TD : Performance du protocole de communication Aloha

Le protocole Aloha, premier protocole d'accès multiple à un médium de communication, a été mis en œuvre pour un réseau de communication par paquets utilisant un réseau de communication radio sur les îles Hawaì. L'objectif était de partager une même fréquence radio pour toutes les communications.

Dans ce protocole, toutes les stations sont autorisées à émettre un paquet à tout instant. Si, pendant la période d'émission, une autre station commence une émission il y a une collision. La non-collision est notifiée à la station réceptrice par un bref message d'accusé de réception qui informe que le message a bien été reçu. Un mécanisme de *time-out* indique si le message a subi une collision.

Chaque fois que deux ou plusieurs paquets ont été en collision, les informations correspondantes sont corrompues et perdues. Par conséquent, il doivent être ré-émis. Cette re-émission entraîne un surcoût dans l'utilisation de la bande passante. Par conséquent le débit réellement utile (utilisé pour les paquets sans collisions), est inférieur à 100 %.

Exercice 1. Aloha — *indispensable*

Dans tout le problème, nous supposons que l'émission d'un paquet prend S unités de temps. Le but de cet exercice est d'étudier quelle quantité maximale d'information on peut transmettre par ce protocole. Chaque station émet ses paquets indépendamment des autres stations. On note N_t le nombre de paquets ayant été émis sur l'intervalle de temps $[0, t]$. On suppose que $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de Poisson d'intensité λ.

a. Poisson - Justifier cette hypothèse.

b. Probabilité de collision - Calculer la probabilité qu'un paquet donné soit en collision.

c. Nombre de transmissions - On note p cette probabilité. Quel est la loi du nombre de transmissions pour émettre un paquet ? Calculer le nombre moyen d'essais nécessaires pour transmettre un paquet.

d. Débit effectif - Quel est le débit effectif du système (*i.e.* le nombre de paquets effectivement transmis) en fonction de λ ?

On note $D(\lambda)$ ce débit effectif.

e. Utilité - Tracer $D(\lambda)$ en fonction de λ et étudier la courbe. En particulier, quel est le débit effectif maximal de ce protocole ?

Ce protocole a été amélioré notamment en synchronisant les instants d'émissions (*slotted Aloha*). L'émission ne se fait qu'en début de slot, c'est à dire que l'on retarde légèrement les émissions, la collision est alors observée uniquement en début de slot. On peut sous les mêmes hypothèses poissonniennes calculer l'amélioration du débit obtenue par la synchronisation des instants d'émission.

Exercice 2. Slotted Aloha — *indispensable*

Le but de cet exercice est de montrer l'instabilité du protocole Aloha (en étudiant un modèle un peu plus simple). Lors de l'utilisation d'Aloha, les ingénieurs ont été confrontés à des problèmes : pendant une assez longue période, le système marchait bien mais au bout d'un certain temps, le nombre de paquets en attente se mettait à tendre vers l'infini. Le système était alors remis à zéro manuellement. Rejetant le problème sur une faute matérielle, il a fallu longtemps (10 ans ou plus ?) pour que l'on apporte une réponse satisfaisante.

On considère une version discrétisée d'Aloha. Le temps n'est plus une variable continue mais discrète $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. La durée d'un slot correspond au temps de transmission d'un paquet.

On appelle A_n le nombre de paquets arrivant pendant le n-ième slot. À chaque slot de temps $n \geq 1$, chaque émetteur qui a un paquet à transmettre émet son paquet avec probabilité p (tirage de random), on note $B_i^n = 1$ si le paquet est émis, 0 sinon. B_i^n est une variable aléatoire de Bernoulli B_i^n de paramètre p et on suppose que les $\{B_i^n\}$ sont indépendantes. Comme dans la version originale d'Aloha, un paquet est transmis avec succès si un unique émetteur tente de transmettre son paquet et le paquet est alors retiré du système. Si deux émetteurs tentent de transmettre leur paquet en même temps, il y a collision et le paquet devra être retransmis plus tard.

Pour commencer

On note $L(n)$ le nombre de paquets en attente de transmission à la fin de du n-ième slot (backlog).
a. Montrer que la séquence $L(n)$ vérifie l'équation $L(n+1) = L(n) + A_n - \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^{L_n} B_i^n = 1\}}$.

Instabilité ***travail personnel***

On suppose que les A_n (et les B_i^n) sont *iid*. De plus on suppose pour l'instant qu'il ne peut arriver qu'au plus un paquet par slot (on a donc $P(A_n{=}0) = q$, $P(A_n{=}1) = 1 - q$, on suppose $0 < q < 1$).
a1. Sachant qu'il y a k paquets en attente dans le système au début du slot, calculer p_k la probabilité qu'un paquet soit transmis sur ce slot.
a2. Monter que $L(n)$ est une chaîne de Markov et qu'elle est irréductible et apériodique. Dessiner son graphe de transition.
a3. Supposons que $L(n)$ admette une mesure invariante $\pi_0, \ldots, \pi_k, \ldots$, établir une relation entre π_{k+1} et π_k, en déduire une contradiction (indication : montrer que $\lim_{k\to\infty} \pi_k = +\infty$).
a4. Conclure sur la stabilité du protocole quand il peut y avoir au plus une arrivée par instant.
b. Dans la pratique, on observe une apparente stabilité pendant une grande période de temps puis lorsque $L(n)$ dépasse un certain seuil, il se met à diverger. Expliquer ce phénomène.
c. (*) Montrer que le nombre de messages transmis est presque sûrement fini.
d. (*) Si maintenant on enlève la limite d'une arrivée maximum par slot, que peut-on en conclure sur la stabilité du protocole ?

Amélioration ? ***travail personnel***

Afin d'essayer d'améliorer la stabilité d'Aloha, on peut faire dépendre la probabilité d'émission d'un paquet du nombre de paquets k en attente dans le système en début de slot, *i.e.* $p(k) = \frac{\alpha}{k}$ avec $\alpha > 0$.
e. Calculer alors le débit effectif d_k du système en fonction de α et de k (*i.e.* la probabilité de réussir effectivement une transmission quand il y a k paquets dans le système).
f. Donner un équivalent de d_k en $+\infty$.
g. Quel α choisir pour maximiser ce débit ?
h. Pourquoi ce protocole n'est-il pas utilisé en pratique ?

Ethernet

Le protocole Ethernet est une amélioration d'Aloha. Pour Ethernet, la probabilité d'essai d'une transmission est modulé en fonction du nombre d'échecs subis : si un message a essayé sans succès n fois, sa probabilité d'essai de transmission est de $1/2^n$. L'étude quantitative de ce protocole est plus complexe et on montre que le rendement maximal est de $\log 2 \approx 0,693 \simeq 70\%$.

Ces exercices ont été adaptés à partir des ouvrages de référence ci-dessous.

Références

[1] P. Brémaud. *Markov Chains : Gibbs fields, Monte Carlo Simulation and Queues*. Springer-Verlag, 1999.

[2] James F. Kurose and Keith W. Ross. *Computer Networking : A Top-Down Approach (6th Edition)*. Addison Wesley, 6 edition, 3 2012.

[3] Philippe Robert. *Réseaux et files d'attente : méthodes probabilistes (Mathématiques et Applications) (French Edition)*. Springer, 1 edition, 10 2000.