

古典重力理論

Jonathan (Shao-Kai) Huang 黃紹凱

March 22, 2025

Contents

1	先備知識	2
1.1	牛頓萬有引力定律	2
1.2	重力位勢	2
1.3	重力場	2
1.4	重力位能	2
1.5	題目	3
2	天體力學	4
2.1	題目	5
3	重力與電磁學	5
3.1	高斯定律	5
4	參考資料	6

1 先備知識

1.1 牛頓萬有引力定律

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \quad (1)$$

1.2 重力位勢

Definition 1.1 (重力位勢).

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r}. \quad (2)$$

一般將無限遠點定為重力位勢的零點，除非質量分布延伸到無限。

1.3 重力場

Definition 1.2 (重力場).

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \quad (3)$$

Definition 1.3.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m\mathbf{g}(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Theorem 1.1 (保守場). 重力場是一種保守場，而且其旋度為零（即重力場是一種無旋場）。

1.4 重力位能

Definition 1.4 (重力位能).

$$U = -\frac{GMm}{r}. \quad (5)$$

檢查可知牛頓的萬有引力公式跟這個定義相符合：

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \quad (6)$$

Remark. 重力位能和重力位勢是純量場；重力場和重力是向量場。

Theorem 1.2 (球殼定理 Shell Theorem).

1. 對稱物體對於球體外的重力貢獻如同將球體質量集中於球心。
2. 在對稱球體內部的物體不受其外部球殼的重力影響。

1.5 題目

說明：沒有記號的題目是基本題；有星號的題目依照星號數量分類為不同難度；有†記號的題目則是補充題，計算過程中可以（也應該會需要）搜尋網路資料、查積分表、叫出WolframAlpha 等等幫助解題。

Problem 1.1 (Shell). 證明球殼定理。

Problem 1.2. 在半徑 R 、質量 M 的均勻球體中挖一個球形空間，其球心與原球心的距離為 a ， $a < R$ 。求球形空間中的重力場，以 G 、 R 、 M 、 a 表示。

Problem 1.3. 假設地球是均勻球體，挖一個洞到地心後把挖出來的土填回去，底部要給予多大的支撐力？

Problem 1.4 (經典地道問題 *).

- (a) 挖一個穿過地心的地道，跳入後多久底達另一端？最大速率？重力常數 $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ 、地球質量 $M = 5.972 \times 10^{24} \text{ kg}$ 、地球半徑 $R = 6.371 \times 10^6 \text{ m}$ 。
- (b) 若改成挖一個不穿過地心的地道，其離地心最近點與地心距離 d ， $d < R$ ，則第一題的答案變成什麼？

Problem 1.5 ().** 計算質量 M 半球殼對在球心處的質點 m 的萬有引力。

Problem 1.6 (掉入太陽 **).** (這題有可能算不出來) 假設太陽質量 M 、半徑 R ，萬有引力常數 G 。在離太陽 r_0 處有一艘質量為 m 的太空船由靜止開始往太陽掉，試問：

- (a) 若將太陽和太空船皆視為質點，要多久才它們才會相撞？(提示：克卜勒第三定律)
- (b) 接下來考慮太陽的大小。求與太陽的距離 $r(t)$ ？
- (c) 要多久才會撞上太陽？

Problem 1.7 (Hard Shell *).** 球殼定理在重力不是平方反比力時不會成立，我們可以透過實際計算來推導出重力如果偏離平方反比力，會造成對球殼定理多大的偏離。試證明：若重力的形式為

$$F(\mathbf{r}) = -\frac{GMm}{r^{2+\delta}}\hat{\mathbf{r}},$$

則球殼內的重力為

$$F = \frac{GMm}{r^2 R} \int_{R-r}^{R+r} ds \left(\frac{1}{s^\delta} + \frac{r^2 - R^2}{s^{2+\delta}} \right).$$

這個力在 δ 等於多少時會消失？

Problem 1.8 (改寫自 Marion 5-9 †). 考慮一個平面上質量 M 、半徑 R 的圓環，試計算

- (a) 圓環內部 ($r < R$) 的重力位。假設 $r \ll R$ ，將答案展開至 $(r/R)^3$ 。
- (b) 圓環外部 ($r > R$) 的重力位。假設 $r \gg R$ ，將答案展開至 $(R/r)^3$ 。

提示：

1. 你可能會需要用到橢圓積分 (elliptic integrals)。
2. 好用的公式：

$$\frac{1}{\sqrt{1-2ax+x^2}} = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(a)x^r = 1 + ax + \frac{3a^2-1}{2}x^2 + \frac{5a^3-3a}{2}x^3 + \dots \quad (7)$$

2 天體力學

Theorem 2.1 (克卜勒三大定律). 行星繞恆星公轉時，其軌道遵守：

1. 軌跡為圓錐曲線 (橢圓、拋物線、雙曲線)。
2. 面積速率為定值。
3. 封閉軌道的 $\frac{a^3}{T^2}$ 為定值。

2.1 題目

Problem 2.1 (極座標 ***). 證明克卜勒第一定律，並討論不同條件下的行星軌道。

Problem 2.2 (改寫自物奧決選). 中子星因為極快速自轉而呈扁平，此時星體是什麼幾何形狀？

Problem 2.3 (改寫自慈神物奧練習題 ****). 此題中我們要探討古典重力理論預測的「水星近日點進動」量值。水星是太陽系中最內層的行星，除了太陽的引力外，其運行軌道也受到外圍其他星球的重力影響，此現象稱之為「攝動」。

我們將其他行星打碎，變成圍繞太陽環形分布的均勻質量，而且這些質量落在同一個黃道平面上。如此，我們可以得到一個在平面上的點對稱位能分布。假設太陽質量 M_0 遠大於其他行星，所以可視為不動點。將所有行星軌道視為正圓形，並記水星質量為 m ，水星軌道半徑為 r_0 。

- (a) 為什麼計算過程可以將外圍行星視為均勻的圓環？
- (b) 請求出水星公轉角速率 ω_r 的表達式。
- (c) 若在水星圓形軌道的徑向施加微擾，使得半徑隨時間呈週期性微小振盪。試求出此微小振盪角頻率 ω_ϕ 的表達式。
- (d) 請利用前兩小題以及題目 1.8 的結果，證明若只考慮太陽以及其中一個行星（視為質量 M ，軌道半徑 $R \gg r_0$ 的圓環），那麼水星的軌道每週期的進動角度（以弧度為單位）可近似表示為

$$\frac{M}{M_0} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{r_0}{R} \right)^3 + \frac{45}{32} \left(\frac{r_0}{R} \right)^5 + \dots \right]. \quad (8)$$

3 重力與電磁學

3.1 高斯定律

重力是平方反比律，因此符合高斯定律：

Theorem 3.1 (高斯定律 Gauss's law).

電磁學也有自己的高斯定律，也就是第一條馬克斯威方程式，一般寫做

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (9)$$

電磁力跟重力無法一一類比（有什麼反例？），本質上的原因是因為電荷有正值跟負值，但是「重力荷」（質量）只能是正的。

4 參考資料

•