INSTITUTO FEDERAL
Paraná
Campus Assis Chateaubriand

PÁTRIA AMADA
BRASIL
GOVERNO FEDERAL

DISCIPLINA

PRÉ-CÁLCULO

Curso Superior de Tecnologia em

Automação Industrial

Instituto Federal do Paraná
Campus Assis Chateaubriand

Prof. Jonatan Ismael Eisermann
jonatan.eisermann@ifpr.edu.br

Material Didático

2026

Sumário

Capítulo 1

Teoria de Conjuntos

1.1 Conjuntos

Um *conjunto* é uma coleção de objetos chamados elementos. Usamos $a \in A$ para dizer que a pertence a A, e $a \notin A$ para dizer que não pertence.

Observação: Quando um conjunto não possui elementos, ele é chamado de *conjunto vazio* e representado pelo símbolo $\emptyset$ ou $\{\}$.

Exemplo

Exemplo não numérico: Seja F o conjunto das frutas:

$$F = \{\text{maçã, banana, uva, laranja}\}.$$

Podemos afirmar que:

- banana $\in F$ (banana pertence ao conjunto F);
- batata $\notin F$ (batata não pertence ao conjunto F).

Exemplo

Exemplo numérico: Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$2 \in A \quad \text{e} \quad 5 \notin A.$$

1.2 Subconjuntos

Dizemos que um conjunto A é *subconjunto* de um conjunto B quando todos os elementos de A também pertencem a B. Nesse caso, escrevemos $A \subset B$ (lê-se: "A está contido em B"ou "A é subconjunto de B"). Equivalentemente, também podemos escrever $B \supset A$ (lê-se: "B contém A").

Exemplo

Exemplo: Considere os conjuntos:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Todos os elementos de A (1, 2 e 3) estão em B. Portanto:

$$A \subset B \quad \text{ou} \quad B \supset A.$$

Propriedades:

- Todo conjunto é subconjunto de si mesmo: $A \subset A$;
- O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto: $\emptyset \subset A$, para qualquer conjunto A;
- Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$ (conjuntos iguais).

1.3 Operações Fundamentais

Para manipular conjuntos, utilizamos operações lógicas. Imagine dois conjuntos A e B:

- **União ($A \cup B$):** É a junção de todos os elementos de ambos os conjuntos sem repetições.

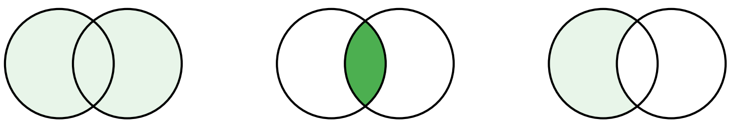
  Exemplo: $A = \{\text{Azul, Verde}\}$ e $B = \{\text{Verde, Amarelo}\}$.
  $A \cup B = \{\text{Azul, Verde, Amarelo}\}$

- **Interseção ($A \cap B$):** Apenas os elementos que pertencem aos dois ao mesmo tempo.

  Exemplo: Usando as cores acima:
  $A \cap B = \{\text{Verde}\}$

- **Diferença ($A - B$):** Elementos que são exclusivos de A, retirando tudo o que for de B.

  Exemplo: Usando as cores acima:
  $A - B = \{\text{Azul}\}$



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A - B$

Atividade 1

Dados $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{4, 5, 6, 7\}$, determine:

$A \cup B =$ ________________________________

$A \cap B =$ ________________________________

$A - B =$ ________________________________

1.4 Conjuntos Numéricos

Definição

- **Naturais ($\mathbb{N}$):** $\{0, 1, 2, \dots\}$
- **Inteiros ($\mathbb{Z}$):** $\{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$
- **Racionais ($\mathbb{Q}$):** Frações e dízimas periódicas.
- **Irracionais ($\mathbb{I}$):** Decimais infinitos não periódicos (π, $\sqrt{2}$).
- **Reais ($\mathbb{R}$):** $(\mathbb{Q} \cup \mathbb{I})$.

1.5 Intervalos Reais

Agora vamos estudar subconjuntos de $\mathbb{R}$ que possuem uma propriedade importante: eles contêm todos os números reais entre dois extremos. Diferentemente dos conjuntos finitos que vimos até aqui (como $\{1, 2, 3, 4\}$), representar um *intervalo real* listando seus elementos um a um não faz sentido, pois entre dois números reais quaisquer existem infinitos outros números. Por exemplo, no intervalo de 0 a 1 existem infinitos números como 0,1, 0,01, 0,001, entre tantos outros.

Para representar intervalos reais, podemos utilizar duas notações equivalentes:

- **Notação de intervalos:** utiliza colchetes e parênteses para indicar se os extremos estão incluídos ou não.
- **Notação de conjuntos:** utiliza chaves e uma condição, no formato $\{x \in \mathbb{R} \mid$ condição$\}$.

Definição

- **Intervalo Fechado** $[a, b]$**:** Inclui os extremos a e b.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

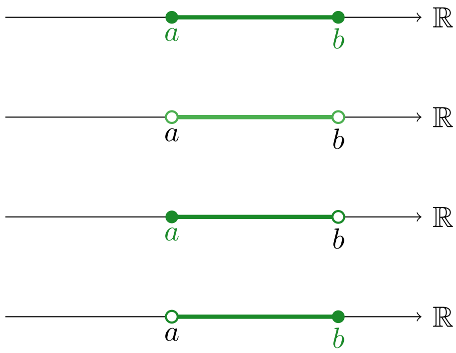
- **Intervalo Aberto** (a, b) **ou** $]a, b[$**:** Exclui os extremos a e b.

$$]a, b[= (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

- **Intervalo Entreaberto:** Inclui apenas um dos extremos.

$$[a, b[= [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$



$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

$]a, b[= (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

$[a, b[= [a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

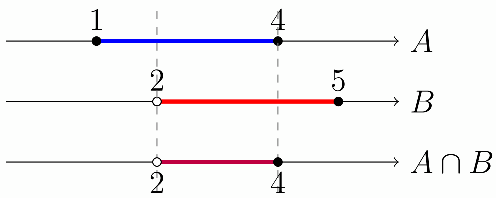
$]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

1.6 Operações com Intervalos

Para resolver operações com intervalos reais, desenhamos as retas paralelas e analisamos a sobreposição.

Exemplo

Determine $A \cap B$ para $A = [1, 4]$ e $B =]2, 5]$.



Atividade 2

Seja $A = [0,5]$ e $B = [2,8]$. Determine $A \cup B$ e represente graficamente.

Atividade 3

Determine $C \cap D$ sendo $C =]-1,4]$ e $D = [2,6[$.

Atividade 4

Determine a diferença $A - B$, sendo $A = [1,5]$ e $B = [3,6]$.

1.7 Exercícios

1. Considere os conjuntos $A = \{0,1,2,3,5,8\}$, $B = \{2,3,4,5,6\}$ e $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\}$. Determine:

(a) $A \cap B$

(b) $(A \cup C) \cap B$

(c) $A - (B \cap C)$

2. Classifique como Verdadeiro (V) ou Falso (F):

(a) (   ) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

(b) (   ) $0,333\cdots \in \mathbb{I}$

(c) (   ) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

(d) (   ) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{I} = \emptyset$

3. Represente graficamente e na notação de conjuntos os seguintes intervalos:

(a) $[-2, 3]$

(b) $]0, 5]$

(c) $(-\infty, 2[$

4. Dados os intervalos $I = [1, 5]$ e $J =]2, 7[$, determine:

(a) $I \cup J$

(b) $I \cap J$

(c) $I - J$

5. Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 6\}$, determine o conjunto $(A \cup B) - (A \cap B)$.

Capítulo 2

Funções

2.1 Relações no Cotidiano

No nosso dia a dia, estamos cercados por grandezas que se relacionam. O valor da conta de luz depende do consumo de energia; a distância percorrida por um carro depende do tempo de viagem; o preço a pagar em uma lanchonete depende da quantidade de itens comprados.

Exemplo

Situação industrial: Em uma fábrica, cada peça produzida gera um custo de R$ 2,50. Complete a tabela abaixo relacionando a quantidade de peças com o custo total:

Quantidade de peças (x)	**Custo total** (y)
1	2,50
2	
3	
4	
5	
$\vdots$	$\vdots$
x	

Neste exemplo, dizemos que o custo está *em função* da quantidade de peças. A partir de agora, estudaremos essas relações especiais entre conjuntos.

2.2 Definição de Função

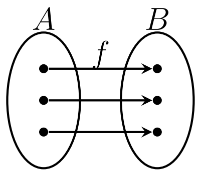
Uma *função* é uma correspondência matemática entre dois conjuntos que associa, de maneira bem definida, elementos de um conjunto a elementos de outro.

Definição

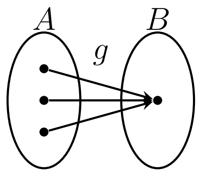
Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma função $f : A \to B$ é uma relação que associa cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$. Escrevemos:

$$y = f(x)$$

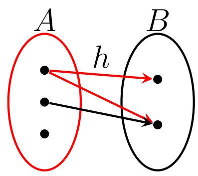
onde y é a imagem de x pela função f.



É Função



É Função

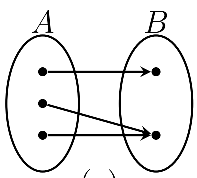


Não é Função

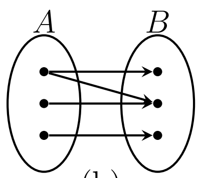
Observe que, para ser função, o conjunto A deve respeitar duas condições: todos os seus elementos devem possuir uma flecha de saída, e cada elemento deve possuir apenas uma única flecha.

Atividade 1: Identificando funções

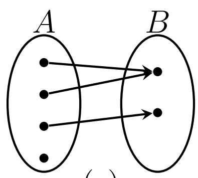
Observe os diagramas abaixo e indique quais representam uma função de A em B:



(a)



(b)



(c)

2.3 Domínio, Contradomínio e Imagem

Ao trabalhar com funções, precisamos identificar três conjuntos fundamentais:

Definição

- **Domínio:** É o conjunto de todos os valores que a variável independente pode assumir. Representamos por $D(f)$.
- **Contradomínio:** É o conjunto que contém todos os valores possíveis que a função poderia assumir. Representamos por $CD(f)$.
- **Imagem:** É o subconjunto do contradomínio formado pelos valores que a função realmente assume. Representamos por $Im(f)$.

Exemplo

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

- **Domínio:** $\mathbb{R}$
- **Contradomínio:** $\mathbb{R}$
- **Imagem:** $[0, +\infty)$ ou $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

Exemplo

Considere a função $g : \{1, 2, 3\} \to \mathbb{N}$ definida por $g(x) = 2x$.

- **Domínio:** $\{1, 2, 3\}$
- **Contradomínio:** $\mathbb{N}$
- **Imagem:** $\{2, 4, 6\}$

Observe que o contradomínio é $\mathbb{N}$, que contém muitos outros números como $1, 3, 5, 7, \ldots$, mas a imagem é apenas o subconjunto $\{2, 4, 6\}$.

Atividade 2: Calculando valores e determinando a imagem

Dada a função $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 2$, complete a tabela e determine o conjunto Imagem:

x	$f(x) = x + 2$	Ponto (x, y)
-2		
-1		
0		
1		
2		

$Im(f) = \{$__________________________$\}$

2.4 Determinando o Domínio de Funções Reais

Quando trabalhamos com funções reais, precisamos estar atentos a algumas restrições matemáticas importantes. Vamos estudar as duas principais:

2.4.1 Restrição 1: Divisão por Zero

Em matemática, não existe divisão por zero. Portanto, se uma função possui uma variável no denominador, devemos excluir do domínio os valores que tornam esse denominador igual a zero.

Exemplo

Determine o domínio da função $f(x) = \dfrac{5}{x-2}$.
Resolução:

- Identificamos o denominador: $x - 2$
- O denominador não pode ser zero: $x - 2 \neq 0$
- Resolvemos: $x \neq 2$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\} = \mathbb{R} - \{2\}$.
Em notação de intervalos: $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

Exemplo

Determine o domínio da função $f(x) = \dfrac{3}{x^2-4}$.
Resolução:

- Denominador: $x^2 - 4$
- $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
- Portanto: $x \neq 2$ e $x \neq -2$

Assim, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \text{ e } x \neq 2\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.
Em notação de intervalos: $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

2.4.2 Restrição 2: Raiz Quadrada

Não existe raiz quadrada de número negativo no conjunto dos números reais. Portanto, o radicando deve ser maior ou igual a zero.

Exemplo

Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{x-3}$.
Resolução:

- Radicando: $x - 3$
- Condição: $x - 3 \geq 0$
- Resolvemos: $x \geq 3$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} = [3, +\infty)$.

Exemplo

Determine o domínio da função $f(x) = \sqrt{5-x}$.
Resolução:

- Radicando: $5 - x$
- Condição: $5 - x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -5 \Rightarrow x \leq 5$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\} = (-\infty, 5]$.

2.4.3 Restrições Combinadas

Algumas funções apresentam mais de uma restrição. Devemos considerar todas as condições ao mesmo tempo.

Exemplo

Determine o domínio da função $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-3}$.
Resolução: Temos duas condições:

- **Raiz:** $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$
- **Denominador:** $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

Devemos satisfazer as duas condições simultaneamente. Portanto: $D(f) = [-1, 3) \cup (3, +\infty)$.

Atividade 3: Determinando domínios

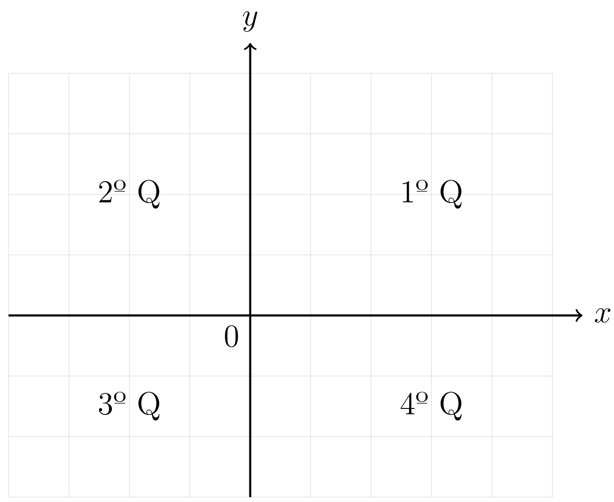
Determine o domínio das seguintes funções:

1. $f(x) = \dfrac{4}{x-5}$
2. $f(x) = \sqrt{x+4}$
3. $f(x) = \dfrac{2}{x^2-9}$
4. $f(x) = \sqrt{3-x}$
5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{x-6}$

2.5 O Plano Cartesiano

Para representar funções graficamente, usamos o plano cartesiano. Ele é formado por dois eixos perpendiculares:

- **Eixo horizontal (x):** chamado de eixo das abscissas
- **Eixo vertical (y):** chamado de eixo das ordenadas



O plano é dividido em 4 regiões chamadas quadrantes.

2.6 Construindo Gráficos

Para construir o gráfico de uma função, seguimos passos simples:

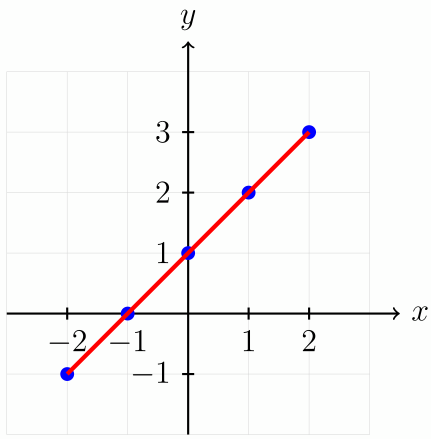
1. Escolhemos valores para x (domínio)
2. Calculamos os valores correspondentes de $y = f(x)$
3. Marcamos os pontos (x, y) no plano cartesiano
4. Ligamos os pontos (quando a função for contínua)

Exemplo

Vamos construir o gráfico da função $f(x) = x + 1$.
Passo 1: Tabela de valores

x	$f(x) = x + 1$	Ponto (x, y)
-2	$-2 + 1 = -1$	$(-2, -1)$
-1	$-1 + 1 = 0$	$(-1, 0)$
0	$0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$1 + 1 = 2$	$(1, 2)$
2	$2 + 1 = 3$	$(2, 3)$

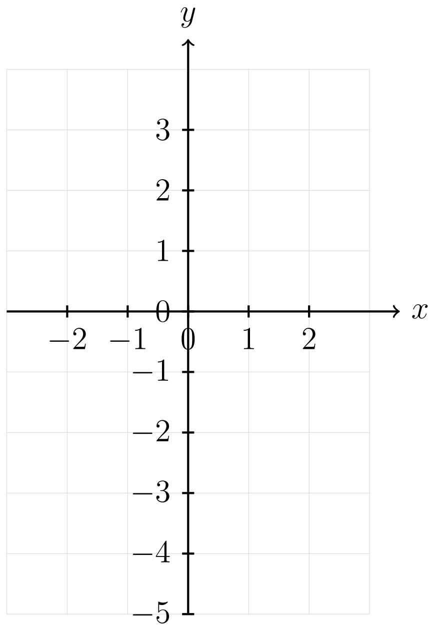
Passo 2: Marcar os pontos e traçar a reta



Atividade 4: Construindo um gráfico

Para a função $f(x) = 2x - 1$, complete a tabela e marque os pontos no plano cartesiano:

x	$f(x) = 2x - 1$	Ponto (x, y)
-2		
-1		
0		
1		
2		

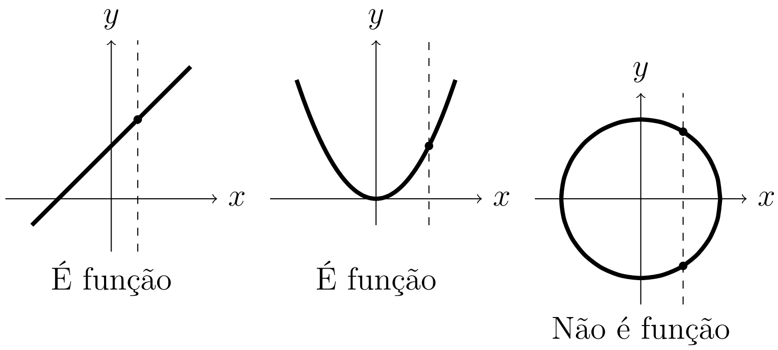


2.7 O Teste da Reta Vertical

O teste da reta vertical é uma forma simples de identificar se um gráfico representa uma função:

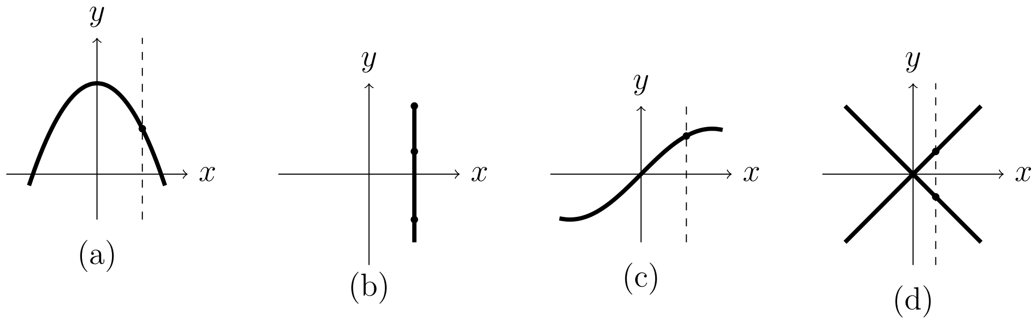
Definição

Teste da Reta Vertical: Se qualquer reta vertical traçada no gráfico cruzá-lo em mais de um ponto, então a relação **não** é uma função. Se cada reta vertical cruzar em no máximo um ponto, a relação é uma função.



Atividade 5: Aplicando o teste da reta vertical

Aplique o teste da reta vertical para verificar se as curvas abaixo representam funções:



Instruções: Para cada gráfico, desenhe mentalmente (ou imagine) uma reta vertical passando por diferentes pontos do eixo x. Se alguma reta vertical cruzar o gráfico em mais de um ponto, a relação não é uma função.

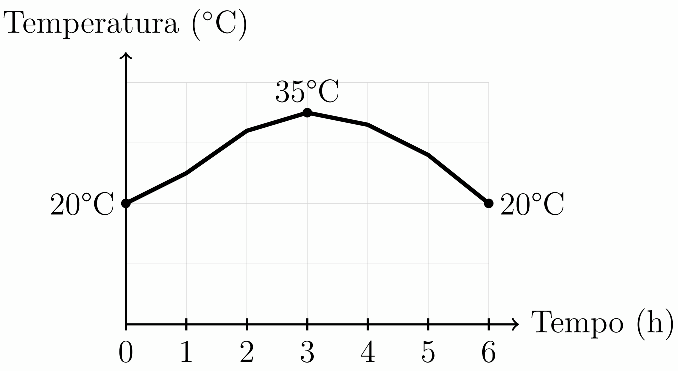
2.8 Interpretação de Gráficos

Saber interpretar gráficos é muito importante. Vamos ver alguns exemplos simples:

2.8.1 Analisando um gráfico

Exemplo

Observe o gráfico abaixo e responda as perguntas:

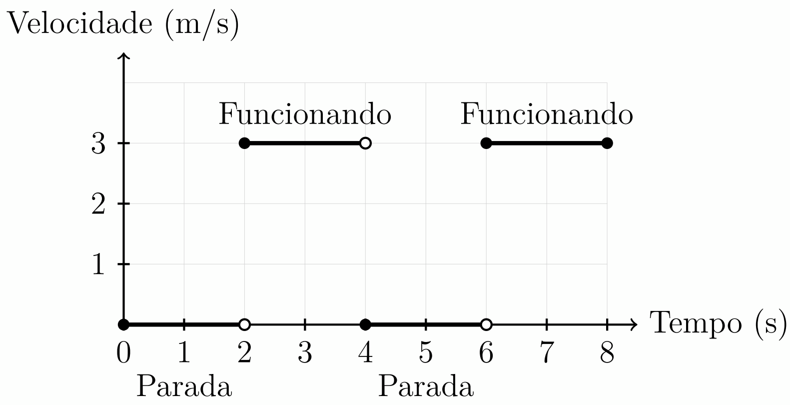


1. Qual a temperatura no início ($t = 0$)?
2. Qual a temperatura máxima?
3. Em que horário ocorre a temperatura máxima?
4. A temperatura aumenta ou diminui nas primeiras 3 horas?
5. Após 3 horas, a temperatura aumenta ou diminui?

2.8.2 Gráfico de um processo industrial simples

Exemplo

O gráfico abaixo mostra a velocidade de uma esteira ao longo do tempo:



Interpretação:

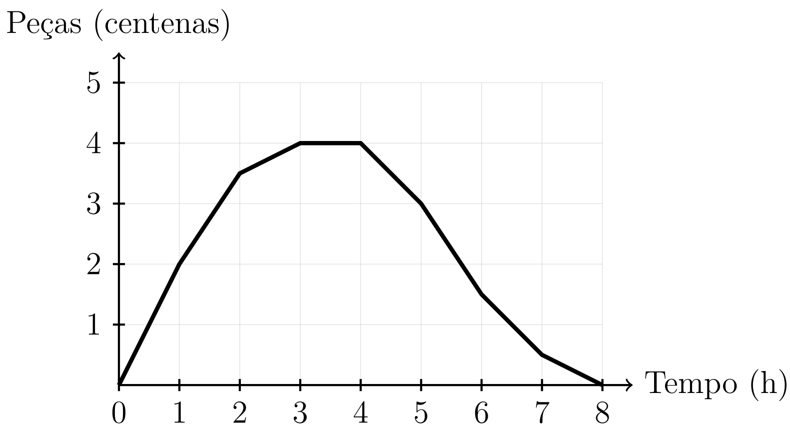
- A esteira fica parada de 0 a 2 segundos (incluindo t=0, mas não t=2)
- Funciona de 2 a 4 segundos a 3 m/s (incluindo t=2, mas não t=4)
- Para novamente de 4 a 6 segundos (incluindo t=4, mas não t=6)
- Volta a funcionar de 6 a 8 segundos (incluindo t=6 e t=8)

Convenção:

- **Ponto fechado:** o valor é válido naquele instante
- **Ponto aberto:** o valor não é válido naquele instante

Atividade 6: Interpretando um gráfico de produção

O gráfico abaixo mostra a quantidade de peças produzidas por uma máquina ao longo de um turno de 8 horas:

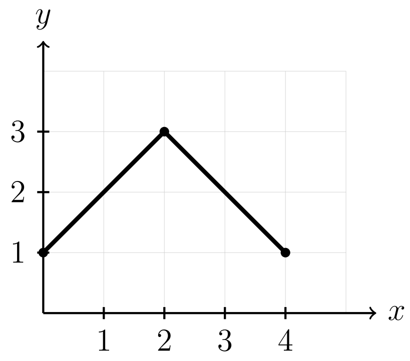


Responda:

1. Quantas peças (em centenas) são produzidas na 2ª hora?
2. Em que horário a produção é máxima?
3. Qual a produção máxima?
4. Entre quais horas a produção está aumentando?
5. Entre quais horas a produção está diminuindo?

Atividade 7: Analisando um gráfico simples

Observe o gráfico abaixo e responda:



1. Qual o valor de $f(2)$?
2. Qual o valor de $f(0)$?
3. Para qual valor de x temos $f(x) = 1$?
4. Esta função é crescente ou decrescente entre $x = 0$ e $x = 2$?

2.9 Exercícios

1. Em um estacionamento, o valor cobrado é de R$ 5,00 fixos mais R$ 3,00 por hora.

(a) Complete a tabela abaixo com o valor a pagar para cada período:

Horas (h)	Cálculo	Valor a pagar
1	$5 + 3 \cdot 1 = 5 + 3$	R$ 8,00
2	$5 + 3 \cdot 2 = 5 + 6$	
3		
4		
5		

(b) Escreva a função $V(h)$ que representa o valor a pagar por h horas.
$V(h) =$ ____________________

(c) Quanto pagará uma pessoa que estacionar por 12 horas?

____

(d) Quantas horas ficou um carro cujo pagamento foi de R$ 26,00?

____

2. Dada a função $f(x) = 3x - 5$, calcule:

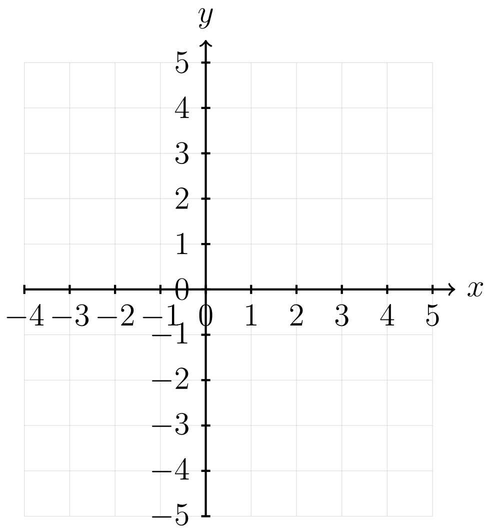
(a) $f(2)$

(b) $f(-1)$

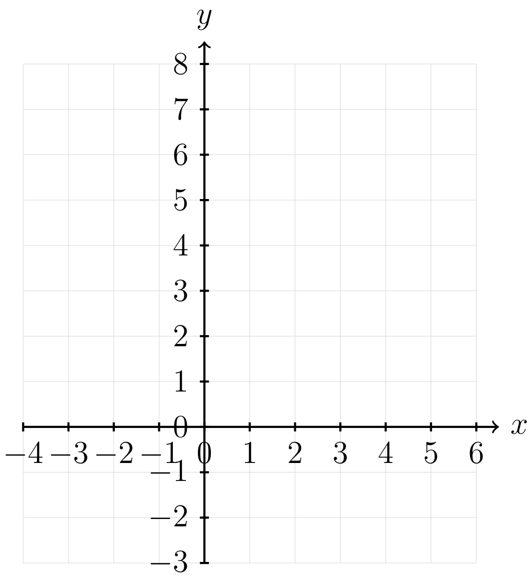
(c) $f(0)$

(d) $f(4)$

3. Construa o gráfico da função real $f(x) = 2x - 3$ no plano cartesiano abaixo (escolha pelo menos 3 pontos para marcar e trace a reta):



4. Construa o gráfico da função real $f(x) = -2x + 5$ no plano cartesiano abaixo (escolha pelo menos 3 pontos para marcar e trace a reta):



5. Determine o domínio das funções:

(a) $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$

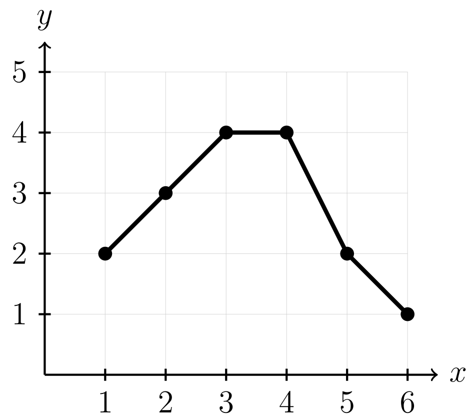
(b) $g(x) = \sqrt{x+5}$

(c) $h(x) = \dfrac{4}{x^2-16}$

(d) $p(x) = \sqrt{4-x}$

(e) $q(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-7}$

6. Observe o gráfico da função $f(x)$ abaixo e responda:



(a) $f(1) =$ _____

(b) $f(3) =$ _____

(c) $f(4) =$ _____

(d) $f(6) =$ _____

(e) Para qual valor de x temos $f(x) = 3$? _____

(f) Para quais valores de x temos $f(x) = 2$? _____

7. Considere a função $f(x) = x^2 - 4$. Determine:

(a) $f(0)$

(b) $f(2)$

(c) $f(-2)$

(d) $f(3)$

(e) Os valores de x tais que $f(x) = 0$

8. Considere a função $f : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -x + 4$.

(a) Complete a tabela com os valores da função:

x	$f(x) = -x + 4$
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	
4	

(b) Determine o conjunto imagem:
$Im(f) = \{$______________________________________$\}$

(c) Construa o gráfico da função marcando os pontos $(x, f(x))$ no plano cartesiano abaixo: