INFO4 PS: Examen 11/01/2024.

Jonatha ANSELMI et Louis-Sébastien REBUFFI

Exercice 1. Lire chaque affirmation et répondre "vrai" ou "faux".

1. Une variable aléatoire avec la loi de Bernoulli ne prend que deux valeurs.
2. La somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli est une variable aléatoire ayant une loi binomiale.
3. $\{\emptyset, \{1, 2\}\}$ est une tribu de $\{1, 2\}$
4. Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et $a \in \mathbb{R}_+$, alors $E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$
5. Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes et $a \in \mathbb{R}_+$, alors $\mathrm{Var}(aX + Y) = a\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$

Exercice 2. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur [0,1]. Trouver la loi de la variable aléatoire $\ln(U)$.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire avec densité $p(x) = 2/x^3$ si $x > 1$ et $p(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que $p(x)$ est effectivement une densité de probabilité.
2. Calculer $E[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Exercice 4. Dans un plan cartésien, on considère la zone A délimitée par un cercle de rayon unitaire centré sur le point (0,0).

1. Proposer une méthode permettant de générer des points (X, Y) uniformément sur A. Le pseudo-code sera donné en R.
2. Indiquer le coût en nombre d'appels à la fonction `runif`.
3. Comment utiliser la méthode du rejet pour obtenir une approximation de π?

Exercice 5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes avec une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, donc $f_X(t) = f_Y(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ for all $t \geq 0$. Montrer que $\min(X, Y)$ suit une loi exponentielle de paramètre 2λ et que $P(\min(X, Y) = X) = 0.5$.