

MO431 - Tarefa 1

Jônatas Trabuço Belotti
RA: 230260
jonatas.t.belotti@hotmail.com

I. INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é aplicar os conceitos de Álgebra Linear para realizar a fatoração e a redução de dimensionalidade em matrizes não quadradas. Todas as operações foram realizadas tendo como base uma matriz X de 3023 linhas e 1850 colunas. O arquivo **npz** que contém essa matriz pode ser obtido pelo link <http://www.ic.unicamp.br/~wainer/cursos/1s2019/X.npz>.

Todos os códigos deste trabalho foram escritos utilizando a linguagem de programação **Python 3.6.9** com as seguintes bibliotecas: **Numpy 1.18.2**, **Sklearn 0.21.3** e **Matplotlib 3.1.1**. Sendo estas obrigatórias para execução dos códigos. Todo o código desenvolvido pode ser acessado no repositório do GitHub https://github.com/jonatastbelotti/mo431_trabalho1.

II. LEIA O ARQUIVO X.NPY E IMPRIMA A IMAGEM DA PRIMEIRA PESSOA

O arquivo **X.npz** contém uma matriz não quadrada com 3023 linhas e 1850 colunas, onde cada linha corresponde a uma imagem de uma celebridade. Para realizar a leitura desse arquivo foi utilizada a função **load** do Numpy.

Cada linha da matriz X na verdade é uma imagem em tons de cinza de 50 por 37 pixels. Portanto, para extrair a imagem da primeira pessoa foi necessário primeiro extrair a primeira linha da matriz e depois aplicar a função **reshape** do Numpy para transformar essa linha em uma matriz 50×37 .

Para imprimir a imagem da primeira pessoa na tela foi utilizada a função **imshow** da biblioteca Matplotlib, mas como a imagem é representada em tons de cinza foi necessário passar o parâmetro **cm=cm.gray**. Por fim, a imagem original da primeira pessoa pode ser observada na Figura 1.

III. FAÇA A FATORAÇÃO SVD DA MATRIZ X

Através da função **svd** do Numpy foram realizadas duas fatorações na matriz X . A primeira, chamada de *Full Matix* é obtida quando atribui-se o valor **True** para o parâmetro **full_matrices** da função **svd**. E segue a formulação da Equação 1:

$$A = UDV^{-1} \quad (1)$$

onde:

- A tem dimensões $m \times n$;
- U tem dimensões $m \times m$;
- D tem dimensões $m \times n$;
- V^{-1} tem dimensões $n \times n$.

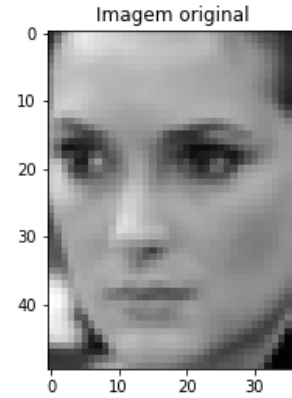


Fig. 1: Imagem original.

Como resultado da fatoração *Full Matix* foram obtidas as seguintes matrizes: matriz A com dimensões 3023×1850 , matriz U com dimensões 3023×3023 , matriz D com dimensões 3023×1850 e a matriz V^{-1} com dimensões 1850×1850 . O que comprova que as matrizes resultantes dessa fatoração são dos tamanhos corretos.

A segunda fatoração foi a Compacta, que é obtida com a função **svd** do Numpy passando o parâmetro **full_matrices=False**. Essa fatoração também segue a formulação da Equação 1, entretanto as dimensões das matrizes resultantes são diferentes:

- A tem dimensões $m \times n$;
- U tem dimensões $m \times n$;
- D tem dimensões $n \times n$;
- V^{-1} tem dimensões $n \times n$.

O resultado da fatoração Compacta foram as matrizes: A com dimensões 3023×1850 , U com dimensões 3023×1850 , D com dimensões 1850×1850 e V^{-1} com dimensões 1850×1850 . Confirmando que as matrizes resultantes da fatoração Compacta possuem as dimensões corretas.

IV. VERIFIQUE A FORMULAÇÃO COMPACTA DO SVD

A verificação da fatoração pode ser feita observando o maior erro da fatoração em relação a algum dado original. Para tanto, basta pegar o maior valor em módulo resultante da subtração da Equação 2.

$$X - (UDV^{-1}) \quad (2)$$

Para a fatoração Compacta esse valor foi de 0,000473, o que representa um erro pequeno quando comparado a média dos valores da matriz X que é 129,548843. Em termos percentuais em relação a média dos valores de X é um erro de 0,000365%.

V. COMPUTE A MATRIZ REDUZIDA E A MATRIZ RECONSTRUÍDA

Nesta seção a matriz original X foi reduzida para 100 dimensões. A redução tem o objetivo de representar a informação com perdas aceitáveis e com menor uso de espaço de memória.

A. Matriz reduzida

Como cada linha da matriz X representa uma imagem o objetivo aqui é reduzir a quantidade de colunas necessárias para representar cada imagem. Foi escolhido utilizar o número de dimensões $k = 100$, ou seja, cada imagem de 1850 dimensões foi projetada no melhor subespaço de 100 dimensões que ainda representa os dados originais.

A matriz reduzida de X será uma matriz de 3023 linhas (o mesmo numero de dados/imagens) mas de 100 colunas.

A formulação do SVD para redução de dimensionalidade é dada pela Equação 3.

$$X \approx U_k D_k V_k^{-1} \quad (3)$$

onde:

- U_k é a matriz U com apenas as primeiras k colunas;
- D_k é a matriz diagonal D com apenas as primeiras k linhas e k colunas;
- V_k^{-1} é a matriz V^{-1} com apenas as primeiras k linhas.

Desse modo, a matriz reduzida é a matriz $U_k D_k$ que agora tem as dimensões 3023×100 .

B. Matriz reconstruída

A matriz reconstruída é uma matriz no espaço original (de 1850 dimensões), mas agora cada ponto representa seu valor na projeção do ponto no subespaço de 100 dimensões.

A matriz reconstruída deve ter 1850 dimensões mas em vez da imagem original, tem-se a imagem quando projetada no subespaço de 100 dimensões da redução.

A formulação para a matriz reconstruída X_r é dada pela Equação 4.

$$X_r = U_k D_k V_k^{-1} \quad (4)$$

VI. IMPRIMA A IMAGEM RECONSTRUÍDA DA 1ª PESSOA REDUÇÃO

Além de remover as colunas e linhas das matrizes resultantes das fatorações *Full Matrix* e *Compacta* foi utilizada também a função **TruncatedSVD** do Sklearn para realizar a redução e reconstrução da matriz X .

A fim de melhor comparar os resultados obtidos as figuras 2 apresenta novamente a imagem original da primeira pessoa, antes de serem realizadas quaisquer operações. Por sua vez as figuras 3 e 4 apresentam a imagem da primeira pessoa após o processo de redução realizado nas fatorações *Full Matrix*

e *Compacta*. E a Figura 5 contém a imagem da primeira pessoa após a redução realizada pela função **TruncatedSVD** do Sklearn.

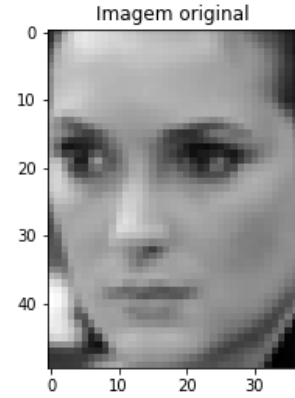


Fig. 2: Imagem original.

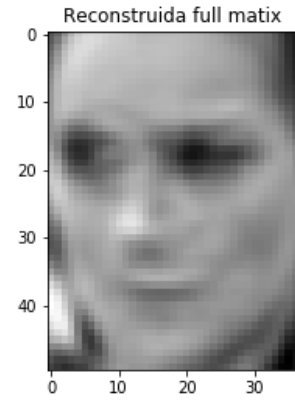


Fig. 3: Reconstruída *Full Matrix*

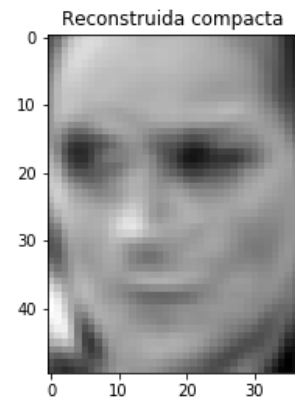


Fig. 4: Reconstruída *Compacta*

Observando as figuras 2, 3, 4 e 5 nota-se sim uma redução da nitidez da imagem original (Figura 2) para as imagens das

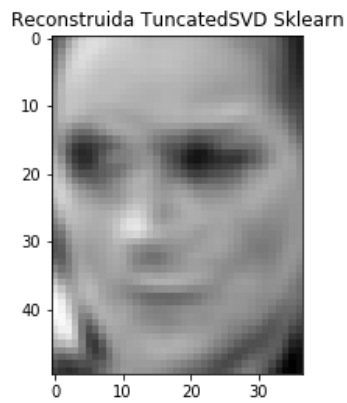


Fig. 5: Reconstruída TuncatedSVD

reduções (figuras 3, 4 e 5). Entretanto, mesmo com a perda de nitidez ainda é possível identificar a presença de um rosto feminino nas imagens reduzidas.

Além do conteúdo geral da imagem, ainda é possível identificar detalhes na imagem reduzida, como por exemplo a posição dos olhos, testa, nariz, cabelo, boca e pescoço.

Portanto pode-se concluir que apesar do processo de redução das imagens ter descartado muita informação os aspectos gerais das imagens foram mantidos.