Aljabar Linear

KANTEK

KANTIN TEKNIK

Gedung BP3 Teknik, Lt. 1
Fakultas Teknik, Kampus UI,
Depok

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat-Nya sehingga dikat MKDT ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Tidak lupa kami menyampaikan banyak terima kasih kepada IMD, IMPI, dan Asisten Dosen atas bantuannya yang telah berkontribusi dalam pengerjaan diktat ini dengan memberikan materi soal dan pembahasan untuk diktat MKDT pada semester ganjil ini.

Kami dari Akpro BEM FTUI 2020 berharap agar diktat ini dapat benar-benar membantu mahasiswa dan memberikan manfaat terutama untuk mahasiswa tingkat 1 dalam rangka persiapan menghadapi Ujian Akhir Semester Ganjil ini. Semoga diktat MKDT ini dapat menambah pengetahuan dan dapat melatih mahasiswa untuk terbiasa mengerjakan soal agar nanti pada saat ujian dapat mengerjakan soal dengan baik dan benar.

Adapun karena keterbatasan pengetahuan maupun pengalaman kami, kami menyadari masih terdapat kekurangan dalam penyusunan diktat ini yang perlu kami perbaiki. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun ke arah penyempurnaan diktat ini, sangat kami harapkan dan kami terima dengan terbuka agar dapat kami jadikan evaluasi dan pelajaran untuk diktat yang lebih baik lagi. Sebelumnya kami juga mohon maaf apabila ada kekurangan dalam penyusunan diktat ini.

Kami dari pihak BEM, IMD, dan IMPI FTUI menegaskan bahawa diktat ini tidak memberikan jaminan kelulusan kepada mahasiswa dalam mata kuliah yang berkaitan, namun besar harapan kami dengan adanya diktat ini dapat membantu mahasiswa untuk belajar dan memahami lebih lanjut mata kuliah dasar teknik yang akan diujiankan saat UAS ini. Diktat **ini bersifat suplementer** sehingga nilai kalian pada ujian nanti tidak ditentukan oleh diktat ini, namun tentunya oleh usaha kalian sendiri

Selamat berjuang dan mempersiapkan UAS, para singa Teknik! Semoga sukses dan lancar dalam mengerjakan soal ujian, jangan lupa untuk selalu berdoa dan mengingat Tuhan Yang Maha Esa dalam setiap perjuangan menuntut ilmu agar diberikan kemudahan dan kelancaran. Semangat!

Aljabar Linear

Oleh: AKPRO BEM FTUI 2020

1. Buktikan bahwa perkalian dari x adalah eigenvector dari A, dan temukan eigenvalue yang sesuai!

   a) A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan x = $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   b) A = $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan x = $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   c) A = $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ dan x = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

   d) A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ dan x = $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Jika $\langle u, v \rangle$ adalah Euclidian Inner Produk pada R^2 dan jika u = (1,1), v = (3,2), w = (0,-1) dan k = 3 hitung
   a. $\langle u, v \rangle$
   b. $\langle \boldsymbol{k}v, w \rangle$
   c. $\langle u + v, w \rangle$
   d. $\|v\|$
   e. d(u,v)
   f. $\|u - \boldsymbol{k}v\|$

3. Ekspresikan bentuk kuadrat dalam notasi matriks x^TAx dengan A merupakan matriks simetris
   a) $3X_1^2 + 7X_2^2$
   b) $4X_1^2 - 9X_2^2 - 5X_1X_2$
   c) $9X_1^2 - X_2^2 + 4X_3^3 + 6X_1 X_2 – 8 X_1 X_3 + X_2X_3$

Jawaban:

1. Eigenvalues

   a) A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ dan x = $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   Maka Ax = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ Dimana $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ = -x

   Jadi Ax = -x
   dan x adalah eigenvector dari A dengan eigenvalue -1

   b) A = $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan x = $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   Maka Ax = $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ Dimana $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ = 4x

   Jadi Ax = 4x
   dan x adalah eigenvector dari A dengan eigenvalue 4

   c) A = $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ dan x = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

   Maka Ax = $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ Dimana $\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

   Jadi Ax = 5x
   dan x adalah eigenvector dari A dengan eigenvalue 5

   d) A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ dan x = $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   Maka Ax = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

   Jadi Ax = 0x
   dan x adalah eigenvector dari A dengan eigenvalue 0

2.

a) $\langle u, v\rangle$ = (1)(3) + (1)(2) = 5

b) $\langle \boldsymbol{k}v, w\rangle$ = $\langle \mathbf{3}v, w\rangle$ = (**3**x3)(0) + (**3**x2)(-1) = -6

c) $\langle u + v, w\rangle$ = $\langle u, w\rangle$ + $\langle v, w\rangle$ = (1)(0) + (1)(-1) + (3)(0) + 2(-1) = -3

d) $\|v\|$ = $\sqrt{\langle v, v\rangle}$ = $\sqrt{3^2 + 2^2}$ = $\sqrt{13}$

e) d(u,v) = $\|u - v\|$ = $\|(-2, -1)\|$ = $\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2}$ = $\sqrt{5}$

f) $\|u - \boldsymbol{k}v\|$ = $\|(1,1) - \mathbf{3}(3,2)\|$ = $\sqrt{(-8)^2 + (-5)^2}$ = $\sqrt{89}$

3.

a) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 3 & -4 \\ 3 & -1 & 1/2 \\ -4 & 1/2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Gedung BP3 Teknik, Lt. 1
Fakultas Teknik, Kampus UI,
Depok

Aljabar Linear

Oleh: AKPRO IME FTUI 2020

1. Soal 1 (SK 5.5.4 - 5.5.6, **20**)
   Carilah basis dan dimensi dari ruang solusi sistem persamaan linear berikut:
   $$x + y + z = 0$$
   $$3x + 2y - 2z = 0$$
   $$4x + 3y - z = 0$$
   $$6x + 5y + z = 0$$

2. Soal 2 (SK 6.6.1 - 6.6.4, **20**)
   Tentukan cosinus sudut θ antara vektor-vektor $p = 1 + x - x^2$ dan $q = -3 + 3x - 3x^2$ terhadap hasil kali dalam standar pada P_2. Tentukan (perkiraan) besar sudut θ!

3. Soal 3 (SK 7.7.1 - 7.7.3, **20**)
   Jika $T: R^3 \to R^3$ adalah operator liner yang didefinisikan sebagai:
   $$T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + 2x_2)$$
   a. Cari matriks standar A untuk transformasi T
   b. Tentukanlah apakah matriks A dapat didiagonalisasikan? Jelaskan!
   c. Jika A dapat didiagonalisasikan, carilah matriks P yang mendiagonalkan A

4. Soal 4 (SK 8.8.1 - 8.8.2, **20**)
   Tentukan ker (T), $null(T)$, $range(T)$, $rank(T)$ dari $T: R^4 \to R^3$ yang didefinisikan oleh:
   $$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ c - 2d \\ -a - b + c - 2d \end{pmatrix}$$

5. Soal 5 (SK 8.8.3 - 8.8.5, **20**)
   Diketahui transformasi linear $T: R^3 \to R^3$ didefinisikan sebagai berikut:
   $$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2, -2x_1 - 4x_2 + 3x_3,\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3)$$
   a. Tentukan transformasi invers $T^{-1}(x_1, x_2, x_3)$
   b. Tentukan $[T]_B$, yaitu matriks untuk T berkenaan dengan basis $B = \{u_1, u_2, u_3)$ dimana:
   $$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jawaban:

1. **Diketahui**

$$x + y + z = 0$$
$$3x + 2y - 2z = 0$$
$$4x + 3y - z = 0$$
$$6x + 5y + z = 0$$

Ditanya

Basis dan Dimensi dari ruang solusi SPL tersebut

Jawab

Karena SPL tersebut merupakan persamaan homogen, kita ubah ke bentuk $Ax = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \text{ dengan } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Basis secara umum adalah himpunan vektor *linearly independent* yang merentangkan (*span*) ruang vektor V.

Dimensi adalah jumlah basis yang ada pada ruang vektor V.

Untuk mendapatkan Basis dan Dimensi ruang solusi SPL tersebut, sederhanakan matrix A dengan *Gauss-Jordan Elimination* untuk mendapatkan ruang solusi SPL tersebut!

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \\ B2 - 3B1 \\ B3 - 4B1 \\ B4 - 6B1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \\ \\ B3 - B2 \\ B4 - B2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika $z = s$, maka $-y - 5z = 0, y = -5s$ dan $x + y + z = 0, x = 4s$. Kita dapatkan ruang solusinya,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4s \\ -5s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} s$$

Sehingga kita dapatkan, ruang solusi SPL tersebut mempunyai Dimensi: 1 dan Basis: $\{4, -5, 1\}$

2. **Diketahui**

   $p = 1 + x - x^2, q = -3 + 3x - 3x^2$

   Ditanya

   cosinus sudut θ dan perkiraan sudut θ antara p dan q

   Jawab

   Ubah p dan q ke dalam bentuk matrix standar, $p = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

   Kita tahu bahwa $cos\theta = \frac{\langle u,v \rangle}{\|u\|\|v\|}$, sehingga

   $\langle p, q \rangle = (-1 \times -3) + (1 \times 3) + (1 \times -3) = 3$, $\|p\| = \sqrt{3}$, $\|q\| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$,

$$cos\theta = \frac{\langle p,q \rangle}{\|p\|\|q\|} = \frac{3}{\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \text{ dan } \theta = cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 70.529°$$

3. **Diketahui**

$T: R^3 \to R^3, T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 3x_1 + 2x_2)$

Ditanya

a. Matriks standar A untuk transformasi T
b. Apakah matriks A dapat didiagonalisasikan?
c. Jika A dapat didiagonalisasikan, carilah matriks P yang mendiagonalkan A!

Jawab

a. $T\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, Sehingga $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

b. Gunakan teorema dibawah untuk menentukan jika matriks A *diagonalizable*

Jika A adalah matriks persegi $n \times n$, maka A *diagonalizable* apabila A memiliki n independent *eigenvectors*.

Sehingga, dengan menggunakan *characteristic polynomial* dari A, $(\lambda I - A)x = 0$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 - 6$$
$$= \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4)$$

Maka, Eigenvalues-nya $= -1, 4$

Masukkan tiap nilai eigenvalues ke *dalam characteristic polynomial*.

Untuk $\boldsymbol{\lambda} = -1$,

$$\begin{bmatrix} -1-1 & -2 \\ -3 & -1-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-\frac{1}{2}B1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad B2 + 3B1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Jika $x_2 = s$, maka $x_1 + x_2 = 0, x_1 = -s$

Sehingga $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}s$. Maka, $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Untuk $\boldsymbol{\lambda} = 4$,

$$\begin{bmatrix} 4-1 & -2 \\ -3 & 4-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$B2 + B1 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Jika $x_2 = s$, maka $3x_1 - 2x_2 = 0, x_1 = \frac{2}{3}s$

Sehingga $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}s \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}s$. Maka, $v_2 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Karena A memiliki 2 eigenvektor dimana A adalah matrix 2x2, Maka A dapat didiagonalisasikan.

c. $P = [v_1 \quad v_2] = \begin{bmatrix} -1 & 2/3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. **Diketahui**

$$T: R^4 \to R^3, \qquad T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c-2d \\ -a-b+c-2d \end{pmatrix}$$

Ditanya

$\ker(T), nullity(T), range(T), rank(T)$ dari $T: R^4 \to R^3$

Jawab

Jika $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = (x)$, kita ubah $T(x)$ ke dalam bentuk $Ax = 0$.

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0, \text{ dengan } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Untuk setiap transformasi linear $T(x): V \to W$,

Kernel(T) merupakan himpunan vektor V yang T transformasikan menjadi 0 di W. Atau kita sebut sebagai *nullspace* dari T.

Range(T) merupakan hasil transformasi pada W, dimana vektor awal x berada pada V. Atau kita dapat menggunakan *column vector* T, dimana x merupakan *column vector* pada T.

Nullity(T) merupakan dimensi dari kernel pada T.

Rank(T) merupakan dimensi dari range pada T.

Kita lakukan penyederhanaan pada A dengan *Gauss-Jordan Elimination*,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underset{B3+B1}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underset{B3+B1}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga, ker(T) cari *nullspace* pada T. Dari matrix A,

Jika $d = s$, maka $c - 2d = 0, c = 2s$ dan jika $b = t, maka \ \ a + b = 0, a = -t$. Sehingga *nullspace*-nya

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 2s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

Sehingga, $ker(T) = \{0,0,2,1\}\ dan\ \{-1,1,0,0\}$ dan $nullity(T) = \dim(\ker(T)) = 2$.

Untuk $R(T)$, cari *column space* dari T. Dari matrix A,

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga $R(T) = \{.c_1, c_2\}$ dan$rank(T) = \dim(\mathrm{R}\ (T)) = 2$

5. **Diketahui**

$T: R^3 \to R^3,\ T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2, -2x_1 - 4x_2 + 3x_3,\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3)$

Ditanya

a. $T^{-1}(x_1, x_2, x_3)$

b. $[T]_B, B = \{u_1, u_2, u_3), u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Jawab

a. $T = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix},$

$$T^{-1} = \left[\begin{matrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] = \overset{B1/3}{} \left[\begin{matrix} 1 & 1/3 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] =$$

$$\begin{matrix} B2 + 2B1 \\ B3 - 5B1 \end{matrix} \left[\begin{matrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & -10/3 & 3 \\ 0 & 7/3 & -2 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & 0 \\ -5/3 & 0 & 1 \end{matrix}\right] =$$

$$B2 \times -3/10 \left[\begin{matrix} 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -9/10 \\ 0 & 7/3 & -2 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \\ -5/3 & 0 & 1 \end{matrix}\right] =$$

$$\begin{matrix} B1 - \frac{1}{3}B2 \\ \\ B3 - \frac{7}{3}B2 \end{matrix} \left[\begin{matrix} 1 & 0 & 3/10 \\ 0 & 1 & -9/10 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 2/5 & 1/10 & 0 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \\ -6/5 & 7/10 & 1 \end{matrix}\right] =$$

$$B3 \times 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/10 \\ 0 & 1 & -9/10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 & 1/10 & 0 \\ -1/5 & -3/10 & 0 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{matrix} B1 - \frac{3}{10}B3 \\ B2 + \frac{9}{10}B3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b. $T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + x_2 \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \end{bmatrix}, B = \{u_1, u_2, u_3), u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Untuk mendapatkan transformasi T terhadap B, $[T(x)]_B$, Tentukan vektor x terhadap B terlebih dahulu, $[x]_B$, yaitu memasukkan himpunan vektor B kepada transformasi T.

$$T[u_1] = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad T[u_2] = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad T[u_1] = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Lalu kita dapatkan $[T(x)]_B$ dengan menggunakan himpunan vektor B sebagai basis,

$$T[u_1] = -4u_1 + u_2 + \frac{3}{2}u_3, \qquad T[u_2] = u_1 + 3u_2, \qquad T[u_1] = 6u_1 - 2u_3$$

Sehingga,

$$[T(x)]_B = \begin{bmatrix} -4x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_3 \\ x_1 + 3x_2 \\ 6x_1 - 2x_3 \end{bmatrix},$$