

Cálculo Integral: RepasoII

Jonatan Ahumada Fernández

<2019-02-23 Sat>

Contents

1	Sustitución	2
1.1	Sustitución simple	2
1.2	Sustitución por partes	2
2	Trigonometría	2
2.1	Integrales fundamentales	2
2.2	Identidad fundamental (potencias impares)	3
2.3	Ángulo Medio (potencias pares)	3
2.3.1	Variación	3
2.4	Eliminación de raíces	3
2.4.1	Con ángulo medio	3
2.4.2	Con variación	3
2.5	Integrales capciosas	3
2.6	Sustitución trigonométrica	4
2.7	Tablas trigonométricas	4
2.8	Fracciones Parciales	4
2.8.1	Siempre simplifica el denominador	5
2.9	Teorema Fundamental	5
2.10	Promedio	5
3	Volúmenes	5
3.1	Aplicaciones	5
4	Tablas	5
5	Polinomios	6
6	Gotchas	6

1 Sustitución

1.1 Sustitución simple

1. Identifica si u y du aparecen en la misma expresión (salvo una diferencia de constantes).
2. Sustituye lo más complejo. Después integrar y derivar sus exponentes será más fácil.
3. Identifica qué identidad trigonométrica usarás.

1.2 Sustitución por partes

1. Se usa cuando las funciones implicadas no tienen relación en términos de sus derivadas (no hay u y du)
2. Ten claro el acrónimo ALPES antes de seleccionar u y dv .
3. Como aquí toca derivar, no olvides regla de la cadena.
4. Aquí se tienen en cuenta las potencias al reemplazar.

```
+-----+
|               |
|      derivar  |
|  u  -----> du  |
|      integrar |
|  dv ----->  v  |
|               |
| \int [u*dv]dx=u*v-\int du*v |
+-----+
```

2 Trigonometría

2.1 Integrales fundamentales

$$\int \cos(mx)dx = \frac{1}{m} \sin(mx)$$
$$\int \sin(mx)dx = -\frac{1}{m} \cos(mx)$$

2.2 Identidad fundamental (potencias impares)

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

Consistirá en expresar una expresión trigonométrica impar en términos de una par. Luego, se reemplazará una función trigonométrica al cuadrado por su identidad.

Luego, de sustituir, u y du , se resolverá un binomio cuadrado.

2.3 Ángulo Medio (potencias pares)

Tener cuidado con los signos.

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

El coeficiente de x se duplica.

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

2.3.1 Variación

$$2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$$

Es lo mismo, solamente pasa el dos al otro lado. Como es el proceso inverso, el coeficiente de x se divide y crece la potencia.

2.4 Eliminación de raíces

2.4.1 Con ángulo medio

$$\int \sqrt{\frac{1 - \cos(2x)}{2}} dx = \int \sqrt{\sin^2(x)} dx$$

2.4.2 Con variación

$$\int \sqrt{1 - \cos(2x)} dx = \int \sqrt{2\cos^2(x)} dx$$

2.5 Integrales capciosas

Integral	Expresión
$\int \ln(x) dx$	$\frac{1}{x}$
$\int e^{cx} dx$	$\frac{e^{cx}}{c}$
$\int \tan(x) dx$	$\sec^2(x)$
$\int \sec(x) dx$	$\sec(x)\tan(x)$

2.6 Sustitución trigonométrica

Caso	Expresión
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$	$x = a \sin \theta$
$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$	$x = a \tan \theta$
$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$	$x = a \sec \theta$

Identidades específicas

$\sin(2\theta)$	$2 \sin \theta \cos \theta$
$\cos(2\theta)$	$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

```

+
sqrt(a^2+x^2)    ++
+++
++++
      +++++
      ++++++ sqrt(x^2-a^2)
      ++++++
      ++++++
      ++++++
      ++++++
      ++++++
      sqrt(a^2-x^2)

```

2.7 Tablas trigonométricas

θ	radianes	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	—

2.8 Fracciones Parciales

Caso	Fórmula
lineal irrepetible	$\frac{A}{(ax+b)}$
lineal repetible	$\frac{A_n}{(ax+b)^n}$
cuadrática irrepetible	$\frac{Ax+B}{(ax+b)}$
cuadrática repetible	$\frac{Ax+B}{(ax+b)^n}$

2.8.1 Siempre simplifica el denominador

2.9 Teorema Fundamental

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

2.10 Promedio

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

3 Volúmenes

Caso	Fórmula
S. trans.	$\int_a^b Base \times Altura dx$
Cilindros	$\int_a^b \pi R^2 dx$
Arandelas	$\int_a^b \pi(R^2 - r^2)dx$
C. cilíndr.	$\int_a^b 2\pi x f(x)dx$

3.1 Aplicaciones

L. arco	$\int_a^b \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx$
A. s. rev.	$\int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx$
Resortes	$W = \int_a^b F(x)dx, F(x) = kx$
Momento(M_0)	$\int_a^b x\delta(x)dx$
Masa (M)	$\int_a^b \delta(x)dx$
C. masa	$\frac{M_0}{M}$

4 Tablas

Derivadas	
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$

Integrales	
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\tan x$	$-\ln(\cos x) + c$
$\cot x$	$\ln(\sin x) + c$
$\sec x$	$\ln(\sec x + \tan x) + c$
$\csc x$	$\ln(\csc x - \cot x) + c$

Casos notables	
$\int \tan^2 \theta d\theta$	$\int \sec^2 \theta - 1 d\theta$

5 Polinomios

Si $f(x)$ y $p(x)$ son polinomios:

$$f(x) = p(x) * q(x) + r$$

6 Gotchas

- la sustitución simple resuelve problemas
- desde encima de las x a debajo de las x pasan cosas
- los signos
- La integral es también una resta