

Mini-projet d'analyse numérique du cours MAP 431

Champ magnétique induit par un aimant

sujet proposé par F. Alouges

alouges@cmapx.polytechnique.fr

Le but de ce mini-projet est de calculer numériquement le champ magnétique généré par un aimant permanent. On considère un domaine borné et régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, représentant l'aimant. Ce dernier est le siège d'une aimantation spontanée:

$$m : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

et cette distribution d'aimantation au sein du matériau produit le champ magnétique $H_d(m) = \nabla \phi_d(m)$ où le potentiel $\phi_d(m)$ est donné par le système d'équations suivant:

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta \phi_d(m) = \operatorname{div}(m) \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta \phi_d(m) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\ \left[\frac{\partial \phi_d(m)}{\partial n} \right] = m \cdot n \text{ sur } \partial\Omega, \\ [\phi_d(m)] = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \phi_d(m)(x) \rightarrow 0 \text{ si } |x| \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Dans les équations précédentes n est la normale extérieure à Ω , et le crochet $[\Psi]$ dénote le saut de la quantité (discontinue) Ψ à travers la surface $\partial\Omega$ entre la valeur extérieure et intérieure

$$[\Psi] = \Psi_{ext} - \Psi_{int}.$$

1. RÉOLUTION THÉORIQUE DU PROBLÈME

Nous commençons par introduire un cadre variationnel adapté à la résolution du problème (1) puis étudions sa résolution numérique par la méthode des éléments finis.

1.1 Soit $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} à support compact. Montrer que

$$(2) \quad \int_0^{+\infty} \phi(r)^2 dr \leq 4 \int_0^{+\infty} r^2 (\phi'(r))^2 dr.$$

On pourra utiliser pour cela une intégration par parties en écrivant $\phi(r)^2 = 1 \times \phi(r)^2$.

1.2 Montrer que pour $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, on a

$$(3) \quad \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)^2}{1 + |x|^2} dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \phi(x)|^2 dx.$$

On pourra passer en coordonnées sphériques et utiliser l'estimation de la question précédente.

1.3 On pose

$$(4) \quad W = \left\{ \phi \text{ tel que } \frac{\phi}{\sqrt{1+|x|^2}} \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } \nabla \phi \in L^2(\mathbb{R}^3) \right\}$$

muni du produit scalaire

$$(5) \quad (\phi, \psi)_W = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)\psi(x)}{1+|x|^2} dx + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi(x) \cdot \nabla \psi(x) dx.$$

Montrer que W est un espace de Hilbert. Montrer que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ est dense dans W .

1.4 En utilisant les questions précédentes montrer que W muni du produit scalaire

$$(6) \quad (\phi, \psi)_{\dot{H}^1} = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi(x) \cdot \nabla \psi(x) dx$$

est aussi un espace de Hilbert. On montrera que les normes sous-jacentes $\|\cdot\|_W$ et $\|\cdot\|_{\dot{H}^1}$ sont équivalentes.

1.5 Montrer que $W \neq H^1(\mathbb{R}^3)$.

1.6 Montrer que la formulation variationnelle du problème (1) est

$$\text{Trouver } \phi \in W, \text{ tel que } \forall \psi \in W, \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi \cdot \nabla \psi = - \int_{\Omega} m \cdot \nabla \psi.$$

On supposera que la dernière condition de (1) est automatiquement vérifiée pour les fonctions de W . En déduire que si $m \in L^2(\Omega)$, le problème précédent a une unique solution dans $(W, \|\cdot\|_{\dot{H}^1})$.

2. TRONCATURE SPATIALE

On supposera donc dorénavant que $m \in L^2(\Omega)$. Afin de rendre le problème de taille finie, susceptible d'être discrétisé, on approche le problème posé sur \mathbb{R}^3 tout entier par un problème posé sur une boîte B englobant Ω suffisamment grande (voir Fig. 1). On rajoute alors la condition au bord de la boîte

$$(7) \quad \frac{\partial \phi_d(m)}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial B$$

où n est la normale extérieure à ∂B . On cherche donc à résoudre

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\Delta \phi_d(m) = \text{div}(m) \text{ dans } \Omega, \\ -\Delta \phi_d(m) = 0 \text{ dans } B \setminus \Omega, \\ \left[\frac{\partial \phi_d(m)}{\partial n} \right] = m \cdot n \text{ sur } \partial \Omega, \\ [\phi_d(m)] = 0 \text{ sur } \partial \Omega, \\ \frac{\partial \phi_d(m)}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial B. \end{array} \right.$$

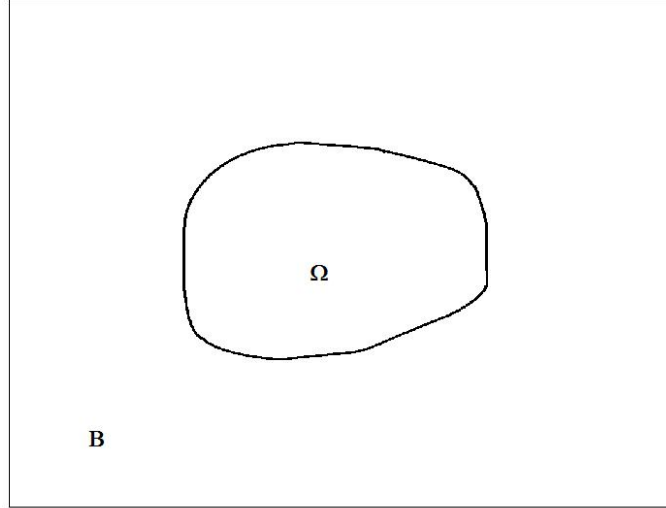


FIGURE 1. Le problème posé dans une boîte englobante

2.1 On pose $H = \{\psi \in H^1(B), \int_B \psi dx = 0\}$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \psi \in H, \quad \int_B \psi^2 dx \leq C \int_B |\nabla \psi|^2 dx$$

(on pourra raisonner par l'absurde). Que peut-on dire de H muni de $\|\cdot\|$ où

$$\|\psi\| = \left(\int_B |\nabla \psi|^2 dx \right)^{1/2} ?$$

2.2 Montrer que la formulation variationnelle du problème (8) est

$$(9) \quad \text{Trouver } \phi \in H, \text{ tel que } \forall \psi \in H, \int_B \nabla \phi \cdot \nabla \psi = - \int_{\Omega} m \cdot \nabla \psi.$$

Montrer que cette formulation variationnelle possède une unique solution.

2.3 On considère un maillage de B par des triangles de telle sorte que ce maillage respecte la frontière de Ω (supposée polyédrique), et une approximation du problème par des éléments finis \mathbb{P}_1 . On note V_h l'espace des fonctions de $H^1(B)$, linéaires sur chaque triangle du maillage, et continues sur B . Ecrire la formulation variationnelle discrète associée au problème continu de la question **2.2**. Montrer que celle-ci admet une unique solution; en déduire que la formulation variationnelle

$$(10) \quad \text{Trouver } \varphi_h \in V_h, \text{ tel que } \forall \psi_h \in V_h, \quad \int_B \nabla \varphi_h \cdot \nabla \psi_h = - \int_{\Omega} m \cdot \nabla \psi_h$$

admet une infinité de solutions que l'on décrira.

2.4 On suppose que Ω est un ouvert polyédrique, et que la solution exacte de (2) a la régularité H^2 sur Ω et $B \setminus \Omega$ (ϕ n'est en général pas H^2 sur B tout entier car sa

dérivée normale peut avoir un saut sur $\partial\Omega$). Donner une estimation théorique de l'erreur $\|\phi - \varphi_h\|$ où φ_h est une solution de (10), en fonction de $|\phi|_{H^2(\Omega) \cap H^2(B \setminus \Omega)}$.

3. APPROXIMATION NUMÉRIQUE

3.1 On se place dans cette question en dimension 1 d'espace. Le "vecteur" m n'a alors qu'une seule composante. On prendra $B =]-2, 2[$, $\Omega =]-1, 1[$ et $m = 1$ sur $\bar{\Omega}$, (évidemment $m = 0$ sur $B \setminus \Omega$). Ecrire un programme en Scilab permettant de calculer la solution approchée du problème correspondant à (8) à l'aide d'éléments finis \mathbb{P}_1 , en dimension un. On tracera sur un même graphique cette solution approchée, et la solution exacte que l'on calculera explicitement.

3.2 On se place maintenant en dimension 2 d'espace. Calculer, à l'aide de FreeFem++, la solution approchée en dimension deux, toujours à l'aide d'éléments finis \mathbb{P}_1 , dans le cas suivant :

$$(11) \quad \begin{aligned} B &=]-2, 2[\times]-2, 2[\\ \Omega &= \{ (x_1, x_2), x_1^2 + x_2^2 < 1/4 \} \end{aligned}$$

et

$$(12) \quad m(x) = \begin{cases} (0, 1)^t & \text{pour } x \in \Omega, \\ (0, 0)^t & \text{pour } x \in B \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

On visualisera la solution ϕ ainsi que le champ démagnétisant $\nabla\phi$. Commenter la solution obtenue par rapport au cas unidimensionnel.

3.3 Reprendre la question **3.2** en faisant varier le domaine Ω . On prendra tout d'abord une ellipse puis un rectangle. Observer que dans le cas d'une ellipse, $\nabla\phi$ paraît constant dans Ω et que ce n'est pas le cas pour un rectangle.

3.4 Un calcul en dimension 3. On cherche à approcher le véritable problème en dimension 3. On appelle (x, y, z) les coordonnées. Pour se ramener à un problème bidimensionnel (calculable dans FREEFEM++) on envisage une situation axisymétrique. On suppose que Ω est un ellipsoïde (on décrit ci-dessous le cas d'une sphère) vertical centré en $(0, 0, 0)$, que $m = (0, 0, 1)^t$ et que la boîte B est un cylindre vertical centré en $(0, 0, 0)$ suffisamment grand. Montrer (par symétrie) que la solution ϕ du problème ne dépend que des variables (r, z) (où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$). Ecrire la formulation variationnelle axisymétrique du problème et la résoudre à l'aide de FREEFEM++. On prendra pour la boîte et pour le domaine (une sphère de rayon $1/2$)

$$(13) \quad B = \{(r, z) \in [0, 2[\times]-2, 2[\}, \Omega = \{(r, z) \text{ tel que } r^2 + z^2 < \frac{1}{4}\}.$$

Vérifier que pour des ellipsoïdes verticaux $\nabla\phi$ est toujours constant dans Ω . Comparer avec le cas où Ω est un cylindre.