TD : Performance du protocole de communication Aloha

Exercice 1

a. On peut supporser qu'il y a N stations, avec N grand, et que chacune émet indépendamment chaque seconde un paquet selon une loi de Bernouilli de paramètre λ/N.

b. Pour un paquet donné, l'arrivée suivante doit être à plus de S, mais l'arrivée précédente aussi doit être à plus de S. On a $p = 1 - e^{-2\lambda S}$.

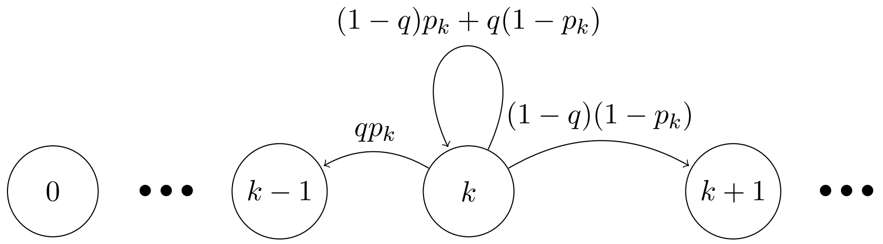
c. Les inter-arrivées étant indépendantes, la loi du nombre de transmissions pour émettre un paquet suit une loi géométrique de paramètre $1 - p$, le nombre moyen d'essais nécessaire est donc $\frac{1}{1-p}$.

d. Le débit est le nombre de paquets transmis par seconde, avec en moyenne λ arrivées par seconde, on a $D(\lambda) = \lambda(1 - p)$.

e. En dérivant D par rapport à λ, le débit maximal est atteint en $\lambda_{max} = \frac{1}{2S}$ et $D(\lambda_{max}) = \frac{1}{2eS}$.

Exercice 2

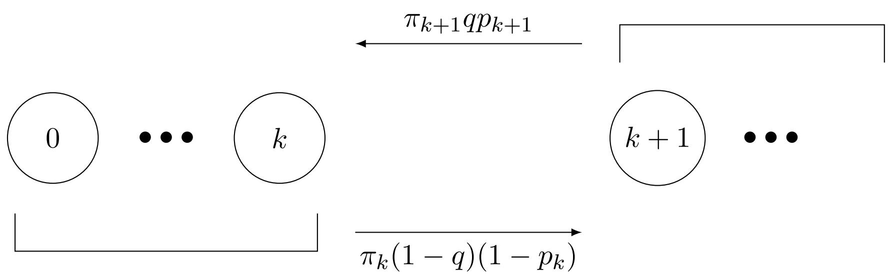
a. On a $p_k = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{L(n)} B_i^n = 1 | L(n) = k\right) = kp(1-p)^{k-1}$. $L(n)$ est une chaîne de Markov car l'état $L(n+1)$ ne dépend que de l'état précédent et des A_n et B_i^n indépendants.



Elle est irréductible car, étant donnés deux états quelconques, on peut trouver un chemin qui les relie. Elle est apériodique car on remarque la présence de boucles.

Supposons que $\boldsymbol{\pi}$ soit une mesure stationnaire. En disant qu'à l'équilibre le "flux" sortant de l'ensemble des états 0 à k doit être égal au flux extérieur rentrant dans cet ensemble, les équations d'équilibre donnent :

$$\pi_{k+1} q p_{k+1} = \pi_k (1-q)(1-p_k).$$



Comme la quantité $\frac{(1-q)(1-p_k)}{q p_{k+1}}$ tend vers l'infini quand $k \to \infty$, on a $\pi_k \underset{k\to\infty}{\to} \infty$ et donc $\sum_k \pi_k = \infty$. Cela contredit l'existence d'une mesure stationnaire, et donc il n'en existe pas. On peut donc conclure que quels que soient p et q, le système est instable car la chaîne de Markov n'est pas récurrente positive (elle est même transiente ici).

b. Tant que $L(n)$ est assez faible, pour p proche de 1/2 et q proche de 1 par exemple, on remarque que $\frac{\pi_{k+1}}{\pi_k} < 1$ et $L(n)$ a tendance à décroître et semble donc être stable. Cependant, en temps assez long, sur un "coup de malchance", $L(n)$ peut devenir suffisamment grand pour devenir instable et croître sans borne.

c. Cette question est surtout un gros calcul fastidieux...Dans l'idée, on veut montrer que la probabilité d'envoyer une infinité de messages est nulle, et pour ce faire on montre que l'espérance du nombre de messages envoyés est finie.

d. Si on retire la limite d'une arrivée par slot, comme le système était déjà instable, on peut intuiter que l'instabilité ne fait qu'empirer et qu'on se trouve dans une nouvelle chaîne de Markov qui ne peut qu'être pire que la précédente.

e. Dans les calculs précédents, on doit remplacer les occurences de p par $p(k)$. On a donc $d_k = kp(k)(1-p(k))^{k-1} = \alpha(1-\alpha/k)^{k-1}$.

f. En réécrivant d_k, on a : $d_k = \alpha \exp\big((k-1)\ln\big(1-\frac{\alpha}{k}\big)\big)$. Le terme dans le log est équivalent à $-\frac{\alpha}{k}$, donc le terme dans l'exponentielle tend vers $-\alpha$. On a donc $d_k \underset{k\to\infty}{\to} d(\alpha) = \alpha e^{-\alpha}$.

g. En dérivant d par rapport à α, comme d est une fonction croissante puis décroissante, elle atteint son maximum en $\alpha^\star = 1$, et ce maximum vaut e^{-1}. Le débit maximum semble encore trop faible, donc même si on a enfin de la stabilité poru certaines valeurs de q, le système est très peu efficace et peu adapté à la réalité tel quel.