos que:

$$x(3) = x(2) + x(1) \Rightarrow x(1) = x(3) - x(2);$$

$$x(4) = x(3) + x(2) \Rightarrow x(2) = x(4) - x(3);$$

.....

$$x(n + 2) = x(n + 1) + x(n) \Rightarrow x(n) = x(n + 2) - x(n + 1).$$

Somando, obtemos o resultado desejado.

- (2) Soma dos números de Fibonacci de índices ímpares,

$$x(1) + x(3) + x(5) + \dots + x(2n - 1) = x(2n).$$

Observemos que,

$$x(1) = x(2) \Rightarrow x(1) = x(2);$$

$$x(4) = x(3) + x(2) \Rightarrow x(3) = x(4) - x(2);$$

$$x(6) = x(5) + x(4) \Rightarrow x(5) = x(6) - x(4);$$

.....

$$x(2n) = x(2n - 1) + x(2n - 2) \Rightarrow x(2n - 1) = x(2n) - x(2n - 2).$$

- (3) Soma dos números de índices pares,

$$x(2) + x(4) + x(6) + \dots + x(2n) = x(2n + 1) - 1.$$

Temos,

$$(8) \quad x(1) + x(2) + \dots + x(2n) = x(2n + 2) - 1$$

$$(9) \quad x(1) + x(3) + x(5) + \dots + x(2n-1) = x(2n)$$

$$(10) \quad x(2n+1) = x(2n+2) - x(2n)$$

Por (8) e (9), obtemos a identidade desejada.

(4) A soma dos quadrados dos números de Fibonacci

$$x^2(1) + x^2(2) + \dots + x^2(n) = x(n)x(n+1).$$

Notemos que:

$$x^2(1) = x(1)x(1) = x(1)x(2);$$

$$x^2(2) = x(2)x(2) = x(2)(x(3) - x(1)) = x(2)x(3) - x(2)x(1);$$

$$x^2(3) = x(3)x(3) = x(2)(x(4) - x(2)) = x(3)x(4) - x(2)x(3);$$

\vdots

$$x^2(n) = x(n)x(n) = x(n)(x(n+1) - x(n-1))$$

$$= x(n)x(n+1) - x(n)x(n-1).$$

Somando, obtemos a identidade desejada.

(5)

$$x(1) + 2x(2) + 3x(3) + \dots + nx(n) = nx(n+2) - x(n+3) + 2.$$

(6) Para $n \geq 1$, $x^2(n) - x(n+1)x(n-1) = (-1)^n$.

Para $n = 1$, $x(1) = 1 - 2 \times 1 = -1$.

Agora, para n qualquer sabemos que $x(n+1) = x(n-1) + x(n)$, então

$$x(n) = x^2(n) - x(n+1)x(n-1) = x^2(n) - (x(n-1) +$$

$$x(n))(x(n-1)) = x(n)(x(n) - x(n-1)) - x^2(n-1)$$

$$= x(n)x(n-2) - x^2(n-1).$$

Logo,

$$x(n) = -x(n-1) = x(n-2) = \dots = (-1)^n x(1) = (-1)^n.$$

(7) Na sequência de Fibonacci, $\text{mdc}(x(n), x(n-1)) = 1$, para todo $n \geq 1$.

O caso em que n for igual a 1 ou 2 é trivialmente verdadeiro. Para $n \geq 3$, faremos por redução ao absurdo.

Suponha que $\text{mdc}(x(n), x(n-1))$ seja um inteiro d maior do que 1.

Nesse caso, d divide $x(n)$ e d divide $x(n-1)$.

Como $x(n) = x(n-1) + x(n-2)$, para $n \geq 3$, segue que d divide $x(n-2)$.

Do fato de que $x(n-2) = x(n-1) + x(n-3)$, segue que d divide $x(n-3)$.

Prosseguindo-se deste modo, d dividirá $x(1) = 1$. Contradição. Logo $\text{mdc}(x(n), x(n-1)) = 1$.

Obs.: Será que se n é primo o número de Fibonacci também é primo. Nem sempre, tome por exemplo $x(19) = 4181 = 37 \times 113$.

- (8) Todo número natural n pode ser escrito como uma soma finita de números de Fibonacci distintos e não consecutivos.

Por recorrência sobre n .

Para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ temos:

$$1 = x(1), 2 = x(2), 3 = x(3) + x(1), 4 = x(3) + x(1), 5 = x(5).$$

Suponha que a afirmação seja verdadeira para todo número natural inferior a $x(n)$. Isto é, cada um dos números naturais $1, 2, 3, 4, \dots, k$, com $k = x(n-1)$, pode ser escrito como uma soma finita de números de Fibonacci distintos e não consecutivos do conjunto $\{x(1), x(2), x(3), \dots, x(n-1)\}$.

Vamos mostrar que a afirmação é verdadeira para todos os números naturais menores que $x(n+1)$.

Seja n tal que $x(n) \leq n < x(n+1)$ e $x(n)$ o maior termo na representação de n como soma de números de Fibonacci. Quando $n > x(n)$, podemos escrever $n = x(n) + r$.

Neste caso, $r = n - x(n) < x(n+1) - x(n) = x(n-1)$. Portanto, pela hipótese de indução, r pode ser representado como uma soma de números de Fibonacci distintos e não consecutivos pertencentes ao conjunto

$$\{x(1), x(2), x(3), \dots, x(n-1)\}.$$

Desse modo, n , e, como consequência, cada um dos inteiros $1, 2, 3, \dots, x(n+1) - 1$ pode ser expresso como uma soma de números, distintos e não consecutivo, do conjunto

$$\{x(1), x(2), \dots, x(n-1), x(n)\},$$

pois na representação de n não existirá mais o termo $x(n-1)$ dentre os termos da representação de r e o termo $x(n)$. O que completa a indução e a prova.

- (9) A combinação linear de seqüências de Fibonacci é uma seqüência de Fibonacci

Se $x(n)$ e $y(n)$ são seqüências de Fibonacci não proporcionais, então toda seqüência $x(n)$ de Fibonacci pode ser escrita como combinação linear de $x(n)$ e $y(n)$.

Demonstração: Existe uma propriedade das proporções que garante que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é equivalente $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$. Usaremos este fato para mostrar inicialmente que

$$\frac{x(1)}{y(1)} \neq \frac{x(2)}{y(2)}.$$

Suponhamos que $\frac{x(1)}{y(1)} = \frac{x(2)}{y(2)}$, então

$$\frac{x(1)}{y(1)} = \frac{(x(1) + x(2))}{(y(1) + y(2))} = \frac{x(3)}{y(3)}.$$

Utilizando a mesma idéia para os termos posteriores da seqüência de Fibonacci, obtemos

$$\frac{x(3)}{y(3)} = \frac{x(4)}{y(4)} = \frac{x(5)}{y(5)} = \dots = \frac{x(n)}{y(n)} = \dots$$

Mostramos que se as seqüências $x(n)$ e $y(n)$ são proporcionais, temos absurdo. Assim podemos afirmar que, $\frac{x(1)}{y(1)} \neq \frac{x(2)}{y(2)}$.

Consideremos agora uma seqüência tal que:

$$u(1) = ax(1) + by(1), \quad u(2) = ax(2) + by(2).$$

A partir de $u(1)$ e $u(2)$ podemos construir uma seqüência de Fibonacci $u(n)$ que é uma combinação linear de $x(n)$ e $y(n)$.

Resolvendo o sistema com 2 equações e incógnitas a e b :

$$u(1) = ax(1) + by(1);$$

$$u(2) = ax(2) + by(2).$$

obtemos, pela Regra de Cramer, que:

$$a = \frac{u(1)y(2) - u(2)y(1)}{x(1)y(2) - x(2)y(1)}, \quad b = \frac{x(1)u(2) - x(2)u(1)}{x(1)y(2) - x(2)y(1)}$$

e podemos garantir que para todo n natural, existem escalares a e b , tal que:

$$u(n) = ax(n) + by(n).$$

(10) A seqüência de Fibonacci e a Fórmula de Binet.

Inicialmente consideremos uma progressão geométrica que satisfaça a recorrência de Fibonacci, isto é, uma seqüência $x(n)$ tal que

$$x(n) = x(n-1) + x(n-2),$$

ou seja,

$$q^n = q^{n-1} + q^{n-2}, \quad \text{ou ainda,} \quad q^2 = q + 1.$$

Resolvendo esta equação do segundo grau obtemos as duas raízes:

$$q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Observamos que $q_1 + q_2 = 1$ e $q_1 q_2 = -1$. Para cada raiz, obtemos uma seqüência de Fibonacci, sejam $x(n)$ e $y(n)$ dados por:

$$x(n) = q_1^{n-1} \quad \text{e} \quad y(n) = q_2^{n-1}.$$

Temos que $u = u(n)$ é uma combinação linear de $x(n)$ e $y(n)$, isto é, $u(n) = ax(n) + by(n)$, que pode ser escrito como

$$u(n) = a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + b \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n-1}.$$

Como $x(1) = 1$ e $x(2) = 1$ devemos ter $a + b = 1$ e $aq_1 + bq_2 = 1$, e assim obtemos

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}.$$

Substituindo na expressão de $u(n)$, obteremos a Fórmula de Binet:

$$u(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Para valores muito grandes de n , o segundo termo da Fórmula de Binet pode ser desprezado pois a base desta potência é um número real menor do que 1, assim é possível mostrar que quando n tende a infinito, a expressão matemática para $u(n)$ é da ordem de $(\Phi)^n$, logo o quociente de $u(n+1)$ por $u(n)$ é da ordem de Φ , assim o limite do quociente entre um número de Fibonacci e o seu antecedente converge para o número de ouro.

2.5. Múltiplos nas Sequências de Fibonacci. Repare que o terceiro número de Fibonacci é múltiplo do número dois ($x(3) = 2$), ou ainda:

- i) $x(3), x(6), x(9), x(12), \dots, x(3k)$, onde k é um número natural, são múltiplos de dois;
- ii) $x(4), x(8), x(12), \dots, x(4k)$, onde k é número natural, são múltiplos do número três;
- iii) Geralmente, podemos afirmar que:
O k -ésimo número de Fibonacci é múltiplo de $x(k)$, ou ainda $x(nk)$ é múltiplo de $x(k)$, com k um número natural.

2.6. Sequência de Fibonacci e os Triângulos de Pascal e de Pitágoras.

O triângulo de Pascal e o triângulo de Pitágoras também se relacionam com os números desta sucessão. Vamos ver ainda como podemos obter uma espiral de Fibonacci a partir dos números de Fibonacci, veja [7].

- Triângulo de Pascal - de cima para baixo, os coeficientes das expansões de:

$(a + b)^0 =$	1	1
$(a + b)^1 =$	$a + b$	1 1
$(a + b)^2 =$	$a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a + b)^3 =$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4 =$	$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	1 4 6 4 1
$(a + b)^5 =$	$a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$	1 5 10 10 5 1

O triângulo de Pitágoras é um triângulo retângulo. Para qualquer triângulo retângulo com lados s, t e o lado maior h (hipotenusa), temos pelo Teorema de Pitágoras que $s^2 + t^2 = h^2$, com s, t, h números inteiros. No caso do triângulo apresentado ao lado temos: $s = 3, t = 4$ e $h = 5$.

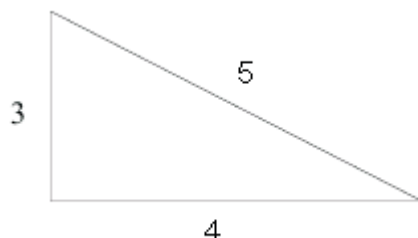


FIGURA 4. Triângulo Retângulo

Será que podemos usar os números de Fibonacci para fazer Triângulos de Pitágoras?

A resposta é afirmativa, para tal basta considerar 4 números de Fibonacci consecutivos. Sejam a, b números de Fibonacci consecutivos e considerando $a + b$ e $a + 2b = (a + b) + b$, temos que:

- 1) multiplicando b por $a + b$ resulta c ;
- 2) duplicando o resultado de 1), tem-se $2c$;
- 3) multiplicando a por $a + 2b$, obtém-se d ;
- 4) somando o quadrado de b com o quadrado de $a + b$ obtém-se e , a hipotenusa.

Assim, com estes dados, obtemos ao triângulo pretendido, cujos lados são $2c, d$ e e .

Por exemplo, se $a = 3$ e $b = 5$, temos $a + b = 8$ e $a + 2b = 13$. Como $c = b \times (a + b)$ obtém-se $c = 40$. Por 2) tem-se $2c = 80$. Considerando $d = a \times (a + 2b)$ e substituindo os respectivos valores, temos $d = 39$.

Considerando $e = b^2 + (a + b)^2$ e atribuindo os devidos valores obtém-se: $e = 25 + 64 = 89$. Note que o resultado obtido satisfaz o Teorema de Pitágoras.

REFERÊNCIAS

- [1] CAMINHA, A., *Seqüências Recorrêntes Lineares*, Revista da Olimpíada, nº4, p. 72-78, CEGRAF, Goiânia, Goiás, 2003. (www.ime.ufg.br).
- [2] GUSMÃO, G. P. A., *Seqüências*, Revista da Olimpíada, nº1, pp. 65-74, CEGRAF, Goiânia, Goiás, 2000. (www.ime.ufg.br).
- [3] GUSMÃO, G. P. A., *Seqüências de Fibonacci*, Revista da Olimpíada, nº3, pp. 47-73, CEGRAF, Goiânia, Goiás, 2000. (www.ime.ufg.br).
- [4] Lopes, Frederico José Andries, Os Números de Fibonacci e a Bolsa de Valores, Instituto Vianna Júnior Faculdade de Ciências Econômicas Vianna Júnior, Revista Eletrônica de Economia N.º 3.

- [5] Mickens, Ronald M., Difference Equations, Theory and Applications, second edition, Van Nostrand Reinhold, New York, 1990.
- [6] Vorobiev, N. N., Numeros de Fibonacci, Lecciones populares de matemáticas, ed. Mir, Moscou, 1974.
- [7] <http://www.mat.ufrgs.br/portosil/histo2b.html>.
- [8] <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm41/index.htm>.

3. EQUAÇÕES DIFERENÇAS LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Nesta seção vamos tratar de uma generalização das seqüências de Fibonacci utilizando as idéias de recorrências de segunda ordem vistas na seção anterior e os conceitos básicos das equações diferenças lineares autônomas de segunda ordem, com coeficientes constantes, mais especificamente, as que envolvem uma única variável dependente, os leitores interessados poderão ver em [1, 1, 3, 6] os resultados apresentados aqui para equações de ordens superiores.

Dados os números reais a e b vamos considerar a recorrência

$$(11) \quad x(n) = ax(n-1) + bx(n-2), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Uma seqüência $\{x(n)\}_{n_0}^\infty$ ou simplesmente $x(n)$ é uma *solução* de (11) se satisfaz (11).

Dados os números reais x_0 e x_1 . O problema de encontrar uma solução de (11), para todo $n > 1$, tal que $x(0) = x_0$ e $x(1) = x_1$ é chamado de *Problema de Valor Inicial* para (11).

Teorema 1. *Um Problema de Valor Inicial para (11) tem uma única solução.*

Demonstração. De fato, a seqüência $x(n)$ tal que $x(0) = x_0$, $x(1) = x_1$ e satisfaz a equação (11),

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ x(1) &= x_1, \\ x(2) &= ax(1) + bx(0) = ax_1 + bx_0 := x_2, \\ x(3) &= ax(2) + bx(1) = ax_2 + bx_1 := x_3, \\ &\dots \\ x(n-2) &= ax(n-3) + bx(n-4) = ax_{n-3} + bx_{n-4} := x_{n-2}, \\ x(n-1) &= ax(n-2) + bx(n-3) = ax_{n-2} + bx_{n-3} := x_{n-1}, \\ x(n) &= ax(n-1) + bx(n-2) = ax_{n-1} + bx_{n-2} := x_n, \\ &\dots \end{aligned}$$

é, naturalmente, a única solução do Problema de Valor Inicial dado. \square

3.1. Dependência Linear. Dadas as seqüências $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$, $k \in \mathbb{N}$. Dizemos que elas são *linearmente dependentes* para $n \geq n_0$ se existirem constantes reais a_1, a_2, \dots, a_k , não todas nulas, tais que

$$(12) \quad a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + \dots + a_kx_k(n) = 0, \quad n \geq n_0.$$

Seja $1 \leq j \leq k$ tal que $a_j \neq 0$, então podemos multiplicar ambos os membros de (12) por $1/a_j$ e obter

$$x_j(n) = -\frac{a_1}{a_j}x_1(n) - \frac{a_2}{a_j}x_2(n) - \dots - \frac{a_{j-1}}{a_j}x_{j-1}(n) - \frac{a_{j+1}}{a_j}x_{j+1}(n) - \dots - \frac{a_r}{a_j}x_k(n),$$

isto é,

$$(13) \quad x_j(n) = - \sum_{i \neq j=1}^k \frac{a_i}{a_j} x_i(n).$$

Isto nos diz simplesmente que cada $x_j(x)$, com coeficiente não-nulo, é uma *combinação linear* das outras $x_{j's}(n)$.

A negação da dependência linear é a *independência linear*. Isto é, dizemos que as seqüências $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ são linearmente independentes (l.i.) para $n \geq n_0$ se, sempre que,

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) + \dots + a_kx_k(n) = 0,$$

para todo $n \geq n_0$, então $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$.

Exemplo 1. As funções $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(n) = 2^n$ e $g(n) = 3^n$ são linearmente independentes em \mathbb{N} . De fato, Suponha que as constantes a_1 e a_2 são tais que

$$a_12^n + a_23^n = 0, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então, para $n = 0$ temos $a_1 + a_2 = 0$ e para $n = 1$ temos $2a_1 + 3a_2 = 0$, daí temos que $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$.

Definição 1. O conjunto de 2 soluções linearmente independentes da equação (11) é chamado de conjunto fundamental de soluções.

Definição 2. Sejam $x_1(n), x_2(n)$ soluções da equação (11), o Casoratian $C(n)$ é dado por

$$C(n) = \det \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{pmatrix}.$$

A seguir vamos estudar a relação entre a independência linear das soluções da (11) e o Casoratian. Basicamente, vamos mostrar que o conjunto de 2 soluções é um conjunto fundamental de soluções (l.i.) se o seu Casoratian não se anula.

Teorema 2. O conjunto de soluções $\{x_1(n), x_2(n)\}$ da equação (11) é um conjunto fundamental se e somente se para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, seu Casoratian $C(n_0) \neq 0$.

Demonstração. Sejam $x_1(n), x_2(n)$ soluções da equação (11). Sejam a_1, a_2 e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$a_1x_1(n) + a_2x_2(n) = 0, \quad \text{para todo } n \geq n_0,$$

temos também que

$$a_1x_1(n+1) + a_2x_2(n+1) = 0, \quad \text{para todo } n \geq n_0,$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que este sistema tem uma única solução (a nula), isto é, $a_1 = 0, a_2 = 0$ se e somente se o determinante da matriz

$$(14) \quad X(n) = \begin{pmatrix} x_1(n) & x_2(n) \\ x_1(n+1) & x_2(n+1) \end{pmatrix}$$

for diferente de zero, mas $\det X(n) = C(n)$. \square

Exemplo 2. O conjunto $\{2^n, 3^n\}$ é um conjunto fundamental de soluções para a equação

$$x(n) = 5x(n-1) - 6x(n-2).$$

De fato, $x_1(n) = 2^n$ é solução pois

$$\begin{aligned} x_1(n) - 5x_1(n-1) + 6x_1(n-2) &= 2^n - 5 \cdot 2^{n-1} + 6 \cdot 2^{n-2} \\ &= 2^n - \frac{5}{2} \cdot 2^n + \frac{6}{4} \cdot 2^n = 0. \end{aligned}$$

De forma análoga, podemos mostrar que $x_2(n) = 3^n$ também é solução.

Agora,

$$C(n) = \det \begin{pmatrix} 2^n & 3^n \\ 2^{n+1} & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$C(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0.$$

Logo, pelo Teorema 2, as soluções 2^n e 3^n são linearmente independentes e formam um conjunto fundamental de soluções.

Teorema 3. A equação (11) tem um conjunto fundamental de soluções.

Demonstração. Pelo Teorema 1 existe uma solução $x_1(n)$, com $x_1(0) = 1$ e $x_1(1) = 0$ e uma solução $x_2(n)$, com $x_2(0) = 0$ e $x_2(1) = 1$. Logo,

$$C(0) = \det \begin{pmatrix} x_1(0) & x_2(0) \\ x_1(1) & x_2(1) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Assim, pelo Teorema 2 temos que $\{x_1(n), x_2(n)\}$ é um conjunto fundamental de soluções da equação (11). \square

Observação 1. Existe uma infinidade de conjuntos fundamentais de soluções da equação (11).

Lema 1. Se $x_1(n)$ e $x_2(n)$ são duas soluções de (11) e a um número real qualquer, então

- (i) $p(n) = cx_1(n)$ é uma solução de (11).
- (ii) $s(n) = x_1(n) + x_2(n)$ é uma solução de (11).

Demonstração. (i) Como $x_1(n)$ é solução de (11) temos que

$$x_1(n) - ax_1(n-1) - bx_1(n-2) = 0, \text{ logo}$$

$$\begin{aligned} p(n) - ap(n-1) + bp(n-2) &= cx_1(n) - a(cx_1(n-1)) - b(cx_1(n-2)), \\ &= c(x_1(n) - ax_1(n-1) - bx_1(n-2)) = 0. \end{aligned}$$

De forma análoga, mostramos o item (ii),

$$\begin{aligned} s(n) - as(n-1) - bs(n-2) &= x_1(n) + x_2(n) - a(x_1(n-1) + x_2(n-1)) - \\ &\quad b(x_1(n-2) + x_2(n-2)), \\ &= (x_1(n) - ax_1(n-1) - bx_1(n-2)) + \\ &\quad (x_2(n) - ax_2(n-1) - bx_2(n-2)) = 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 4 (Princípio da Superposição). Se $x_1(n), x_2(n)$ são soluções de (11) e $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, então

$$x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n),$$

é solução de (11).

Demonstração. Basta combinar os itens (i) e (ii) do Lema 1. □

Teorema 5. Seja $\{x_1(n), x_2(n)\}$ um conjunto fundamental de soluções de (11) e $x(n)$ uma solução qualquer de (11), então existem constantes a_1, a_2 tais que $x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$.

Demonstração. Sejam $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$,

$$s(n) = \begin{pmatrix} x(n) \\ x(n+1) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

de (14), podemos escrever $X(n)\xi = s(n)$. Como $X(n)$ é invertível, temos que

$$\xi = X^{-1}(n)s(n).$$

Assim, basta fazer $n = n_0$ e $a_1 = \xi_1$ e $a_2 = \xi_2$. □

Definição 3. Se $\{x_1(n), x_2(n)\}$ é um conjunto fundamental de soluções de (11), então a solução geral da equação (11) é dada por

$$x(n) = a_1x_1(n) + a_2x_2(n),$$

para constantes a_1, a_2 quaisquer.

3.2. Comportamento Assintótico das Soluções. O resultado a seguir já é bem conhecido, veja por exemplo [1, 2], só mudamos um pouco a forma de apresentar e demonstrar.

Uma progressão geométrica $x(n) = r^n$ para qualquer $r \in \mathbb{R}^*$ é solução da equação (11) se, e somente se,

$$(15) \quad r^2 - ar - b = 0.$$

De fato, basta observar que

$$\begin{aligned} x(n) - ax(n-2) - bx(n-2) &= r^n - ar^{n-1} - br^{n-2} \\ &= r^{n-2}(r^2 - ar - b). \end{aligned}$$

Os itens a, b da proposição a seguir podem ser encontrados em [5] e c em [4].

Propriedade 1. a) Se $r_1 \neq r_2$ são raízes reais distintas de (15), então a solução geral de (11) é

$$x(n) = a_1 r_1^n + a_2 r_2^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

b) Se $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$, então a solução geral da (11) é

$$x(n) = a_1 r^n + a_2 n r^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

c) Se r_1 e $r_2 = \bar{r}_1 \in \mathbb{C}$, então a solução geral da (11)

$$x(n) = r^n (a_1 \cos(\theta n) + a_2 \sin(\theta n)), \quad n \in \mathbb{N},$$

onde $r = |r_1|$ e $\theta = \arg(r_1)$.

Demonstração. a), b) Deixamos como exercício. Para mostrar o item c), seja $r = |r_1|$, $\theta = \arg(r_1)$ e $i^2 = -1$, temos que

$$\phi(n) = r e^{in\theta} \quad \text{e} \quad \psi(n) = r e^{-in\theta}$$

satisfazem a equação (11). Pela linearidade da equação (11) as seqüências dadas por

$$\alpha(n) = \frac{1}{2}(\phi(n) + \psi(n)) \quad \text{e} \quad \beta(n) = \frac{1}{2i}(\phi(n) - \psi(n))$$

são soluções (l.i.) de (11). Logo, a solução geral de (11) é dada por

$$(16) \quad x(n) = r^n (a_1 \cos(\theta n) + a_2 \sin(\theta n)).$$

Assim, as soluções da equação (11) tendem a zero se, e somente se, os módulos das raízes da equação característica forem menores do que 1.

Propriedade 2. O módulo das raízes da equação (15) é menor do que 1 se, e somente se,

$$1 + a - b < 0, \quad 1 - a - b < 0 \quad \text{e} \quad b > -1.$$

Para demonstrar a Proposição 2, mostraremos primeiro dois lemas.

Lema 2. Sejam r_1, r_2 as raízes da equação (15), com $a^2 + 4b \geq 0$. Afirmamos que:

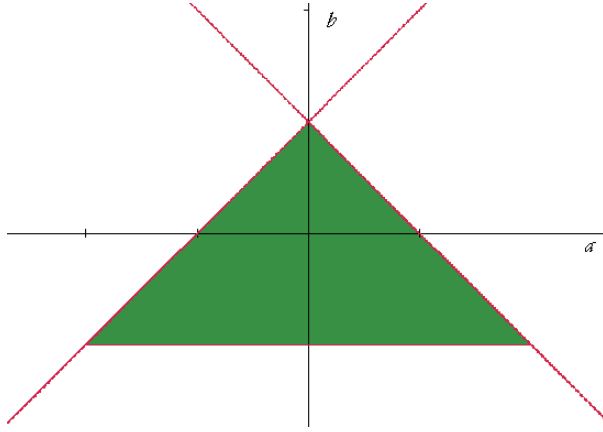


FIGURA 5. A região do plano dos parâmetros ab onde o módulo das raízes é menor do que 1, dada pela Propriedade 2

- (i) As raízes r_1 e r_2 são negativas se, e somente se, $a < 0, b < 0$.
- (ii) As raízes r_1 e r_2 são positivas se, e somente se, $a > 0, b < 0$.
- (iii) Uma raiz é positiva e a outra é negativa se, e somente se, $b > 0$.

Demonstração. Definimos a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f(x) = x^2 - ax - b,$$

que pode ser escrita na forma

$$f(x) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + 4b}{4}.$$

Como $a^2 + 4b \geq 0$, temos que em $x = a/2$ a função f assume o seu menor valor, isto é, $f(x) \geq f(a/2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, veja a figura 6. Temos os seguintes casos a considerar:

a) Se $a < 0$ e

$$\begin{cases} f(0) = -b \geq 0, & \text{então as duas raízes são não positivas.} \\ f(0) = -b < 0, & \text{então uma raiz é negativa e a outra positiva.} \end{cases}$$

b) Se $a > 0$ e

$$\begin{cases} f(0) = -b \geq 0, & \text{então as duas raízes não negativas.} \\ f(0) = -b < 0, & \text{então uma raiz negativa e a outra é positiva.} \end{cases}$$

Lema 3. As raízes reais da equação (15) têm módulo menor do que ou igual a 1 se, e somente se,

$$1 + a + b < 0, \quad 1 - a + b < 0 \quad e \quad b > -1.$$

Demonstração. Primeiro, suponha que $a^2 + 4b \geq 0$, isto é, que as raízes da equação (15) são reais. E observamos que:

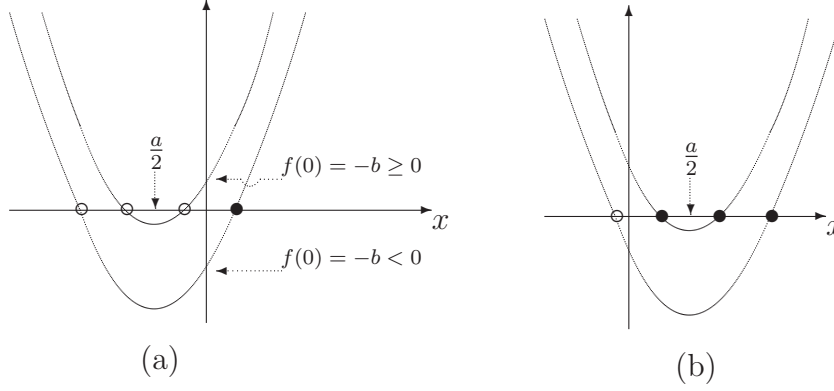


FIGURA 6. (a) mostra o caso $a < 0$ e (b) o caso $a > 0$.

- a) $x^2 - ax - b = (x - 1)^2 - (a + 2)(x - 1) - (1 + a + b)$. Fazendo $y = x - 1$ temos, pelo Lema 2, que as raízes da equação

$$y^2 - (a + 2)y - (1 + a + b) = 0$$

são negativas, se e somente se,

$$a + 2 < 0 \quad \text{e} \quad 1 + a + b < 0.$$

- b) $x^2 - ax - b = (x + 1)^2 - (a - 2)(x + 1) - (1 - a + b)$. Fazendo $w = x + 1$ temos, pelo Lema 2, que as raízes da equação

$$w^2 - (a - 2)w - (1 - a + b) = 0$$

são positivas, se e somente se,

$$a - 2 > 0 \quad \text{e} \quad 1 - a + b < 0.$$

Agora, vamos supor que $a^2 + 4b < 0$, isto é, as raízes são complexas

$$z = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{|a^2 + 4b|}}{2}i,$$

temos que $|z| = |b|$. Daí, neste caso, $|z| < 1$ se, e somente se, $|b| < 1$. \square

Para ilustrar estes resultados faremos alguns exemplos usando o *winplot* e representaremos as soluções no plano de $x(n)$, $x(n - 1)$, isto é, fazendo $y(n) = x(n - 1)$ temos

$$\begin{aligned} x(n) &= ax(n - 1) + by(n - 1) \\ y(n) &= x(n - 1). \end{aligned}$$

Por exemplo, se escolhermos $a = -1$ e $b = -\frac{9}{10}$ temos que a solução nula é assintoticamente estável.

$$\begin{aligned} x(n) &= -1x(n - 1) - \frac{9}{10}y(n - 1) \\ y(n) &= x(n - 1), \end{aligned}$$

ilustrado na figura 7(lado esquerdo), para $x(0) = x(1) = 1$.

Por outro lado, se escolhermos $a = -1$ e $b = -\frac{11}{10}$ temos que a solução nula é instável.

$$\begin{aligned} x(n) &= -1x(n-1) - \frac{11}{10}y(n-1) \\ y(n) &= x(n-1), \end{aligned}$$

ilustrado na figura 7(lado direito), para $x(0) = x(1) = 0, 1$.

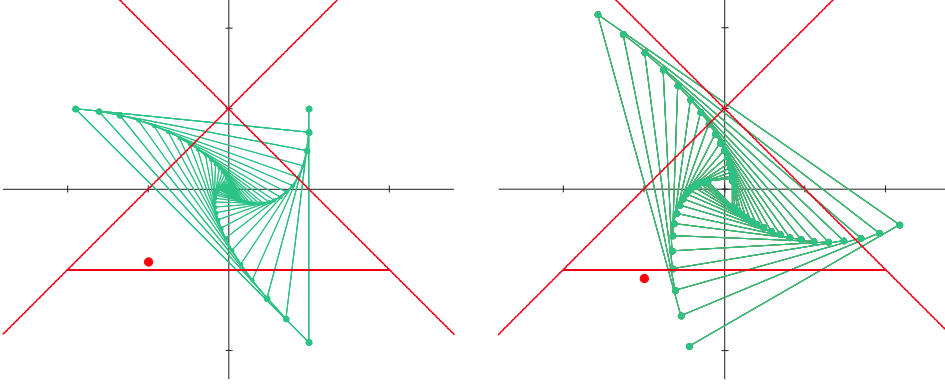


FIGURA 7. O triângulo está no plano ab e a órbita no plano $x(n) x(n-1)$. Assintoticamente estável e instável.

3.3. Soluções Periódicas. Uma sequência $x(n)$ é periódica com período $\omega \in \mathbb{R}_+$ se $x(n + \omega) = x(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observamos que se $x(n)$ é uma sequência periódica de período 1, isto é, $x(n + 1) = x(n)$ temos que $x(n + 2) = x(n + 1) = x(n)$. Assim, a equação (11) se reduz a

$$\begin{aligned} x(n) - ax(n-1) - bx(n-2) &= x(n) - ax(n) - bx(n) \\ &= (1 - a - b)x(n) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, se $1 - a - b = 0$ temos que toda sequência de período 1 é solução da equação (11).

Agora, dada uma sequência periódica de período 2, isto é, $x(n + 2) = x(n)$, tal que $x(n + 1) \neq x(n)$, dizemos que $x(n)$ é periódica de *período mínimo* 2.

Observamos que se $x(n + 1) = \mu x(n)$, para algum $\mu \in \mathbb{R}$, implica $\mu = \pm 1$. Logo, estamos interessados no caso $\mu = -1$. Da equação (11) temos

$$\begin{aligned} x(n) - ax(n-1) - bx(n-2) &= x(n) + ax(n) - bx(n) \\ &= (1 + a - b)x(n) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, se $1 + a - b = 0$ temos que toda sequência de período 2, com $x(n + 1) = -x(n)$ é solução da equação (11).

Propriedade 3. Se $a^2 + 4b < 0$ e o módulo das raízes de (15) forem iguais a 1, então $b = -1$ e $a = 2\cos\theta$, onde θ o argumento das raízes. Além disso, se $\theta/2\pi$ for racional então todas as soluções de (11) são periódicas. Caso contrário, isto é, se $\theta/2\pi$ for irracional, então o conjunto $\{x(n)\}$ é denso em $[-A, A]$, $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Demonstração. A primeira parte da proposição é imediata, pois se as raízes de (15) tem módulo 1, isto é, $r_1 = \cos\theta + i\sin\theta$ e $r_2 = \cos\theta - i\sin\theta$, para algum $\theta \in [0, 2\pi)$, temos que $b = -r_1r_2 = -1$ e $a = (r_1 + r_2) = 2\cos\theta$. Agora, sejam k e p inteiros tais que $\frac{\theta}{2\pi} = \frac{k}{p}$, isto é, $\theta = \frac{2k\pi}{p}$ e, de (16), temos

$$\begin{aligned} x(n+p) &= a_1 \cos\left(\frac{2k\pi}{p}(n+p)\right) + a_2 \sin\left(\frac{2k\pi}{p}(n+p)\right), \\ &= a_1 \cos\left(\frac{2k\pi}{p}n + 2k\pi\right) + a_2 \sin\left(\frac{2k\pi}{p}n + 2k\pi\right), \\ &= a_1 \cos\left(\frac{2k\pi}{p}n\right) + a_2 \sin\left(\frac{2k\pi}{p}n\right) = x(n). \end{aligned}$$

Por outro lado, suponha que $\theta/2\pi = \lambda$ seja irracional. Sejam $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $\varphi = 2\lambda\pi$ e $\nu \in (0, 1]$ fixado, temos que

$$\begin{aligned} x(n) &= A \cos(\theta n - \varphi) = A \cos(2\lambda\pi n - 2\lambda\pi) \\ &= A \cos(2(n\lambda - \nu)\pi), \\ &= A \cos(2(n\lambda - \lfloor n\lambda \rfloor - \nu)\pi) = A \cos(2(\xi_n - \nu)\pi) \end{aligned}$$

onde, pelo Teorema 6 o conjunto dos pontos $\xi(n) = n\lambda - \lfloor n\lambda \rfloor$ é denso em $(0, 1)$ e $\mu \in (0, 1)$, fixado. Temos que o conjunto de pontos $2(\xi(n) - \nu)\pi$ é denso no intervalo $(-2\nu\pi, 2 - 2\nu\pi]$, de comprimento 2π . Logo, $x(n) = A \cos(\xi(n) - \nu)\pi$ é denso em $[-A, A]$. \square

Por exemplo, se escolhermos $p = 3$ e $k = 1$ temos que $a = -1$ e $b = -1$. Assim, temos

$$\begin{aligned} x(n) &= -1x(n-1) - 1y(n-1) \\ y(n) &= x(n-1), \end{aligned}$$

ilustrado na figura 8(lado esquerdo), para $x(0) = x(1) = 1$.

Escolhendo $p = 4$ e $k = 1$ temos

$$\begin{aligned} x(n) &= -1x(n-1) \\ y(n) &= x(n-1), \end{aligned}$$

ilustrado na figura 8(lado direito), para $x(0) = x(1) = 1$.

Se escolhermos $p = 5$ e $k = 1$ temos

$$\begin{aligned} x(n) &= -1x(n-1) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)y(n-1) \\ y(n) &= x(n-1), \end{aligned}$$

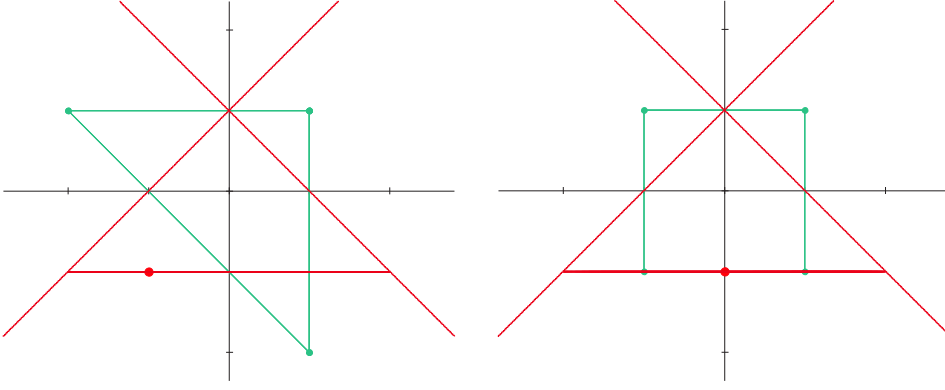


FIGURA 8. Uma solução 3-periódica e outra 4-periódica.

ilustrado na figura 9 (lado esquerdo), para $x(0) = x(1) = 1$. Agora, seja, por exemplo, $\theta = 2\pi/\sqrt{26}$, então

$$\begin{aligned} x(n) &= -1x(n-1) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{\sqrt{26}}\right)y(n-1) \\ y(n) &= x(n-1), \end{aligned}$$

ilustrado na figura 9(lado direito), para $x(0) = x(1) = 1$.

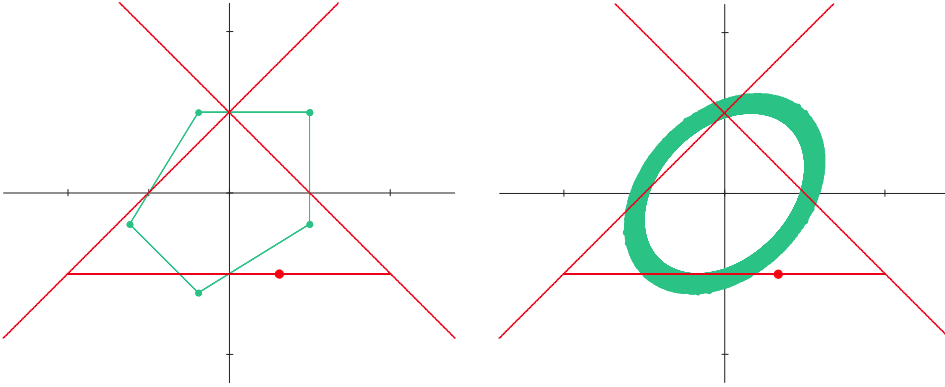


FIGURA 9. uma solução 5-periódica e outra *densa*

Apêndice

Um subconjunto X de $Y \subset \mathbb{R}$ é denso em Y se, e somente se, todo intervalo aberto de Y contém algum elemento de X . (Exige-se intervalo aberto para excluir o caso de um intervalo fechado degenerado $[a, a] = \{a\}$).

Notação $\lfloor x \rfloor$ representa o maior inteiro menor do que ou igual $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 6 (Kronecker, Theorem 439, p. 364, [3]). *Se λ é irracional, então o conjunto dos $x_n = n\lambda - \lfloor n\lambda \rfloor$, $n = 1, 2, \dots$, é denso no intervalo $(0, 1)$.*

Obs.: As figuras deste trabalho foram geradas com ajuda do software livre *winplot* que pode ser obtido no site: math.exeter.edu/rparris.

Os arquivos para gerar tais figuras e se divertir com as animações apresentadas no minicurso podem ser obtidos na página: www.mat.ufg.br/docentes/jhcruz.

REFERÊNCIAS

- [1] ELAYDI, S. N., *An Introduction to Difference Equations*, Springer-Verlag New York, 1996.
- [2] GOLDBERG, S. , *Introduccion a Las Ecuaciones en Diferencias Finitas*, Editorial Pueblo y Educación, Cuba, 1973.
- [3] HARD AND WRIGHT, *The Theory of Numbers*, Oxford, 1938.
- [4] LIMA, E. L., *Álgebra Linear*. CMU/IMPA, 1999.
- [5] LIMA, E. L., CARVALHO, P.C.P, WAGNER, E., MORGADO, A. C., *A Matemática do Ensino Médio*. CPM/SBM, 2000.
- [6] MOREIRA, C. G. Sequências recorrentes: aspectos analíticos e aritméticos, II Bienal de Matemática, (2004) (www.bienasbm.ufba.br).
- [7] POLLMAN, H. S. *Equações de Recorrência*, Eureka, n. 9, 2000, pp. 33-40, (www.obm.org.br/eureka).

4. RECORRÊNCIAS DO TIPO FIBONACCI DE ORDENS SUPERIORES

Nessa seção vamos considerar equação (11) da seção 3 anterior com r, s inteiros positivos.

Estudaremos o comportamento assintótico das soluções da equação

$$(17) \quad x(t) = ax(t-r) + bx(t-s).$$

Assim sendo, o objetivo é a de determinar a região onde se encontram os parâmetros a e b para os quais as soluções de (17) convergem para zero.

4.1. Resultados Anteriores. Para que a equação (17) seja assintoticamente estável é necessário e suficiente que todas as raízes da equação característica tenham módulo menor que um. Os resultados dados a seguir são fundamentais para determinar a região estável de (17).

Teorema 7 (Clark, 1976). *Sejam a e b reais arbitrários e ℓ um inteiro positivo. Se $|a| + |b| < 1$ então a equação (17) é assintoticamente estável.*

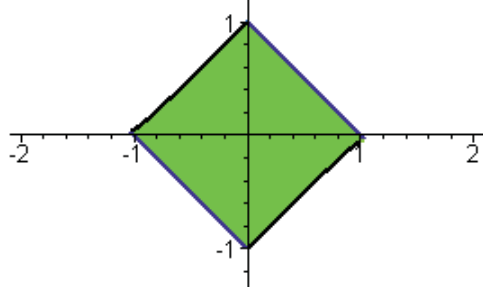


FIGURA 10. $|a| + |b| < 1$.

Teorema 8 (Kuruklis, 1994). *Sejam a e b reais, com $a \neq 0$, $r = 1$ e $s > 1$ um inteiro. As raízes da equação (17) pertencem ao disco unitário se, e somente se,*

$$|a| < \frac{s}{s-1}, \quad e$$

$$|a| - 1 < b < (a^2 + 1 - 2|a| \cos(\phi))^{\frac{1}{2}}, \quad s \text{ par.}$$

$$|a - b| < 1 \quad e \quad |b| < (a^2 + 1 - 2|a| \cos(\phi))^{\frac{1}{2}}, \quad s \text{ ímpar.}$$

onde ϕ é a solução da equação $\frac{\sin((s-1)\theta)}{\sin(s\theta)} = \frac{1}{|a|}$ no intervalo $(0, \frac{\pi}{s})$.

Teorema 9 (Kipnis and Nigmatulin, 2003). *Seja $b_0 = -2 \sin\left(\frac{\pi}{2(2\frac{s}{r}-1)}\right)$.*

(1) *Se $b > 0$ então a solução nula da equação (17) é instável.*

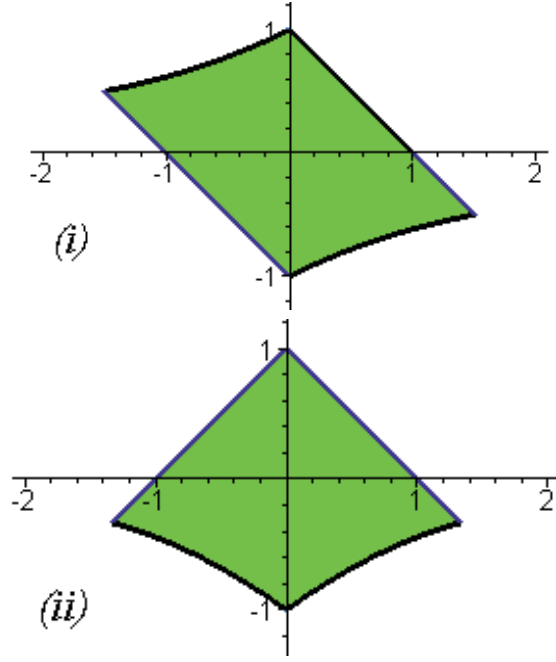


FIGURA 11. (i) r ímpar e s ímpar. (ii) r ímpar e s par.

- (2) Se s é divisível por r então a solução nula é assintoticamente estável se
- (18) $b_0 < b < 0$ e instável se,
- (19) $b < b_0$
- (3) Se s não é divisível por r então a solução nula da equação (17) é instável para todo $b \neq 0$.

Teorema 10 (Kipnis e Nigmatulin, 2003). Seja $\mu_0 = \frac{\arccos(\frac{5-3a}{4})}{\arccos(\frac{-3a^2+8a-3}{2a})}$.

- (1) Se $|a - 2| > 1$, então a solução nula da equação (17) é instável.
- (2) Se $1 < a < 3$ e s é divisível por r , então a solução nula equação (17) a assintoticamente estável, se
- (20) $\frac{s}{r} < \mu_0$ e instável se,
- (21) $\frac{s}{r} > \mu_0$.
- (3) Se s não é divisível por r , então a solução nula equação (17) é instável para todo $a \neq 1$.

Em [2] fizemos uma descrição completa, no plano dos parâmetros a, b , das regiões de estabilidade e instabilidades para a equação estudada por Kuruklis [6], ver figura 12.

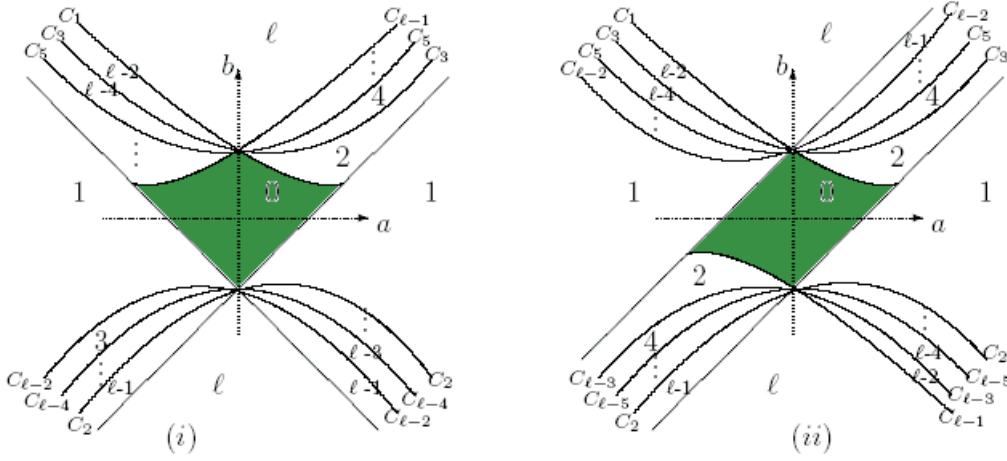


FIGURA 12. Regiões de Estabilidade e Instabilidade para a equação $x(t) + ax(t-1) + bx(t-\ell) = 0$. Observe que esta equação é um caso particular da equação (17) com $r := 1$, $s := \ell$, $a := -a$ e $b := -b$. Os números de 1 a ℓ indicam a quantidade de raízes com módulo maior do que 1, em cada região.

Os dois resultados, a seguir, são equivalentes e foram obtidos de formas independentes.

Teorema 11 (Kipnis e Nigmatulin, 2004). *Sejam r e s inteiros positivos, com $s > r$ e $\text{mdc}(r, s) = 1$. A solução nula da equação (17) é assintoticamente estável se, e somente se, o par (a, b) é um ponto interior da região finita limitada pelas curvas:*

- (1) $a + b = 1$;
- (2) $a = \frac{\text{sen}(sw)}{\text{sen}((s-r)w)}$, $b = -\frac{\text{sen}(rw)}{\text{sen}((s-r)w)}$;
- (3) $(-1)^r a + (-1)^s b = 1$,
- (4) $a = (-1)^r \frac{\text{sen}(sw)}{\text{sen}((s-r)w)}$; $b = -(-1)^s \frac{\text{sen}(rw)}{\text{sen}((s-r)w)}$.

onde, w varia entre $j\pi/s$ e $k\pi/r$. Sendo j é o menor inteiro positivo tal que $rj - sk = 1$ com k também inteiro.

Teorema 12 (Cruz e Santos, 2004). *Considere dois inteiros $s > r \geq 1$. Sendo m é o menor inteiro positivo tal que $rm - sq = 1$ com q também inteiro, então a solução nula da equação (17) é assintoticamente estável se, e somente se, o ponto (a, b) pertence ao interior da região do plano ab , contendo a origem, limitada por*

$$\mathcal{C}_{k_1}, \quad \mathcal{C}_{k_2}, \quad a + b = 1 \quad \text{e} \quad (-1)^{s-r} a + b = (-1)^s,$$

$$\text{onde } k_1 = \left\lfloor \frac{m(s-r)}{s} \right\rfloor + 1 \quad \text{e} \quad k_2 = \left\lfloor \frac{(s-m)(s-r)}{s} \right\rfloor + 1.$$

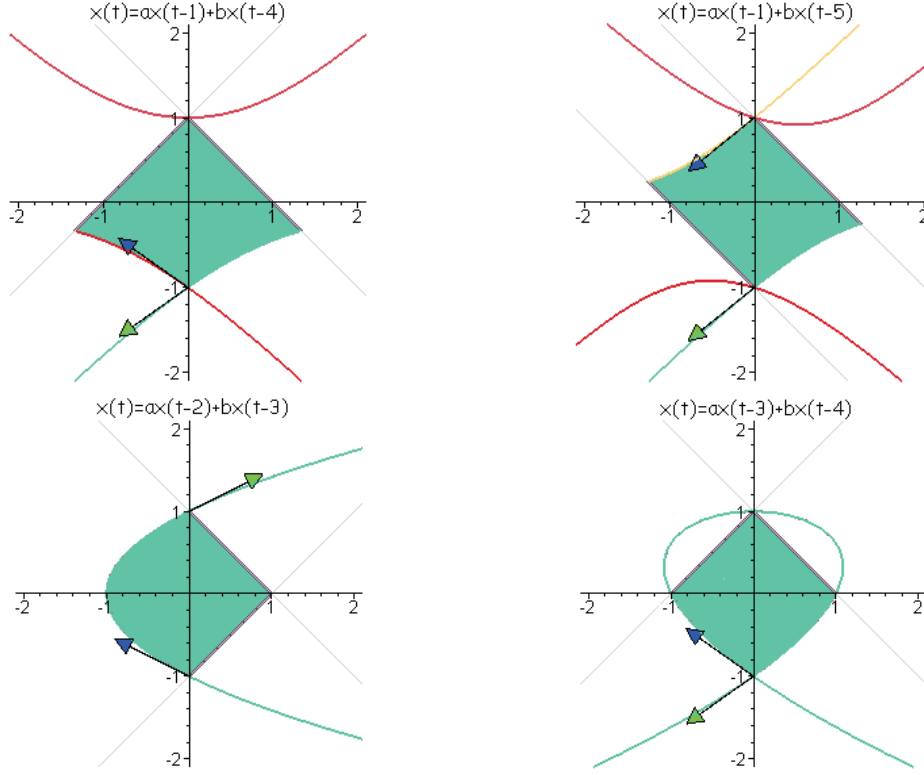


FIGURA 13. Alguns exemplos para ilustrar o Teorema 12.

Na próxima seção apresentaremos o desenvolvimento realizado em [3] para a demonstração do Teorema 12.

4.2. Estabilidade da equação

$x(t) = ax(t-r) + bx(t-s)$. A equação característica associada a (17) é;

$$(22) \quad \lambda^s - a\lambda^{s-r} - b = 0$$

Inicialmente observamos que o estudo para $r, s \in \mathbb{Q}_+$ se reduz ao caso em que $r, s \in \mathbb{N}$ e são primos entre si. De fato, se $r = \frac{p}{q}$ e $s = \frac{m}{n}$. Substituindo $\lambda = z^M$, onde $M = mmc(q, n)$ transformamos a equação característica em uma equação com coeficientes inteiros e $|\lambda| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$. De modo análogo, sendo r e s inteiros positivos e $d = mdc(r, s)$. Substituindo $\lambda^d = w$ temos,

$$w^{s_1} - aw^{s_1-r_1} - b = 0, \text{ com } mdc(s_1, r_1) = 1 \text{ e } |\lambda| < 1 \Leftrightarrow |w| < 1.$$

Agora, vamos obter o lugar geométrico dos pontos (a, b) para os quais a equação (22) possui raiz com módulo igual a 1. Para isso, considere λ uma raiz de (22), com $|\lambda| = 1$. Dessa forma, se $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que $\lambda = \pm 1$. De (22) segue que

$$(23) \quad (-1)^s - (-1)^{s-r}a - b = 0 \quad \text{ou} \quad 1 - a - b = 0.$$

Por outro lado, se $\lambda \notin \mathbb{R}$, então $\lambda = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$, com $\theta \in (0, \pi)$, assim, de (22), temos,

$$(24) \quad \cos(s\theta) - a \cos((s-r)\theta) - b = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}(s\theta) - a \operatorname{sen}((s-r)\theta) = 0.$$

Para $\theta \neq \frac{k\pi}{s-r}, k = 1, 2, \dots, s-r-1$ temos,

$$(25) \quad \mathcal{C}_k := \begin{cases} a &= \frac{\operatorname{sen}(s\theta)}{\operatorname{sen}((s-r)\theta)} \\ b &= -\frac{\operatorname{sen}(r\theta)}{\operatorname{sen}((s-r)\theta)}, \end{cases}$$

$$\theta \in \left(\frac{k-1}{s-r}\pi, \frac{k}{s-r}\pi\right) = I_k, \quad k = 1, 2, \dots, s-r.$$

Observe que não existe raiz complexa para $\theta = \frac{k\pi}{s-r}, k = 1, 2, \dots, s-r-1$.

4.3. Propriedades das curvas de bifurcação. Essas curvas tem as seguintes propriedades:

Lema 4. *Considere $s > r \geq 1$ inteiros e primos entre si. Se $1 \leq j \leq k \leq s-r$ são tais que $P := \mathcal{C}_j(\theta_1) = \mathcal{C}_k(\theta_2)$, com $\theta_1 \neq \theta_2$, então $P = (0, \pm 1)$ ou $P = (\pm 1, 0)$.*

Demonstração. Sejam $\lambda_1 = \cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1$ e $\lambda_2 = \cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2$ raízes de (22). Temos que

$$(26) \quad \lambda_1^s - a\lambda_1^{s-r} - b = 0$$

e

$$(27) \quad \lambda_2^s - a\lambda_2^{s-r} - b = 0.$$

Se $a = 0$, temos que $\lambda_1^s - b = 0 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$.

Se $a \neq 0$, subtraindo (27) de (26),

$$(\lambda_1^s - \lambda_2^s) - (\lambda_1^{s-r} - \lambda_2^{s-r})a = 0 \Rightarrow a = \frac{\lambda_1^s - \lambda_2^s}{\lambda_1^{s-r} - \lambda_2^{s-r}}.$$

Agora, podemos reescrever (26), na forma

$$\lambda_1^s - \frac{\lambda_1^s - \lambda_2^s}{\lambda_1^{s-r} - \lambda_2^{s-r}} \lambda_1^{s-r} - b = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Portanto, $a = \pm 1$.

Observe que se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então $\lambda_1^s - \lambda_2^s$ e $\lambda_1^{s-r} - \lambda_2^{s-r}$ não são simultaneamente nulos.

□

Lema 5. *Se $(a, b) = \mathcal{C}_k(\theta)$, para algum $k \in \{0, 1, \dots, s-r\}$ e algum $\theta \in I_k$, então*

$$|a + b| \leq 1 \quad \text{ou} \quad |a - b| \leq 1.$$

Além disso,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \mathcal{C}_1(\theta) = \left(\frac{s}{s-r}, -\frac{r}{s-r} \right), \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \mathcal{C}_{(s-r)}(\theta) = \left(\frac{(-1)^r s}{s-r}, \frac{(-1)^{s+1} r}{s-r} \right).$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_j^-} |\mathcal{C}_j(\theta)| = \infty, \quad e \quad \lim_{\theta \rightarrow \theta_{j-1}^+, j \neq 1} |\mathcal{C}_j(\theta)| = \infty, \quad \theta_j = \frac{j\pi}{s-r}, j = 1, 2, \dots, s-r-1.$$

Demonstração. Sejam $k \in \{0, 1, \dots, s-r\}$ e $\theta \in I_k$ tais que $(a, b) = \mathcal{C}_k(\theta)$. Assim,

$$a = \frac{\text{sen}(s\theta)}{\text{sen}((s-r)\theta)} \quad e \quad b = -\frac{\text{sen}(r\theta)}{\text{sen}((s-r)\theta)}.$$

Observamos que,

$$-1 \leq \cos((s-r)\theta) \leq 1 \implies -1 \leq \cos(s\theta) \cos(r\theta) + \text{sen}(s\theta) \text{sen}(r\theta) \leq 1.$$

Daí, temos dois casos a considerar:

(i) Se $\text{sen}(s\theta) \text{sen}(r\theta) \geq 0$, então

$$\begin{aligned} -2 \text{sen}(s\theta) \text{sen}(r\theta) &\leq -2 \text{sen}^2(s\theta) \text{sen}^2(r\theta) - 2 \text{sen}(s\theta) \text{sen}(r\theta) \cos(r\theta) \cos(s\theta) \\ &\leq 2 \text{sen}(s\theta) \text{sen}(r\theta) \end{aligned}$$

o que implica

$$(\text{sen}(s\theta) - \text{sen}(r\theta))^2 \leq (\text{sen}(r\theta) \cos(s\theta) - \text{sen}(s\theta) \cos(r\theta))^2 \leq (\text{sen}(s\theta) + \text{sen}(r\theta))^2,$$

isto é,

$$(28) \quad |\text{sen}(s\theta) - \text{sen}(r\theta)| \leq |\text{sen}((s-r)\theta)| \leq |\text{sen}(s\theta) + \text{sen}(r\theta)|.$$

(ii) Se $\text{sen}(s\theta) \text{sen}(r\theta) < 0$, temos,

$$(29) \quad |\text{sen}(s\theta) + \text{sen}(r\theta)| \leq |\text{sen}((s-r)\theta)| \leq |\text{sen}(s\theta) - \text{sen}(r\theta)|.$$

De (28) temos $|a + b| \leq 1$ e (29) temos $|a - b| \leq 1$.

Observação: Uma demonstração geométrica pode ser obtida observando que, no plano complexo, $a\lambda^{s-r}$ pertence a um círculo de raio $|a|$ e centro na origem.

Os limites são obtidos diretamente das expressões das curvas \mathcal{C}_k . \square

De posse das propriedades das curvas de bifurcação podemos agora descrever a região dos pontos (a, b) tais que a equação (22) possui raízes com módulo menor do que 1, chamada de *região de estabilidade assintótica* ou simplesmente *região estável*.

Levin, em [7], mostrou que no interior do quadrado $|a| + |b| < 1$, todas as raízes de (22) tem módulo menor do que 1. Como uma consequência do Teorema de Rouché temos a continuidade das raízes com respeito aos parâmetros, veja Dieudonné [5, Th. 9.17.4], por exemplo. Portanto, se (a, b) varia no plano ab começando no interior do conjunto $|a| + |b| < 1$, uma raiz de (22) com módulo maior que 1 aparece se, e somente se, o par (a, b) interceptar uma curva de bifurcação ou uma das retas $1 - a - b = 0$ e $(-1)^s - (-1)^{s-r}a - b = 0$.

Três casos devem ser considerados:

- r par e s ímpar;
- r ímpar e s par;
- r ímpar e s ímpar.

Detalharemos o caso r par e s ímpar. Inicialmente observamos que no primeiro e quarto quadrante as retas (23) são as fronteiras da região estável que, nestes quadrantes, coincidem com a obtida por Levin. As fronteiras no segundo e terceiro quadrante são partes de curvas de bifurcação “mais próximas” da região $|a| + |b| < 1$. Para determina-las estudaremos a inclinação do vetor tangente as curvas (25), nos pontos $(0, 1)$ e $(0, -1)$, isto é, $\theta = \frac{\sigma\pi}{s}$, com $\sigma = 1, \dots, s-1$. Para ser mais preciso, estamos interessados na curva que passa por $(0, 1)$ com inclinação máxima e na curva que passa por $(0, -1)$ com inclinação mínima.

Como o vetor tangente, em um ponto qualquer da curva (25), é dado por

$$\mathcal{C}'_k(\theta) := (a', b'), \quad \text{onde} \quad a' = \frac{da}{d\theta} \quad \text{e} \quad b' = \frac{db}{d\theta}.$$

Em $\theta = \frac{\sigma\pi}{s}$, temos

$$\mathcal{C}'_k\left(\frac{\sigma\pi}{s}\right) = \left(-\frac{s}{\sin\left(\frac{r\sigma\pi}{s}\right)}, \frac{(-1)^\sigma s \cos\left(\frac{r\sigma\pi}{s}\right)}{\sin\left(\frac{r\sigma\pi}{s}\right)} \right)$$

para $\sigma = 1, \dots, s-1$, e a *inclinação* é dada por, $\frac{b'}{a'} = (-1)^{\sigma+1} \cos\left(\frac{r\sigma\pi}{s}\right)$.

Sejam φ e s_0 inteiros, $0 < s_0 < s$, tais que $r\sigma = \varphi s + s_0$. Assim a inclinação pode ser escrita,

$$\frac{b'}{a'} = (-1)^{\sigma+1} \cos\left(\frac{r\sigma\pi}{s}\right) = (-1)^{\sigma+1} \cos\left(\varphi\pi + \frac{s_0\pi}{s}\right),$$

isto é,

$$(30) \quad \frac{b'}{a'} = (-1)^{\sigma+\varphi+1} \cos\left(\frac{s_0\pi}{s}\right).$$

Dessa forma temos,

$$(31) \quad (-1)^{\sigma+\varphi+1} \cos\left(\frac{\pi}{s}\right) \geq (-1)^{\sigma+\varphi+1} \cos\left(\frac{s_0\pi}{s}\right) \geq (-1)^{\sigma+\varphi+1} \cos\left(\frac{(s-1)\pi}{s}\right)$$

ou

$$(32) \quad (-1)^{\sigma+\varphi+1} \cos\left(\frac{\pi}{s}\right) \leq (-1)^{\sigma+\varphi+1} \cos\left(\frac{s_0\pi}{s}\right) \leq (-1)^{\sigma+\varphi+1} \cos\left(\frac{(s-1)\pi}{s}\right).$$

Portanto, os extremos da inclinação ocorrem em $s_0 = 1$ ou $s_0 = s-1$. Sendo r e s primos entre si e (m, q) a solução em que m é o menor inteiro positivo, uma solução da equação $r\sigma - s\varphi = s-1$ é dada por $(\sigma, \varphi) = (m_1, q_1)$, onde $m_1 = s-m$ e $q_1 = q+1-r$.

As primeiras coordenadas dos vetores tangentes às curvas \mathcal{C}_k em $\theta = \frac{m\pi}{s}$ e $\theta = \frac{m_1\pi}{s}$ são dadas, respectivamente, por

$$(33) \quad a'(\frac{m\pi}{s}) = -\frac{s}{\text{sen}(\frac{rm\pi}{s})} = -\frac{s}{\text{sen}(q\pi + \frac{\pi}{s})} = \frac{(-1)^{q+1}s}{\text{sen}(\frac{\pi}{s})}.$$

e

$$(34) \quad a'(\frac{m_1\pi}{s}) = -\frac{s}{\text{sen}(\frac{rm_1\pi}{s})} = -\frac{s}{\text{sen}(q_1\pi + \frac{\pi}{s})} = \frac{(-1)^{q_1+1}s}{\text{sen}(\frac{\pi}{s})}.$$

Se m for par, então q é ímpar, m_1 é ímpar e q_1 é par. Nesse caso, da desigualdade (31), temos

$$\cos(\frac{\pi}{s}) \geq \cos(\frac{s_0\pi}{s}) \geq \cos(\frac{(s-1)\pi}{s}),$$

para todo $s_0 = 1, \dots, s-1$.

Isso significa que para $\theta = \frac{m\pi}{s}$, no ponto $(0, 1)$, o vetor tangente tem inclinação máxima. Além disso, com q ímpar em (33), temos $a' > 0$ (o sentido da curva é do segundo para o primeiro quadrante).

Assim, o intervalo de definição da curva tem como extremo superior $\theta = \frac{m\pi}{s}$ e o extremo inferior é o primeiro múltiplo (inteiro) de $\frac{\pi}{r}$ imediatamente anterior a $\frac{m\pi}{s}$, isto é, $\lfloor \frac{mr}{s} \rfloor \frac{\pi}{r}$.

Portanto, a curva $C_{k_1}(\theta)$, $k_1 = \lfloor \frac{m(s-r)}{s} \rfloor + 1$, restrita ao intervalo,

$$\left[\lfloor \frac{mr}{s} \rfloor \frac{\pi}{r}, \frac{m\pi}{s} \right],$$

limita a região estável no segundo quadrante.

Por outro lado para $\theta = \frac{m_1\pi}{s}$, no ponto $(0, -1)$, o vetor tangente tem inclinação mínima. Da desigualdade (34) temos $a' < 0$ (o sentido da curva é do quarto para o terceiro quadrante). Isso significa que $\frac{m_1\pi}{s}$ é o extremo inferior do intervalo que define a fronteira no terceiro quadrante. O extremo superior é o primeiro múltiplo de $\frac{\pi}{r}$ maior do que $\frac{m_1\pi}{s}$, isto é, $(\lfloor \frac{m_1r}{s} \rfloor + 1) \frac{\pi}{r}$.

Portanto, a curva $C_{k_2}(\theta)$, $k_2 = \lfloor \frac{m_1(s-r)}{s} \rfloor + 1$, restrita ao intervalo,

$$\left[\frac{m_1\pi}{s}, (\lfloor \frac{m_1r}{s} \rfloor + 1) \frac{\pi}{r} \right],$$

limita a região estável no terceiro quadrante.

Se m é ímpar então q é ímpar, m_1 é par e q_1 é par. Nesse caso, em virtude de (32), teremos inclinação mínima para $\theta = \frac{m\pi}{s}$, em $(0, -1)$ e máxima para $\theta = \frac{m_1\pi}{s}$, em $(0, 1)$. Observando o sinal de a' em (33) e (34) concluímos que $C_{k_1}(\theta)$, $k_1 = \lfloor \frac{m(s-r)}{s} \rfloor + 1$, restrita ao intervalo,

$$\left[\lfloor \frac{mr}{s} \rfloor \frac{\pi}{r}, \frac{m\pi}{s} \right],$$

limita a região estável no terceiro quadrante. Enquanto que $C_{k_2}(\theta)$, $k_2 = \lfloor \frac{m_1(s-r)}{s} \rfloor + 1$, restrita ao intervalo,

$$\left[\frac{m_1\pi}{s}, (\lfloor \frac{m_1r}{s} \rfloor + 1) \frac{\pi}{r} \right],$$

limita a região estável no segundo quadrante. Isso conclui a demonstração para o caso em que r é par e s é ímpar.

Com argumentos análogos podemos encontrar as fronteiras da região estável nos outros dois casos, concluindo a demonstração do Teorema 12. □

Observação 2. Para $r = 1$, temos que $C_{k_1} = C_1$ e $C_{k_2} = C_{s-1}$ e, neste caso, em virtude do Lema 5, a fronteira da região estável em dois quadrantes será formada por parte das curvas de bifurcação e parte das retas (23), enquanto que nos outros dois quadrantes apenas parte das retas (23) formam a fronteira.

Observação 3. As coordenadas das curvas C_{k_1} e C_{k_2} , nos respectivos intervalos que definem as fronteiras, são funções monótonas, pois, tanto o sinal de a' como o de b' são preservados nos intervalos I_m e I_{m_1} , já que esses não possuem pontos do tipo $\frac{k\pi}{s}$ e $\frac{k\pi}{s-r}$, com k inteiro, em seus interiores.

REFERÊNCIAS

- [1] Clark, C. W., *A delayed-recruitment model of population dynamics, with an application to baleen whale populations*, J. Math. Biol. 3, 381-391, 1976.
- [2] Cruz, J. H. e Santos, R. A. *Uma nota sobre a estabilidade e instabilidade da equação $x(t) - ax(t-1) + bx(t-\ell) = 0$* , 58^o Seminário Brasileiro de Análise, Novembro de 2003.
- [3] Cruz, J. H. e Santos, R. A., *As regiões de estabilidade, no plano dos parâmetros a e b , da equação $x(t) - ax(t-r) - bx(t-s) = 0$* , 60^o Seminário Brasileiro de Análise, 2004, 275-284.
- [4] Kipnis, M. M. and Nigmatullin, R. M. *Stability of the Trinomial linear Difference Equation With Two Delays*, Automation and Remote Control, Vol. 65, no. 11, 2004, pp. 1710-1723.
- [5] Dieudonné, J. *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York, 1964.
- [6] Kuruklis, S. A., *The asymptotic stability of $x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0$* . Journal of Math. Analysis and Applications, 188, 719-731, 1994.
- [7] Levin, S. A. and R. M. May, *A note on difference-delay equation* Theoret. Popul. Biol. 9. 178-187, 1976.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
CAIXA POSTAL 131
74.001-970 GOIÂNIA, GO, BRASIL
E-mail address: `jhilario@mat.ufg.br`
E-mail address: `tuyako@mat.ufg.br`
E-mail address: `rasantos@mat.ufg.br`