Percolação Invasiva

Jonathan Márcio Amâncio Sales

Universidade Federal do Ceará
Departamento de Física

04 de Outubro de 2018

Sumário

Percolação Invasiva - Modelo

- D. Wilkinson e J. F. Willemsen, 1983.

- D. Wilkinson e J. F. Willemsen, 1983.
- A dinâmica do sistema é determinada localmente pelas forças capilares ($Ca \ll 1$).

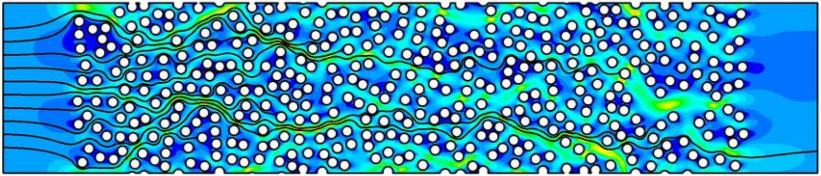


Figura tirada de: Araújo, A. D., José S. Andrade Jr, and Hans Jürgen Herrmann. **Critical role of gravity in filters**. Physical review letters 97.13 (2006).

Percolação Invasiva - Modelo

- Esquema ilustrativo do modelo de percolação invasiva em uma rede quadrada com $L = 5$.

0.05	0.10	0.03	0.82	0.08
0.37	0.41	0.74	0.03	0.63
0.58	0.72		0.29	0.83
0.44	0.91	0.39	0.55	0.93
0.73	0.08	0.71	0.01	0.28

0.05	0.10	0.03	0.82	0.08
0.37	0.41	0.74	0.03	0.63
0.58	0.72			0.83
0.44	0.91	0.39	0.55	0.93
0.73	0.08	0.71	0.01	0.28

0.05	0.10	0.03	0.82	0.08
0.37	0.41	0.74		0.63
0.58	0.72			0.83
0.44	0.91	0.39	0.55	0.93
0.73	0.08	0.71	0.01	0.28

0.05	0.10	0.03	0.82	0.08
0.37	0.41	0.74		0.63
0.58	0.72			0.83
0.44	0.91		0.55	0.93
0.73	0.08	0.71	0.01	0.28

▸ Percolação Invasiva, $L = 1024$

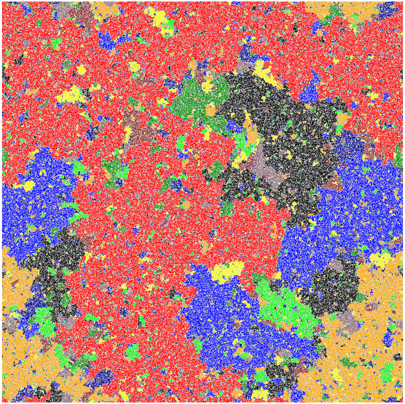
Percolação Invasiva - Modelo

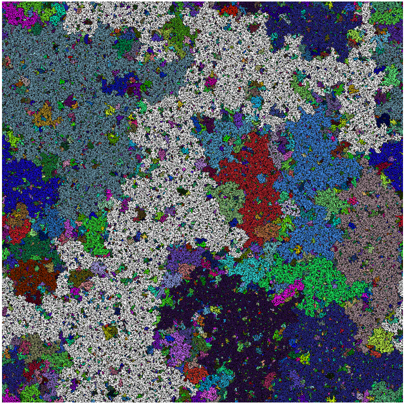
Algoritmo 1: Percolação Invasiva

```
início
    Preencher a matriz aleatoriamente: r_i ∈ [0, 1];
    Definir invasores;
    Definir fronteira;
    enquanto o sistema não percolar faça
        Invadir o menor sítio da fronteira;
        Atualizar fronteira;
    fim
fim
```

- No modelo tradicional de percolação procura-se a probabilidade crítica de percolação, p_c.

$$M(L,p) \propto \begin{cases} \ln L, & \text{se} \quad p < p_c, \\ L^{D_f}, & \text{se} \quad p = p_c, \\ L^{d}, & \text{se} \quad p > p_c, \end{cases}$$





Criticalidade Auto-Organizada

- No modelo tradicional de percolação procura-se a probabilidade crítica de percolação, p_c.

$$M(L,p) \propto \begin{cases} ln\ L, & \text{se} \quad p < p_c, \\ L^{D_f}, & \text{se} \quad p = p_c, \\ L^d, & \text{se} \quad p > p_c, \end{cases}$$

- O modelo de percolação invasiva tem criticalidade auto-organizada, ou seja, o sistema evolue espontaneamente para a criticalidade.

Criticalidade Auto-Organizada

- No modelo tradicional de percolação procura-se a probabilidade crítica de percolação, p_c.

$$M(L,p) \propto \begin{cases} ln\ L, & \text{se} \quad p < p_c, \\ L^{D_f}, & \text{se} \quad p = p_c, \\ L^d, & \text{se} \quad p > p_c, \end{cases}$$

- O modelo de percolação invasiva tem criticalidade auto-organizada, ou seja, o sistema evolue espontaneamente para a criticalidade.

- Portanto, a relação entre a massa (ou número de sítios) do agregado invasor, M, e o tamanho da rede, L, obedece a seguinte lei de potência:

$$M(L) \propto L^{D_f}, \tag{1}$$

onde D_f é a dimensão fractal do agregado invasor.

Percolação Invasiva - Dimensão Fractal

Há dois modelos de percolação invasiva.

- O modelo de *percolação invasiva sem aprisionamento* (*No Trapping Invasion Percolation*) que tenta descrever o comportamento de um fluido infinitamente compressível, onde a dimensão fractal é $D_f = 91/48 \simeq 1.8958 \simeq 1.89$, para duas dimensões.

Percolação Invasiva - Dimensão Fractal

Há dois modelos de percolação invasiva.

- O modelo de *percolação invasiva sem aprisionamento* (*No Trapping Invasion Percolation*) que tenta descrever o comportamento de um fluido infinitamente compressível, onde a dimensão fractal é $D_f = 91/48 \simeq 1.8958 \simeq 1.89$, para duas dimensões.

- O modelo de *percolação invasiva com aprisionamento* (*Trapping Invasion Percolation*), que tenta descrever o comportamento de um fluido incompressível, ou seja, quando há a formação permanente de bolhas do fluido defensor; onde a dimensão fractal é $D_f = 1.82$, para duas dimensões.

Percolação Invasiva - Dimensão Fractal

Há dois modelos de percolação invasiva.

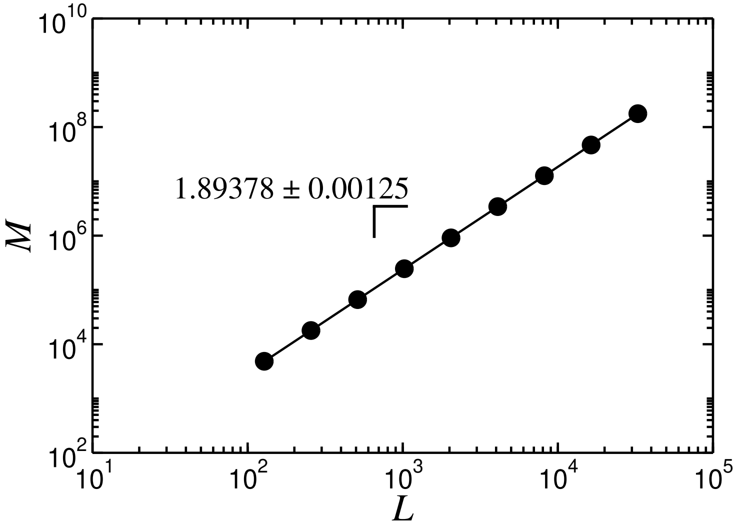
- O modelo de *percolação invasiva sem aprisionamento* (*No Trapping Invasion Percolation*) que tenta descrever o comportamento de um fluido infinitamente compressível, onde a dimensão fractal é $D_f = 91/48 \simeq 1.8958 \simeq 1.89$, para duas dimensões.

- O modelo de *percolação invasiva com aprisionamento* (*Trapping Invasion Percolation*), que tenta descrever o comportamento de um fluido incompressível, ou seja, quando há a formação permanente de bolhas do fluido defensor; onde a dimensão fractal é $D_f = 1.82$, para duas dimensões.

- Para três dimensões, a dimensão fractal é $D_f = 2.5$ para ambos os casos, pois quase não existe aprisionamento.

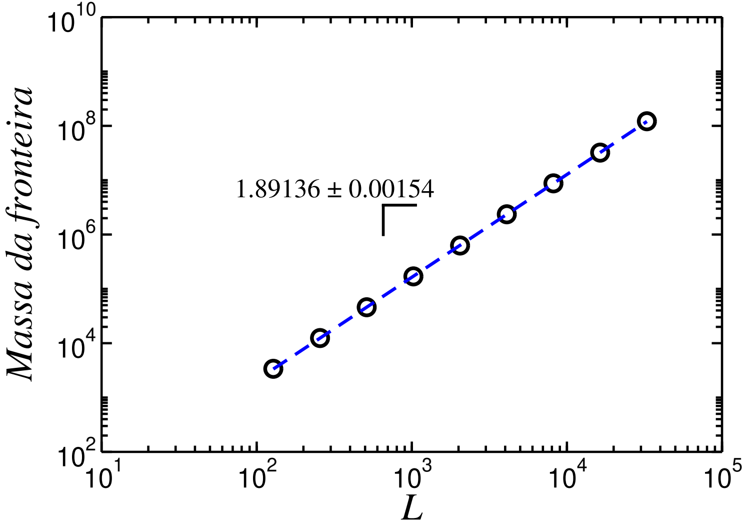
Percolação Invasiva - Dimensão Fractal

Figura – Massa do agregado invasor em função do tamanho da rede.



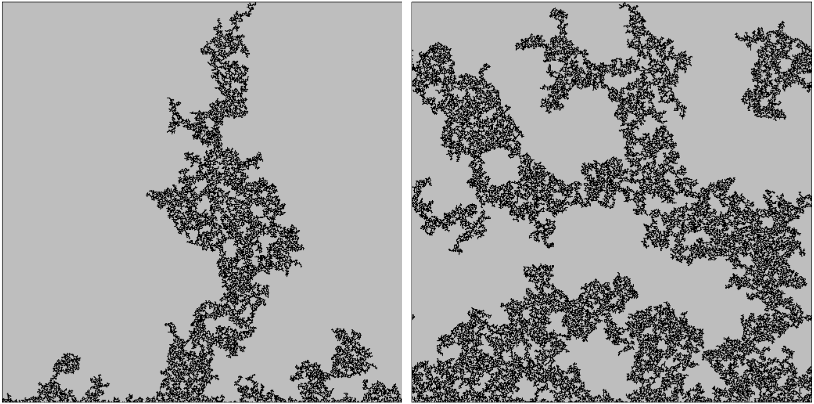
Percolação Invasiva - Dimensão Fractal

Figura – Massa da fronteira em função do tamanho da rede.



Percolação Invasiva - Simulações

Figura – Exemplos de percolação invasiva sem aprisionamento para uma rede de lado $L = 512$.



Percolação Invasiva - Simulações

Figura – Exemplos de percolação invasiva sem aprisionamento para uma rede de lado $L = 512$.

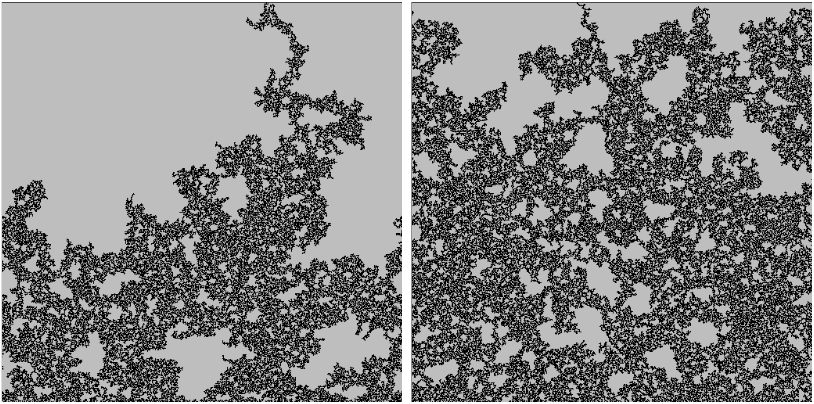
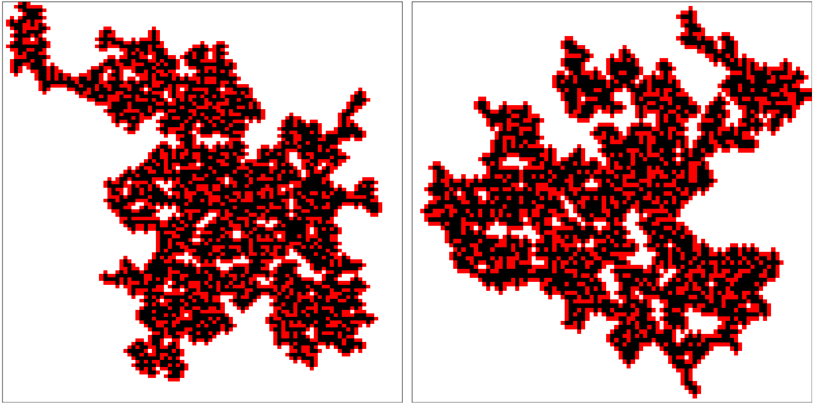
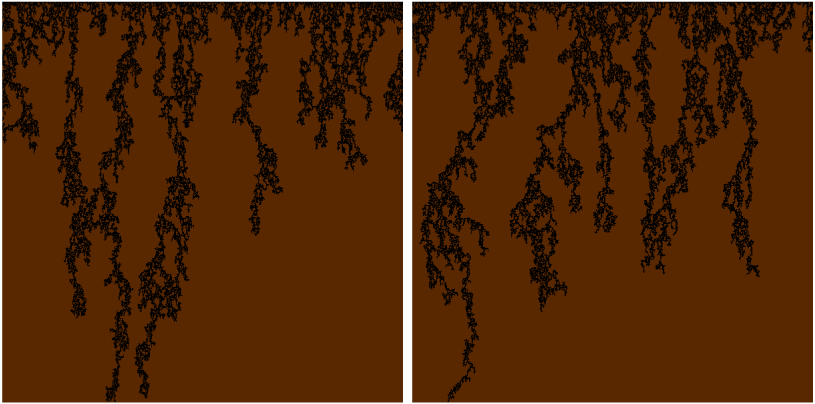


Figura – Exemplos de percolação invasiva sem aprisionamento partindo de uma célula central.



Percolação Invasiva - Simulações

Figura – Exemplos de percolação invasiva (infiltrações no solo).



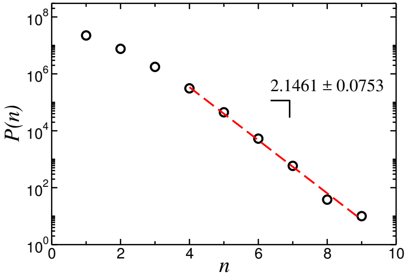
Avalanches

- No processo de invasão estão presentes as *avalanches*, que ocorrem quando há uma invasão sequencial de sítios menores. Uma avalanche pode ser definida de duas maneiras. Na primeira definição, uma avalanche ocorre ao invadir um sítio i de raio r_i, e em seguida também invadir uma série de outros sítios interconectados a partir do sítio i ($i \to j \to k \to l \to ...$) cujos raios sejam cada vez menores do que r_i ($r_i > r_j > r_k > r_l > ...$), para cada sítio invadido.

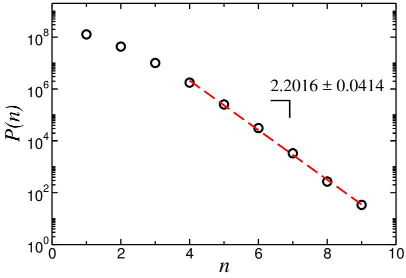
Avalanches

- A figura abaixo mostra os histogramas (em escala semi-logarítmica) ($P(n) \propto e^{-\alpha n}$) obtidos utilizando a primeira definição de avalanche.

Figura – Invasões sequenciais.



(a) 500 realizações de uma rede com $L = 1024$.



(b) 50 realizações de uma rede com $L = 8192$.

Avalanches

- Na segunda definição, uma avalanche ocorre ao invadir um sítio i de raio r_i, e em seguida também invadir uma série de outros sítios (a partir de qualquer parte do agregado invasor) cujos raios sejam menores do que r_i.

Avalanches

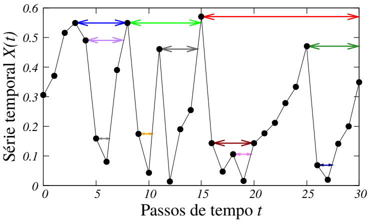
- Na segunda definição, uma avalanche ocorre ao invadir um sítio i de raio r_i, e em seguida também invadir uma série de outros sítios (a partir de qualquer parte do agregado invasor) cujos raios sejam menores do que r_i.

- Na percolação invasiva, a distribuição de avalanches também apresenta um comportamento em lei de potência, $P(s) \propto s^{-\tau}$, onde $\tau = 139/91 \simeq 1.527$ para redes bidimensionais e considerando as avalanches 'atrasadas' (Roux, 1989).

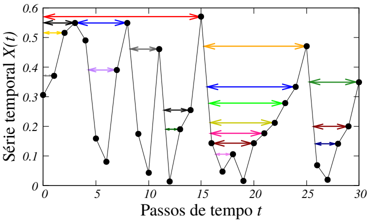
Avalanches

- Considerando uma série temporal $X(t)$, pode-se definir o tamanho s de uma avalanche (ou *burst*) como um intervalo de tempo Δt (ou número de passos de tempo) de $X(t)$ que inicia-se em um ponto $t = t_a$, de valor (ou altura) $X(t_a) = H$ e termina em um ponto $t = t_b$, de altura igual ou superior à H, isto é, $X(t_b) \geq H$, tal que $t_a < t_b$ e $X(t) < H$, $\forall t \in (t_a, t_b)$.

Figura – Invasões sequenciais.



(a) Avalanches ‘progressivas’ (*forward bursts*).

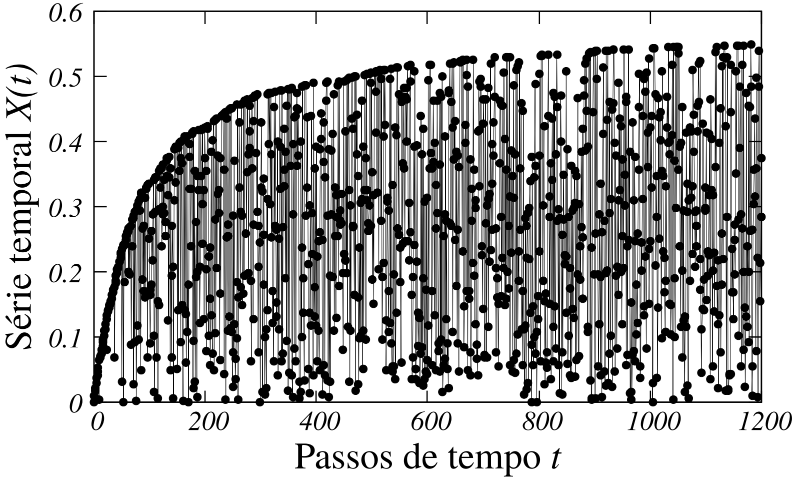


(b) Avalanches ‘atrasadas’ (*backward bursts*).

Avalanches

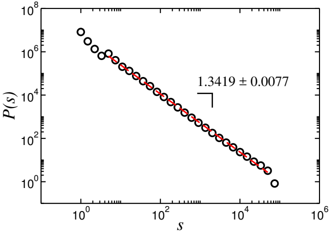
Na percolação invasiva, a série temporal $X(t)$ carrega os valores dos raios r_i de todos os sítios invadidos em ordem cronológica.

Figura – Trecho inicial da série temporal na percolação invasiva.

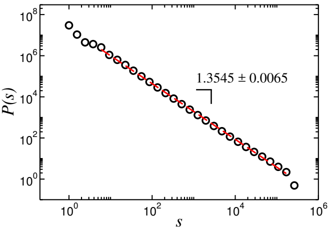


Avalanches

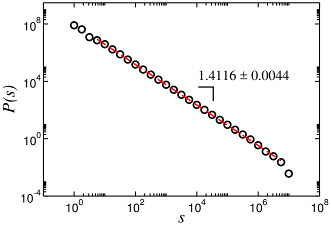
Figura – Distribuição dos tamanhos das avalanches (atrasadas).



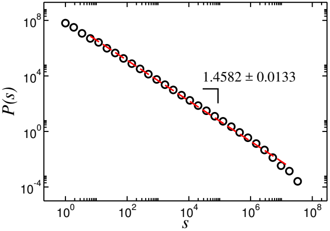
(a) $L = 512$; 1000 amostras.



(b) $L = 1024$; 1000 amostras.



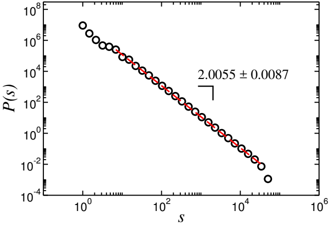
(c) $L = 8192$; 50 amostras.



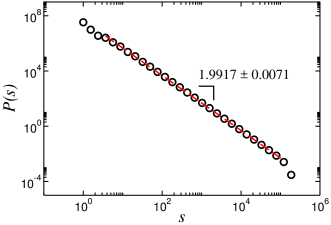
(d) $L = 16384$; 10 amostras.

Avalanches

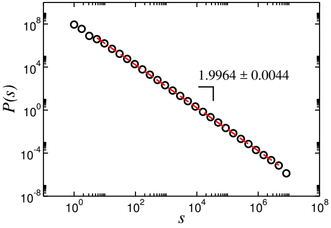
Figura – Distribuição dos tamanhos das avalanches (progressivas).



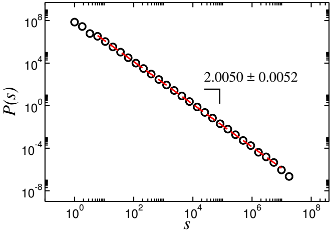
(a) $L = 512$; 1000 amostras.



(b) $L = 1024$; 1000 amostras.



(c) $L = 8192$; 50 amostras.

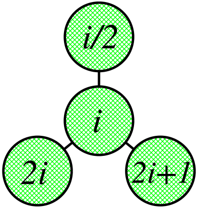


(d) $L = 16384$; 10 amostras.

Árvore binária armazenada em um vetor

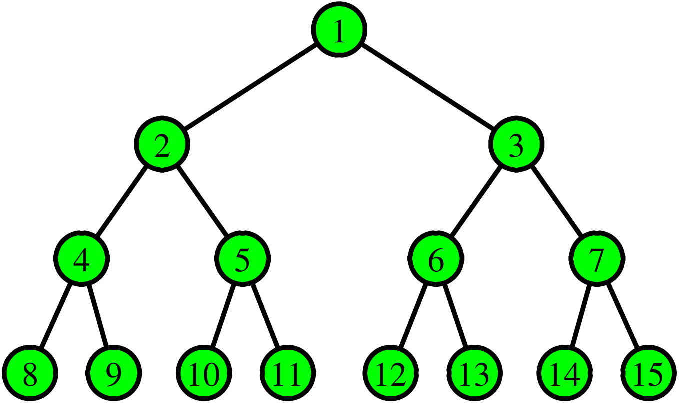
Em uma árvore binária, para todo índice i, vale:

$$\begin{aligned} int(i/2) &\quad \text{é o pai do índice } i, \text{ se } i \neq 1 \\ 2i &\quad \text{é o filho esquerdo de } i, \text{ se } 2i \leq n \\ 2i+1 &\quad \text{é o filho direito de } i, \text{ se } 2i+1 \leq n, \end{aligned} \tag{2}$$



Árvore binária armazenada em um vetor

- A figura abaixo mostra um esquema ilustrativo de uma árvore binária.



▸ Priority Heap - Animação ▸ Priority Heap - Vídeo

Min-Heap

Algoritmo 2: CORRIGE-DESCENDO(A, n, i)

início
    $j \leftarrow i$
    enquanto $2j \leq n$ **faça**
        $f \leftarrow 2j$
        Se $f < (n-1)$ e $A[f] > A[f+1]$
            $f \leftarrow f + 1$
        Se $A[j] \leq A[f]$
            $j \leftarrow n$
        Senão
            troque $A[j] \leftrightarrow A[f]$
            $j \leftarrow f$
    fim
fim

Min-Heap

Algoritmo 3: $\textsc{Corrige-Subindo}(A, m)$

início
  $i \leftarrow m$
  enquanto $i \geq 2$ e $A[int(i/2)] > A[i]$ **faça**
    troque $A[int(i/2)] \leftrightarrow A[i]$
    $i \leftarrow int(i/2)$
  fim
fim

OBRIGADO!