EJEMPLO. Resolver $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx$

Se sabe que: $\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx = \lim_{n\to-\infty} \int_{n}^{0} xe^{x}dx$

Integrando por partes con $u = x, dv = e^{x}dx$, de manera que $du = dx$, $v = e^{x}$

$$\int_{n}^{0} xe^{x}dx = xe^{x}]_{n}^{0} - \int_{n}^{0} e^{x}dx$$

$$= [xe^{x} - e^{x}]_{n}^{0}$$

$$= -e^{0} - [ne^{n} - e^{n}]$$

$$= -1 - ne^{n} + e^{n}$$

Después de integrar, se evalúa el límite:

$$\lim_{n\to-\infty} -1 - ne^{n} + e^{n}$$

Después de integrar, se evalúa el límite:

$$\lim_{n\to-\infty} -1 - ne^n + e^n$$

$e^n \to 0$ cuando $n \to -\infty$, luego,

$$\lim_{n\to-\infty} -1 - ne^n + e^n = -1 - \lim_{n\to-\infty} ne^n + 0$$

$$= -1 - \lim_{n\to-\infty} ne^n$$

Pero,

$$\lim_{n\to-\infty} ne^n = \lim_{n\to-\infty} \frac{n}{e^{-n}}$$

Como tenemos una forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, podemos aplicar L'Hôpital, obteniendo:

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{n}{e^{-n}} = \lim_{n\to-\infty} \frac{1}{-e^{-n}} = \lim_{n\to-\infty} -e^n = 0$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to-\infty} -1 - ne^n + e^n = -1 - 0$$

Luego la integral converge a -1

EJEMPLO. Resolver $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

Se sabe que: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{x^2}\,dx$

$= \lim_{t\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^t$ Se resuelve la integral definida.

$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{t} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right]$ Posteriormente se evalúa el límite.

$= 0 + 1$

$= 1$ La integral converge a 1.

EJEMPLO. Resolver $\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx$

El integrando $\frac{1}{1-x}$ es discontinuo en $x = 1$, y se vuelve infinito cuando $x \to 1^-$.

Sabemos entonces que:

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x}\,dx$$

Resolviendo la integral:

$$\lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{b\to 1^-} [-ln|1-x|]_0^b$$

$$= \lim_{b\to 1^-} (-ln|1-b| - [-ln|1-0|])$$

$$= \lim_{b\to 1^-} (-ln|1-b| + 0)$$

$$= \lim_{b\to 1^-} (-ln|0|)$$

$$= \infty$$

La integral diverge.

EJEMPLO 5 Asíntota vertical en un punto interior

Evaluar

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}.$$

Solución El integrando tiene una asíntota v Untitled Image es continua en [0, 1) y (1, 3] (figura 8.23). Por lo tanto, de acuerdo con la parte 3 de la definición anterior,

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} + \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}.$$

Ahora evaluamos cada integral impropia del lado derecho de esta ecuación.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{b\to 1^-} 3(x-1)^{1/3}\Big]_0^b$$

$$= \lim_{b\to 1^-} [3(b-1)^{1/3} + 3] = 3$$

Conclu

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = \lim_{c\to 1^+} \int_c^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}}$$

$$= \lim_{c\to 1^+} 3(x-1)^{1/3}\Big]_c^3$$

$$= \lim_{c\to 1^+} \left[3(3-1)^{1/3} - 3(c-1)^{1/3}\right] = 3\sqrt[3]{2}$$

Concluimos que

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{2/3}} = 3 + 3\sqrt[3]{2}.$$

TEOREMA 2 Criterio de comparación del límite

Si las funciones positivas f y g son continua en $[a, \infty)$ y si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L, \qquad 0 < L < \infty,$$

entonces tanto

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \text{como} \qquad \int_a^\infty g(x)\,dx$$

convergen, o bien, ambas divergen.

EJEMPLO. Resolver $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

Se sabe que: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

(0 es un número arbitrario, se pudo haber elegido otro número)

- Para la primera integral: $\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx$

La integral de la función $\frac{1}{1+x^2}$ es arcotangente, por lo que:

$$\int_{t}^{0} \frac{1}{1+x^2} dx = [\tan^{-1} x]_t^0 = \tan^{-1} 0 - \tan^{-1} t$$

Al evaluar el límite:

$$\lim_{t \to -\infty} (\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} t) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

- Para la segunda integral: $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \to \infty} \int_0^{t} \frac{1}{1+x^2} dx$

$$= \left[tan^{-1}x\right]_0^t = tan^{-1}t - tan^{-1}0$$

Al evaluar el límite:

$$\lim_{t \to \infty} \left(tan^{-1}t - tan^{-1}0\right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$