

Master Probabilités et Finance:
Rapport de projet informatique

Omar El-Euch, Jonathan Visbecq
Stratification adaptative vs randomized QMC

28 avril 2015

Table des matières

1	Présentation du sujet	2
1.1	Sujet	2
1.2	Présentation mathématique des modèles	2
1.2.1	Quasi-Monte Carlo randomisé	2
1.2.2	Stratification adaptative	2
2	Tests numériques du code C++	3
2.1	Quasi-Monte Carlo randomisé	3
2.1.1	Comparaison des vitesses de convergence	3
2.1.2	Étude du terme de Berry-Essen pour l'intervalle de confiance	4
2.2	Stratification adaptative	5
2.2.1	Convergence vers la proportion optimale	5
2.2.2	Comparaison de l'intervalle de confiance estimé à la simulation Monte Carlo	5
2.2.3	Comparaison de la stratification proportionnelle et de la méthode adaptative	6
2.2.4	Comparaison avec les résultats de [EJ08] pour les options asiatiques	6
3	Comparaison des deux méthodes de réduction de variance sur les exemples de [EJ08]	7
3.0.5	Loi normale standard	7
3.0.6	Options asiatiques	7
4	Présentation du code C++	8

1 Présentation du sujet

1.1 Sujet

Le sujet choisi est le suivant :

2.21 Stratification adaptative vs randomized QMC

Comparer les performances des méthodes de stratification exposées dans [EJ08] et de QMC randomisées exposées dans [Tuf04] sur les exemples présentés dans [EJ08].

1.2 Présentation mathématique des modèles

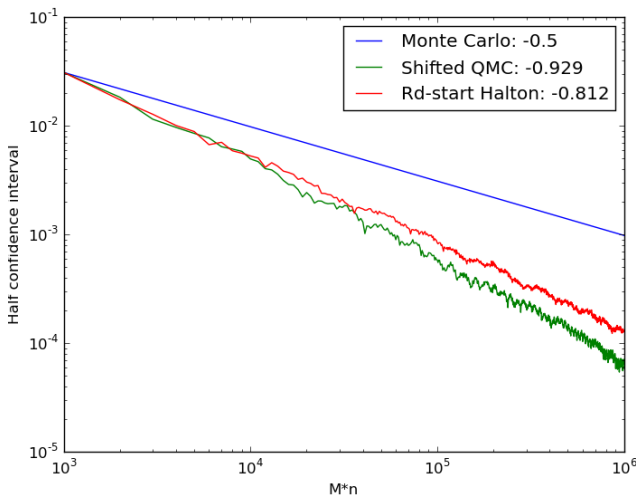
1.2.1 Quasi-Monte Carlo randomisé

1.2.2 Stratification adaptative

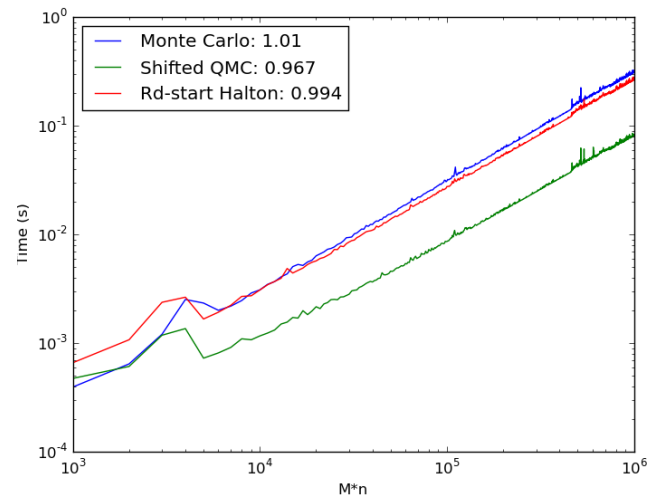
2 Tests numériques du code C++

2.1 Quasi-Monte Carlo randomisé

2.1.1 Comparaison des vitesses de convergence



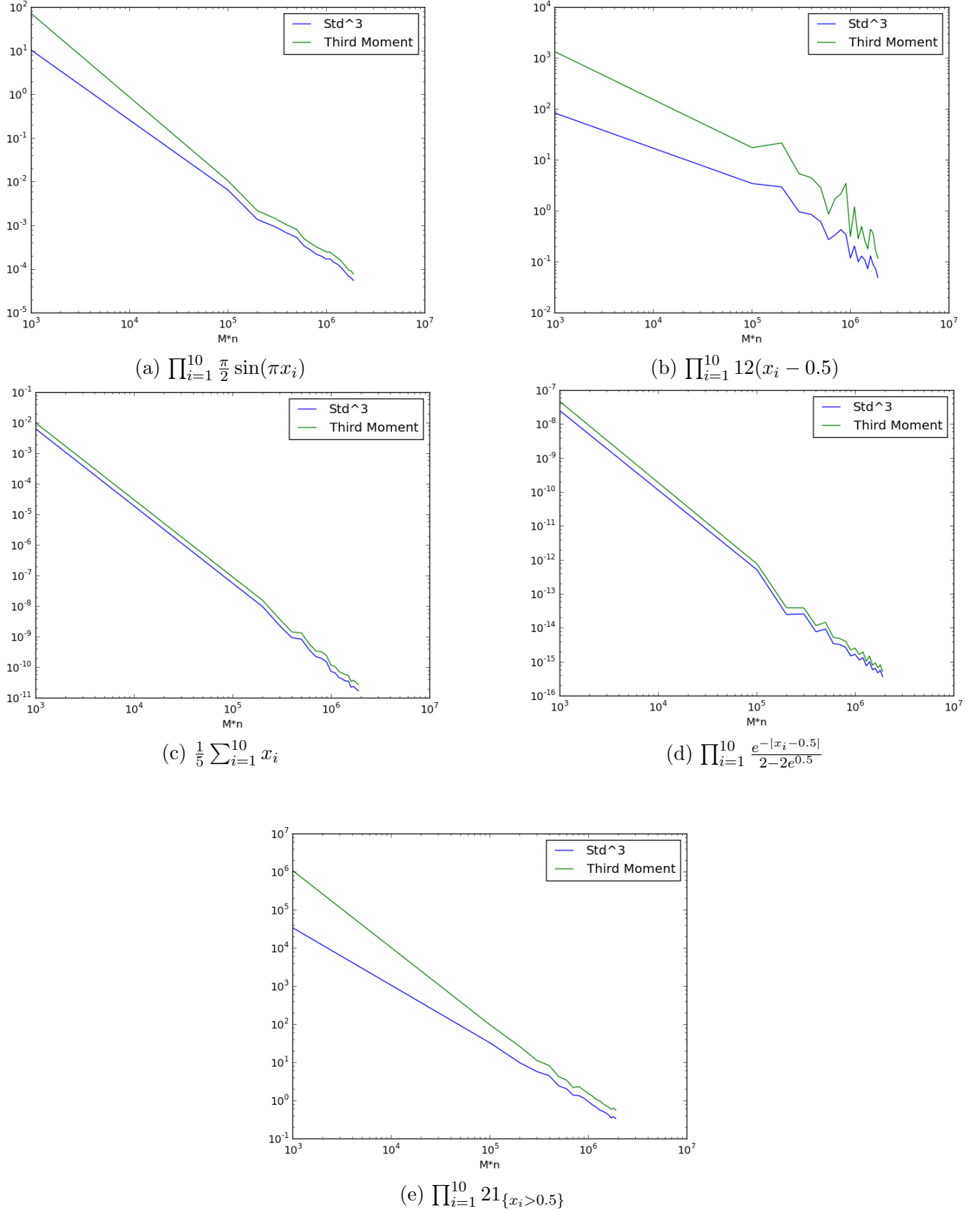
(a) Demi-intervall de confiance en fonction du nombre de points générés (échelle 'log-log')



(b) Temps (s) de calcul nécessaire en fonction du nombre de points générés (échelle 'log-log')

FIGURE 2.1: Comparaison des temps et vitesses de convergence des méthodes de Monte Carlo randomisées et de Monte Carlo standard pour le calcul de l'intégrale de $f(x_1, x_2) = 1_{x_1 < x_2}$. M (nombre de pseudo-nombres aléatoires) est fixé à 1000 tandis que N (nombres de quasi-nombres aléatoires) varie de 1 à 1000. Les valeurs indiquées sont les coefficients des pentes (vitesses de convergences).

2.1.2 Étude du terme de Berry-Essen pour l'intervalle de confiance

FIGURE 2.2: Comparaison des vitesses de convergence de σ_N^3 et de β_N . Comme pour les simulations

2.2 Stratification adaptative

2.2.1 Convergence vers la proportion optimale

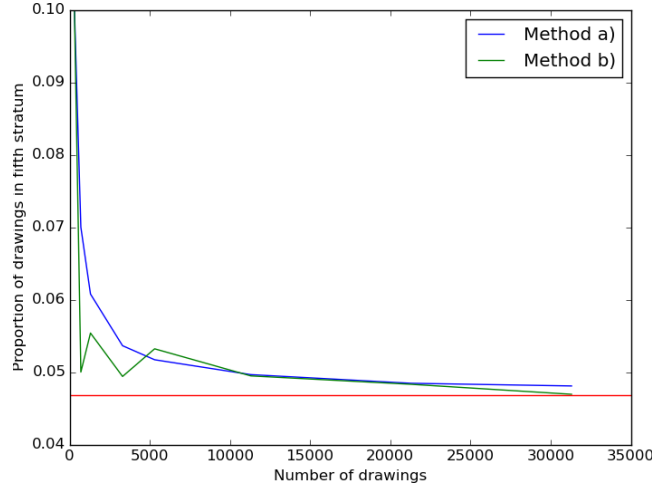
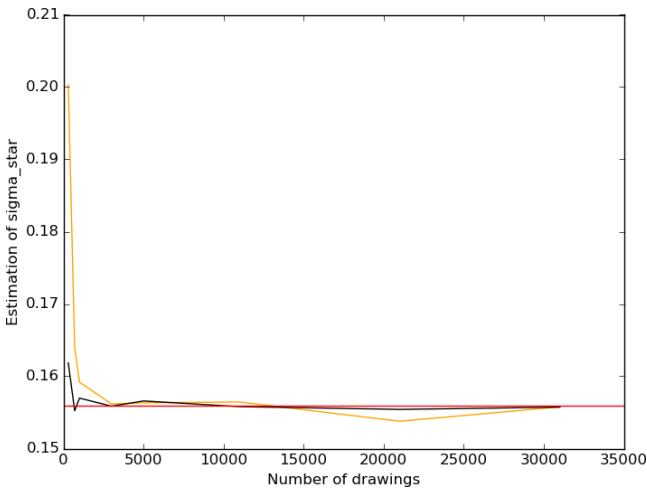
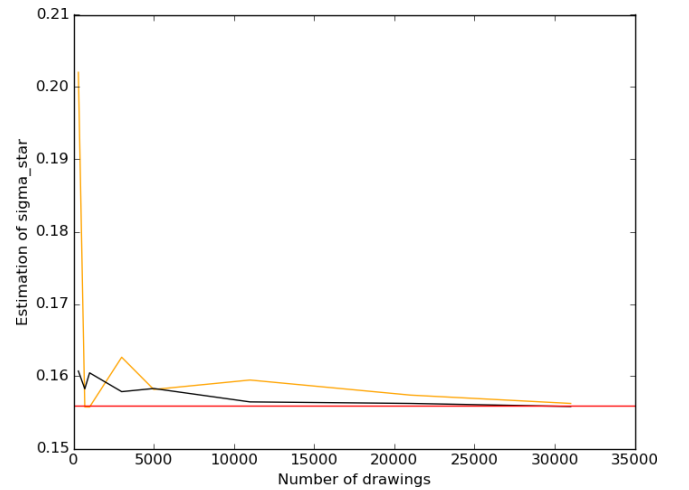


FIGURE 2.3: Convergence de $\frac{N_5^k}{N^k}$ vers la valeur optimale $q_5^* = 0.04685$ (droite rouge) en fonction de N^k , pour $k \in [1, 8]$ et N^k prenant les valeurs 300, 700, 1300, 3300, 5300, 11300, 21300, 31300. Les deux méthodes de calcul possible pour la stratification adaptative sont envisagées.

2.2.2 Comparaison de l'intervalle de confiance estimé à la simulation Monte Carlo



(a) Méthode a)



(b) Méthode b)

FIGURE 2.4: Comparaison entre l'intervalle de confiance estimé à partir de l'estimation de la variance asymptotique σ^* (en orange) et celui obtenu par simulation Monte Carlo avec 10000 tirages (en noir) pour l'estimation de l'espérance d'une loi normale standard. Les courbes tracées sont estimations de σ^* (proportionnel à la largeur de intervalle de confiance et la vraie valeur (en rouge)). Avec notre implémentation, la méthode b) semble la moins fiable.

2.2.3 Comparaison de la stratification proportionnelle et de la méthode adaptative

	Stratification proportionnelle	Stratification adaptative
Variance	1.26e-06	7.82e-07
Temps (s)	0.0249	0.0256
Variance*temps	3.14e-08	2.00e-08

TABLE 2.1: Comparaison des résultats entre les méthodes d'allocation proportionnelles et adaptative pour l'estimation de l'espérance d'une loi normale standard. Nous utilisons 31300 tirages pour la stratification, répartie successivement en 300, 1300, 11300 puis 31300 tirages pour la méthode adaptative. L'expérience est répétée 10000 fois et les valeurs présentées sont les moyennes des résultats obtenus.

2.2.4 Comparaison avec les résultats de [EJ08] pour les options asiatiques

			Variance		
d	K	Price	Adap.	Prop.	Ratio Prop. / Adap
16	45	6.05	2.63e-08	1.08e-07	4.11
	50	1.91	1.20e-07	7.76e-06	64.69
	55	0.20	5.29e-09	4.33e-07	81.74
64	45	6.00	3.53e-09	2.32e-08	6.58
	50	1.84	1.00e-09	3.05e-09	3.04
	55	0.17	6.55e-09	7.36e-07	112.35

TABLE 2.2: Comparaison des allocations proportionnelles et adaptative pour l'exemple du call asiatique. Les ratios trouvés sont environ 2 fois supérieures à ceux de [EJ08].

			Variance		
d	K	Price	Adap.	Prop.	Ratio Prop. / Adap
16	45				
	50				
	55				
64	45				
	50				
	55				

TABLE 2.3: Comparaison des allocations proportionnelles et adaptative pour l'exemple du put asiatique avec $S_0 = 50$, $r = 0.05$, $\sigma = 0.1$, $T = 1$. et 100 strates. 1000000 de tirages sont utilisés, répartie progressivement en 100000, 400000, 500000 et 1000000 pour la méthode adaptative.

3 Comparaison des deux méthodes de réduction de variance sur les exemples de [EJ08]

3.0.5 Loi normale standard

3.0.6 Options asiatiques

4 Présentation du code C++

Bibliographie

- [EJ08] P. Etoire and B. Jourdain. Adaptive optimal allocation in stratified sampling methods. *Methodology and Computing in Applied Probability*, pages 1–26, 2008.
- [GHS99] P. Glasserman, P. Heidelberger, and P. Shahabuddin. Asymptotically optimal importance sampling and stratification for path-dependant options. *Mathematical Finance*, 9(2) :117–152, 1999.
- [Tuf04] B. Tuffin. Randomization of quasi-monte carlo methods for error estimation : survey and normal approximation. *Monte Carlo Methods Appl.*, 10(3-4) :617–628, 2004.