Métodos Computacionales en Ingeniería

Clase 9

Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito

12 de Marzo de 2018

Sistemas tridiagonales

Estos sistemas tiene la característica que la $i-$ésima ecuación contiene sólo las incognitas x_{i-1}, x_i, x_{i+1}.

Tienen la forma general $Ax = b$, donde A es una matriz tridiagonal, es decir,

$$\begin{pmatrix} a_1 & d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & c_{n-2} & a_{n-1} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

Ahora si $A = LR$ se encuentra que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & l_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & r_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & r_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Para determinar l_i, r_i y α_i se realiza una comparación de la siguiente forma:

$a_1 = \alpha_1, \quad d_1 = r_1$

$c_1 = l_1\alpha_1, \quad a_2 = l_1 r_1 + \alpha_2, \quad d_2 = r_2$

así sucesivamente

$c_{n-2} = l_{n-2}\alpha_{n-2}, \quad a_{n-1} = l_{n-2}r_{n-2} + \alpha_{n-1}, \quad d_{n-1} = r_{n-1}$

$c_{n-1} = l_{n-1}\alpha_{n-1}, \quad a_n = l_{n-1}r_{n-1} + \alpha_n$

Ejercicio: Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -4 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1. Determinar las matrices L y R.
2. Determinar x de tal forma que $Ax = b$

Métodos iterativos

Problema: Construir una sucesión de vectores $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ talque $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ donde x es la solución del sistema.

Los métodos iterativos para resolver un sistema $Ax = b$ proporcionan una solución aproximada despúes de un número determinado de iteraciones de acuerdo con la precisión deseada.

Se toma una matriz B no singular de tal manera que $A = B + (A - B)$ por tanto el sistema $Ax = b$ se puede escribir así:

$$(B + (A - B))\,x = b$$

luego

$$x = \left(I - B^{-1}A\right)x + B^{-1}b$$

Por lo tanto

$$x^{(k+1)} := \left(I - B^{-1}A\right)x^{(k)} + B^{-1}b \;\text{ con }\; k = 0(1)...$$

En forma equivalente

$$Bx^{(k+1)} := (B - A)x^{(k)} + b \text{ con } k = 0(1)...$$

con $x^{(0)}$ dado.

La matriz $G := I - B^{-1}A$ se llama matriz de iteración.

Ejemplo: Resolver el sistema $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

con $x^{(0)} = (0, 0)^T$

Definición: Decimos que la norma matricial $\|\cdot\|$ es compatible con la norma vectorial $\|\cdot\|$, si se satisface:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$$

Definición (radio espectral): Sea $A = (a_{ij})_{n\times n}$, el radio espectral de A denotado por $\rho(A)$ se define como:

$$\rho(A) := \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|$$

Ejemplo: Determinar el radio espectral de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema (convergencia): Sea $B = (b_{ij})_{n\times n}$ una matriz no singular y sea $G := I - B^{-1}A$ la matriz de iteración. La sucesión $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ que describe este método iterativo, definida de manera recurrente por medio de

$$Bx^{(k+1)} := (B - A)x^{(k)} + b, \quad k = 0(1)...$$

donde $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ es un vector inicial dado, satisface:

1. La sucesión $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para todo valor inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, si y solo si $\rho(G) < 1$.
2. Si $||G|| < 1$ para alguna norma matricial submultiplicativa y compatible, entonces la sucesión $\left(x^{(k)}\right)_k$ converge a la solución del sistema $Ax = b$, para cada valor inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ y se satisface:

$$\left\|x^{(k)} - x\right\| \leq \frac{\|G\|^k}{1 - \|G\|}\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|, \quad k = 0(1)...$$

y

$$\left\| x^{(k)} - x \right\| \leq \frac{\| G \|}{1 - \| G \|} \left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|, \;\; k = 1(1)...$$

Para el estudio de los métodos iterativos más conocidos conviene realizar las siguientes precisiones:
Sea $A = (a_{ij})_{n \times n}$, entonces A puede escribirse en la forma

$$A = A_L + A_D + A_R$$

donde $A_D := diag\,(a_{11}, ..., a_{nn})$,

$$A_L := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix} \; A_R := \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1(1)n$, es decir, A_D es no singular.

Método de Jacobi

Es el método iterativo que se obtiene cuando $B = A_D$. Entonces

$$G = I - B^{-1}A = I - A_D^{-1}(A_D + A_L + A_R) = -A_D^{-1}(A_L + A_R) =: J$$

Por lo tanto

$$A_D x^{(k+1)} = (A_D - A)\, x^{(k)} + b = -(A_L + A_R)\, x^{(k)} + b$$

Para determinar la solución aproximada $x := (x_i)_{n\times 1}$ se encuentra cada componente x_i así:

$$x_i^{(k+1)} := \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1(1)n \quad k = 0(1)\ldots$$

Ejercicio: Resolver el sistema $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

con $x^{(0)} = (0,0,0)^T$

Tomando $||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_2$ se obtiene una aproximación a la solución con una precisión de 10^{-5} en 13 iteraciones.

Método de Gauss-Seidel

Este método iterativo se obtiene cuando $B := A_D + A_L$. Entonces
$G = I - B^{-1}A = I - (A_D + A_L)^{-1}(A_D + A_L + A_R)$
$\quad = -(A_D + A_L)^{-1} A_R := S$

El método iterativo resultante es:

$$(A_D + A_L)\, x^{(k+1)} = -A_R x^{(k)} + b$$

Para determinar la solución aproximada $x := (x_i)_{n\times 1}$ se encuentra cada componente x_i así:

$$x_i^{(k+1)} := \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right), \; i = 1(1)n, \; k = 0(1)\ldots$$

Ejercicio: Resolver el sistema $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

con $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$

Tomando $||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_2$ se obtiene una aproximación a la solución con una precisión de 10^{-5} en 8 iteraciones.

EJERCICIOS

1. Dado el sistema $Ax = b$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } b = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   con $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$

   1.1 Construya tres matrices B, diferentes de A_D y $A_D + A_L$, de tal forma que $\rho(G) < 1$ donde $G := I - B^{-1}A$.
   1.2 Usando el método iterativo general, determine el número de iteraciones necesarias para obtener una aproximación a la solución con una presición de 10^{-5} tomando $||x^{(k)} - x^{(k-1)}||_2$
   1.3 Repita 1.2 usando el método de Jacobi y el método de Gauss-Seidel.

2. Resolver el sistema $Hx = b$ usando uno de los métodos iterativos, donde H es la matriz de Hilbert de orden 3 y $b = (1, 2, 3)^T$, tomando $x^{(0)} = (30, -190, 200)$