Quasi Monte-Carlo

Exemples en C++

Vincent Lemaire
vincent.lemaire@upmc.fr

Surcharge d'opérateurs

- Par fonctions membres
- Par fonctions amies

QMC - Discrépance

- Koksma-Hlawka
- Dimension 1 - Van der Corput

Classe `p_adic`

Dimension supérieure

- Halton
- Kakutani
- Faure
- Suite de Sobol, intégration de la GSL

Application, code Quasi-Monte Carlo

Du côté du C++11

- Référence sur rvalue
- Constructeur de déplacement
- `std::move` et `std::forward`
- Retour à `sobol`

Surcharge d'opérateurs

Permet de redéfinir les opérateurs usuels pour une nouvelle `classe`.

- opérateurs unaires : `++`, `--`
- opérateurs d'affectation : `=`, `+=`, `-=`, `*=`, `/=`, `%=`
- opérateurs arithmétiques (binaires) : `+`, `-`, `*`, `/`, `%`
- opérateurs de comparaison : `==`, `!=`, `<`, `>`, `<=`, `>=`
- opérateurs « informatiques » : `()`, `[]`, `*`, `&`, `->`, **`new[]`**, **`delete[]`**
- opérateurs de flux : `<<`, `>>`
- opérateurs de conversion : **`double`**, **`int`**, **`char`**, `...`

En général, la surcharge des opérateurs unaires, d'affectation, de conversion et « informatiques », se fait par des fonctions membres et la surcharge des opérateurs binaires (arithmétiques et comparaisons) se fait par des fonctions amies.

Obligatoirement, la surchage des opérateurs de flux se fait par des fonctions amies.

Surcharge par fonctions membres

Surcharge par une fonction membre de l'opérateur $\bullet$: la fonction doit se nommer **`operator`**$\bullet$ et

`obj`$\bullet$ et $\bullet$`obj` $\Longleftrightarrow$ `obj.`**`operator`**$\bullet$`(...)`

`obj1`$\bullet$`obj2` $\Longleftrightarrow$ `obj1.`**`operator`**$\bullet$`(obj2)`

Surcharge par fonctions membres

Surcharge par une fonction membre de l'opérateur $\bullet$: la fonction doit se nommer **`operator`**$\bullet$ et

`obj`$\bullet$ et $\bullet$`obj` $\Longleftrightarrow$ `obj.`**`operator`**$\bullet$`(...)`
`obj1`$\bullet$`obj2` $\Longleftrightarrow$ `obj1.`**`operator`**$\bullet$`(obj2)`

Syntaxe pour l'opérateur d'affectation `[]` (unaire)

- Lecture : `elt` **`operator[](int) const`** ;
- Ecriture : `elt&` **`operator[](int)`** ;

Surcharge par fonctions membres

Surcharge par une fonction membre de l'opérateur $\bullet$: la fonction doit se nommer **`operator`**$\bullet$ et

`obj`$\bullet$ et $\bullet$`obj` $\Longleftrightarrow$ `obj.`**`operator`**$\bullet$`(...)`
`obj1`$\bullet$`obj2` $\Longleftrightarrow$ `obj1.`**`operator`**$\bullet$`(obj2)`

Syntaxe pour l'opérateur d'affectation `[]` (unaire)

- Lecture : `elt` **`operator[](int) const`**;
- Ecriture : `elt&` **`operator[](int)`**;

Syntaxe pour opérateurs ++ et -- qui peuvent être préfixe (++n) ou suffixe (n++) : on utilise 2 fonctions différentes :

- Opérateur préfixe : `obj&` **`operator++();`**
- Opérateur suffixe : `obj` **`operator++(int);`**

Surcharge par fonctions amies

Surcharge par une fonction globale (souvent amie de la calsse) de l'opérateur $\bullet$: la fonction doit se nommer **`operator`**$\bullet$ et

`obj`$\bullet$ et $\bullet$`obj` $\Longleftrightarrow$ **`operator`**$\bullet$`(obj)`

`obj1`$\bullet$`obj2` $\Longleftrightarrow$ **`operator`**$\bullet$`(obj1, obj2)`

Surcharge par fonctions amies

Surcharge par une fonction globale (souvent amie de la calsse) de l'opérateur $\bullet$: la fonction doit se nommer **`operator`**$\bullet$ et

`obj`$\bullet$ et $\bullet$`obj` $\Longleftrightarrow$ **`operator`**$\bullet$`(obj)`

`obj1`$\bullet$`obj2` $\Longleftrightarrow$ **`operator`**$\bullet$`(obj1, obj2)`

Syntaxe pour les opérateurs de flux << et >>

- Injection :
  `std::ostream& operator<<(std::ostream &o, const Obj &x)`
- Extraction :
  `std::istream& operator>>(std::istream &i, Obj &x)`

Koksma-Hlawka

Theorem (Koksma-Hlawka)

Soit $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite sur* $[0,1]^d$ *et* f *à variation* $V(f)$ *finie. Alors*

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) - \int_{[0,1]^d} f(u)\mathrm{d}u\right| \leqslant V(f)D_n^*(\xi),$$

où $D_n^*(\xi)$ *est la discrépance de la suite* $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ *i.e.*

$$D_n^*(\xi) = \sup_{x\in[0,1]^d}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{1}_{[0,x]}(\xi_k) - \prod_{i=1}^{d} x^i\right|$$

Koksma-Hlawka

Theorem (Koksma-Hlawka)

Soit $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite sur* $[0,1]^d$ *et* f *à variation* $V(f)$ *finie. Alors*

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) - \int_{[0,1]^d} f(u)\mathrm{d}u\right| \leqslant V(f) D_n^*(\xi),$$

où $D_n^*(\xi)$ *est la discrépance de la suite* $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ *i.e.*

$$D_n^*(\xi) = \sup_{x\in[0,1]^d} \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{[0,x]}(\xi_k) - \prod_{i=1}^{d} x^i\right|$$

Remark : Si $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite *i.i.d.* uniformément distribuée sur $[0,1]^d$, alors (par la LLI)

$$\limsup_n \sqrt{\frac{2n}{\log(\log n)}} D_n^*(U) = 1 \quad p.s.$$

Dimension 1 - Van der Corput

La plupart des suites à discrépance faible repose sur la manipulation des coefficients de la décomposition $p-$adique de n.

Voici la construction de Van der Corput (dimension 1) :

- Soit p un nombre premier qui sert de base à la décomposition $p-$adique
- Décomposition de n :

$$n = a_0 + a_1 p + \dots a_r p^r, \quad 0 \leqslant a_i \leqslant p-1, a_r \neq 0,$$

- Construction de ξ_n :

$$\xi_n^{(p)} = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \dots + \frac{a_r}{p^{r+1}} \in [0,1].$$

Dimension 1 - Van der Corput

La plupart des suites à discrépance faible repose sur la manipulation des coefficients de la décomposition $p-$adique de n.

Voici la construction de Van der Corput (dimension 1) :

- Soit p un nombre premier qui sert de base à la décomposition $p-$adique
- Décomposition de n :

$$n = a_0 + a_1 p + \dots a_r p^r, \quad 0 \leqslant a_i \leqslant p-1, a_r \neq 0,$$

- Construction de ξ_n :

$$\xi_n^{(p)} = \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \dots + \frac{a_r}{p^{r+1}} \in [0,1].$$

Discrépance :

$$D_n^*(\xi^{(p)}) \leqslant \frac{1}{n}\left(1 + (p-1)\frac{\log(pn)}{\log(p)}\right)$$

Classe `p_adic`

But : Ecrire une classe `p_adic` qui permet de manipuler facilement la décomposition $p-$adique de n et de calculer $\xi_n^{(p)}$.

- 3 constructeurs :
  - à partir des coefficients a_k, $k = 0, \ldots, r$ (et de p...)
  - à partir d'un entier n (et de la base p)
  - à partir d'un réel $x \in [0, 1]$ (et de la base p)
- 2 opérateurs de conversions :
  - vers **`double`**
  - vers **`int`**
- surcharge des opérateurs : +, ++ (préfixe et suffixe)

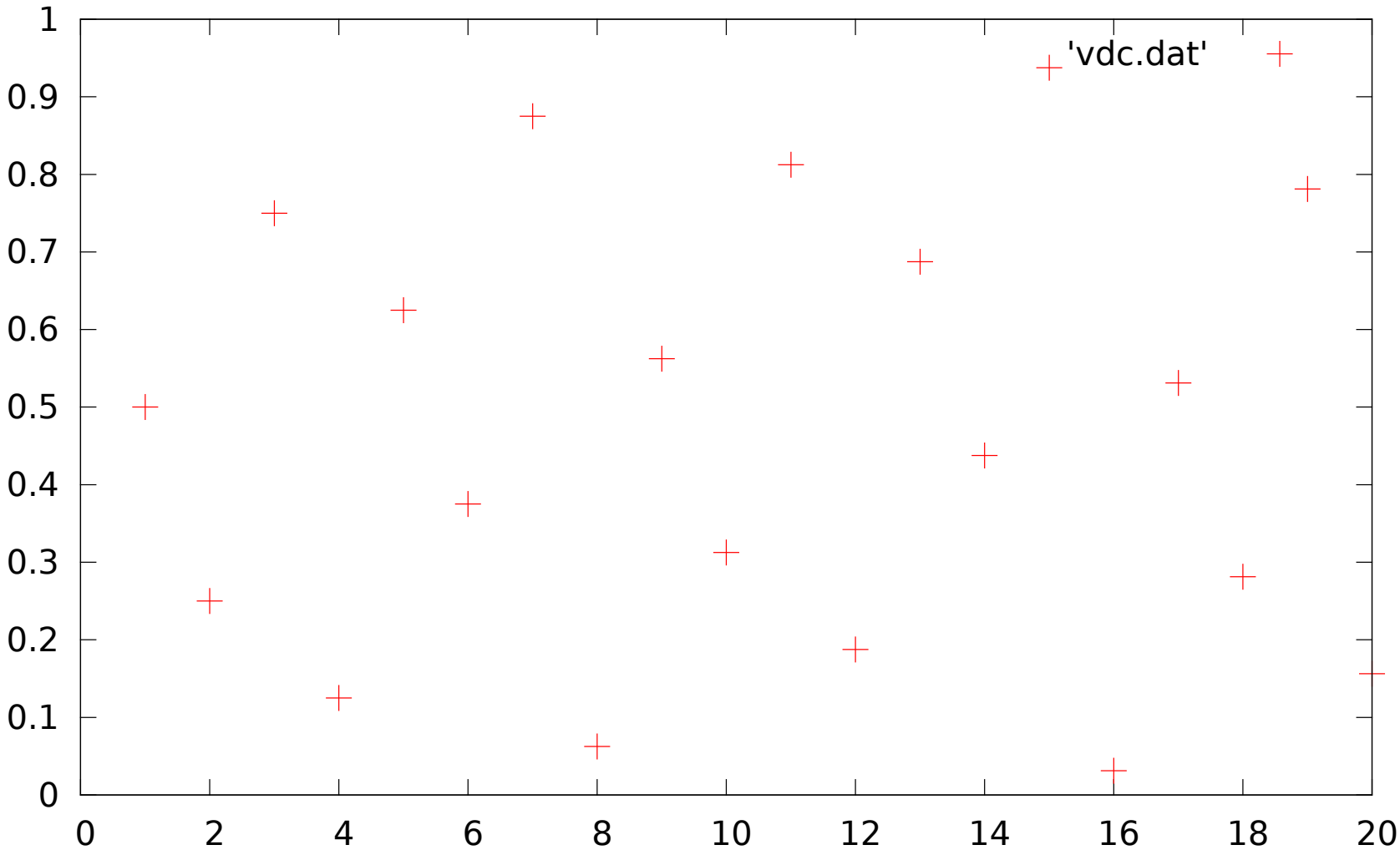
Classe p_adic

But : Ecrire une classe p_adic qui permet de manipuler facilement la décomposition $p-$adique de n et de calculer $\xi_n^{(p)}$.

- 3 constructeurs :
  - à partir des coefficients a_k, $k = 0, \ldots, r$ (et de p...)
  - à partir d'un entier n (et de la base p)
  - à partir d'un réel $x \in [0, 1]$ (et de la base p)
- 2 opérateurs de conversions :
  - vers **double**
  - vers **int**
- surcharge des opérateurs : +, ++ (préfixe et suffixe)

```
int main() {
    ofstream file;
    file.open("vdc.dat");
    p_adic n(0,2);
    for (int k = 1; k <= 20; ++k) {
        file << k << "\t" << (double) ++n << endl;
    }
    file.close();
}
```

20 premiers points de $\xi^{(2)}$



Implémentation

Déclaration dans le fichier p_adic.hpp (sans les opérateurs arithmétiques) :

```
class p_adic {
public:
    typedef std::list<int> coeff;
    p_adic(coeff ak, coeff pk) : ak(ak),pk(pk),p(*(++pk.begin())){};
    p_adic(int n, int p = 2);
    p_adic(double x, int p = 2);
    operator int() {
        return std::inner_product(ak.begin(), ak.end(), pk.begin(), 0);
    }
    operator double() {
        return std::inner_product(ak.begin(), ak.end(), ++pk.begin(),
               0.0, std::plus<double>(), std::divides<double>());
    }
    friend struct halton;
    friend struct kakutani;
    friend struct faure;
private:
    int p;
    coeff ak, pk;
};
```

Implémentation -2-

Définition d'un constructeur dans le fichier `p_adic.cpp` :

```
p_adic::p_adic(int n, int p) : p(p) {
    int puiss = 1;
    while (n > 0) {
        ak.push_back(n % p);
        pk.push_back(puiss);
        puiss *= p;
        n -= ak.back();
        n /= p;
    }
    pk.push_back(puiss);
};
```

Exercice : écrire le constructeur qui prend un **`double`** en argument.

Implémentation -3- (opérateurs ++)

Définition d'une fonction `increment()` (**private**) qui fait le travail :

```
void p_adic::increment() {
    coeff::iterator i = ak.begin();
    while ((i != ak.end()) && ((*i)+1 == p)) { (*i) = 0; i++; }
    if (i == ak.end()) {
        ak.push_back(1);
        pk.push_back(pk.back()*p);
    }
    else (*i) += 1;
};
```

Implémentation -3- (opérateurs ++)

Définition d'une fonction `increment()` (**private**) qui fait le travail :

```
void p_adic::increment() {
    coeff::iterator i = ak.begin();
    while ((i != ak.end()) && ((*i)+1 == p)) { (*i) = 0; i++; }
    if (i == ak.end()) {
        ak.push_back(1);
        pk.push_back(pk.back()*p);
    }
    else (*i) += 1;
};
```

Ecriture des opérateurs dans la classe (fichier `p_adic.hpp`)

```
p_adic operator++(int) {
    p_adic copie = *this;
    increment();
    return copie;
};
p_adic& operator++() {
    increment();
    return (*this);
};
```

Halton

Soit d la dimension, et $p_1, \ldots, p_d$ les d premiers nombres premiers.
La suite d'Halton est définie par

$$\Xi_n^{(d)} = (\xi_n^{(p_1)}, \ldots, \xi_n^{(p_d)})$$

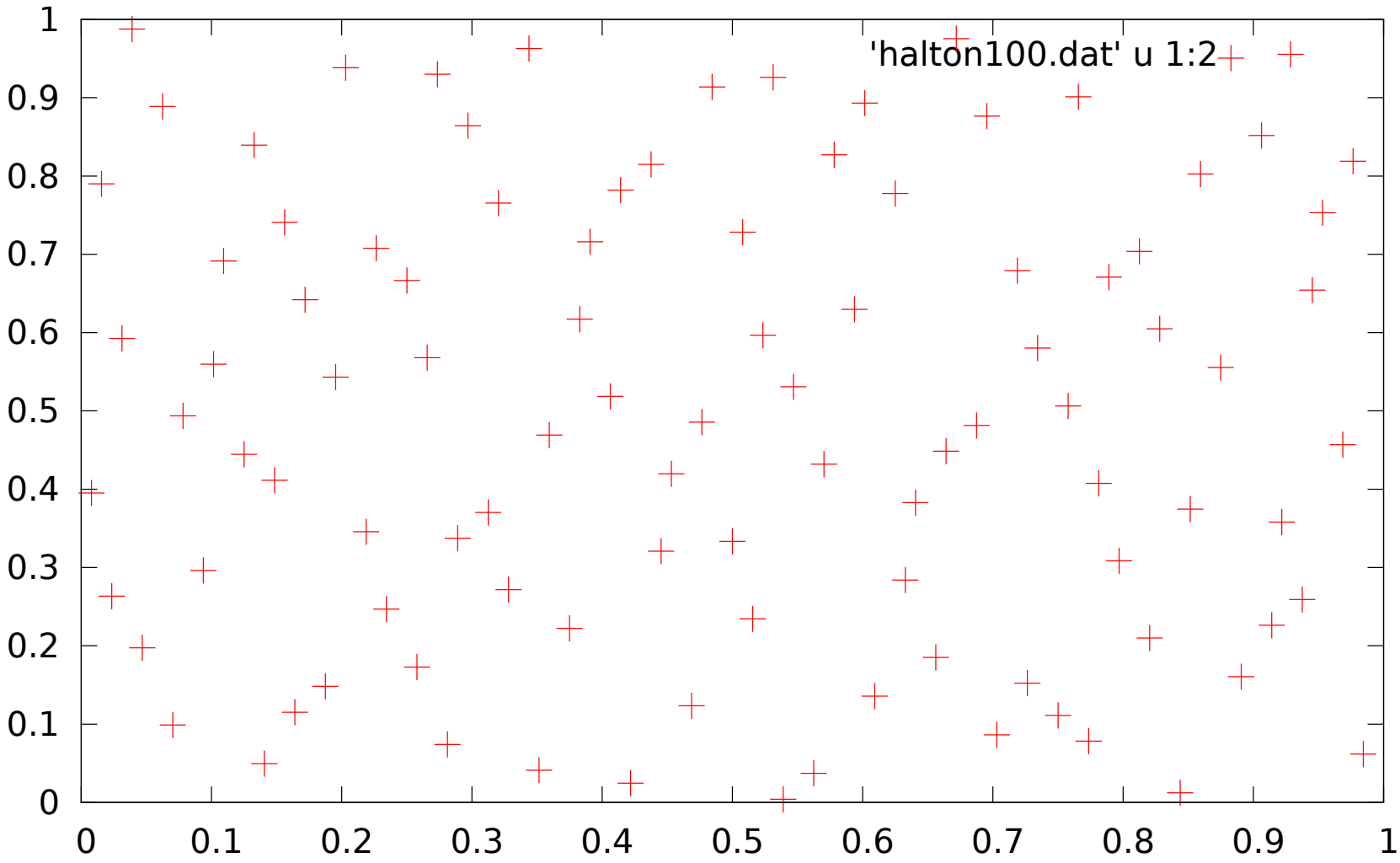
Discrépance :

$$D_n^*(\xi^{(p)}) \leqslant \frac{1}{n}\left(1 + \prod_{i=1}^{d}(p_i - 1)\frac{\log(p_i n)}{\log(p_i)}\right)$$

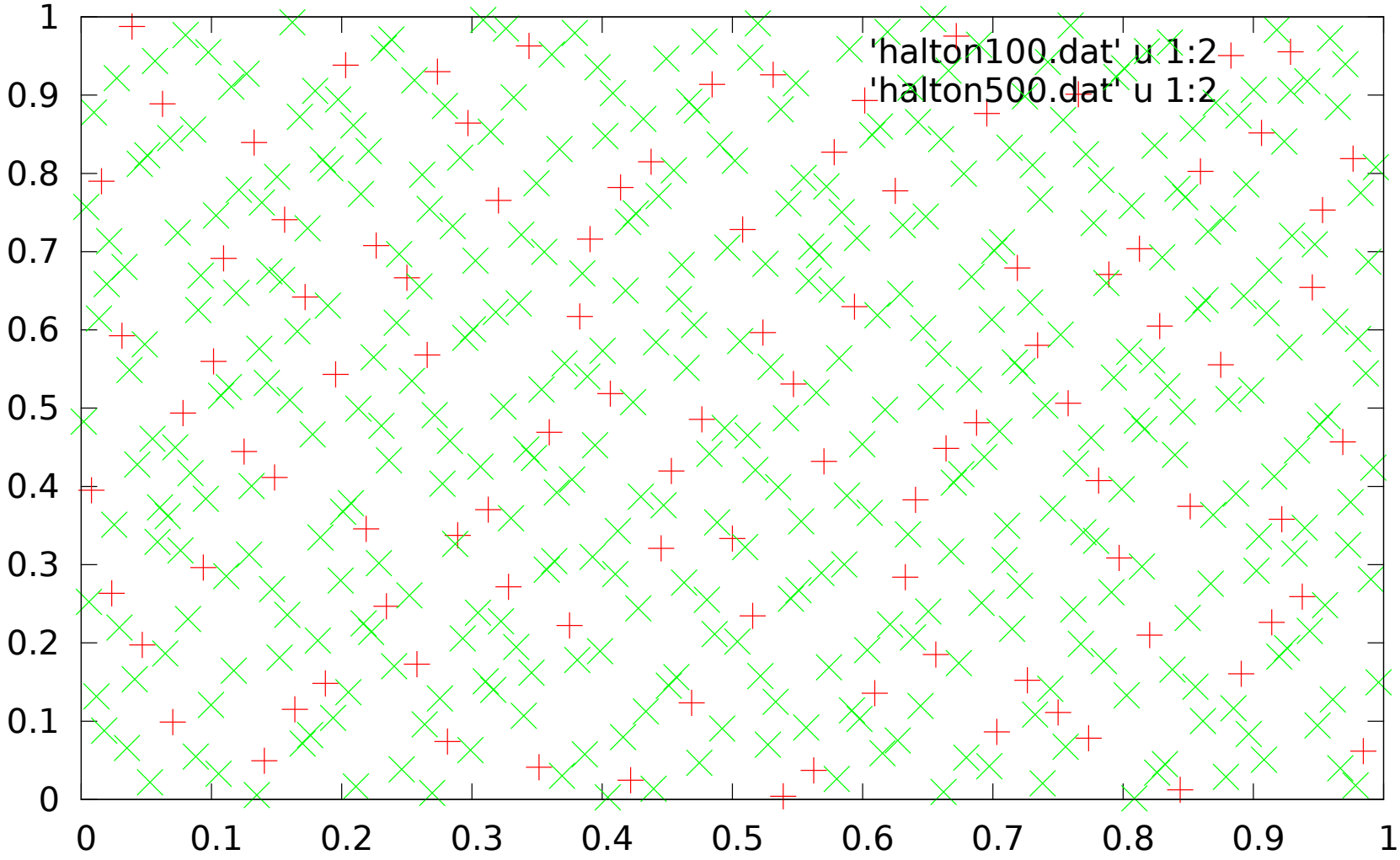
Implémentation

```
struct halton {
    typedef std::vector<double> result_type;
    typedef std::vector<p_adic> list_p_adic;
    halton(list_p_adic const & x) : nk(x), result(x.size()) {};
    halton(int dimension) : result(dimension) {
        for (int k = 0; k < dimension; k++)
            nk.push_back(p_adic((int) 1, primes[k]));
    };
    result_type operator()() {
        result_type::iterator ir = result.begin();
        list_p_adic::iterator ink = nk.begin();
        while (ink != nk.end()) {
            *ir++ = (double) (*ink++)++;
        }
        return result;
    }
private:
    list_p_adic nk;
    result_type result;
};
```

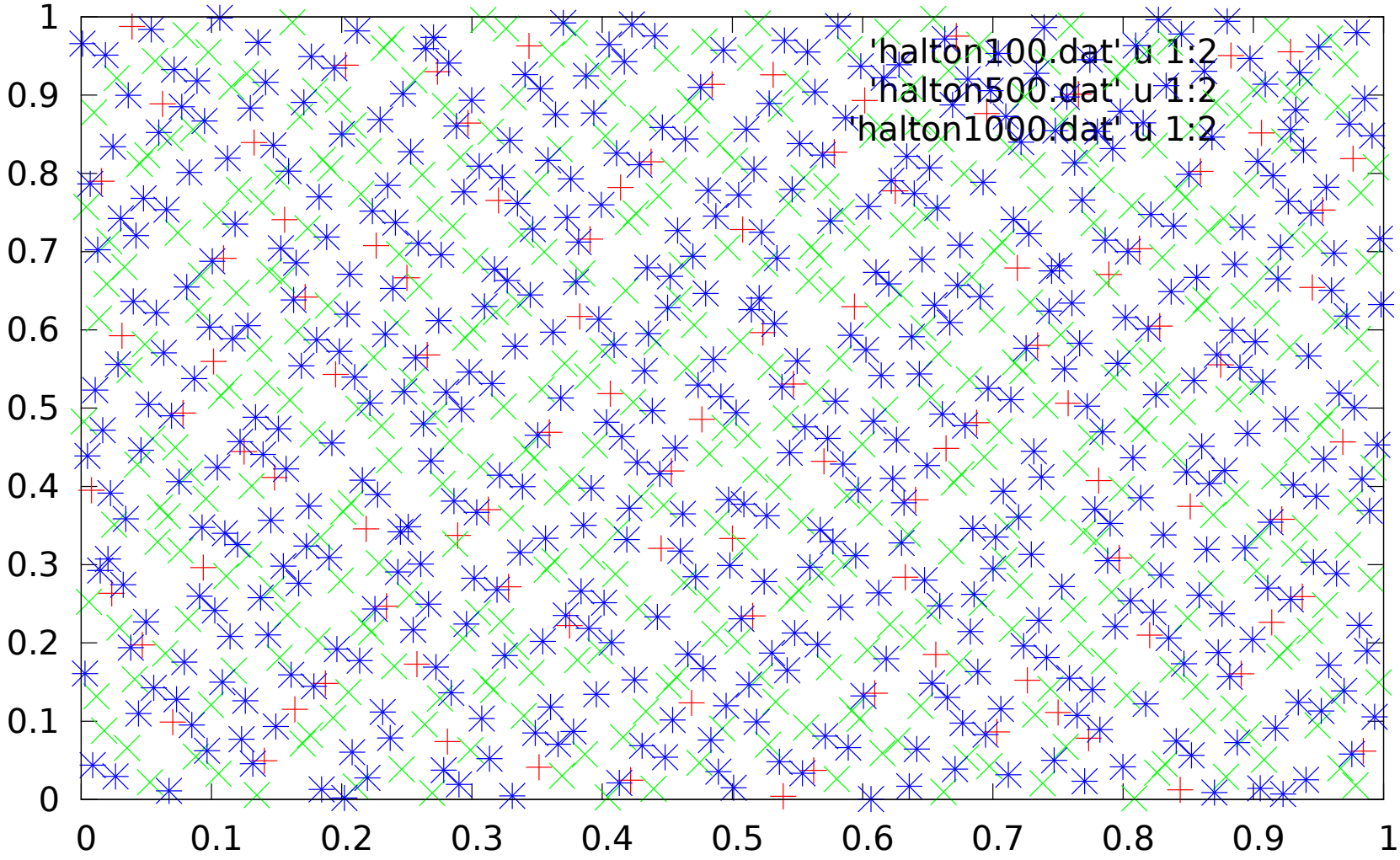
Halton, dimensions 1-2 (bases 2-3)



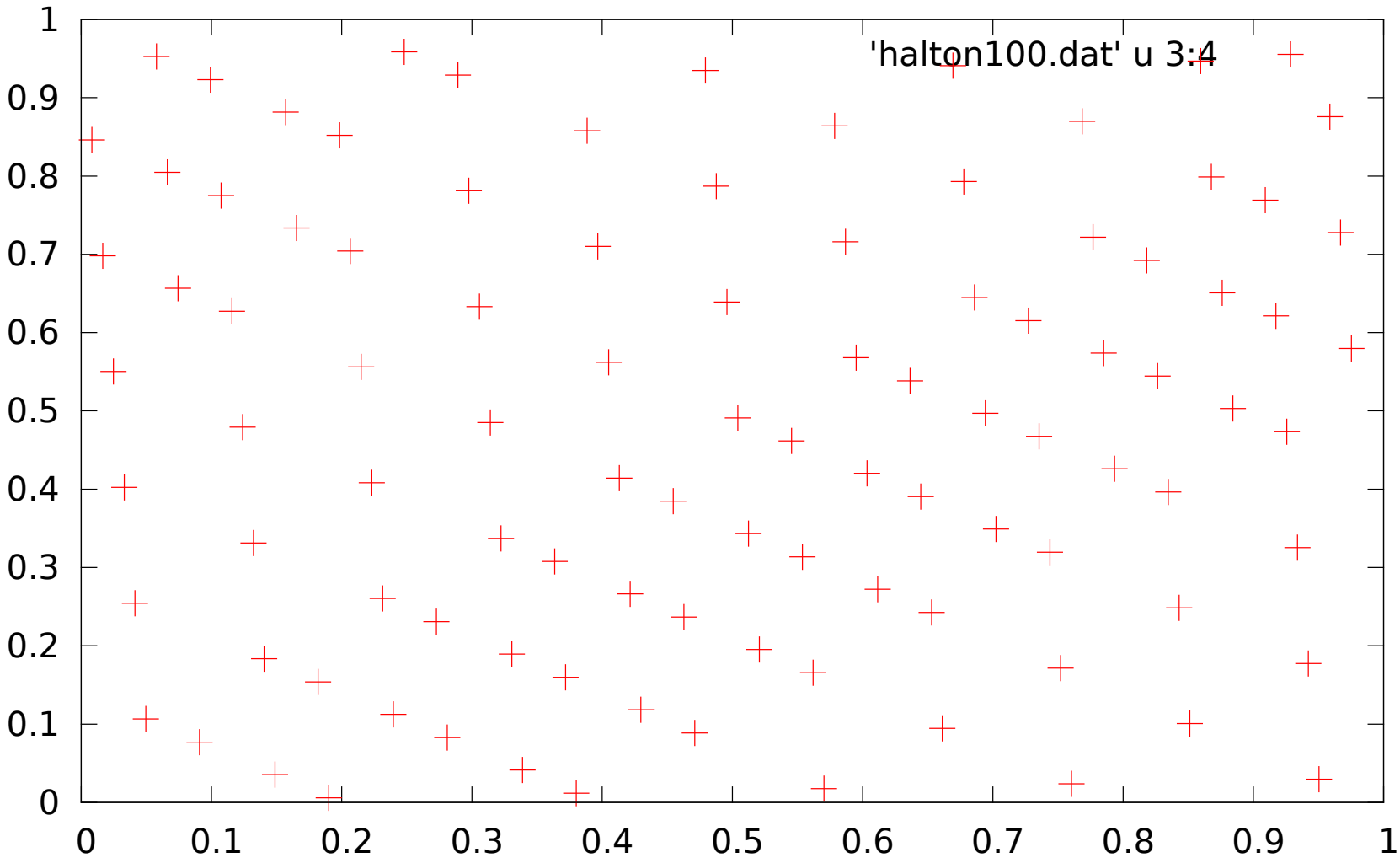
Halton, dimensions 1-2 (bases 2-3)



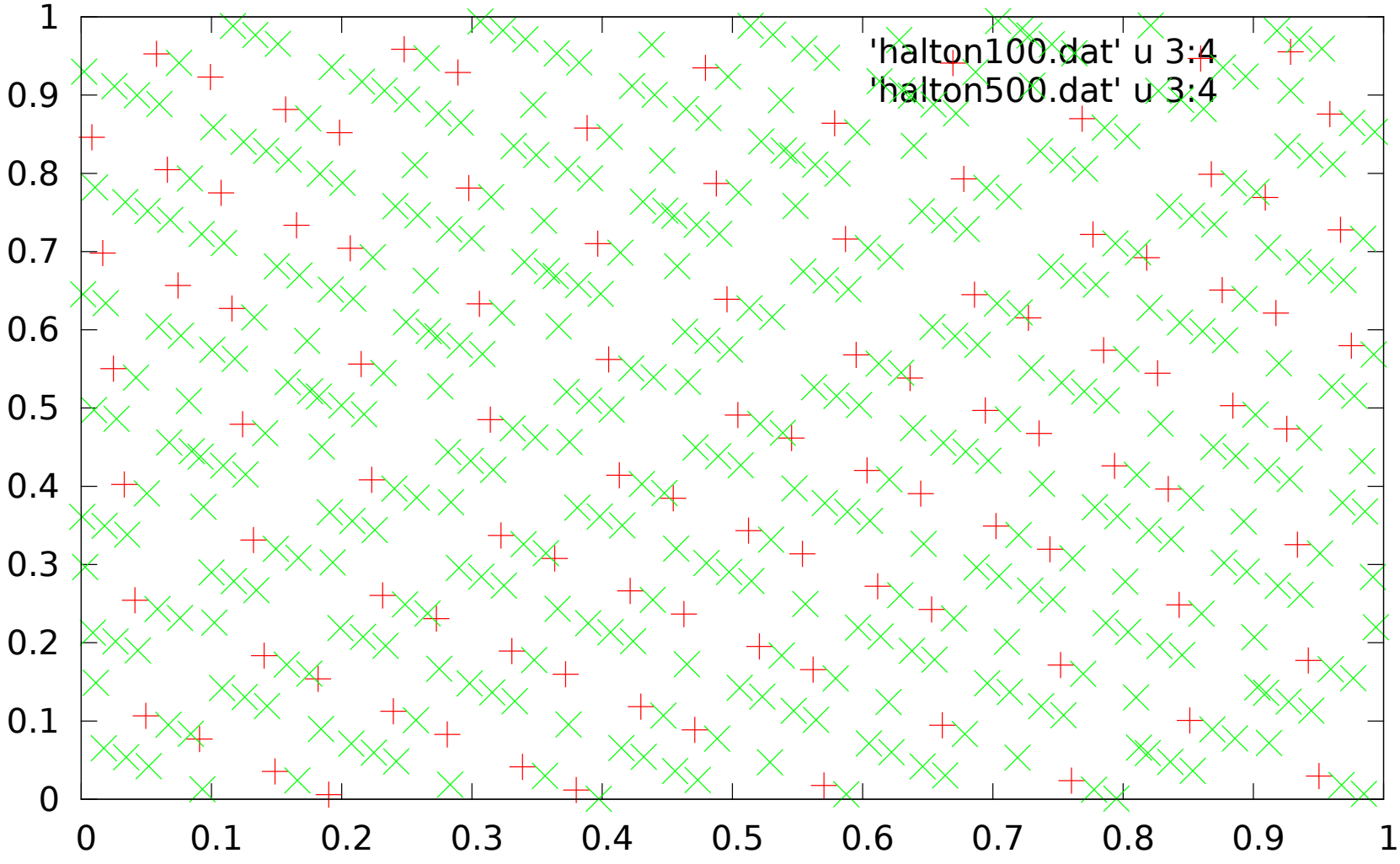
Halton, dimensions 1-2 (bases 2-3)



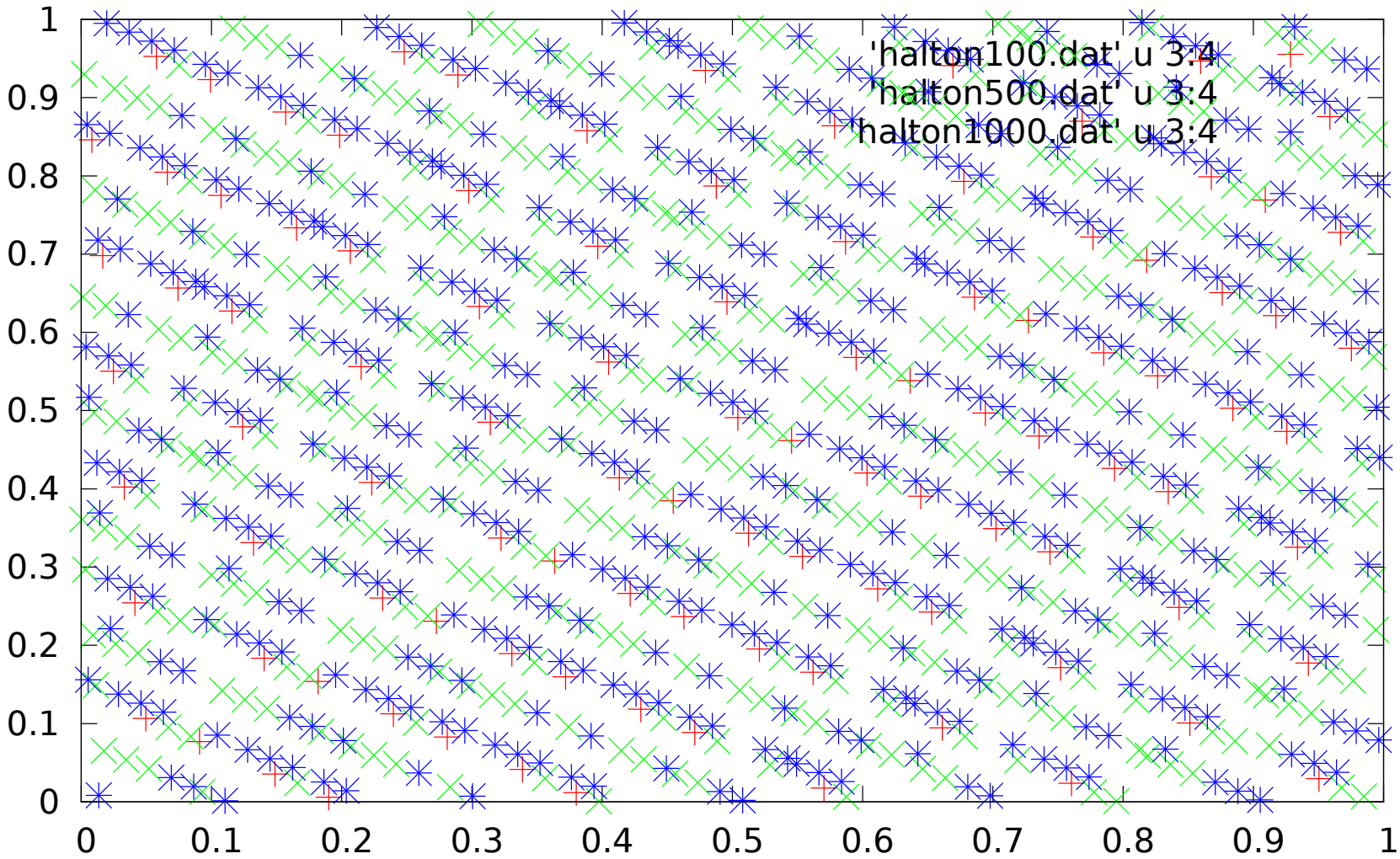
Halton, dimensions 5-6 (bases 11-13)



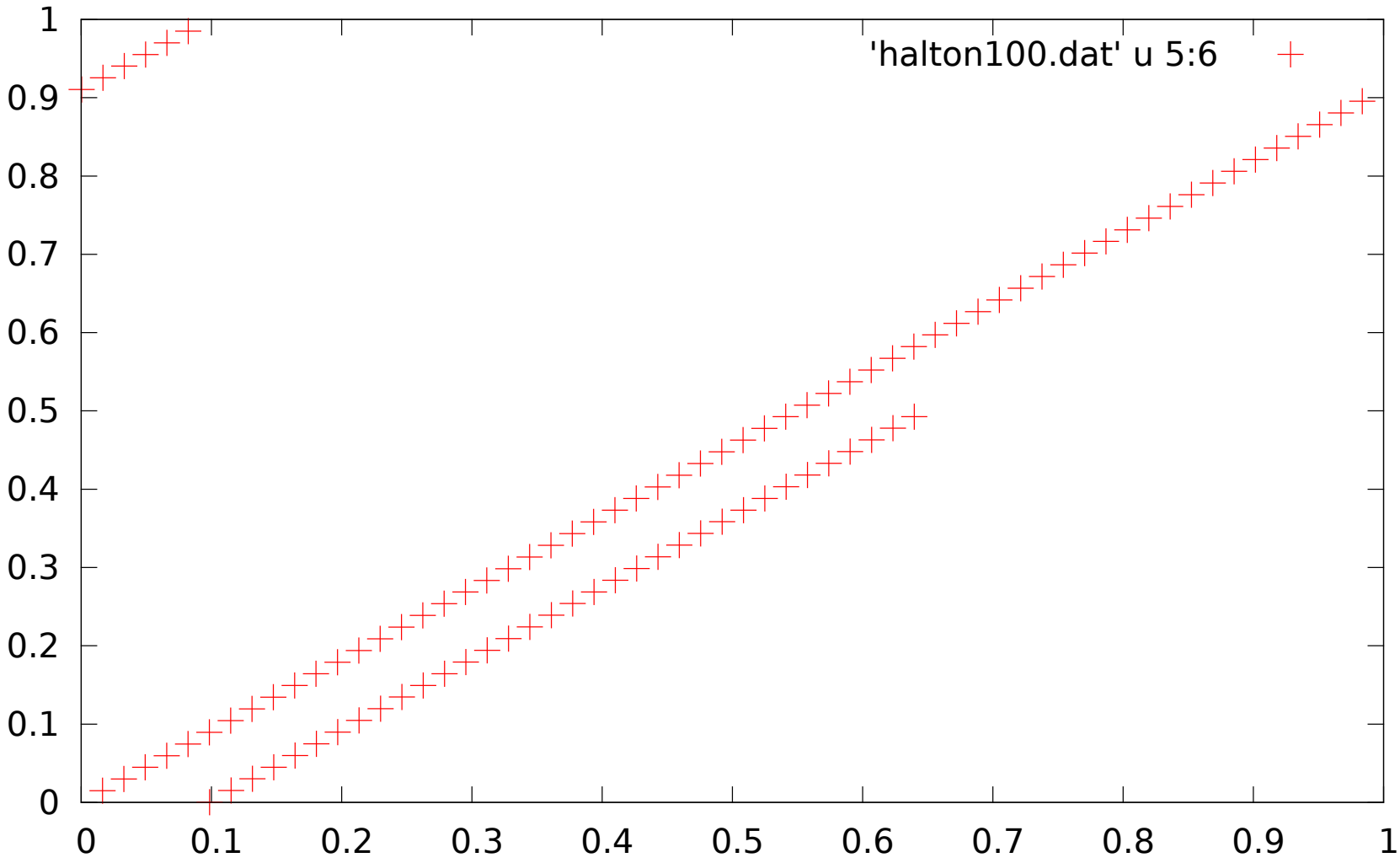
Halton, dimensions 5-6 (bases 11-13)



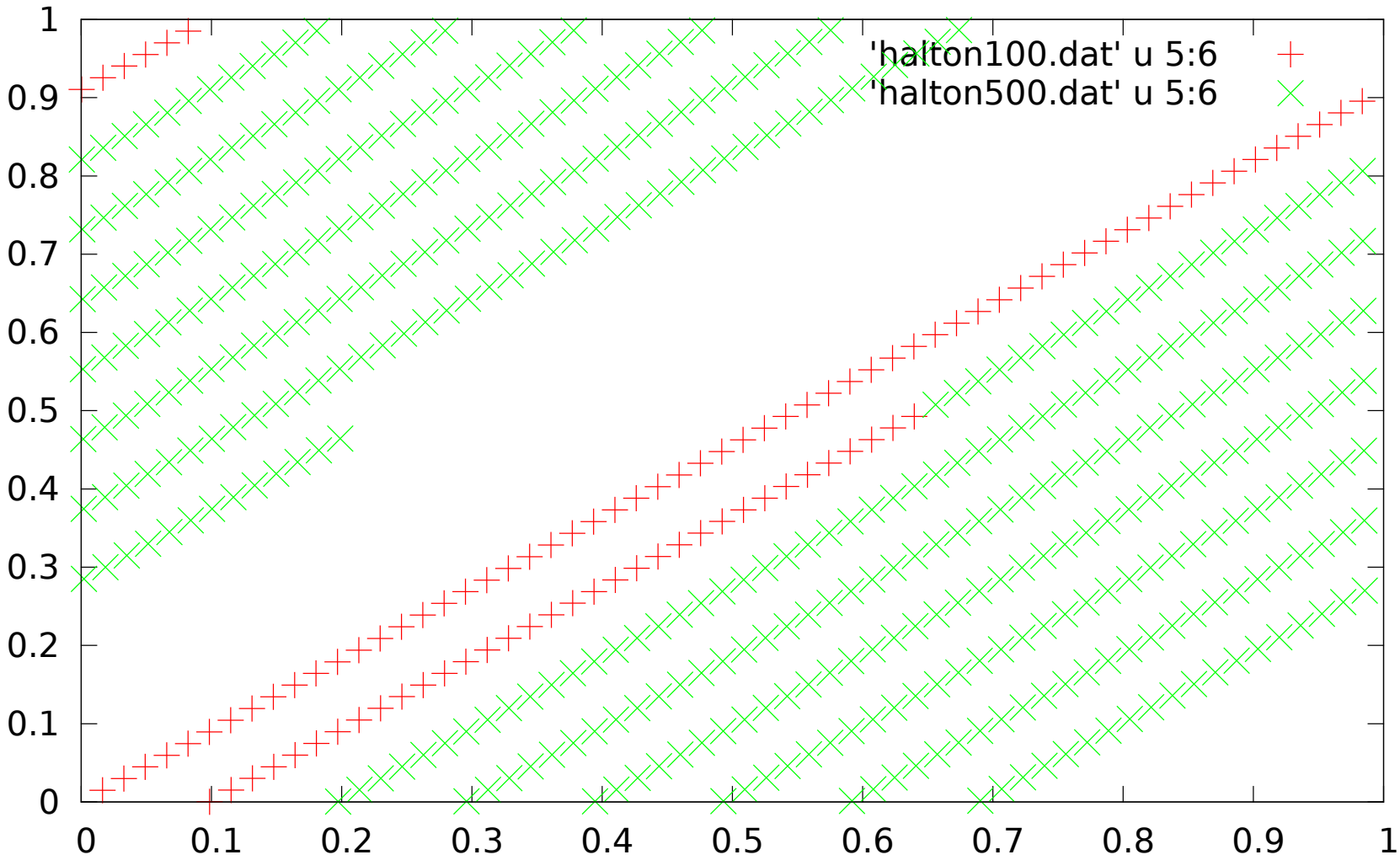
Halton, dimensions 5-6 (bases 11-13)



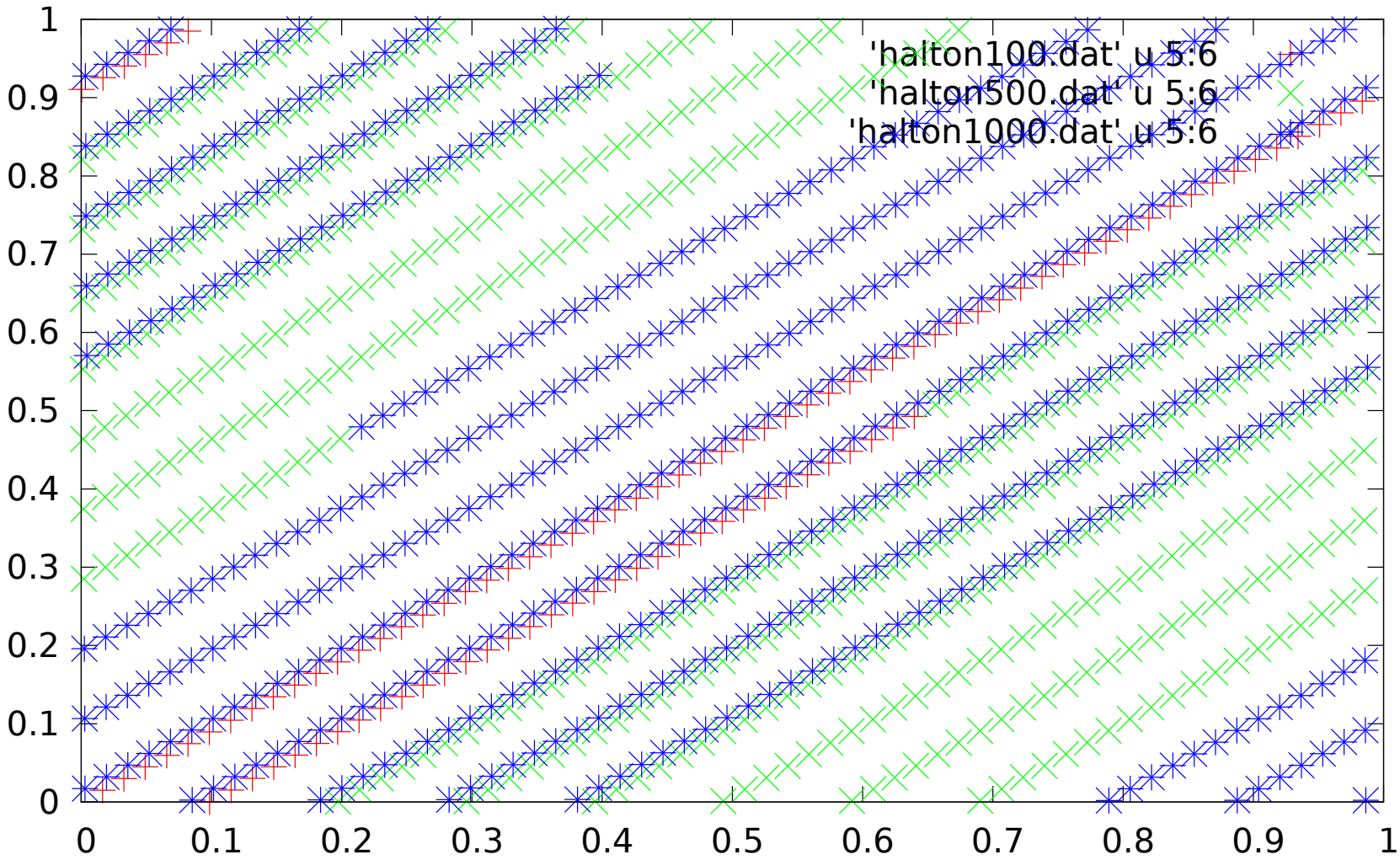
Halton, dimensions 18-19 (base 61-67)



Halton, dimensions 18-19 (base 61-67)



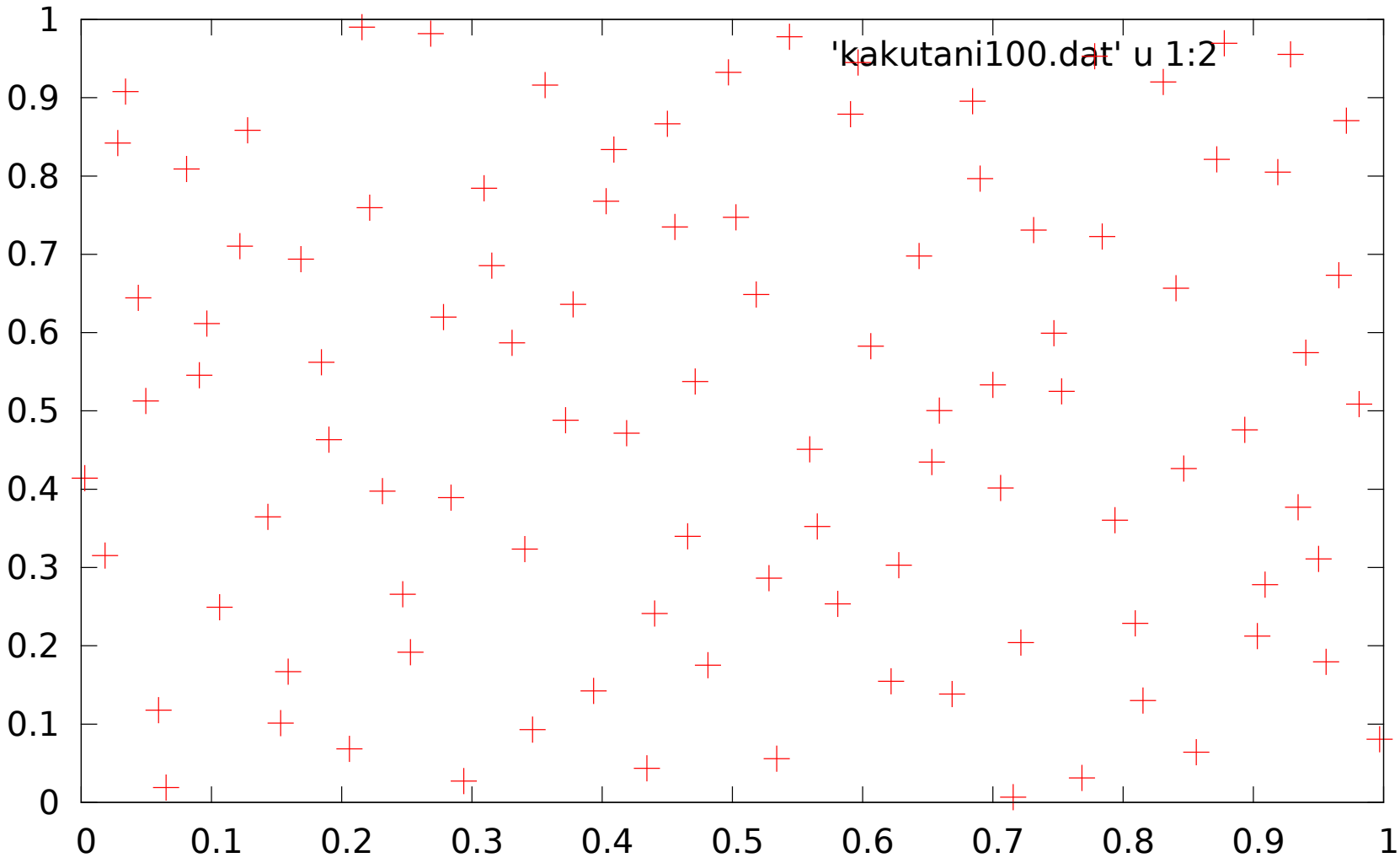
Halton, dimensions 18-19 (base 61-67)



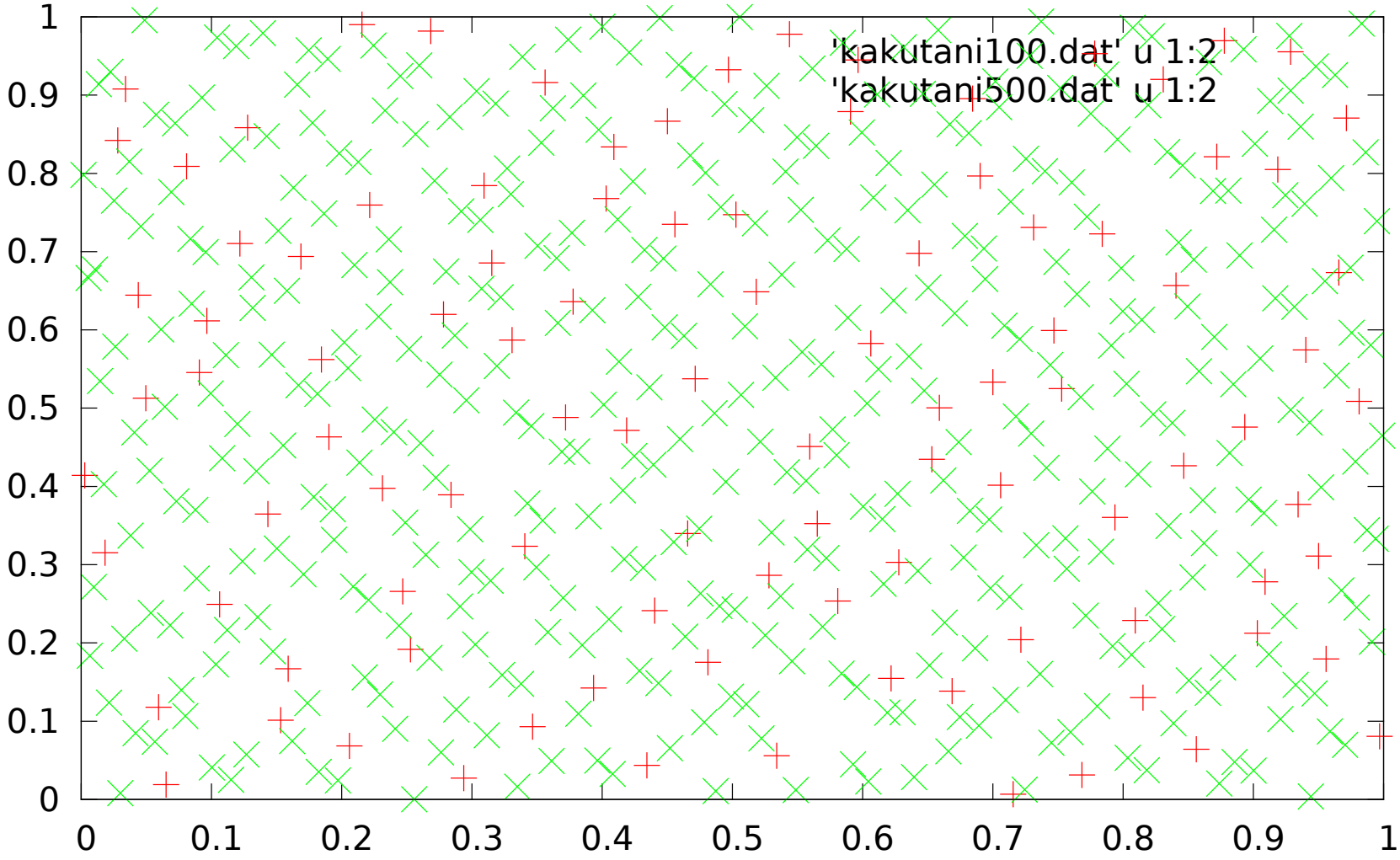
Kakutani - Généralisation d'Halton

Définition : cf. cours Gilles Pagès.

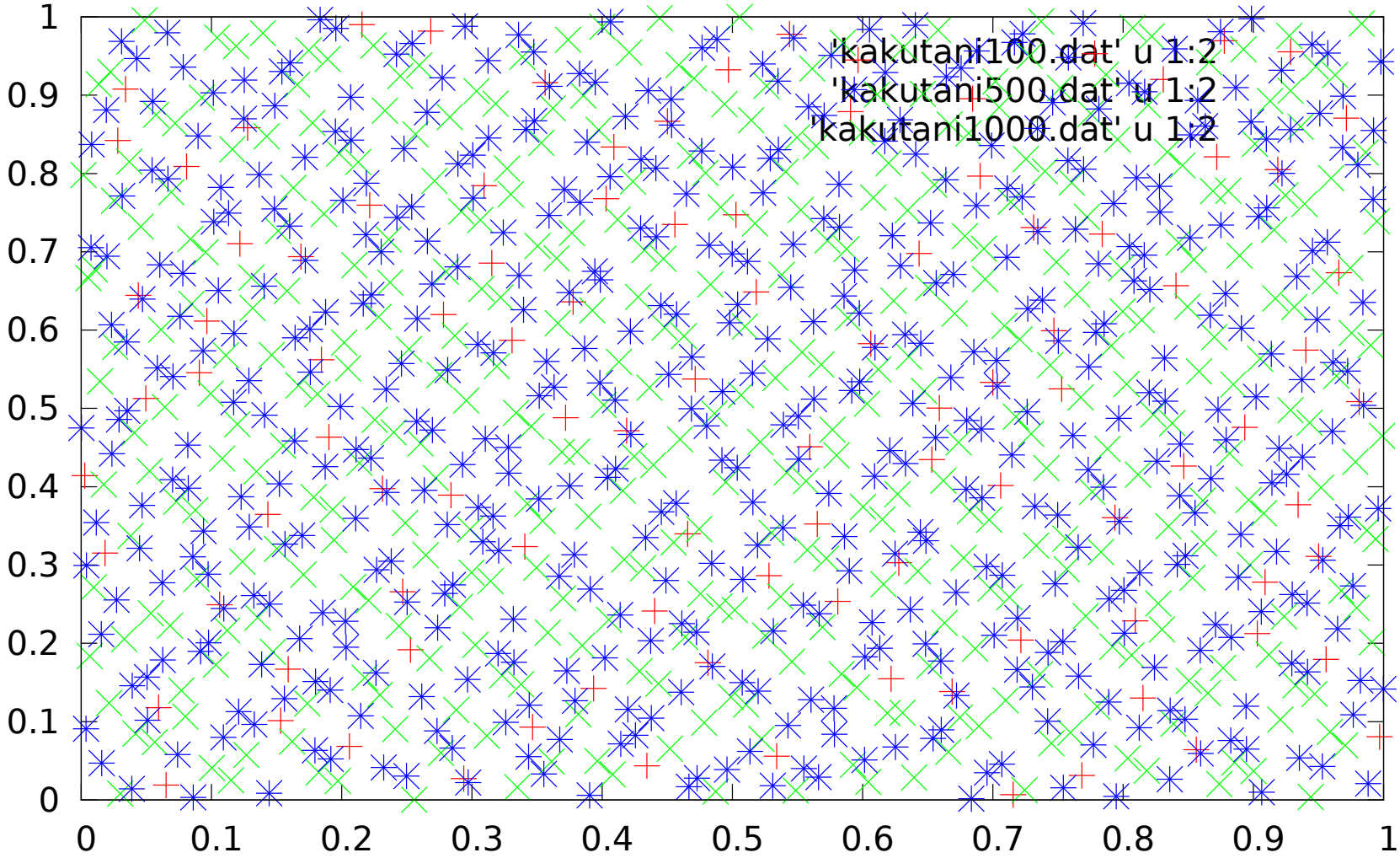
Kakutani, dimensions 1-2 (bases 2-3)



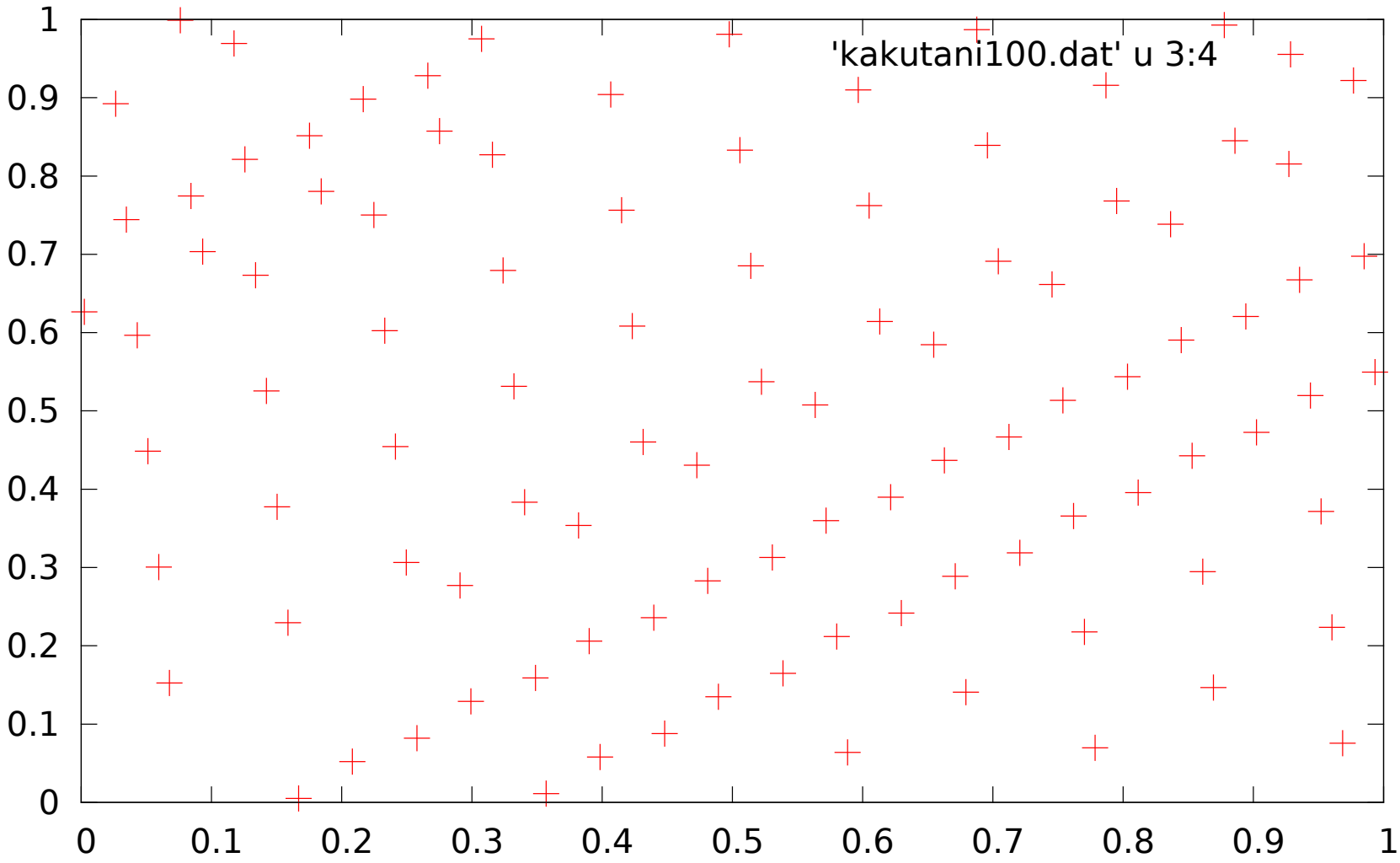
Kakutani, dimensions 1-2 (bases 2-3)



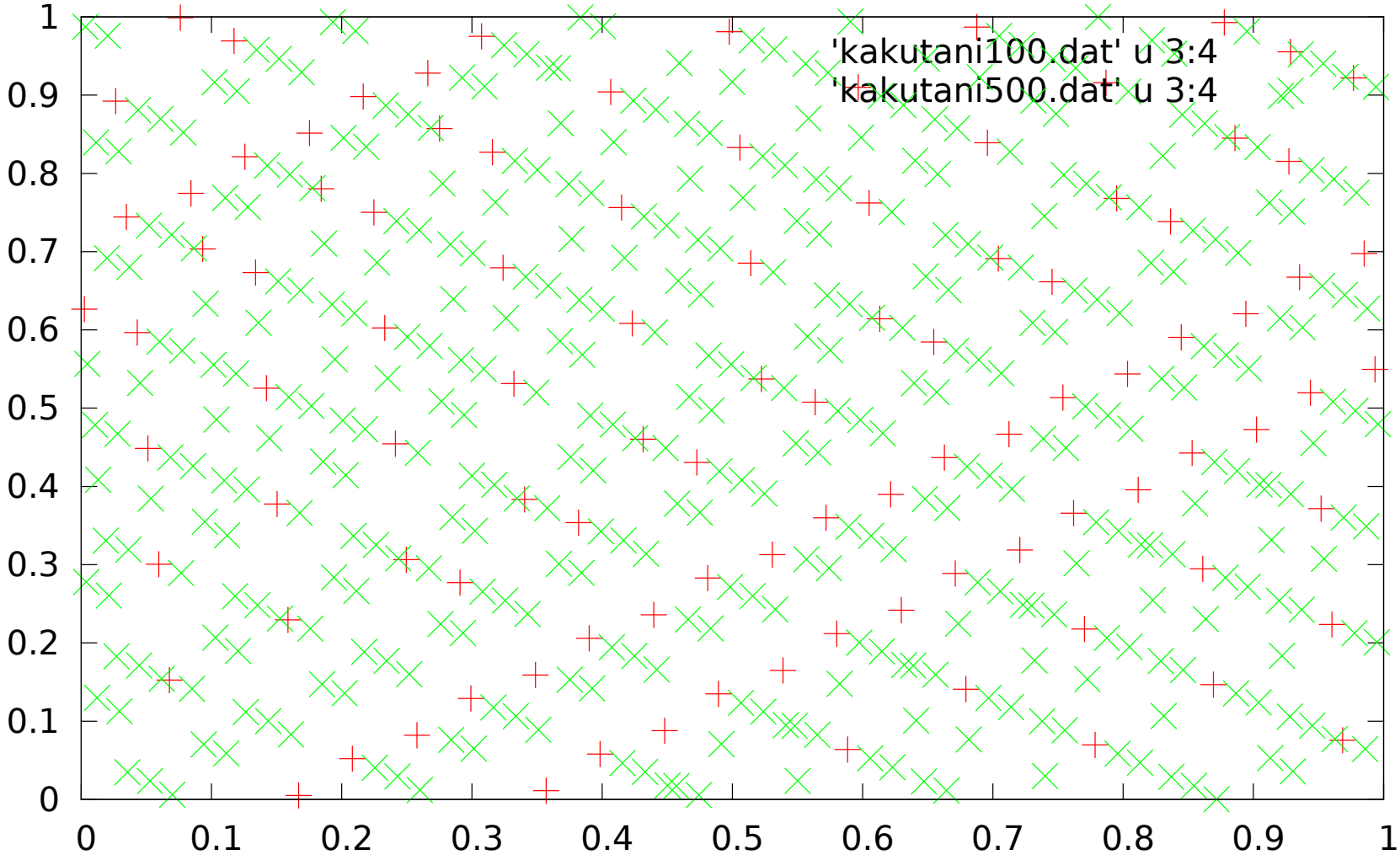
Kakutani, dimensions 1-2 (bases 2-3)



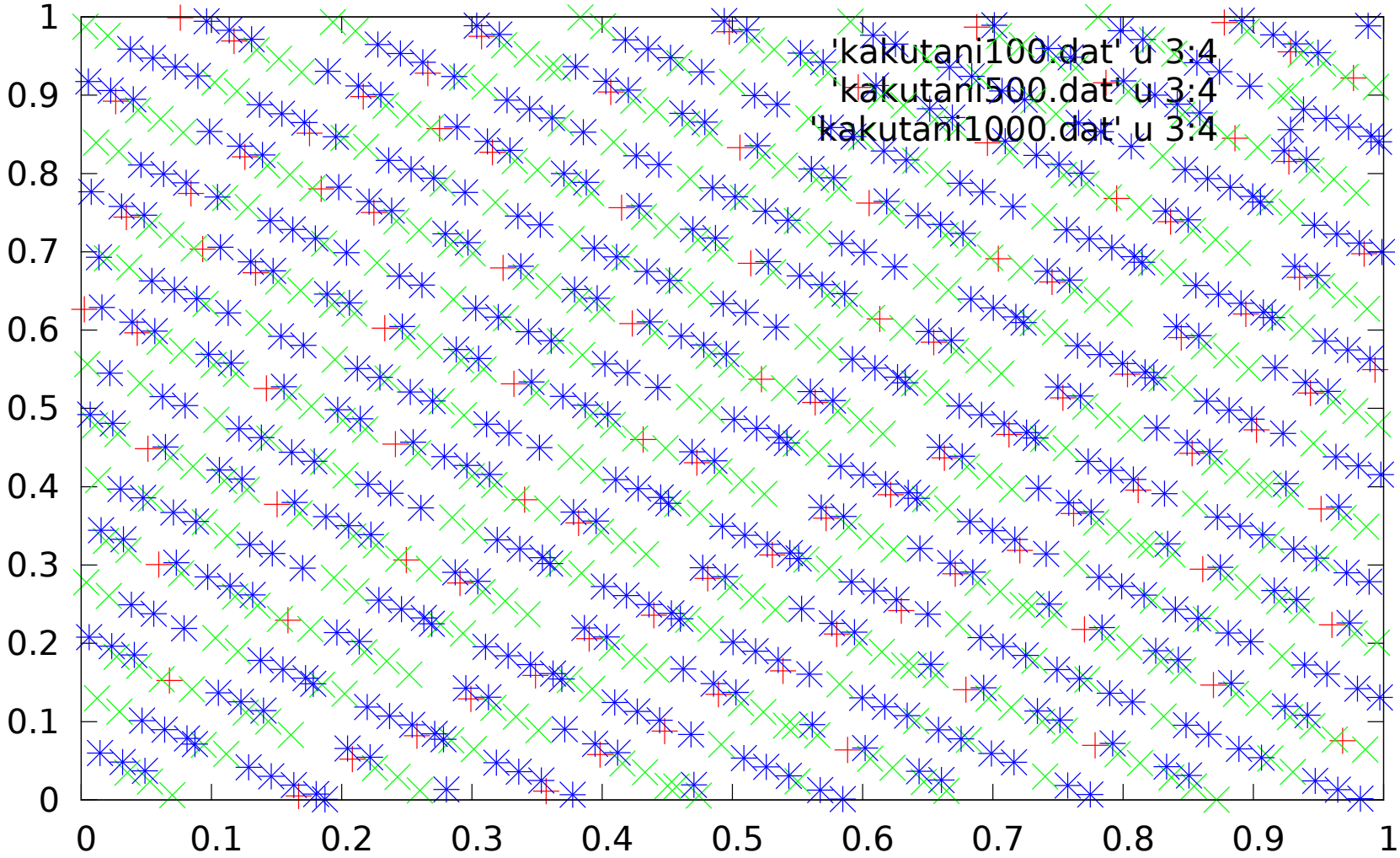
Kakutani, dimensions 5-6 (bases 11-13)



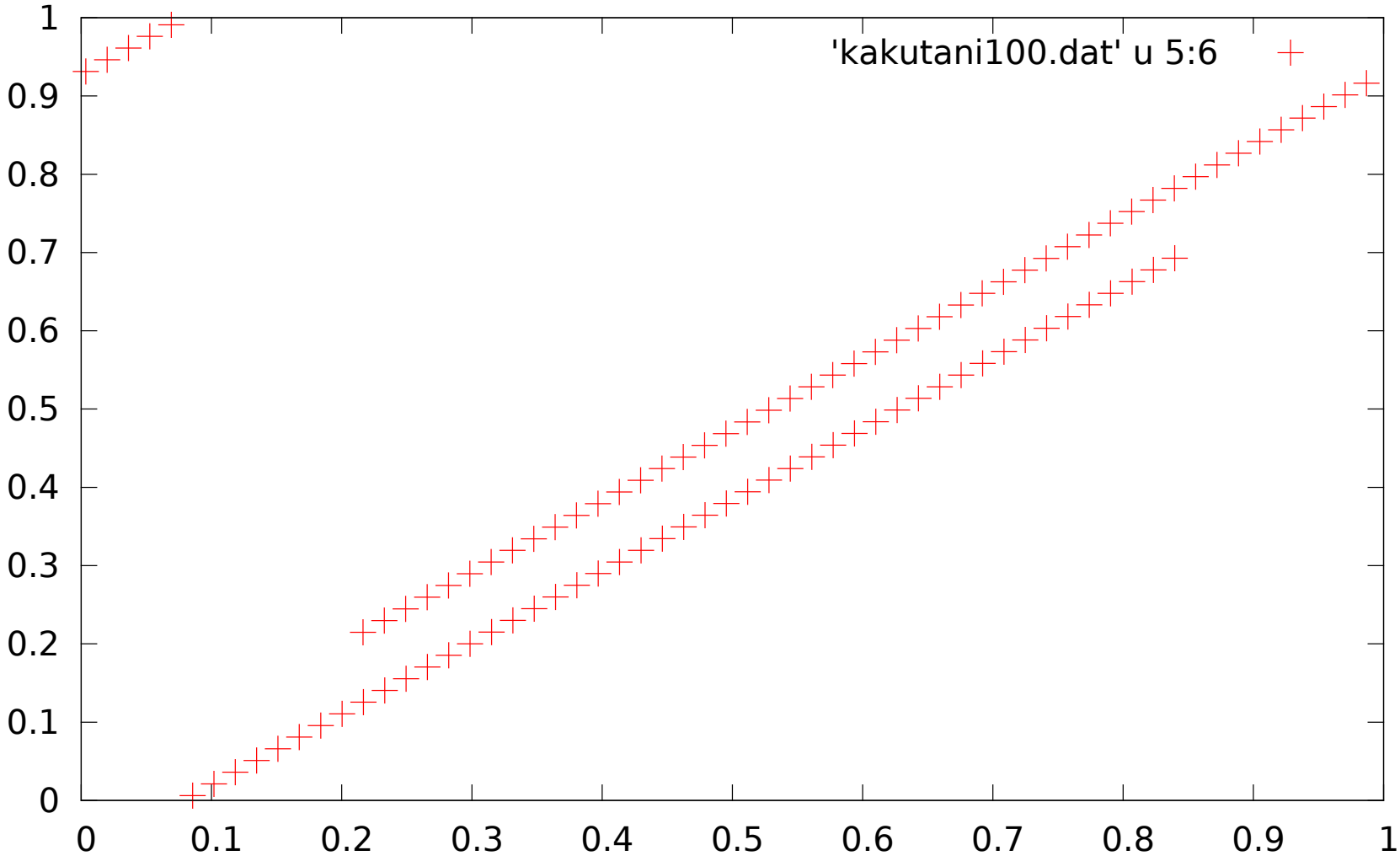
Kakutani, dimensions 5-6 (bases 11-13)



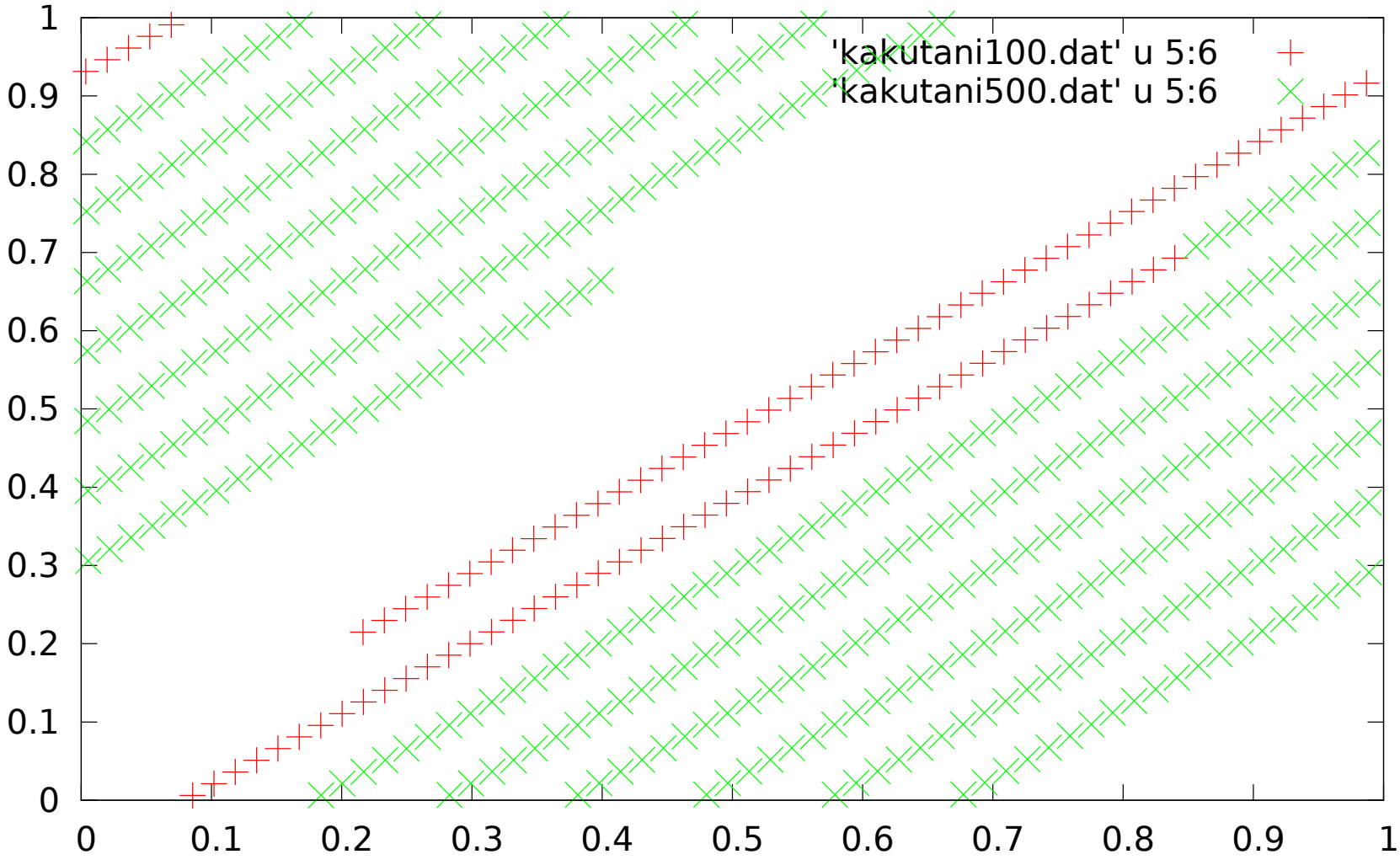
Kakutani, dimensions 5-6 (bases 11-13)



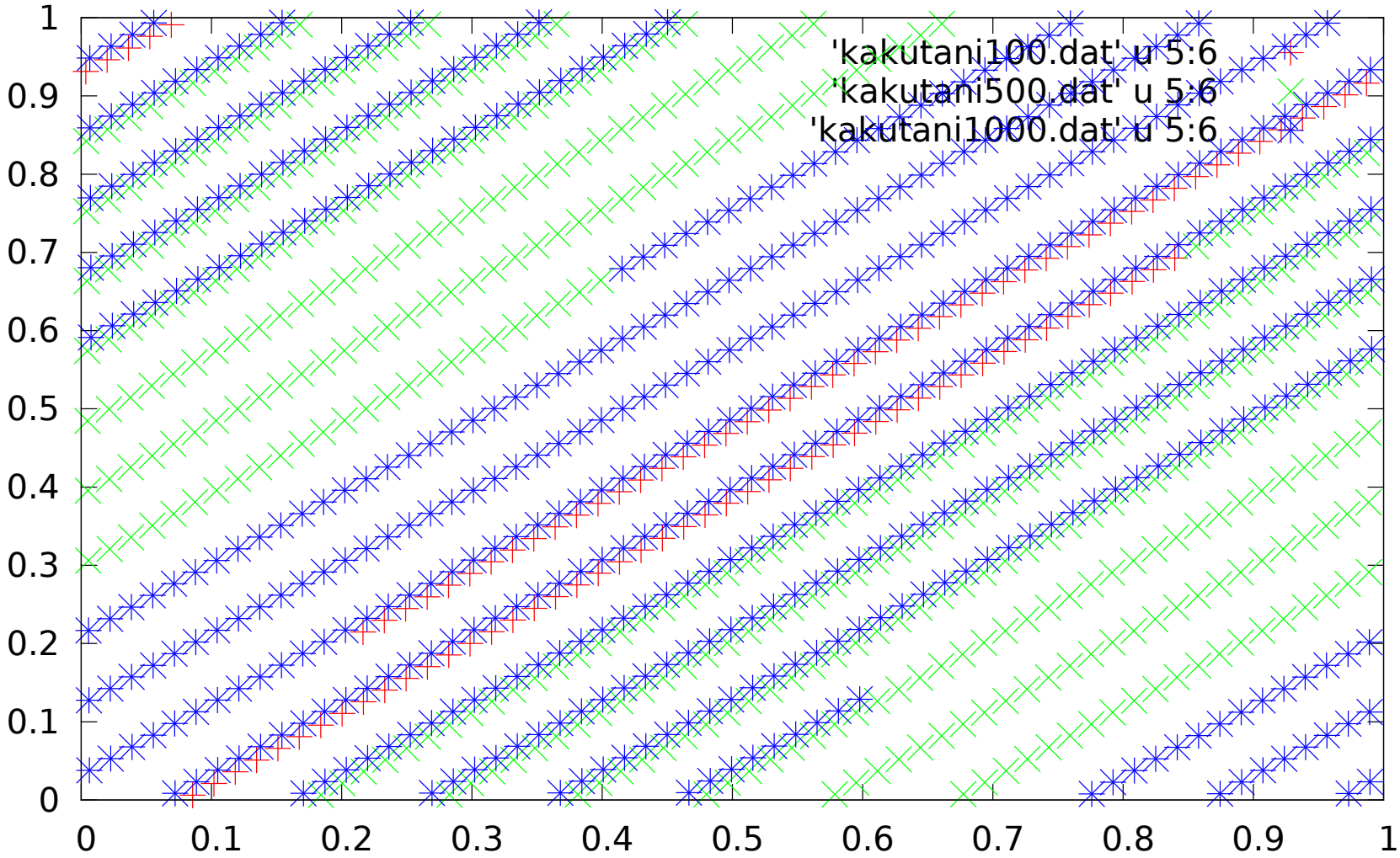
Kakutani, dimensions 18-19 (base 61-67)



Kakutani, dimensions 18-19 (base 61-67)



Kakutani, dimensions 18-19 (base 61-67)



Suite de Faure

Soit p le plus petit nombre premier plus grand que d.
La suite de Faure est définie par

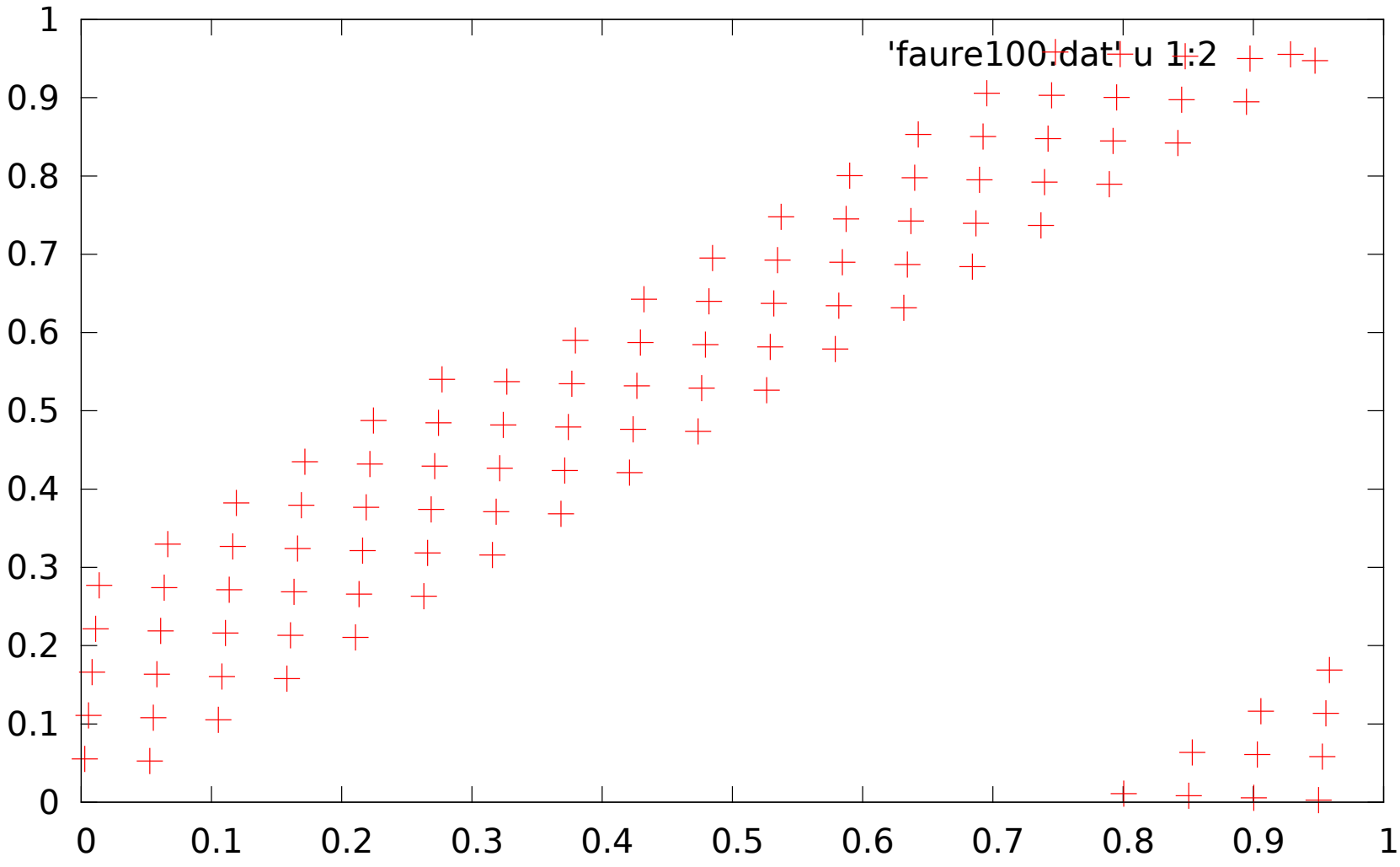
$$\xi_n = \left(\xi_n^{(p)}, C_p(\xi_n^{(p)}), \ldots, C_p^{d-1}(\xi_n^{(p)})\right),$$

où pour tout $u \in [0,1]$, $u = \sum_k a_k p^{-(k+1)}$

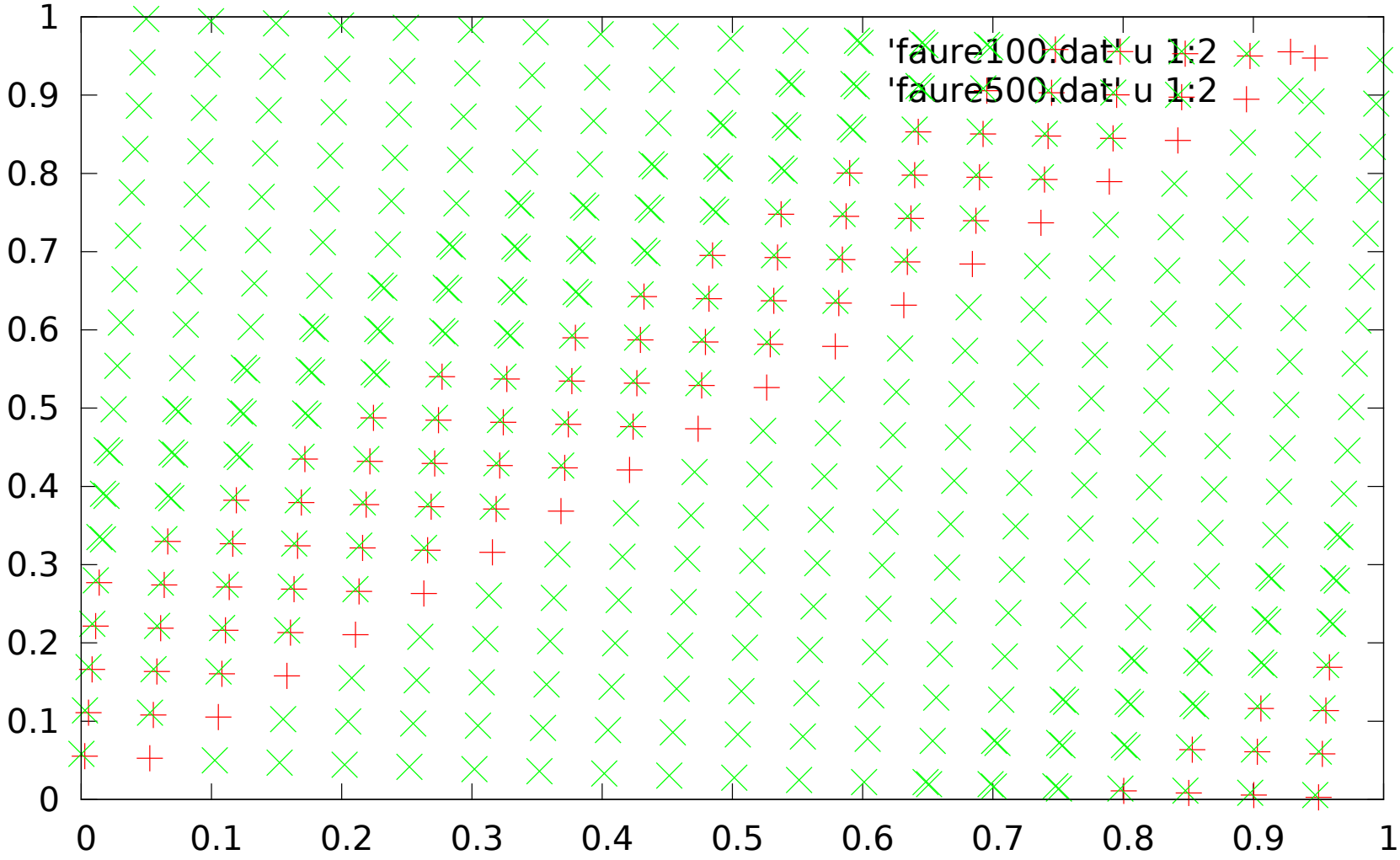
$$C_p(u) = \sum_k b_k p^{-(k+1)}, \quad \text{avec} \quad b_k = \sum_{j \geqslant k} C_k^j a_j \mod p.$$

Remarque : Dans les exemples suivants, la suite de Faure est construite sur $p = 19$.
Faire le graphique de la dimension 1-2 lorsque $p = 3$.

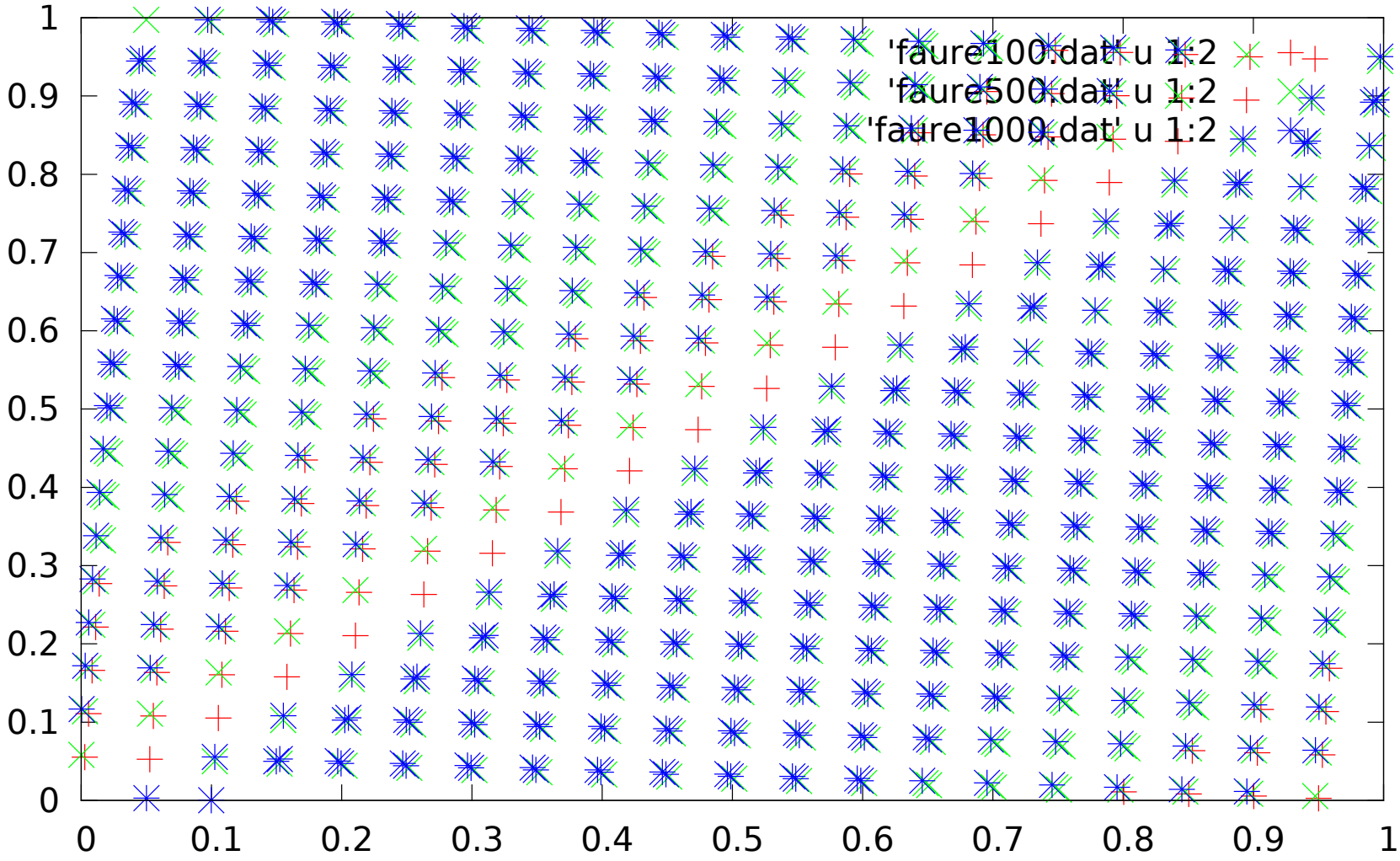
Faure, dimensions 1-2



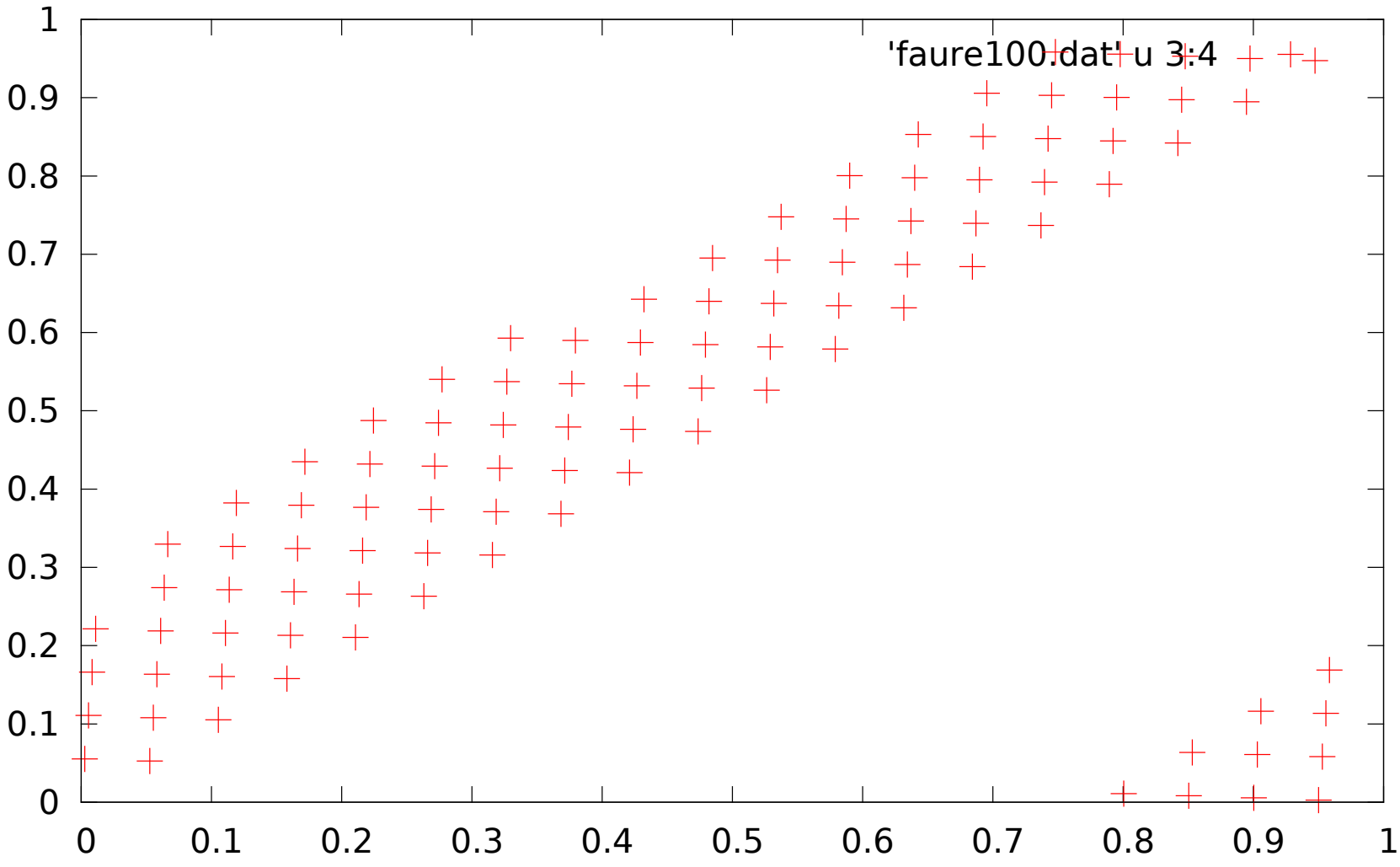
Faure, dimensions 1-2



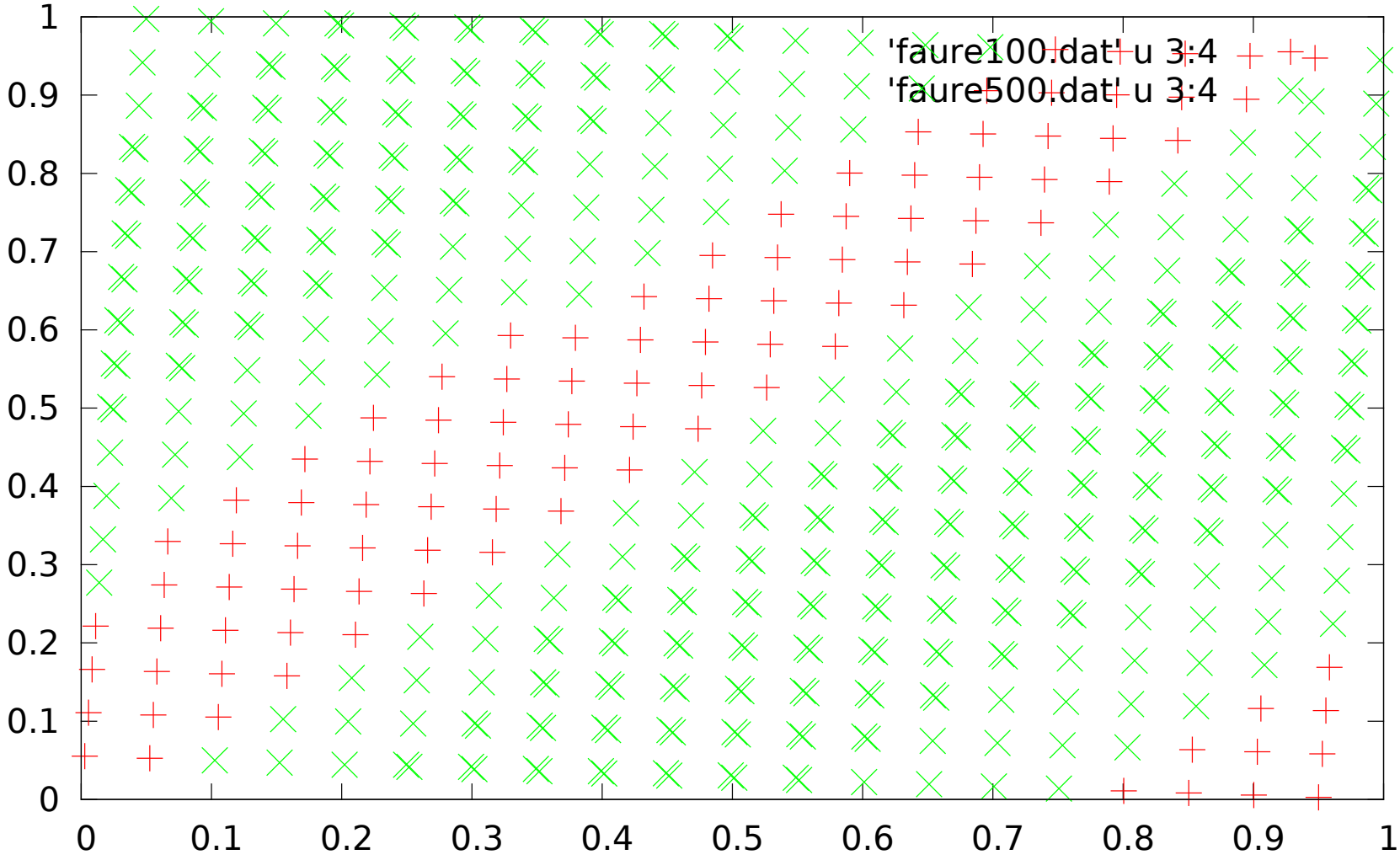
Faure, dimensions 1-2



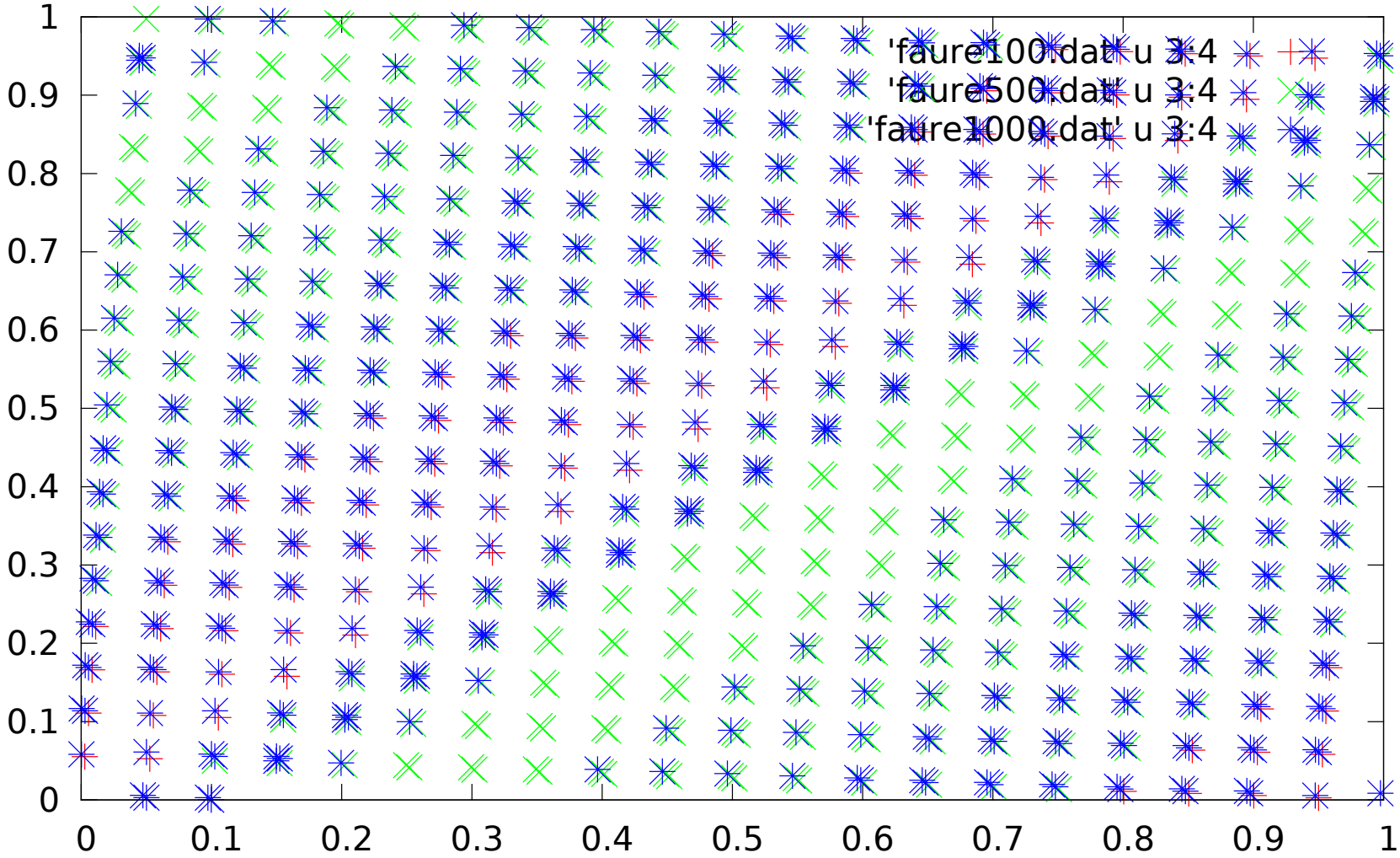
Faure, dimensions 5-6



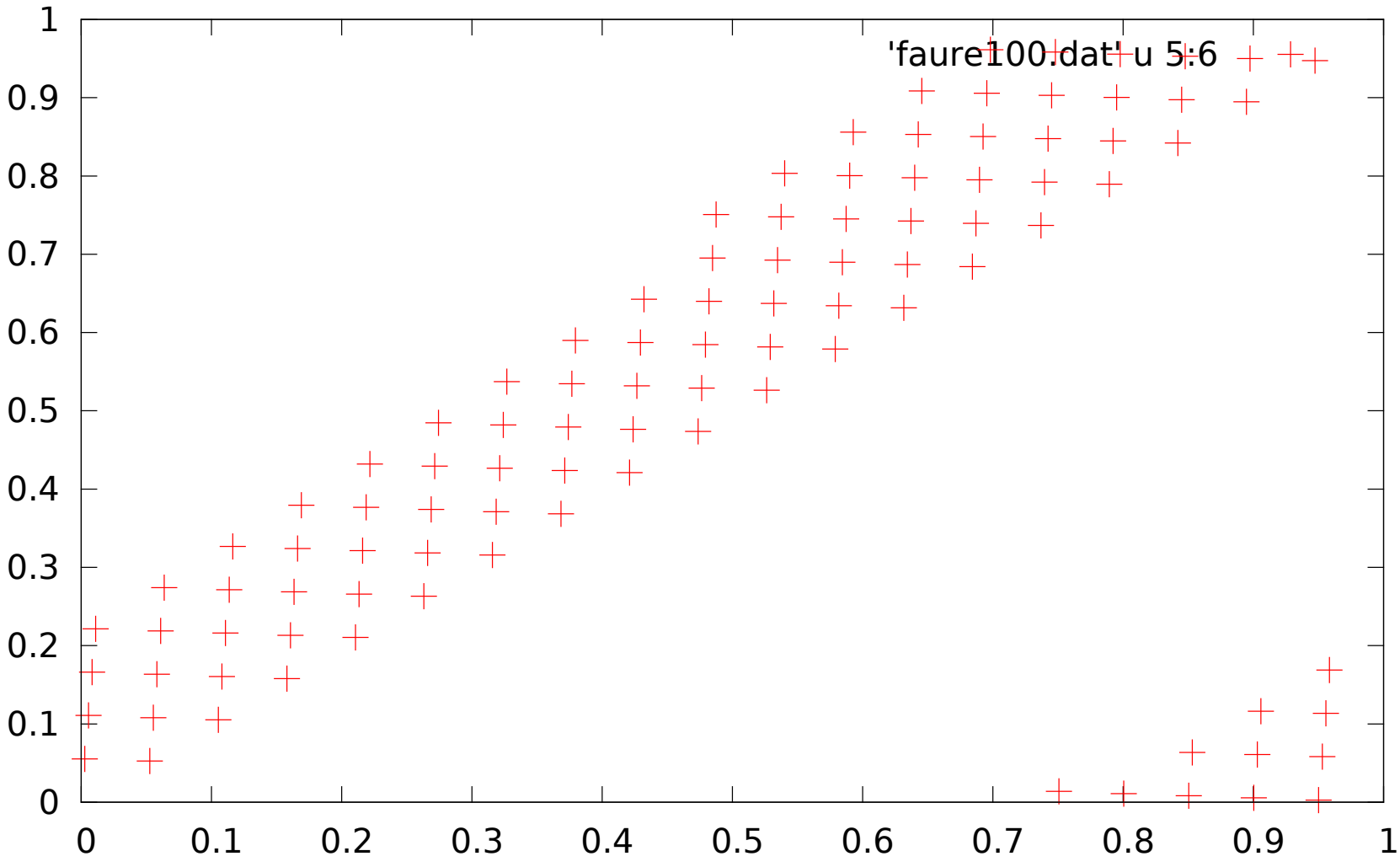
Faure, dimensions 5-6



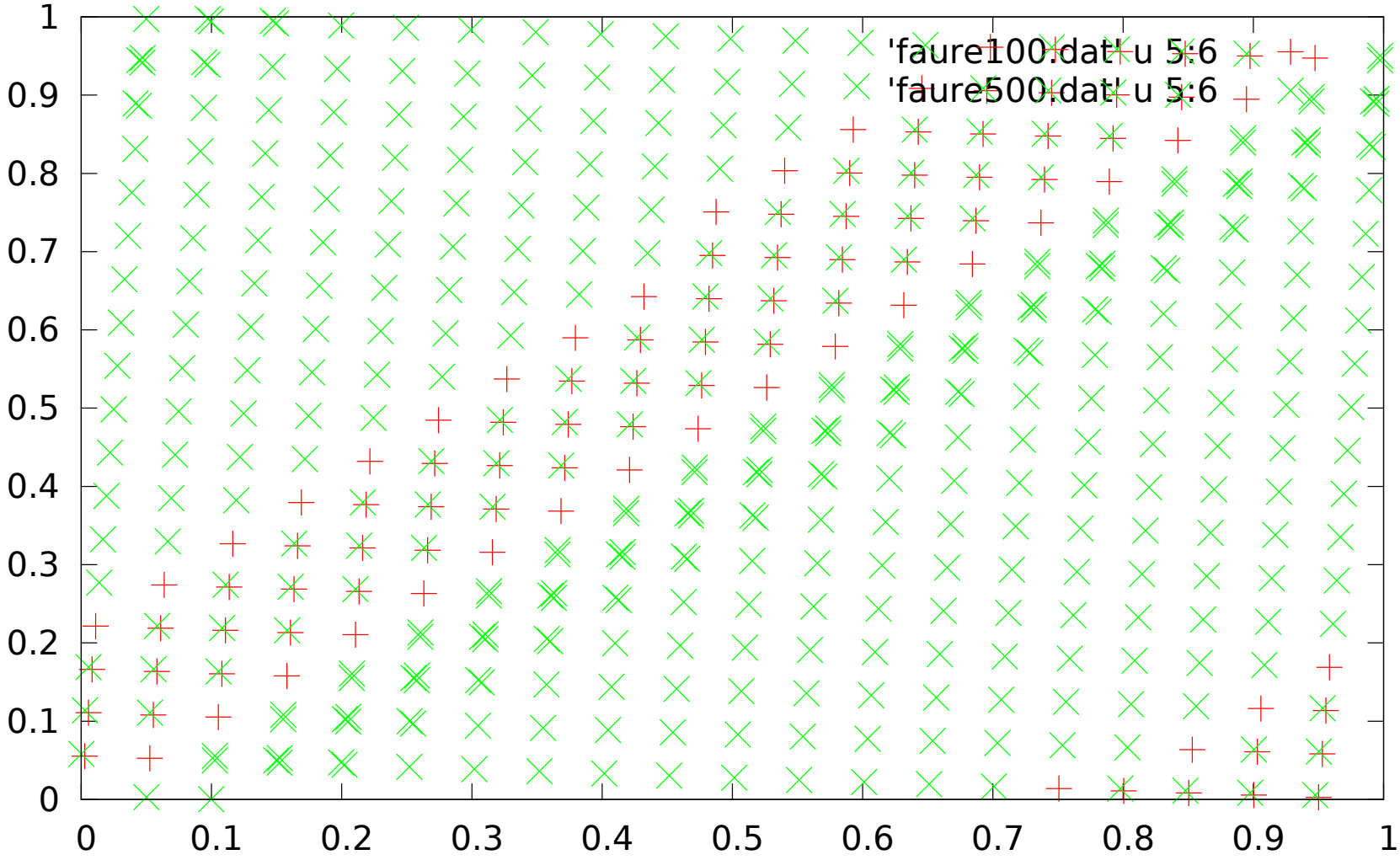
Faure, dimensions 5-6



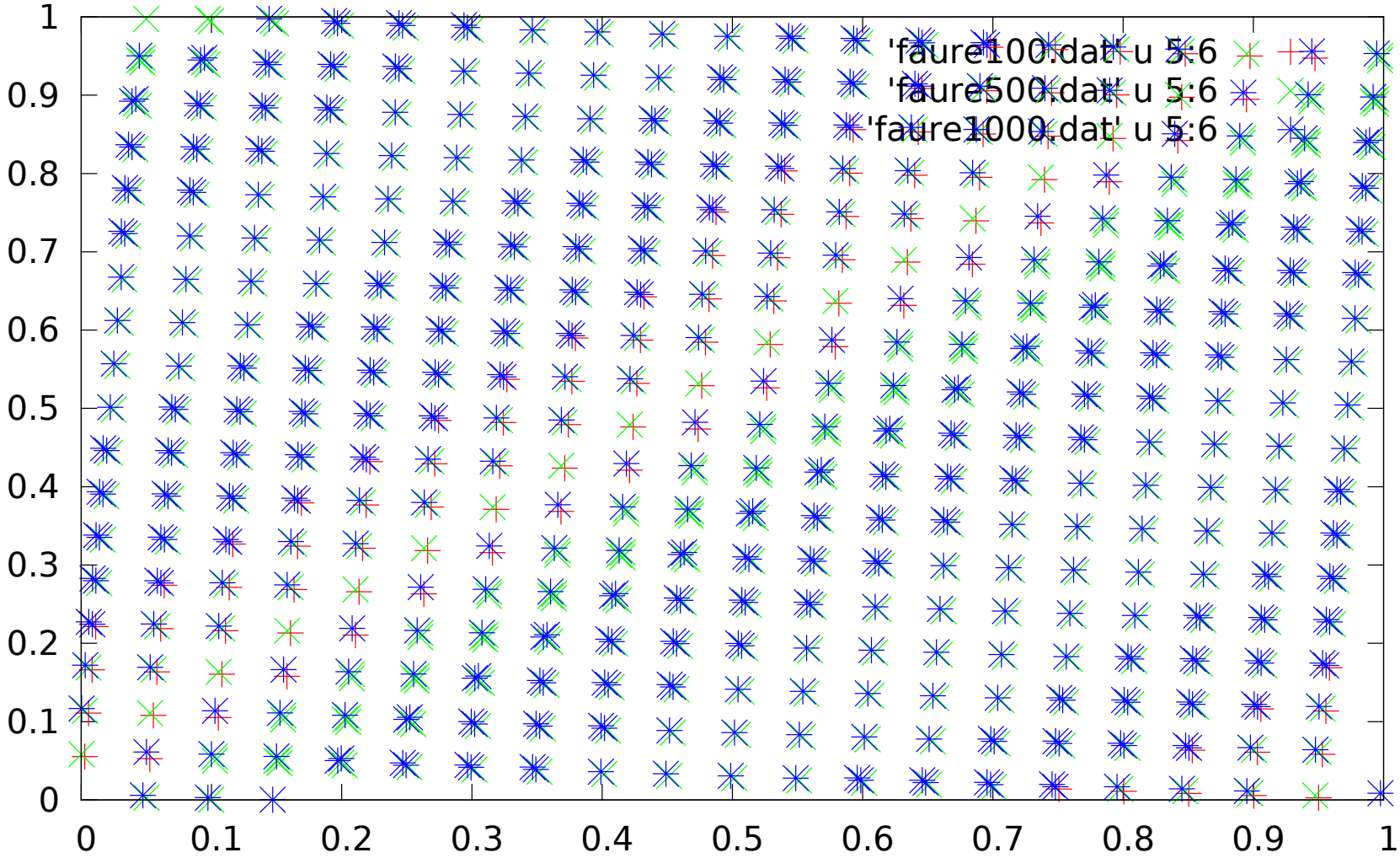
Faure, dimensions 18-19



Faure, dimensions 18-19



Faure, dimensions 18-19



Suite de Sobol, utilisation de la GSL -1-

Implémentation depuis le code de la GSL (Gnu Scientific Library) disponible sur `https://www.gnu.org/software/gsl/`

Descriptions des fonctions de la GSL en C

- `gsl_qrng * gsl_qrng_alloc (const gsl_qrng_type * T, unsigned d)`
  This function returns a pointer to a newly-created instance of a quasi-random sequence generator of type T and dimension d.
- `void gsl_qrng_free (gsl_qrng * q)`
  This function frees all the memory associated with the generator q.
- `void gsl_qrng_init (gsl_qrng * q)`
  This function reinitializes the generator q to its starting point. Note that quasi-random sequences do not use a seed and always produce the same set of values.
- `gsl_qrng_sobol` générateur de type `gsl_qrng_type *`
  This generator uses the Sobol sequence described in *Antonov, Saleev, USSR Comput. Maths. Math. Phys. 19, 252 (1980)*. It is valid up to 40 dimensions.

Suite de Sobol, utilisation de la GSL -2-

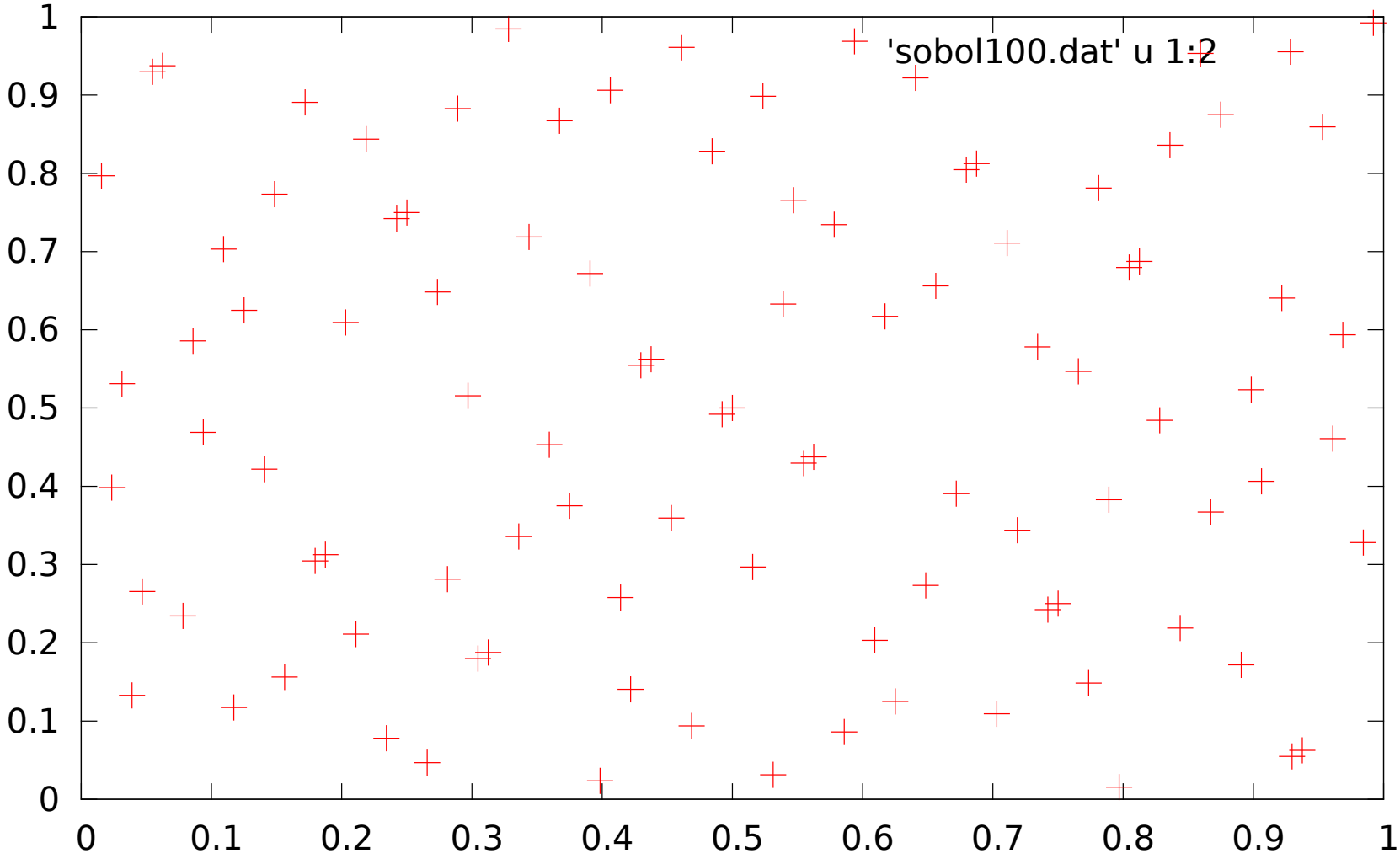
- **int** gsl_qrng_get (**const** gsl_qrng * q, **double** x[]) This function stores the next point from the sequence generator q in the array x. The space available for x must match the dimension of the generator. The point x will lie in the range 0 < x_i < 1 for each x_i.
- **int** gsl_qrng_memcpy (gsl_qrng * dest, **const** gsl_qrng * src) This function copies the quasi-random sequence generator src into the pre-existing generator dest, making dest into an exact copy of src. The two generators must be of the same type.
- gsl_qrng * gsl_qrng_clone (**const** gsl_qrng * q) This function returns a pointer to a newly created generator which is an exact copy of the generator q.

Suite de Sobol, exemple en GSL

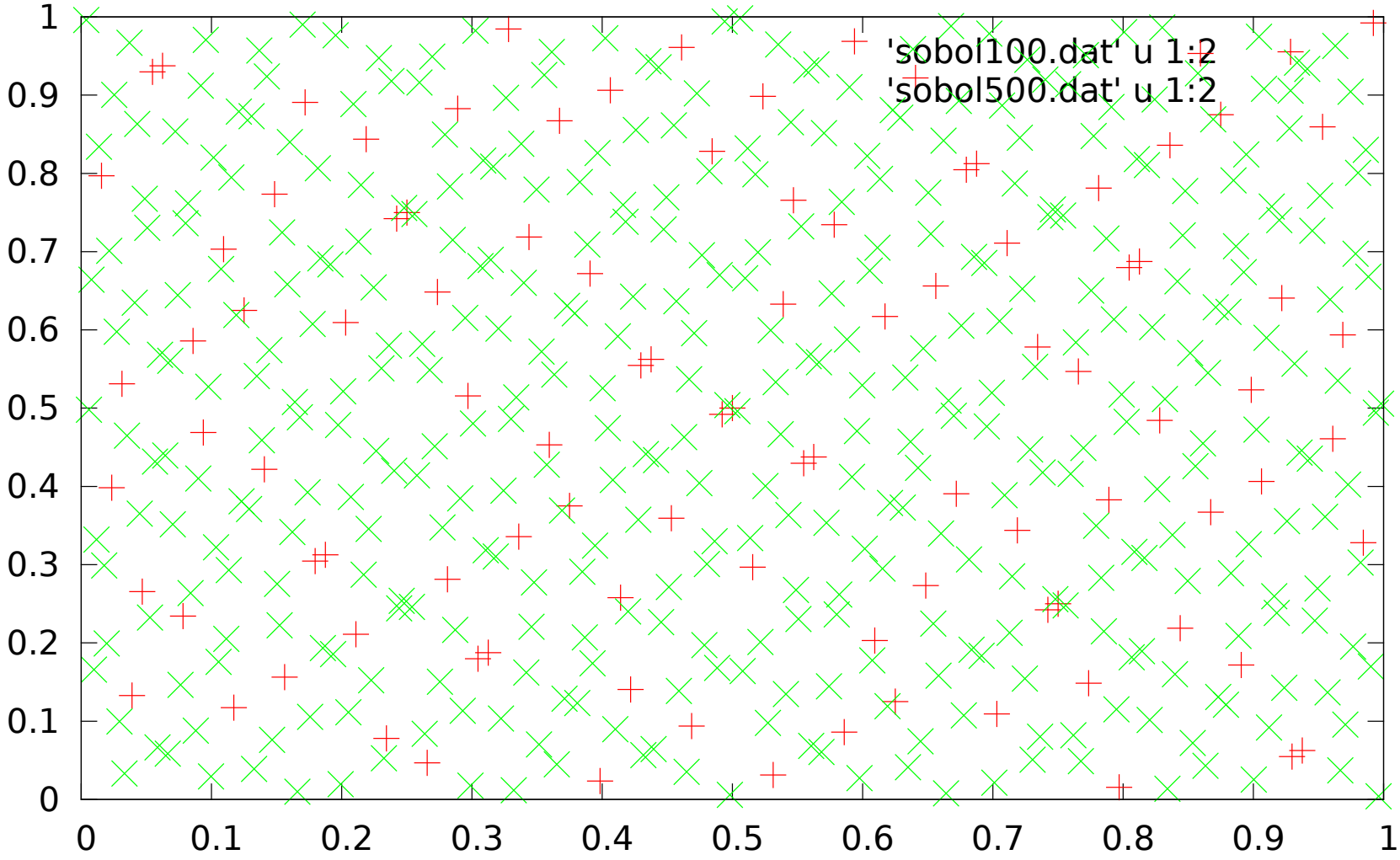
```c
#include <stdio.h>
#include <gsl/gsl_qrng.h>

int main (void) {
    int i;
    gsl_qrng * q = gsl_qrng_alloc (gsl_qrng_sobol, 2);

    for (i = 0; i < 1024; i++) {
        double v[2];
        gsl_qrng_get (q, v);
        printf ("%.5f %.5f\n", v[0], v[1]);
    }

    gsl_qrng_free (q);
    return 0;
}
```

Exercice : écrire une classe `sobol` en C++ qui encapsule ces fontions de la GSL

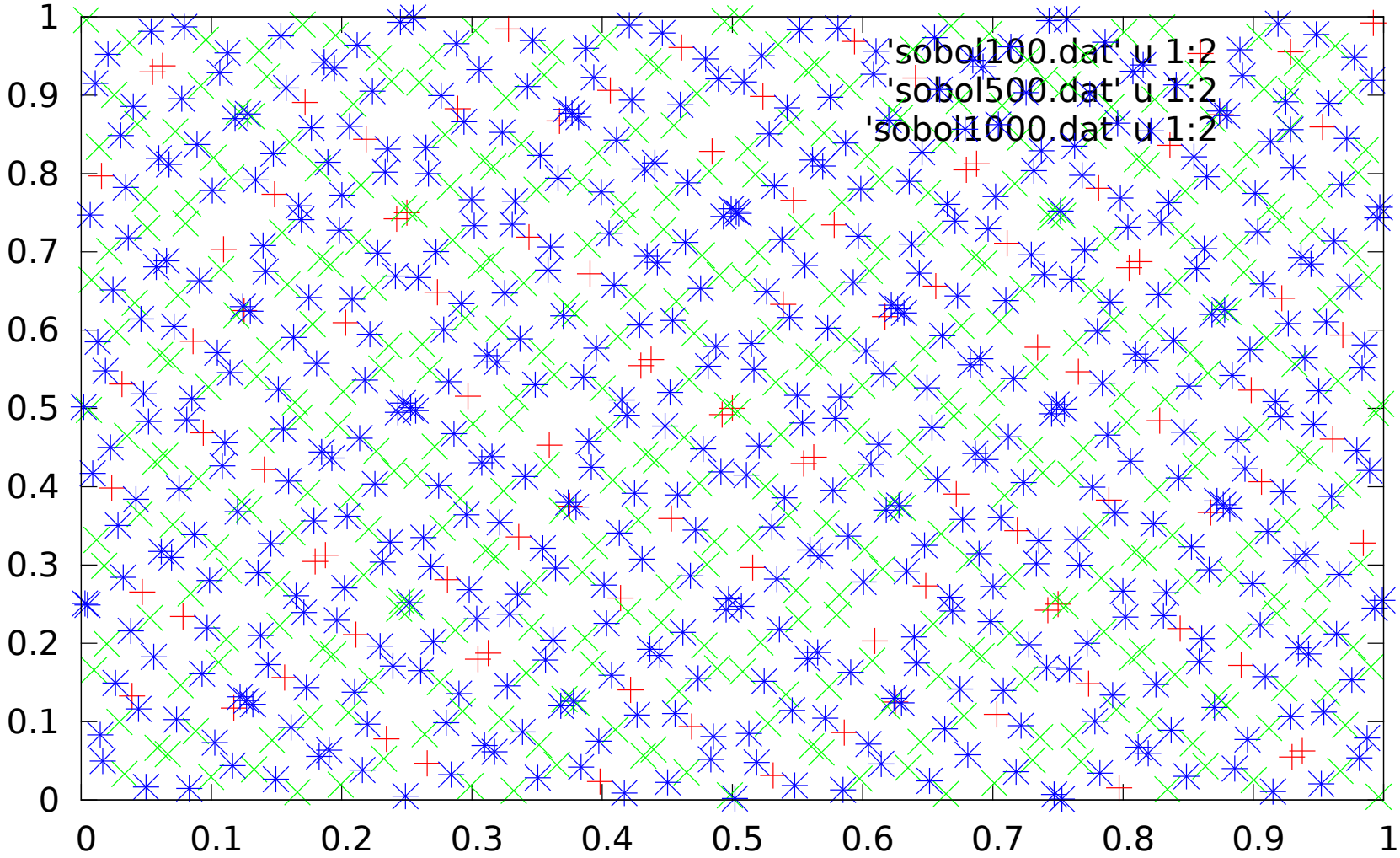
Sobol, dimensions 1-2



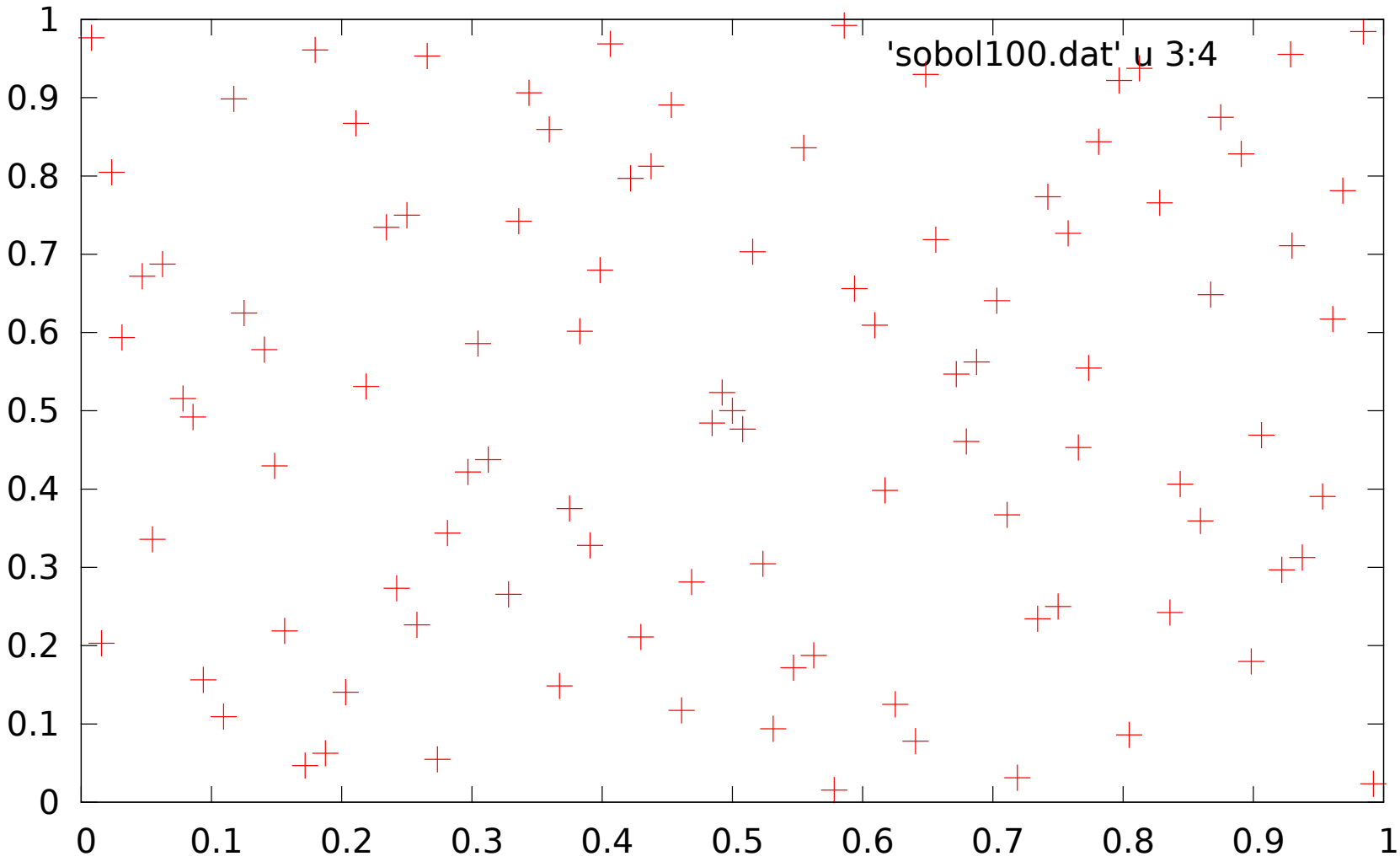
Sobol, dimensions 1-2



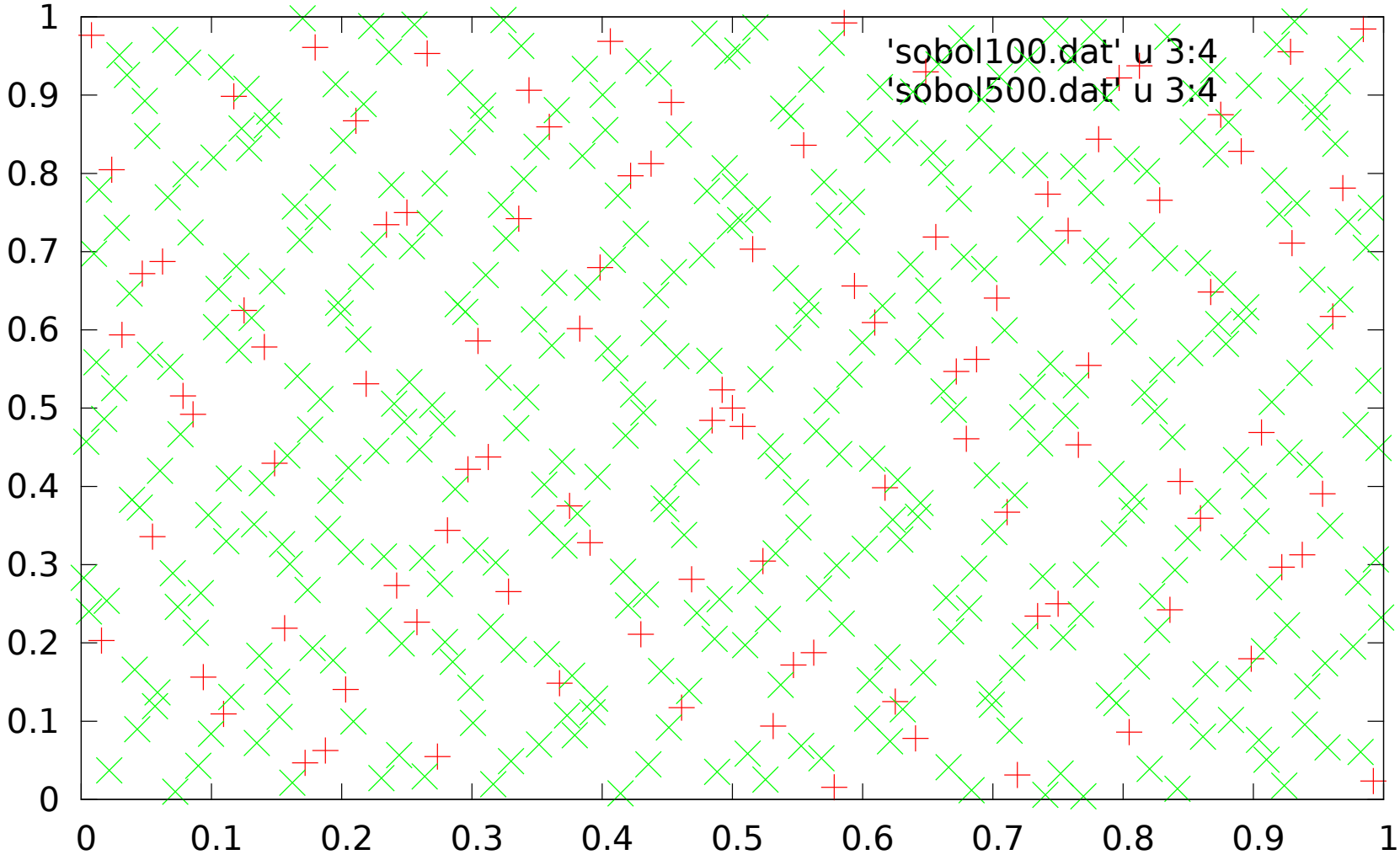
Sobol, dimensions 1-2



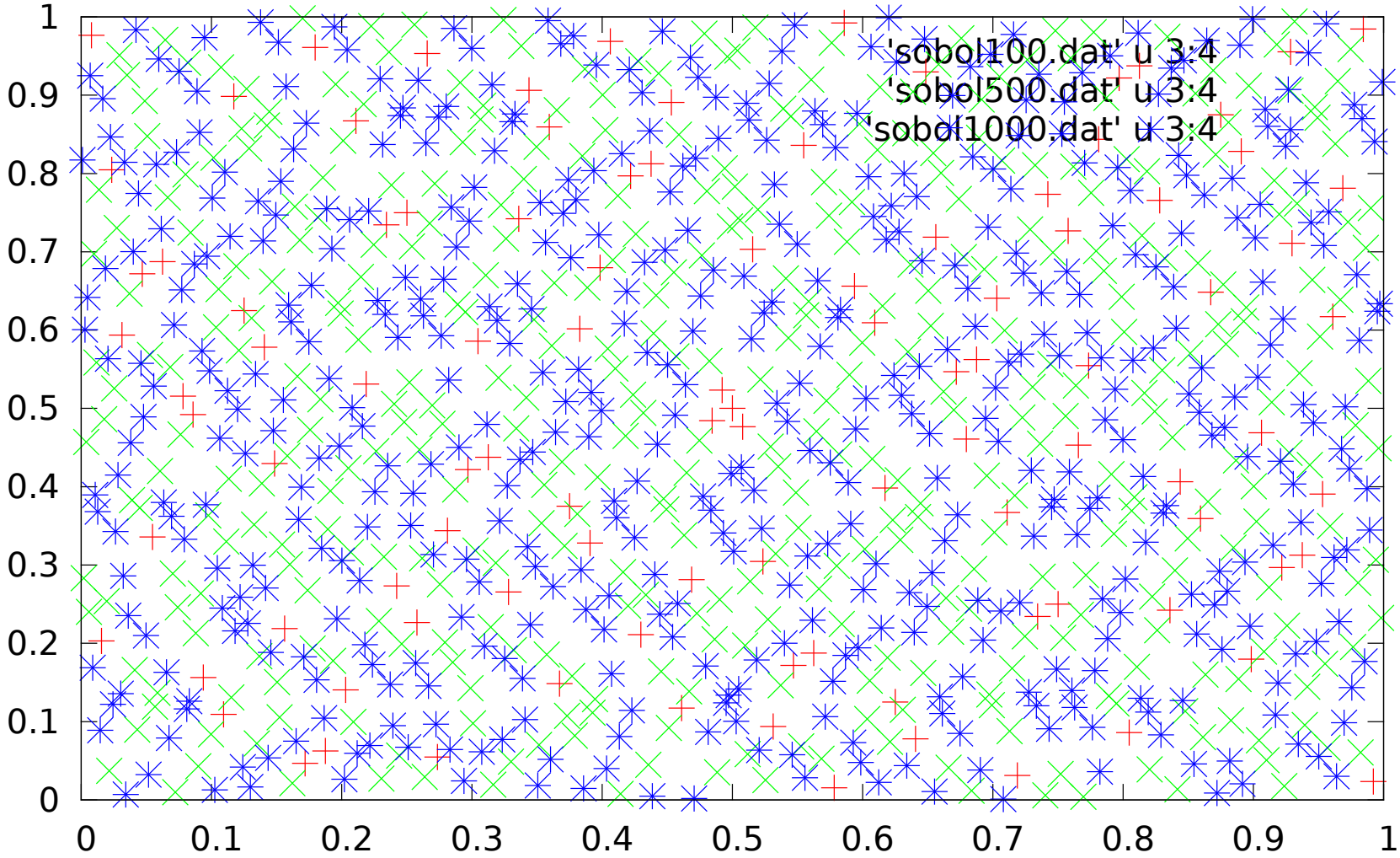
Sobol, dimensions 5-6



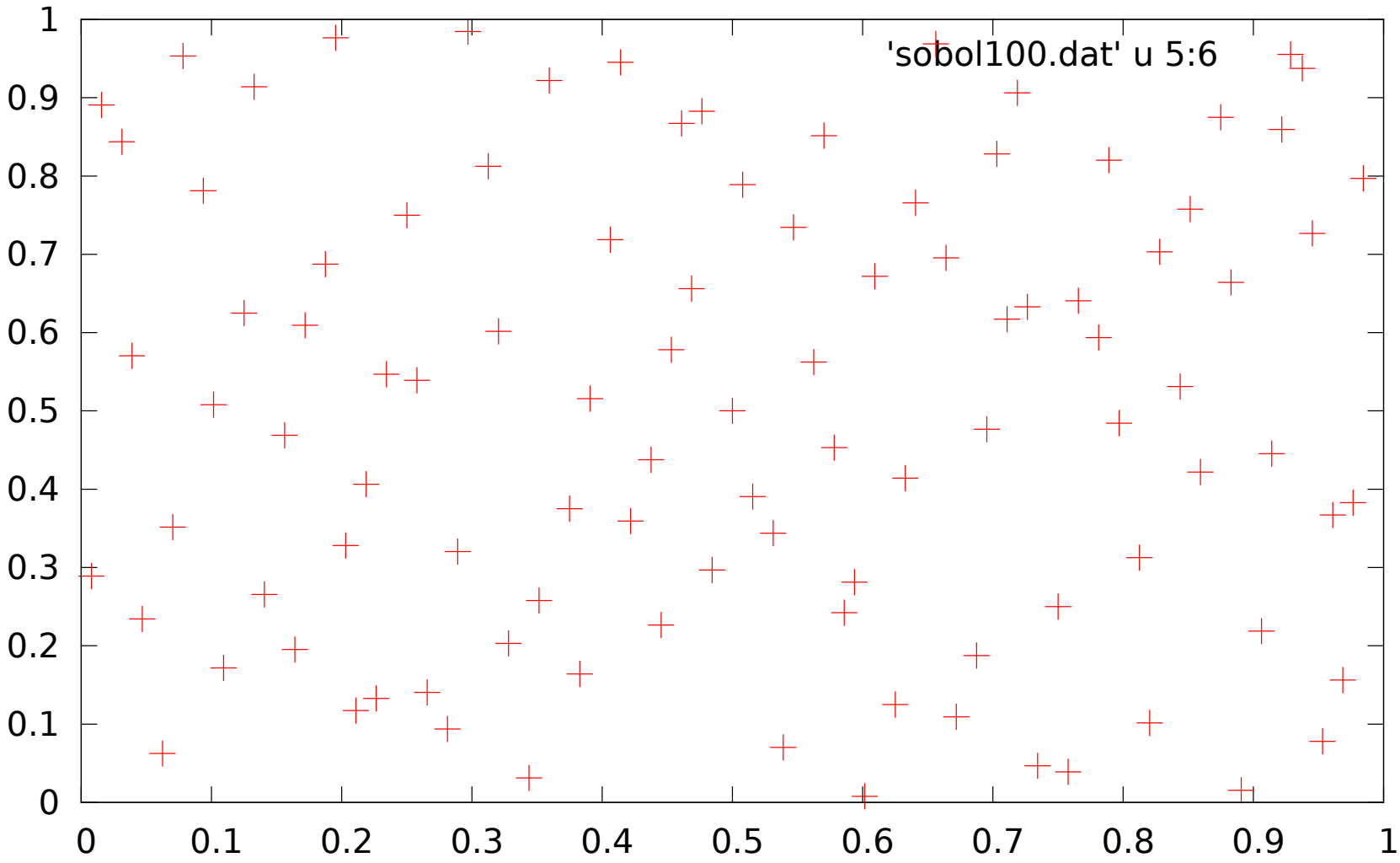
Sobol, dimensions 5-6



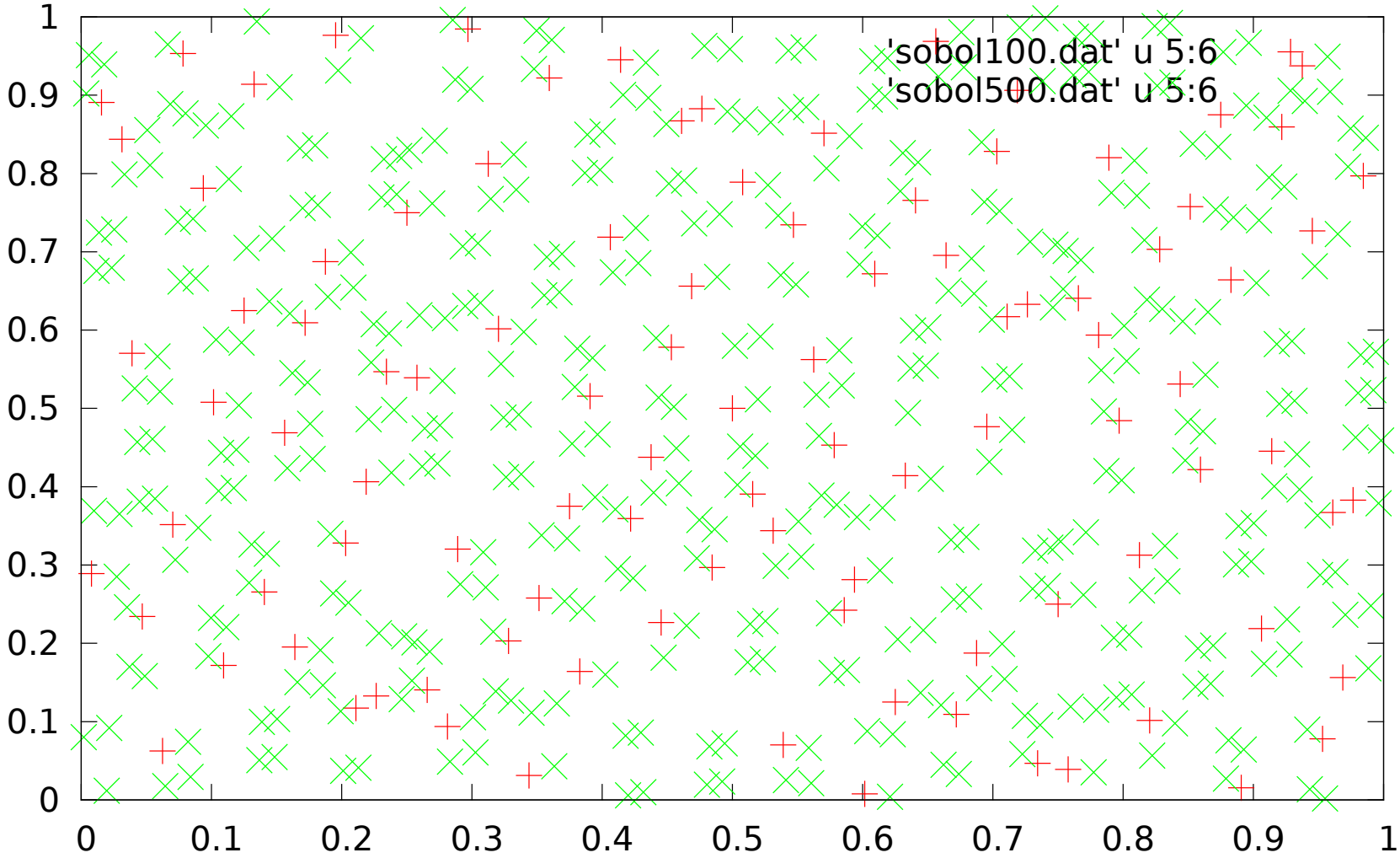
Sobol, dimensions 5-6



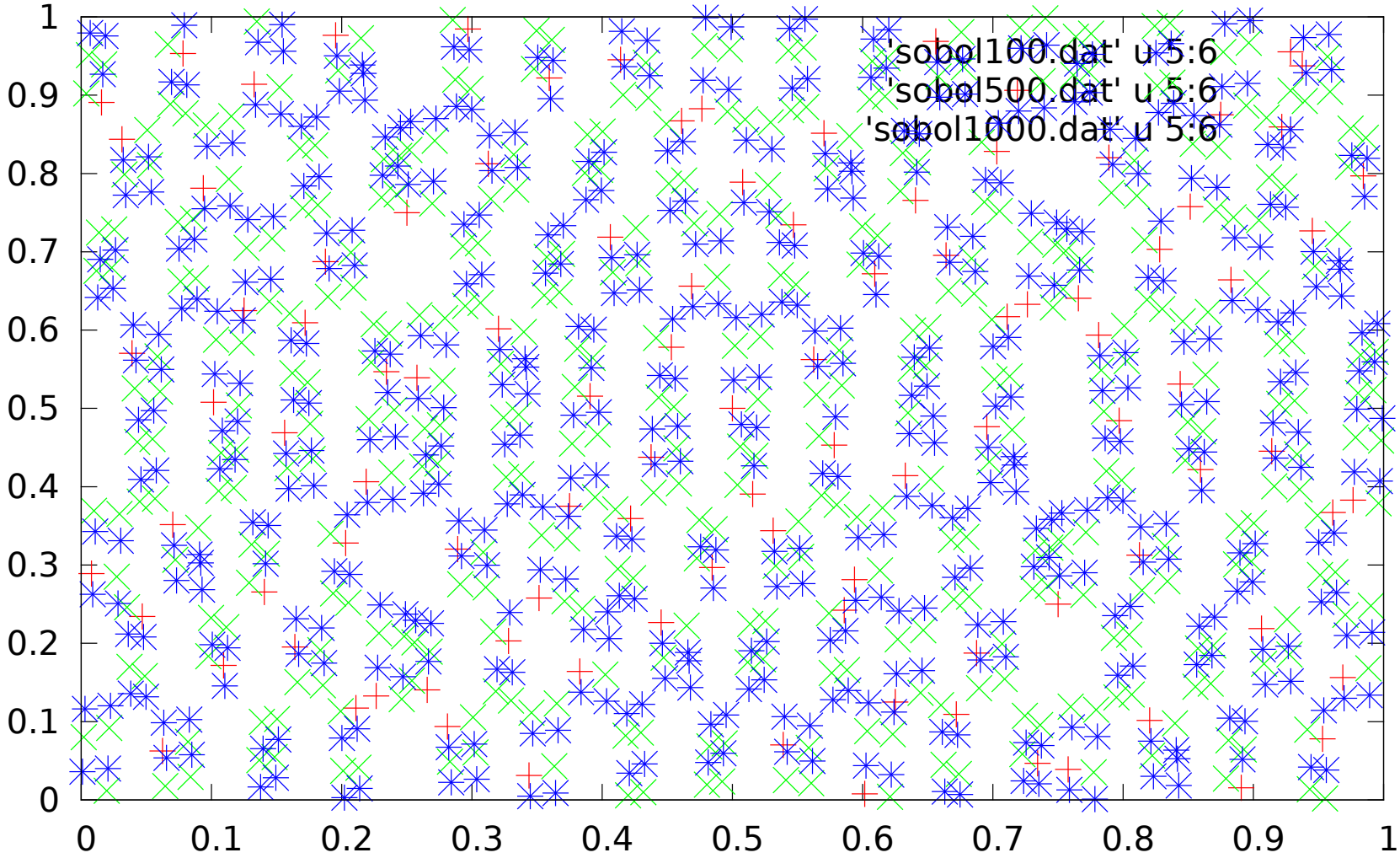
Sobol, dimensions 18-19



Sobol, dimensions 18-19



Sobol, dimensions 18-19



En live...

Référence sur *rvalue*

- *lvalue* : expression qui a un nom, une adresse, c'est donc une variable qui peut se positionner à gauche du signe d'affectation *left value* Référence sur une `lvalue` : symbole &
- *rvalue* : expression anonyme, qui n'est pas une *lvalue* Référence sur une `rvalue` : symbole &

Exemples :

```
int && r = 4;
```

```
struct X {
    // définition d'une classe
};
X && r = X();
```

L'intérêt de ces références sur *rvalue* est principalement la mise en place de

- Constructeur de déplacement (move constructor et move operator)
- Transfert parfait (perfect forwarding) d'arguments

Constructeur de déplacement

Au tableau, classe `vecteur`

Fonction std::move

```
template< class T >
typename std::remove_reference<T>::type&& move( T&& t );
```

La fonction générique `std::move` renvoie une *rvalue* référence sur son argument (conversion vers une *rvalue* reference).
Attention : on dit explicitement que l'objet passé en argument ne sera plus jamais utilisé : son contenu est détruit (exemple au tableau avec `std::string`).

Exemple d'utilisation :

```
template<class T>
void swap(T & a, T & b) {
    T tmp = std::move(a);
    a = std::move(b);
    b = std::move(tmp);
}
```

Le code précédent fonctionne si la classe T possède un opérateur d'affectation de déplacement...

Fonction std::forward

```
template< class T >
T&& forward( typename std::remove_reference<T>::type& t );
template< class T >
T&& forward( typename std::remove_reference<T>::type&& t );
```

La fonction générique `std::forward` produit une référence sur *rvalue* uniquement si l'argument est de type `rvalue`.

Si l'argument est une variable, celle-ci n'est pas modifiée par l'appel de `std::forward` contrairement à `std::move`.

Exemple pour distinguer `std::move` et `std::forward`

```
#include <iostream>

void overloaded(int const & arg) { std::cout << "by lvalue\n"; }
void overloaded(int && arg) { std::cout << "by rvalue\n"; }

template<typename T>
void forwarding(T && arg) {
    std::cout << "via std::forward: ";
    overloaded( std::forward<T>(arg) );
    std::cout << "via std::move: ";
    overloaded( std::move(arg) );
    std::cout << "by simple passing: ";
    overloaded( arg );
    std::cout << std::endl;
}

int main() {
    std::cout << "initial caller passes rvalue:\n";
    forwarding( 5 );
    std::cout << "initial caller passes lvalue:\n";
    int x = 5;
    forwarding( x );
    return 0;
}
```

Exercice : écrire le constructeur et l'opérateur `move` pour la classe `sobol`