Rappel

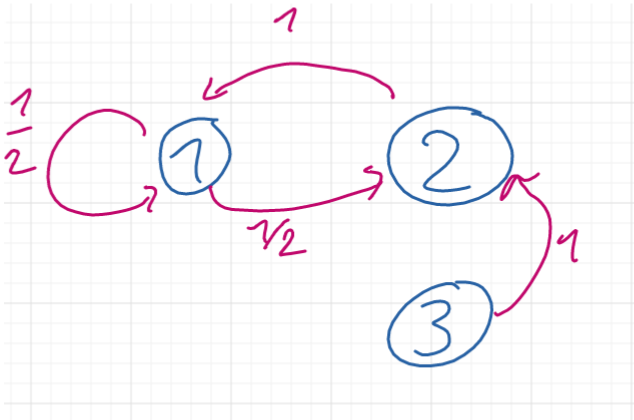
Théorème. *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov irréductible et apériodique de matrice de transition P. Alors pour tout i et j :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = j | X_0 = i] = \pi_j > 0,$$

et π est l'unique distribution solution de $\pi = \pi P$.

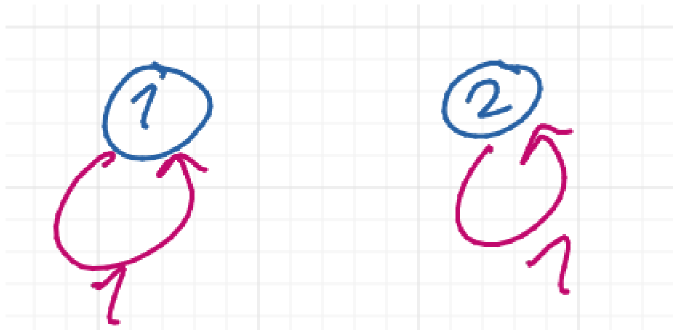
Contre-exemples :

a. Matrice de transition avec un état transient



L'état 3 étant transient, en résolvant le système on obtient $\pi_3 = 0$.

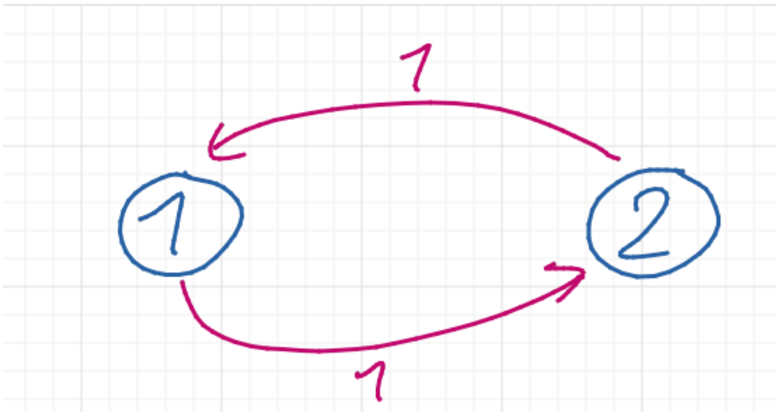
b. Matrice de transition qui n'est pas irréductible, avec plusieurs classes irréductibles :



Le caractère irréductible est important pour garantir l'unicité de la distribution stationnaire.

c. Matrice de transition irréductible, mais périodique :
Dans ce cas, sur le long terme, le temps moyen passé dans n'importe lequel des états vaut bien $1/2$, mais on a pas la propriété de convergence vers $1/2$ pour les probabilités. On a en effet :

$$\mathbb{P}[X_{2n} = 0 | X_0 = 0] = 1 \text{ et } \mathbb{P}[X_{2n+1} = 0 | X_0 = 0] = 0.$$



Le caractère apériodique de la chaîne permet d'avoir des propriétés de convergence vers la distribution stationnaire.

Exercice 1

a. En supposant que les appels de pages sont indépendants, l'état au temps $n+1$ dépend uniquement de l'état au temps n et de la page appelée au temps $n+1$.

b. Il y a en tout $N = \frac{8.10^9}{4.10^3} = 2.10^6$ pages, donc la taille de l'espace d'état est $N!$, le nombre de permutations de N pages.

Ordre de grandeur avec la formule de Stirling : $N! \underset{N\to\infty}{\sim} \sqrt{2\pi N}\left(\frac{N}{e}\right)^N$.

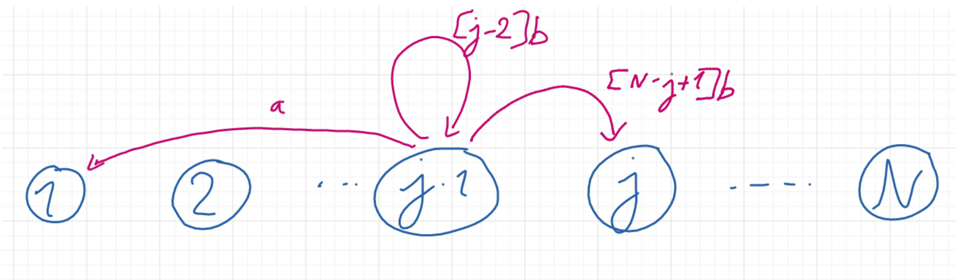
Donc $N!$ est de l'ordre de 10^{10^7}, beaucoup trop grand pour pouvoir étudier cette chaîne de Markov (pour référence, on estime à $10^8$0 le nombre d'atomes dans l'univers).

c. La taille de l'espace d'état est égale au nombre de positions possibles de la page A, donc égale à N (les positions de 1 à N). L'espace d'états est bien plus petit et on peut travailler correctement avec ce nouveau système.

Exercice 2

Move-to-front

a. Les pages différentes de A ont la même probabilité d'être tirées et ont donc le même comportement. La connaissance de leurs positions relatives n'est donc pas importante, et comme précédemment, on a supposé que chaque appel de page est indépendant de tous les autres appels de page. La position X_{n+1} de la page A peut donc être déduite de X_n et de l'appel de la page $n+1$.



b. La chaîne est irréductible, comme on peut trouver un cycle qui parcourt tous les états de la chaîne. Elle est aussi apériodique car elle contient des boucles (des états où la chaîne peut rester sur place).

c. Comme la chaîne est irréductibe et apériodique, il existe une unique mesure stationnaire π. En notant $P = (p_{i,j})$ la matrice de transition, π est donnée par : $\pi = \pi P$. Cette équation donne d'une part :

$$\pi_1 = \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{i1} = a \sum_{i=1}^{N} p_{i1} = a,$$

car P est une matrice stochastique. D'autre part l'équation donne pour $j \geq 2$:

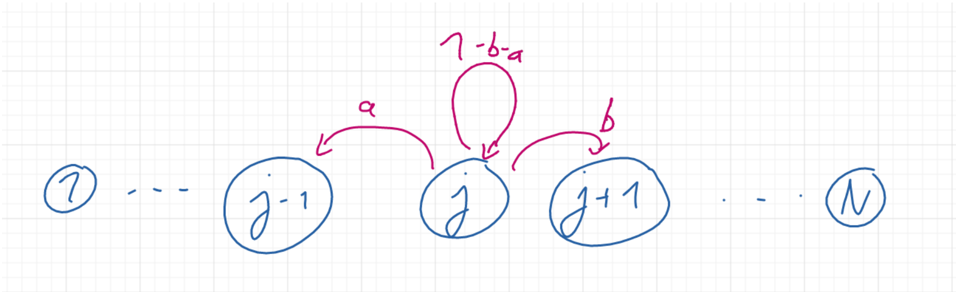
$$\pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij} = \pi_{j-1}[N-(j-1)]b + \pi_j [j-1]b,$$

Donc $\pi_j[1-(j-1)b] = \pi_{j-1}[n-j+1]b$. Donc pour $i \geq 2$ quelconque :

$$\pi_i = a \sum_{j=2}^{i} \frac{\pi_j}{\pi_{j-1}} = a \sum_{j=2}^{i} \frac{(n-j+1)b}{1-(j-1)b}.$$

Move-ahead

a. Chaîne de Markov pour les mêmes raisons que précédemment.

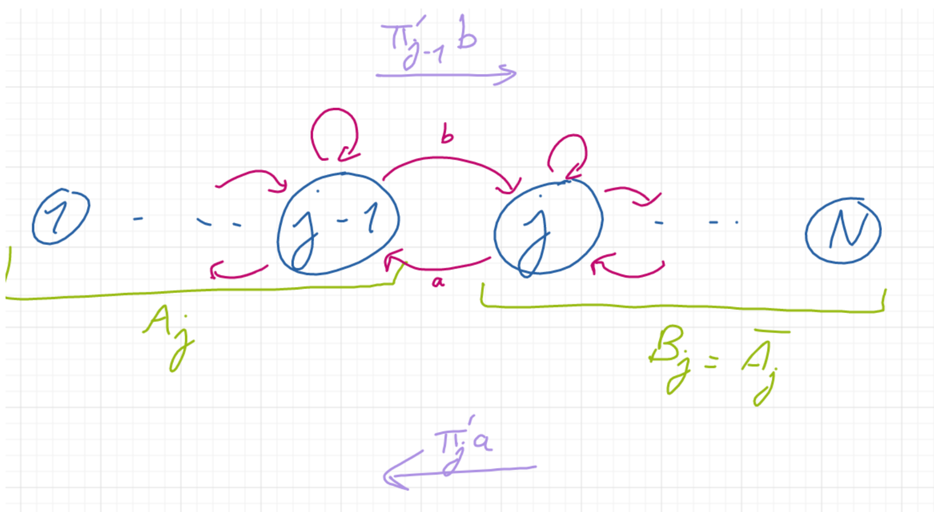


b. La chaîne est irréductible et apériodique encore, on applique les mêmes méthodes que précedemment.

c. Il existe encore une unique mesure stationnaire π'. En notant la matrice de transition $P' = (p'_{ij})$, π' vérifie $\pi' = \pi' P'$. Mais résoudre directement ce système d'équations à la main est fastidieux. À la place, pour $j \geq 2$, les équations d'équilibre locales donnent :

$$b\pi'_j = a\pi'_{j-1}.$$

Façon intuitive de le voir : on note A_j le sous-ensemble d'états de 1 à $j-1$ et B_j son complémentaire dans l'espace d'états (c'est-à-dire le sous-ensemble d'états de j à N). Alors à l'équilibre, en regardant le graphe, le "flux" allant de A_j à son complémentaire B_j doit être égal au "flux" dans l'autre sens, donc de B_j à A_j. Le flux dans le premier sens vaut bien $a\pi'_{j-1}$, et celui dans le second sens vaut $b\pi'_j$.



Façon plus formelle : en multipliant à droite dans l'équation $\pi' = \pi' P'$ par le vecteur colonne qui vaut 1 pour les états dans A_j et 0 pour ceux dans B_j, et après avoir simplifié les termes égaux, on a :

$$\pi'_j = (p_{j,j-1} + p_{j,j})\pi'_j + p_{j+1,j}\pi'_{j+1}$$

En remarquant que $(p_{j,j-1} + p_{j,j}) = 1 - p_{j,j+1}$ et en simplifiant, on retombe sur la même équation trouvée précédemment.

Remarque : on peut aussi dire qu'on cherche une distribution qui satisferait les équations de réversibilité de la chaîne de Markov. Si une telle distribution existe, alors c'est la distribution stationnaire.

Donc pour i quelconque, $\pi'_i = \left(\frac{b}{a}\right)^{i-1} \pi'_1$, et il reste à calculer π'_1. On a :

$$1 = \sum_{i=1}^{N} \pi'_i = \pi'_1 \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{b}{a}\right)^{i-1} = \pi'_1 \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^N}{1 - \frac{b}{a}}.$$

En inversant, on trouve donc la valeur de π'_1 et on en déduit celle de π'_i.

Exercice 3

a. À l'état stationnaire, quelle que soit la stratégie, la probabilité de défaut dû à la page A, notée d_a, est la probabilité que A se trouve dans l'espace disque, par définition. On a donc :

$$d_a = \sum_{i=M+1}^{N} \pi_i$$

(ou avec π'_i pour la seconde stratégie).

b. Cas **Move-to-front** : La probabilité de défaut d peut être calculée à partir des trois situations possibles qui entraînent un défaut : soit A est dans la mémoire cache et on tire une page du disque, soit A est dans le disque et on tire A, soit A est dans le disque et on tire une autre page que A mais dans le disque tout de même.

$$\begin{aligned}
d &= \mathbb{P}(\text{tirer } A | A \text{ sur le disque})\mathbb{P}(A \text{ sur le disque}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\text{tirer une autre page du disque} | A \text{ sur le disque})\mathbb{P}(A \text{ sur le disque}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\text{tirer une page du disque} | A \text{ pas sur le disque})\mathbb{P}(A \text{ pas sur le disque}) \\
d &= a.d_a + (N - M - 1)b.d_a + (N - M)b.(1 - d_a) \\
&= a.d_a + (N - M)b - b.d_a
\end{aligned}$$

Cas **Move-ahead** : La probabilité de défaut d' dans cas est soit due au tirage de A en position $M + 1$ „ soit au tirage d'une autre page à cette position :

$$d' = \mathbb{P}(\text{tirer } A|A \text{ en position } M+1)\mathbb{P}(A \text{ en position } M+1)$$
$$+ \mathbb{P}(\text{tirer autre page en } M+1|A \text{ pas en } M+1)\mathbb{P}(A \text{ pas en } M+1)$$
$$d' = a.\pi'_{M+1} + b.(1 - \pi'_{M+1})$$

c. Avec les valeurs données, $d > d'$, donc si on sait qu'on se trouve dans l'état stationnaire assez longtemps, on préfère la stratégie Move-ahead. Cependant on cette stratégie met plus de temps à atteindre le régime stationnaire, et si on se plaçait dans des cas plus réalistes où la probabilité de tirer les pages pourraient changer avec le temps, alors Move-to-front pourrait être privilégiée, car cette stratégie est plus réactive et efficace à court terme, même si elle l'est moins sur le long terme.

Exercice 4

En quelques mots : l'hypothèse d'indépendance des appels des pages est contestable, même si c'est dur de se passer de ce genre d'hypothèses pour pouvoir faire des études. On imagine aussi que le modèle pourrait être plus complexe et les états pourraient dépendre de tout l'historique des états précédents.