

# 高中進階力學

Shao-Kai Jonathan Huang 黃紹凱

December 22, 2025

## Contents

1 數學基礎	2
1.1 向量的介紹	2
1.2 方陣對角化	2
1.2.1 為什麼對角化有用？	3
1.2.2 可對角化的核心判準（觀念版）	3
1.2.3 實作流程	3
2 基礎力學的介紹	5
2.1 牛頓力學	5
2.2 因次分析	5
3 靜力學	7
4 動力學	8
4.1 斜拋運動	8

# 1 數學基礎

## 1.1 向量的介紹

**Definition 1.1** (生成向量). 我們說一個集合生成一個空間，當且僅當這個集合裡的向量可以組合出這個空間裡所有的向量。也就是說，如果我們有一個向量空間  $V$ ，和一組向量  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ，對於  $V$  裡的任意向量  $\mathbf{v}$ ，都存在一組係數  $c_1, c_2, \dots, c_n$ ，使得

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n. \quad (1)$$

我們可以把  $v_1, v_2, \dots, v_n$  叫做生成向量。

**Definition 1.2** (線性獨立). 前面我們將基底看成是可以生成整個空間裡所有向量的「最小」集合。這個最小的概念要怎麼用數學嚴格地定義呢？我們可以把這個定義推廣到更一般的情況：如果我們有一組向量  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ，我們可以說這組向量是線性獨立的，如果我們沒有辦法找到一組不全為零的係數  $c_1, c_2, \dots, c_n$ ，使得

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n = 0, \quad (2)$$

也就是說這些向量沒有辦法被彼此組合出來。前面提到的「最小集合」意思就是這個集合裡的向量們是線性獨立的。

**Problem 1.1** (向量的線性獨立). 以下這些向量的集合是線性獨立的嗎？

1.  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$
2.  $\mathbf{v}_4 = (1, 1, 0), \mathbf{v}_5 = (1, 0, 1), \mathbf{v}_6 = (0, 1, 1)$
3.  $\mathbf{v}_7 = (1, 1, 1)$

## 1.2 方陣對角化

**Definition 1.3** (可逆矩陣 invertible matrix). 我們說一個方陣  $P$  是可逆矩陣，當且僅當存在另一個方陣  $P^{-1}$ ，使得

$$PP^{-1} = P^{-1}P = I, \quad (3)$$

其中  $I$  是單位矩陣。這個矩陣  $P^{-1}$  稱為  $P$  的反矩陣。

**Definition 1.4** (對角矩陣 diagonal matrix). 我們說一個方陣  $D$  是對角矩陣，當且僅當它的非對角線元素全為零。也就是說，對於一個  $n \times n$  的矩陣  $D$ ，如果

$$D_{ij} = 0 \quad \text{當 } i \neq j, \quad (4)$$

那麼  $D$  就是對角矩陣。

給定一個  $n \times n$  方陣  $A$ 。若存在可逆矩陣  $P$  與對角矩陣  $D$  使得

$$A = PDP^{-1}, \quad (5)$$

則稱  $A$  可對角化 (diagonalizable)，而這個過程稱為 (矩陣) 對角化。符合方程式 (5) 的兩個方陣  $A$ 、 $D$  也被稱作相似矩陣。等價地，(5) 左右同乘可得

$$P^{-1}AP = D \quad (6)$$

所以我們可以把一個可對角化的矩陣寫成對角的形式。計算對角化時，一個很重要的概念叫做矩陣的特徵值與特徵向量。以下我們給出一個簡單的定義。

**Definition 1.5** (特徵值與特徵向量 eigenvalues and eigenvectors). 紿定一個  $n \times n$  方陣  $A$ ，如果存在一個純量  $\lambda$  與非零向量  $v$  使得

$$Av = \lambda v, \quad (7)$$

那麼我們稱  $\lambda$  為  $A$  的一個特徵值 (eigenvalue)，而  $v$  為對應於  $\lambda$  的特徵向量 (eigenvector)。

### 1.2.1 為什麼對角化有用？

若  $A = PDP^{-1}$ ，則許多運算會變得簡單，尤其是矩陣的高次方：

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

而  $D^k$  只需將對角線元素各自取幕即可。

**Example 1.1** (對角矩陣的高次方  $D^k$  很好算).

若

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

則

$$D^5 = \begin{pmatrix} 3^5 & 0 \\ 0 & (-2)^5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 243 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix}.$$

### 1.2.2 可對角化的核心判準（觀念版）

對角化的核心事實是：

$A$  可對角化  $\iff A$  能找到  $n$  個線性獨立的特徵向量。

更具體地，若你能找到一組基底  $v_1, \dots, v_n$  (全為特徵向量)，滿足

$$Av_i = \lambda_i v_i,$$

則令

$$P = (v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n), \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

便可得到  $A = PDP^{-1}$ 。

### 1.2.3 實作流程

(0) 確認  $A$  是  $n \times n$  方陣。

(1) 計算矩陣  $A$  的特徵多項式  $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ，解特徵多項式的根  $\chi_A(\lambda) = 0$  得到特徵值。

(2) 對每個特徵值  $\lambda_i$ ，解

$$(A - \lambda_i I)v = 0$$

得到一組特徵向量。

(3) 檢查是否能收集到  $n$  個線性獨立特徵向量；若不足則不可對角化。

(4) 令  $P$  的欄向量依序為你選到的特徵向量  $v_1, \dots, v_n$ ；令

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

且  $\lambda_i$  與  $v_i$  的順序一致。

(5) 寫出  $A = PDP^{-1}$ ，並可選擇驗算  $P^{-1}AP = D$ 。

**Example 1.2** (例題：可對角化（不同特徵值）).

令

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) 特徵值：

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (4 - \lambda)(2 - \lambda),$$

故特徵值為  $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$ 。

(2) 特徵向量：

- $\lambda = 4$ ：解  $(A - 4I)v = 0$ ：

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0, x \text{ 自由} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda = 2$ ：解  $(A - 2I)v = 0$ ：

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(3) 組出  $P$  與  $D$ ：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

因此  $A = PDP^{-1}$  (可自行驗算  $P^{-1}AP = D$ )。

**Example 1.3** (例題：重根但仍可對角化).

令  $A = 2I$ ：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

其特徵多項式為  $(2 - \lambda)^2$ ，特徵值  $\lambda = 2$  為重根。但  $A - 2I = 0$ ，所以任意非零向量皆為特徵向量。我們可以輕易找到兩個線性獨立的特徵向量，例如  $e_1 = (1, 0)^T$  與  $e_2 = (0, 1)^T$ 。因為湊滿  $n = 2$  個線性獨立特徵向量，因此可對角化（事實上它本來就已是對角矩陣）。

**Example 1.4** (例題：重根且不可對角化).

令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2,$$

故唯一特徵值  $\lambda = 1$  為重根。

再看特徵向量，解  $(A - I)v = 0$ ：

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0, x \text{ 自由}$$

所有的特徵向量都必須是  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  的倍數。我們無法找到兩個線性獨立的特徵向量，所以  $A$  不可對角化。

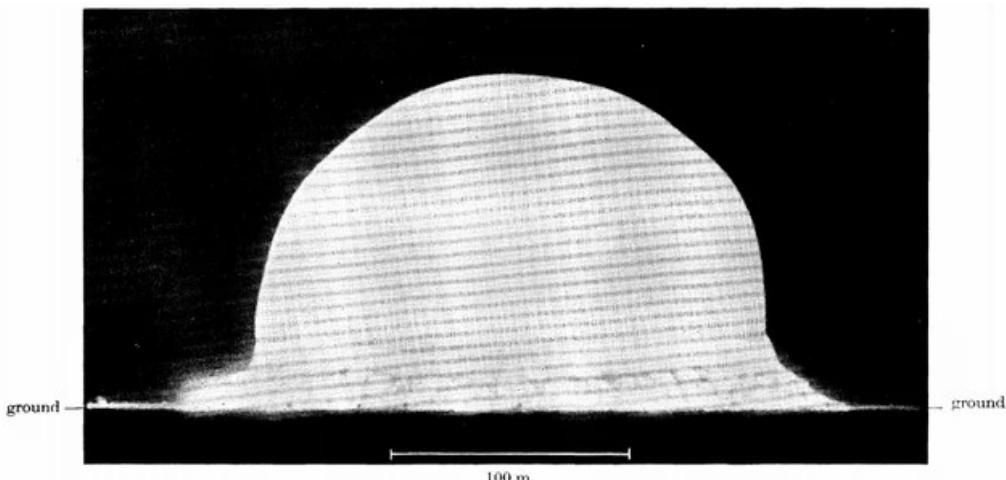
FIGURE 7. The ball of fire at  $t = 15$  msec., showing the sharpness of its edge.

Figure 1: 三位一體原子弹試爆後 15 毫秒的照片，照片下方的座標尺是100公尺。

## 2 基礎力學的介紹

### 2.1 牛頓力學

牛頓力學是描述宏觀物體運動的基本理論，基於牛頓的三大運動定律。這些定律描述了物體在外力作用下的運動行為，並且在日常生活中得到了廣泛的應用。

### 2.2 因次分析

**Example 2.1** (斯托克斯定理). 斯托克斯定理告訴我們球體在水中受到的阻力與其速度、半徑和水的黏度有關。假設球體的半徑為  $R$ ，速度為  $v$ ，水的黏度為  $\eta$ ，則阻力  $F$  的因次可以表示為：

**Problem 2.1** (原子弹釋放出的能量). 1945 年美國政府的曼哈頓計畫在新墨西哥州洛斯阿拉莫斯進行了原子弹的測試，被稱為三位一體 (Trinity Test)。試爆的畫面 (圖1) 由高速照相機拍下，雖然原子弹釋放的能量是機密而沒有被公開，我們可以從釋出的照片進行估算。假設原子弹釋放出的能量為  $E$ 。

1. 除了爆炸處未受波及的空氣密度  $\rho$  之外，再寫出兩個跟原子弹爆炸能量有關的物理量，幫助我們從圖片進行估算。
2. 寫下這些物理量的因次。
3. 根據因次分析，寫出一個公式來表達原子弹釋放的能量  $E$ ，並假設前面的正比常數是 1。
4. 估算三位一體原子弹釋放的能量，並將結果用「千噸 TNT」 ( $kT = 4.184 \times 10^{12} \text{J}$ ) 表示。

假設我們用的單位制有  $m$  個基本量，這些基本量的因次可以用  $M_1, M_2, \dots, M_m$  來表示。則對於一個物理量  $P$ ，我們可以寫出它的因次表示為

$$[P] = M_1^{\alpha_1} M_2^{\alpha_2} \cdots M_m^{\alpha_m}. \quad (9)$$

取對數可以得到

$$\ln[P] = \alpha_1 \ln M_1 + \alpha_2 \ln M_2 + \cdots + \alpha_m \ln M_m. \quad (10)$$

我們可以將  $\{\ln M_1, \ln M_2, \dots, \ln M_m\}$  看成  $m$  維空間的基底，並將  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  看成向量  $[P]$  在這個空間中的向量表示。我們可以寫

$$[P] = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m). \quad (11)$$

**Theorem 2.1** (白金漢  $\pi$  定理). 假設一個物理問題涉及  $n$  個變量  $P_1, P_2, \dots, P_n$ ，這些變量的因次可以用  $m \leq n$  個基本因次（單位）表示。則這個物理問題可以用  $n - m$  個無因次的變量  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}$  來描述。

因此如果先不考慮  $n = m$  的情況，我們可以把原本涉及  $n$  個變量的問題

$$f(P_1, P_2, \dots, P_n) = 0 \quad (12)$$

轉化成包含  $n - m$  個無因次變量的問題

$$F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}) = 0. \quad (13)$$

我們也可以用以上方程式解出其中一個無因次變量：

$$\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}). \quad (14)$$

### 3 靜力學

## 4 動力學

### 4.1 斜拋運動

斜拋運動是指物體以一定的初速度和角度向上拋出後，在重力作用下的運動。這種運動可以分解為水平方向和豎直方向的運動，並且遵循獨立的運動規律。

**Problem 4.1** (高處的斜拋). 假設一個物體被從離地面高  $H$  的懸崖上以初速度  $v_0$  和拋射角度  $\theta$  斜向上拋出。

1. 當拋射角度分別是  $\theta = 45^\circ$  和  $\theta = 43^\circ$ ， $H = 508$  公尺、 $v_0 = 100$  公尺/秒時，求物體的射程。你可能會需要用計算機幫助估算。
2. 你覺得從高處拋射時最遠射程的角度是大於、等於、還是小於  $45^\circ$ ？
3. 求使物體有最大射程的拋射角度  $\theta$ 。

**Solution 4.1.**

1. 略。
2. 小於  $45^\circ$ 。
3. 根據能量守恆原理，動能變化量等於位能變化量：

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgH = \frac{1}{2}mv^2, \quad (15)$$

因此物理落地時的速度大小為

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gH}. \quad (16)$$

重力加速度方向恆向下，因此初速度  $v_0$ 、末速度  $v$ 、和重力加速度造成的速度變化量  $gt$  形成一個一邊鉛直的三角形。注意到射程是

$$R = (v_0 \cos \theta)T = \left(\frac{2}{g}\right) \left[ \frac{1}{2}(v_0 \cos \theta)(gT) \right]. \quad (17)$$

因此最大射程的  $\theta$  即為讓三角形有最大面積的  $\theta$ 。兩短邊長度固定，以發射點為旋轉點旋轉可知  $v_0$  和  $v$  夾角為  $90^\circ$  時，三角形面積最大。由相似形得

$$\tan \theta = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gH}}. \quad (18)$$