INFO4 PS: Examen 04/01/2021. Durée: 1h30

Jonatha ANSELMI et Arnaud LEGRAND

Exercice 1. Eugène et Diogène ont l'habitude de se retrouver chaque semaine autour d'un verre et de décider à pile ou face qui règle l'addition. Eugène se lamente d'avoir payé les quatre dernières additions. Diogène lui propose alors de modifier la règle. Il propose à Eugène de lancer 5 fois la pièce et de ne payer que si apparaıt une suite d'au moins 3 piles consécutifs ou de 3 faces consécutifs. Eugène se félicite d'avoir un si bon ami. À tort ou à raison ?

Exercice 2. Soit N une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ, i.e., $P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$ for all $n \geq 0$. Calculer $\mathbb{E}[\frac{1}{N+1}]$.

Exercice 3. On considère la zone A délimitée par l'axe des abcisses et la fonction $x \mapsto 1/x$ sur l'intervalle [1,2].

1. Proposer deux méthodes permettant de générer des points (X, Y) uniformément sur A. Le pseudo-code sera donné en R.
2. Pour chaque méthode, vous indiquerez le coût en nombre d'appels à la fonction `runif`.
3. Comment utiliser la méthode du rejet pour obtenir une approximation de $\ln(2)$? Vous préciserez comment calculer l'intervalle de confiance à 95% associé à le nombre d'essais N.

Exercice 4. Un composant électronique a une durée de vie X qu'on mesure en nombre entier d'unités de temps. On fait l'hypothèse que, à chaque unité de temps, ce composant a une probabilité $p \in]0, 1[$ de tomber en panne, de sorte que $X \sim Geo(p)$; donc, $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ for all $n \geq 1$. On considère un autre composant dont la durée de vie Y est indépendante de X et de même loi. On pose $S = \min(X, Y)$ et $T = |X - Y|$.

1. Que représentent S et T?
2. Montrer que $P(S = s \cap T = 0) = p^2(1 - p)^{2s-2}$ et que $P(S = s \cap T = t) = 2p^2(1 - p)^{2s+t-2}$ si $t \geq 1$.
3. En déduire les lois de S et T puis $\mathbb{E}[T]$. Quel est le nom de la loi de S?
4. Les variables aléatoires S et T sont-elles indépendantes?

Exercice 5. On modélise la hauteur maximale annuelle d'un fleuve par une variable aléatoire X de Rayleigh de densité $f(x) = 1_{\{x>0\}} \frac{x}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}}$ où $a > 0$ est un paramètre inconnu et $1_{\{x>0\}}$ est la fonction d'indicatrice de l'événement $\{x > 0\}$.

1. Montrer que $f(x)$ est une densité de probabilité.
2. On suppose que l'on observe un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ I.I.D. suivant cette loi. Montrer que l'Estimateur du Maximum de Vraisemblance de a est $\hat{a}_n = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^n X_i^2$.
3. L'estimateur $\hat{a}_n$ est-il fortement convergent? Pourquoi? (Indication: $\mathbb{E}[X] = \sqrt{a\pi/2}$ and $\mathrm{Var}(X) = (4 - \pi)a/2$)